Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claudine Ruget

Cônes convexes et théorie spectrale

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 2 (1966-1967), exp. nº 11, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
6e année, 1966/67, n° 11

9 février 1967

CÔNES CONVEXES ET THÉORIE SPECTRALE

par Claudine RUGET

(d'après Helmut SCHAEFER, [2] et [3])

Helmut SCHAEFER s'est proposé d'unifier des études classiques, telles celle sur le comportement spectral des matrices positives (en dimension finie) ou celle des opérateurs hermitiens positifs dans un espace de Hilbert. Ces études, en effet, relient la théorie spectrale à l'examen des espaces vectoriels topologiques ordonnés.

Dans une première partie, nous donnerons quelques définitions et théorèmes relatifs aux espaces vectoriels topologiques ordonnés ; en particulier, nous introduirons les notions de cône normal, et d'algèbre localement convexe ordonnée.

Une seconde partie sera consacrée à la généralisation de résultats antérieurs sur les propriétés spectrales des éléments positifs dans les espaces vectoriels localement convexes ordonnés.

Dans la dernière partie, nous donnerons une caractérisation des éléments spectraux et des sous-algèbres spectrales d'une algèbre localement convexe, qui ne fera intervenir que la notion d'ordre.

I. Espaces vectoriels topologiques ordonnés.

On considère un espace vectoriel topologique E ordonné par la donnée d'un cône convexe K de sommet 0, propre $(K \cap - K = \{0\})$ et fermé (par la suite, le mot <u>cône</u> signifiera <u>cône convexe</u>).

DÉFINITION 1. - Un cône K est dit <u>normal</u>, s'il existe une base $\{U_i\}$ de voisinages de zéro telle que, pour chaque U_i, si U_i contient un point $x \geqslant 0$, il contient aussi tous les points y, avec $0 \leqslant y \leqslant x$.

DÉFINITION 2. - Nous appellerons K-saturé d'un ensemble $F \subset E$, l'ensemble $(F + K) \cap (F - K)$. Le K-saturé d'un filtre f sera le filtre des K-saturés des ensembles de f.

PROPOSITION 3. - K <u>est normal si, et seulement si, le</u> K-<u>saturé de tout filtre convergeant vers zéro converge lui-même vers zéro</u>.

Démonstration. - Soit U un voisinage de zéro. Il existe V tel que $V + V \subset U$. Soient alors $\mathcal{V}$ un élément de la base tel que $\mathcal{V} \subset V$, et W tel que $W + W \subset \mathcal{V}$.

On aura

$$\bigcup_F (x + K) \cap (y - K) = \bigcup_F x + (K \cap y - x - K) \subset U \quad ,$$

dès que $F \subset W$. La condition est donc nécessaire. La réciproque est immédiate.

PROPOSITION 4. - Si E est localement convexe séparé, K est normal si et seulement s'il existe un système (p_α) de semi-normes définissant la topologie de E, qui soient monotones sur K, c'est-à-dire que, quels que soient x, y dans K,

$$p_\alpha(x + y) \geqslant p_\alpha(x) \; , \qquad \text{pour tout } \alpha \; .$$

La proposition est la traduction de la définition 1.

On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Si $\{z_i\}$ est un ensemble borné de K, et si K est normal, alors l'ensemble

$$M = \bigcup \{z \; , \; 0 \leqslant z \leqslant z_i\}$$

est borné.

(Immédiat par l'absurde.)

Remarquons que, dans un espace séparé, tout cône normal est propre.

DÉFINITION 6. - Soit $\mathfrak{S}$ une famille d'ensembles bornés de E qui recouvre E. Si E est localement convexe, on la suppose saturée (c'est-à-dire : contient tous les sous-ensembles et les multiples de chaque élément, et l'enveloppe convexe cerclée de toute réunion finie).

Un cône K est dit $\mathfrak{S}$-cône, si $\{\overline{K \cap S - K \cap S}\}$, où $S \in \mathfrak{S}$, est une famille fondamentale pour $\mathfrak{S}$ [$\forall S$, $\exists S' \in \mathfrak{S}$ tel que $S \subset \overline{K \cap S' - K \cap S'}$].

Il est dit $\mathfrak{S}$-cône strict, si $\{K \cap S - K \cap S\}$ est fondamentale pour $\mathfrak{S}$.

DÉFINITION 7. - Soit (E , F) un système d'espaces vectoriels topologiques en dualité, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le cône dual de K est le cône $K' = \{y \in F \mid \forall x \in K , \; \mathrm{Re}\langle x , y \rangle > 0\}$.

THÉORÈME 8. - Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques en dualité, $\mathfrak{S}$ une famille de sous-ensembles de F faiblement bornés tels que la $\mathfrak{S}$-topologie sur E soit compatible avec la dualité. Alors,

$$(K \text{ normal pour } \mathfrak{S}) \iff (K' \text{ est un } \mathfrak{S}\text{-cône strict dans } F) ,$$

en particulier : (K faiblement normal) $\iff$ ($K' - K' = F$).

Démonstration.

(a) [CS] : Si K' est un $\mathfrak{S}$-cône strict, les polaires dans E des $\overline{\Gamma(S_\alpha \cap K')}$ (enveloppe cerclée), $S_\alpha \in \mathfrak{S}$, constituent un système fondamental de voisinages de zéro. Les semi-normes correspondantes sont monotones sur K .

(b) [CN] : Soit (U_α) une base de voisinages de zéro de E telle que la jauge de U_α soit monotone sur K , pour tout α . Les polaires $S_\alpha = U_\alpha^0$ forment, dans F , un $\mathfrak{S}$-système fondamental.

$E|_{p_\alpha^{-1}(0)}$ est un espace normé, notons-le E_{p_α} .

$$(E_{p_\alpha})' = U(nS_\alpha) = \{\text{formes linéaires continues sur } E \text{ , bornées sur } U_\alpha\} .$$

Dans l'application de projection : $E \to E_{p_\alpha}$,

$$K \to \hat{K} \qquad \text{et} \qquad (E_{p_\alpha})' \cap K' = \hat{K}' .$$

L'ensemble $S_\alpha \cap K' - S_\alpha \cap K'$ est convexe, équilibré dans $(E_{p_\alpha})'$. Si nous admettons le résultat de KREIN-GROSBERG [1] (1) relatif aux espaces de Banach, comme $\hat{K}$, du fait du choix des p_α , est normal dans E_{p_α} , nous aurons $\hat{K} - \hat{K} = (E_{p_\alpha})'$, et $S_\alpha \cap K' - S_\alpha \cap K'$ sera un ensemble absorbant de $(E_{p_\alpha})'$; celui-ci est tonnelé, donc $S_\alpha \cap K' - S_\alpha \cap K'$ est un voisinage de zéro de $(E_{p_\alpha})'$, et par suite

$$S_\alpha \subset \lambda(S_\alpha \cap K' - S_\alpha \cap K') .$$

THÉORÈME 9. - Soient E , F deux espaces vectoriels localement convexes sur le même corps. Si K est un $\mathfrak{S}$-cône de E , et si H est un cône normal dans F , alors le cône

$$\mathcal{K} = \{T \in \mathcal{L}(E , F) , \ TK \subset H\}$$

est un cône normal dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E , F)$.

---

(1) Soit E un espace de Banach, soit K un cône normal dans E , alors $K' - K' = E'$.

Démonstration. - $\mathcal{K}$ munit $\mathcal{L}$ d'un ordre propre, puisque K est total dans E et H propre. D'autre part, le système $\{\Gamma(S \cap K)\}$ (où $S \in \mathfrak{S}$) est fondamental pour $\mathfrak{S}$, donc les semi-normes

$$T \longmapsto \sup_{x \in S \cap K} p_\alpha(Tx)$$

engendrent la topologie de $\mathcal{L}_\mathfrak{S}(E , F)$, si (p_α) définit celle de F . Si on suppose les p_α monotones sur H , les semi-normes définies plus haut seront monotones sur $\mathcal{K}$.

DÉFINITION 10. - Nous appellerons algèbre localement convexe (sur $\underset{\sim}{C}$), un espace localement convexe (sur $\underset{\sim}{C}$) muni d'une loi de produit interne séparément continue qui en fasse une algèbre. Nous supposerons, de plus, A unitaire.

Une algèbre localement convexe est dite ordonnée, si elle est munie d'un cône faiblement normal (de sommet 0, propre et fermé) qui contient l'unité, et, dès que deux de ses éléments commutent, contient leur produit.

Exemples :

$\mathcal{L}(H)$ munie de la convergence simple ou uniforme, avec pour cône celui des opérateurs hermitiens positifs,

$\mathcal{C}(X)$ où X est compact, munie de la topologie de la convergence uniforme.

DÉFINITION 11. - On définit le spectre d'un élément a d'une algèbre localement convexe ordonnée : c'est le complémentaire, dans la sphère de Riemann $\hat{\underset{\sim}{C}}$, du plus grand ouvert dans lequel la fonction $\lambda \longmapsto (\lambda e - a)^{-1}$ est localement holomorphe [sa composée avec tout élément du dual est localement holomorphe]. Cette fonction est appelée la résolvante de a .

Cette définition coïncide avec la notion habituelle de spectre, pour un élément d'une algèbre de Banach unitaire. De plus, le spectre est donc un fermé, ce qui ne serait pas toujours vrai avec la définition usuelle, dans ce cas plus général : Par exemple, si $A = \prod_{\underset{\sim}{N}} C_i$, où $C_i = \underset{\sim}{C}$, munie de la topologie produit. Soit

$$a = (\lambda_1 , \ldots , \lambda_n , \ldots) , \qquad \text{où } \lambda_i > 0 \quad \text{et} \quad \lim_n \lambda_n = 0 \quad .$$

L'ensemble des λ , tels que $(\lambda e - a)^{-1}$ n'existe pas, est l'ensemble $\{\lambda_n\}$, qui n'est pas fermé. La résolvante n'est pas holomorphe au voisinage de zéro.

II. Eléments positifs.

THÉORÈME 12 (théorème de Pringsheim généralisé). - Soient E un espace localement convexe semi-complet sur $\mathbb{C}$, et K un cône normal dans E. Soit a_n une suite d'éléments de K. Si la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence 1, la fonction analytique f représentée par la série est singulière au point 1. Si la singularité est un pôle, il est d'ordre maximum parmi les pôles de f situés sur le cercle $|z| = 1$.

(SCHAEFER affirme que, dans ce cas, f n'a pas de points singuliers essentiels sur ce cercle.)

Démonstration. - Soit E_0 l'espace réel sous-jacent à E. Soit $\varphi \in E_0'$. La série $\sum \langle a_n , \varphi\rangle > t^n$ a un rayon de convergence $r\varphi \geqslant 1$, et

$$\inf\{r\varphi \ , \ \varphi \in E_0'\} = \inf\{r\varphi \ , \ \varphi \in K'\} = 1 \quad ,$$

car, sinon, $\sum a_n t^n$ convergerait faiblement pour $-n < t < n$, $n > 1$, et d'après [2], $\sum a_n t^n$ convergerait dans E, dans ce même intervalle ; f aurait donc un prolongement holomorphe dans $|z| < n$.

Soient alors ρ, $0 < \rho < 1$, et $\varphi \in E_0'$ positive sur K,

$$\sum_0^\infty \langle a_n , \varphi\rangle \, t^n = \sum_0^\infty \langle b_n , \varphi\rangle \, (t - \rho)^n \qquad (\rho < t < 1) \quad ,$$

séries à termes positifs ; par suite le rayon de convergence de la série

$$\sum_0^\infty \langle b_n , \varphi\rangle \, (t - \rho)^n$$

est $r\varphi - \rho$, et la série $\sum_0^\infty b_n(t - \rho)^n$ a pour rayon $1 - \rho$, ce qui prouve que 1 est un point singulier de f.

Supposons qu'il s'agisse d'un pôle d'ordre k. Soit ξ un point du cercle $|z| = 1$, et soit $z = t\xi$, $0 < t < 1$. On a, pour tout $p > k$,

$$\lim_{t \to 1} f(|z|) \, |z - \xi|^p = 0 \quad .$$

Comme K est normal, ceci entraîne que

$$(1 - t)^p \sum_0^\infty a_n \, t^n \sin n\theta \qquad \text{et} \qquad (1 - t)^p \sum_0^\infty a_n \, t^n \quad \text{sur} \quad n\theta$$

tendent faiblement vers zéro, quand t tend vers 1. Donc, si ξ est un pôle d'ordre m, nécessairement $m \leq k$.

COROLLAIRE 1. - Soit A une algèbre localement convexe ordonnée semi-complète, et soit a un élément positif tel que le spectre de a (noté $\sigma(a)$) ne contienne pas ∞. Alors le nombre positif "rayon spectral de a" est un point de $\sigma(a)$, et s'il est un pôle du résolvant, c'est, sur le cercle $|z| = r(a)$, un pôle d'ordre maximum.

On pose $\lambda = \frac{1}{z}$, et on applique le théorème précédent à $f(z) = R(\lambda)$ (qui, au voisinage de l'infini, s'écrit $\sum_0^\infty a^n \lambda^{-(n+1)}$), car a^n appartient à K.

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace localement convexe ordonné dont le cône positif est normal et générateur $(K - K = E)$. Supposons de plus $\mathcal{L}(E)$ semi-complète pour la convergence simple. Alors le corollaire 1 s'applique à tous les endomorphismes continus positifs de E, tels que l'infini n'appartienne pas à $\sigma(T)$.

En effet, $\mathcal{L}_s(E)$ est alors une algèbre localement convexe ordonnée, d'après le théorème 9, par le cône des endomorphismes continus positifs.

1. Cas des opérateurs compacts.

THÉORÈME 13. - Soit E un espace localement convexe ordonné semi-complet, dont le cône positif K est total. Si T est un endomorphisme positif compact tel que $r(T)$ (rayon spectral) soit strictement positif, alors $r(T)$ est une valeur propre de T avec au moins un vecteur propre associé positif. De plus, $r(T)$ est un pôle d'ordre maximum du résolvant, sur le cercle $|z| = r(T)$.

Démonstration. - Puisque K est fermé et propre, le cône K' est total pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Soit $E^X = K' - K'$; E et E^X sont en dualité, et K est normal pour $\sigma(E, E^X)$. D'autre part, puisque $TK \subset K$, T est continu pour cette topologie, car K a un intérieur non vide et est normal. Considérons :

$\mathcal{L}(E)$, ensemble des endomorphismes continus de E pour $\sigma(E, E')$, muni de la convergence simple sur E, et

$\mathcal{L}_0(E)$, ensemble des endomorphismes continus de E pour $\sigma(E, E^X)$, muni de la convergence simple sur K.

Pour $|\lambda| > r(T)$,

$$R(\lambda) = \sum_0^\infty T^n \lambda^{-(n+1)}$$

est élément de $\mathcal{L}(E)$ comme de $\mathcal{L}_0(E)$, puisque $T^n K \subset K$. Si $r_0(T)$ désigne le rayon spectral de T comme élément du complété de $\mathcal{L}_0(E)$, on a donc

$$r_0(T) \leqslant r(T) \quad .$$

Or le cône des éléments positifs de $\mathcal{L}_0(E)$ est normal, donc, d'après le théorème 12, $r_0(T)$ appartient au spectre de T (comme élément du complété de $\mathcal{L}_0(E)$), soit $\sigma_0(T)$. Mais T est compact, donc il existe, sur le cercle $|z| = r(T)$, une valeur propre de T , et par suite

$$r(T) = r_0(T) \quad .$$

Si $r(T)$ était un point régulier du résolvant, on aurait $R(r(T))$ élément de $\mathcal{L}_0(E)$, car $R(r(T))K \subset K$ puisque K est fermé ; et, au voisinage de $r(T)$, $R(\lambda)$ serait holomorphe, comme élément de $\mathcal{L}_0(E)$, ce qui est impossible ; $r(T)$ est donc un pôle du résolvant, dans $\mathcal{L}(E)$, et dans $\mathcal{L}_0(E)$. D'après le théorème 12, il est d'ordre maximum sur le cercle $|z| = r(T)$, quand $R(\lambda)$ est considéré à valeurs dans le complété de $\mathcal{L}_0(E)$, donc il est d'ordre maximum du résolvant de T dans $\mathcal{L}(E)$.

Si P est le coefficient de la partie principale de $R(\lambda)$ au point $\lambda = r(T)$, tout élément non nul dans l'image de P est vecteur propre associé à λ . Mais

$$P = \lim_{\lambda \downarrow r(T)} (\lambda - r)^k R(\lambda) \quad ,$$

donc $PK \subset K$, et comme K est total, il existe y_0 dans K tel que $x_0 = Py_0$ soit vecteur propre de T , et positif.

III. Eléments et algèbres spectrales.

1. Mesures spectrales.

DÉFINITION 14. - *On appelle* mesure spectrale *sur l'espace compact* X *à valeurs dans l'algèbre localement convexe unitaire* A , *un homomorphisme continu* μ *d'algèbres topologiques* : $\mathcal{C}(X) \xrightarrow{\mu} A$.

L'algèbre $\mathcal{C}(X)$ est ordonnée grâce au cône $\mathcal{P}$ des fonctions positives ; lorsque A est ordonnée, la mesure μ est dite positive si $\mu(\mathcal{P}) \subset K$, où K est le cône positif de A .

PROPOSITION 15. - *Soit* μ *une mesure spectrale de support* X_0 (*complémentaire du plus grand des ensembles ouverts de* X *dans lesquels la restriction de* μ *est* nulle). Le noyau de μ est un idéal $\mathcal{P}$-saturé de $\mathcal{C}(X)$, et coïncide avec le noyau de l'application

$$f \to f_0 = f|_{X_0} \ .$$

La proposition est immédiate en utilisant le fait que μ est multiplicative et continue.

PROPOSITION 16. - Si la multiplication dans A est B-hypocontinue à droite ou à gauche, alors le cône K , image de $\mathcal{P}$ par μ , est un cône normal de A .

Rappelons que la multiplication dans A est dite B-hypocontinue à droite (resp. à gauche), où B représente l'ensemble de tous les bornés de A , si : quel que soit le voisinage V de zéro dans A , et l'ensemble borné B , il existe un voisinage de zéro W tel que $WB \subset V$ (resp. $BW \subset V$).

Démonstration. - D'après la proposition 15, on peut supposer μ injective. Supposons, dans A , la multiplication B-hypocontinue à gauche (l'image de μ est une partie abélienne de A). Soit $\{U\}$ le filtre des voisinages de zéro dans A . Pour tout U de $\{U\}$, le K-saturé $[U]$ est inclus dans $U + \overline{J(U - U)}$ où $J = \mu([0 , 1])$ est borné. Le filtre $\{[U]\}$ converge donc vers zéro.

COROLLAIRE. - Dans les hypothèses de la proposition 16, pour toute mesure spectrale μ , à valeurs dans A , il existe un ordre sur A qui rende μ positive.

Ce sera le cas, par exemple, si A est l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes continus d'un espace localement convexe, munie de la topologie de la convergence bornée, ou simple si E est tonnelé.

2. Eléments spectraux.

DÉFINITION 17. - Soit A une algèbre localement convexe unitaire. Un élément a de A est dit spectral, s'il existe un espace compact X , une mesure spectrale μ , à valeurs dans A , et une fonction f de $\mathcal{C}(X)$ tels que $a = \mu(f)$.

THÉORÈME 18. - Si a est un élément spectral de A , et si X_0 est le support de la mesure spectrale correspondante, alors le spectre $\sigma(a)$ de a est égal à $f(X_0)$.

Nous voyons, en particulier, que le spectre de a est borné.

Démonstration. - Soient λ_0 , $n \notin f(X_0)$; alors $(\lambda - f_0)^{-1} = (\lambda - f_{|X_0})^{-1}$ est définie et holomorphe au voisinage de λ_0 . Dans l'isomorphisme $\mathcal{C}(X_0) \simeq \mathcal{C}(X)_{|N}$, soit μ_0 la mesure spectrale associée à μ . Alors la fonction

$$\lambda \longmapsto \mu_0[(\lambda - f_0)^{-1}]$$

est holomorphe au voisinage de λ_0 , et $\mu(f) = \mu_0(f_0)$ entraîne qu'elle coïncide avec la résolvante de a , et donc λ_0 n'est pas dans $\sigma(a)$.

Réciproquement, si λ_0 n'appartient pas au spectre de a , la résolvante $R(\lambda , a)$ est holomorphe au voisinage de λ_0 , soit dans $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Soit t_0 tel que $f(t_0) = \lambda_0$, et considérons le voisinage de t_0 :

$$U = \{t \ , \ |f(t) - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2}\} \ .$$

Soit maintenant une fonction quelconque $g \in \mathcal{C}(X)$ à support dans U , non nulle. Nous allons montrer que $\mu(g) = 0$. Dans $|\lambda - \lambda_0| > \frac{3\varepsilon}{4}$, définissons

$$g_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t)}{\lambda - f(t)} & \text{si } f(t) \neq \lambda \ , \\ 0 & \text{si } f(t) = \lambda \ . \end{cases}$$

C'est une fonction holomorphe de λ dans ce domaine, donc $\lambda \longmapsto \mu(g_\lambda)$ également, puisque μ est linéaire continue. Or $(\lambda e - a)\ \mu(g_\lambda) = \mu(g)$ au voisinage de l'infini, donc

$$R(\lambda)\ \mu(g) = \mu(g_\lambda)$$

dans l'anneau $\varepsilon > |\lambda - \lambda_0| > \frac{3\varepsilon}{4}$. Mais $R(\lambda)$ est holomorphe dans $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, donc $\mu(g_\lambda)$ a un prolongement holomorphe à tout le plan, et comme $\lim\limits_{\lambda \to \infty} g_\lambda = 0$, $\mu(g_\lambda) = 0$ d'après le théorème de Liouville, ce qui entraîne $\mu(g) = 0$.

COROLLAIRE. - Dans les hypothèses du théorème, tout élément spectral réel a un spectre réel, et inversement, si un élément spectral $a = \mu(f)$ a son spectre réel, alors f est à valeurs réelles sur le spectre de μ .

On dit qu'un élément spectral est positif, si son spectre est inclus dans R^+ .

Remarque. - Soient μ une mesure spectrale sur X , et $f \in \mathcal{C}(X)$ fixée. L'application $g \longmapsto \mu(g \circ f)$ est une mesure ν sur $f(X_0)$, appelée mesure spectrale réelle ou complexe associée à $a = \mu(f)$. On a alors $a = \nu(\tilde{1})$, où $\tilde{1}$ = identité sur le support de ν . La mesure ν est déterminée par a de manière unique ([3], § 3).

THÉORÈME 19. - Soit A une algèbre localement convexe semi-complète, dont la multiplication est hypocontinue à droite ou à gauche. Soit a un élément de A. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que a soit spectral positif, est qu'il existe un ordre sur A et un nombre $\gamma > 0$ tels que $0 \leqslant a \leqslant \gamma e$.

Démonstration. - Si a est spectral positif, alors $a = \mu(f)$, et la restriction f_0 de f au support de μ est positive. Or il existe un ordre sur A pour lequel μ est positive, on aura donc alors

$$0 \leqslant a \leqslant \|f_0\| e \qquad \text{pour cet ordre .}$$

Réciproquement, si $0 \leqslant a \leqslant e$ pour un certain ordre sur A, nous allons définir une mesure spectrale sur $[0\ ,\ 1]$ à valeurs dans A telle que a soit l'image de l'identité sur $[0\ ,\ 1]$. Considérons les polynômes de Bernstein

$$P_{m,p}(t) = t^m(1 - t)^{p-m} : \ [0\ ,\ 1] \to \underset{\approx}{R}\ , \qquad p \geqslant m \geqslant 0 \ .$$

Tout polynôme positif s'écrit

$$\sum \alpha_{m,p} P_{m,p}(t)\ , \qquad \text{avec } \alpha_{m,p} \geqslant 0 \ .$$

Posons alors

$$\mu(P_{m,p}) = a^m(1 - a)^{p-m} \ ;$$

μ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{P}$ des polynômes réels sur $[0\ ,\ 1]$ dans A, tel que le cône des polynômes positifs ait pour image un sous-ensemble du cône positif de A qui est normal. Par conséquent, μ est continu et se prolonge à $C_{\underset{\approx}{R}}[0\ ,\ 1]$ de manière unique, et on a évidemment $a = \tilde{\mu}(\tilde{1})$, $\sigma(a) \subset [0\ ,\ 1]$.

COROLLAIRE 1. - Si, dans une algèbre localement convexe ordonnée semi-complète, on a : $c_1 e \leqslant a \leqslant c_2 e$, où $c_1\ ,\ c_2 \in \underset{\approx}{R}$, alors le spectre $\sigma(a) \subset [c_1\ ,\ c_2]$.

COROLLAIRE 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que a, élément de A, soit spectral réel, est qu'il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que $C(a\ ,\ \gamma) =$ cône engendré par $\cup \{(\gamma e - a)^m (\gamma e + a)^n\}$ soit faiblement normal.

Tout élément spectral peut s'écrire $a + ib$, où a et b sont des éléments spectraux réels (en prenant les parties réelle et imaginaire de f) dont les mesures associées commutent et sont positives pour un même ordre convenable sur A. Nous allons voir que cette condition est suffisante pour qu'un élément soit spectral, et qu'alors, $a + ib$ est obtenu grâce à la mesure produit des mesures associées à a et b. Nous citerons seulement le théorème d'existence.

THÉORÈME 20 [3]. - Soient μ , ν deux mesures positives spectrales sur X (ou Y) à valeurs dans l'algèbre localement convexe ordonnée A , qui commutent et telles que $\mu(1) = \nu(1) = e$. Alors, il existe une mesure spectrale unique λ sur $X \times Y$ à valeurs dans A , telle que

$$\lambda(1) = e \quad \text{et} \quad \lambda(f \otimes g) = \mu(f)\ \nu(g) \quad ,$$

pour toutes f et $g \in \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(Y)$.

THÉORÈME 21. - Soient (X_α) une famille non vide de compacts, (μ_α) une famille de mesures spectrales sur X_α à valeurs dans A telles que $\mu(1) = e$. Pour qu'il existe une mesure spectrale μ sur $\prod_\alpha X_\alpha$,

$$\mu = \bigotimes_\alpha \mu_\alpha \quad ,$$

il faut et il suffit que la famille (μ_α) soit abélienne et qu'il existe un ordre sur A tel que, quel que soit α , μ_α soit positive pour cet ordre.

Conséquence. - Si c est spectral, $c = a + ib$ et les mesures réelles associées à a et b permettent de définir $\mu_a \otimes \mu_b$.

Réciproquement, si un élément c de A admet une représentation $a + ib$, où a et b sont spectraux réels tels que $\mu_a \otimes \mu_b$ existe, alors c est spectral.

Nous obtenons donc un énoncé général.

THÉORÈME 22. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément a d'une algèbre localement convexe semi-complète (dont la multiplication est hypocontinue à droite ou à gauche) soit spectral, est qu'il existe une représentation de a comme $b + ic$, où b et c commutent et où, pour un certain nombre $\gamma > 0$,

$$C(b , \gamma)\ C(c , \gamma)$$

appartienne à un cône faiblement normal de A .

Exemple 1. - Soient I un ensemble d'indices, et $A = \prod C_i$, où $C_i = C$, produit topologique. Le cône $K = \{a ;\ a_i \geqslant 0 ,\ \forall\ i\}$ contient 1 , est commutatif et faiblement normal. A est une algèbre localement convexe, et le produit dans A est continu. A est semi-complète. Par suite, tout élément a , tel que l'ensemble des a_i soit borné, est spectral.

Exemple 2. - Soit E un espace de Hilbert de dimension quelconque. Considérons l'algèbre $\mathcal{L}_s(E)$ des endomorphismes continus de E , munie de la convergence simple. Le cône $\mathcal{K}$ des opérateurs hermitiens positifs est normal, et si deux tels opérateurs commutent, leur produit est encore hermitien positif. Donc $\mathcal{L}_s(E)$ est ordonnée par ce cône ; d'autre part, elle est semi-complète ; par suite, tout opérateur normal est spectral.

3. Algèbres spectrales.

DÉFINITION 23. - Etant donnée une algèbre localement convexe A , nous dirons que $\widetilde{A}$ est une sous-algèbre spectrale de A , s'il existe un espace compact X et une mesure spectrale μ sur X à valeurs dans A , tels que $\widetilde{A}$ soit l'image de μ .

THÉORÈME 24. - Soit $\widetilde{A}$ une sous-algèbre spectrale de l'algèbre localement convexe A , munie de la topologie induite (on ne suppose pas la multiplication hypocontinue). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $a \to r(a)$, rayon spectral de a , est continue sur $\widetilde{A}$;
(2) $\widetilde{A}$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\mathcal{C}(X)$ (nous dirons : équivalente à $\mathcal{C}(X)$).

Elles entraînent la propriété :

(3) $\widetilde{A}$ est fermée dans A .

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Si nous supposons μ injective, $\widetilde{A}$ est algébriquement isomorphe à $\mathcal{C}(X)$, et $r(a) = \|f\|$ si $a = \mu(f)$ pour un élément a de $\widetilde{A}$. $\widetilde{A}$ est un Banach, et la topologie de la norme coïncide avec la topologie induite, si l'application $a \mapsto r(a)$ est continue sur $\widetilde{A}$.

Les autres parties du théorème sont immédiates.

COROLLAIRE. - Quand A est une algèbre de Banach, toute sous-algèbre spectrale de A est fermée. En effet, dans une algèbre de Banach, $r(a) \leq \|a\|$.

Nous voyons donc que, si la multiplication dans A est cette fois supposée hypocontinue (à droite ou à gauche), toute sous-algèbre spectrale de A peut être ordonnée de façon à être l'espace engendré sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ par son intervalle unité.

THÉORÈME 25. - Soit A une algèbre commutative localement convexe ordonnée qui est l'espace engendré par son intervalle unité J . Supposons que J soit semi-complet. Alors A est une algèbre spectrale.

Démonstration. - En effet, $A = A_1 + iA_1$, où $A_1 = \bigcup_n n[-e , e]$. Pour tout a de A_1 , il existe, d'après le paragraphe précédent, une mesure ν_a sur le spectre $\sigma(a) = X_a \subset \mathbb{R}$, positive pour l'ordre de A . Soit $X = \prod X_a$. Puisque J est semi-complet, que $\{\nu_a\}$ est abélienne et $\nu_a(1) = e$ pour tout a , le produit $\bigotimes_a \nu_a = \nu$ existe. Il existe donc une mesure spectrale sur X à valeurs dans A , et tout a de A_1 est égal à $\nu(f_a)$, où f_a est la projection

$$X \xrightarrow[f_a]{} X_a \ .$$

Donc, tout élément de A s'écrit :

$$\begin{aligned} a + ib &= \nu(f_a) + i\nu(f_b) \\ &= \nu(f_a + if_b) \ . \end{aligned}$$

THÉORÈME 26. - Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. Une condition nécessaire et suffisante, pour que A soit équivalente à un certain $\mathcal{C}(X)$, est qu'il existe un ordre sur A tel que A soit l'espace engendré par son intervalle unité.

Immédiat, grâce aux théorèmes 24 et 25 précédents.

Remarque. - Il est possible, paraît-il, de supprimer dans ce dernier théorème l'hypothèse : "commutative". L'algèbre le sera alors a posteriori.

Exemples.

- Toute algèbre d'opérateurs hermitiens, dans un espace de Hilbert, qui est fermée pour la convergence uniforme, est une sous-algèbre spectrale réelle de $\mathcal{L}(H)$. En effet, elle est alors commutative, car $(ab)^* = ab = b^* a^* = ba$.

- De même, toute algèbre involutive fermée, d'opérateurs normaux, dans un Hilbert est une sous-algèbre spectrale complexe de $\mathcal{L}(H)$.

- Soit E un espace localement convexe réticulé semi-complet, sur lequel toute forme linéaire positive est continue (par exemple, si le cône positif de E a un intérieur non vide). Soit $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes faiblement continus de E , munie de la topologie de la convergence simple, et soit J l'intervalle unité pour l'ordre induit. $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre localement convexe ordonnée, et le cône $\mathcal{K}$ des éléments positifs est semi-complet. D'autre part, J est fermé, donc semi-complet. De plus, d'après [3] (§ 4), J est un sous-ensemble abélien de

$\mathcal{L}(E)$. Par conséquent, l'espace vectoriel engendré sur $\underset{\sim}{C}$ par J est une sous-algèbre spectrale de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque. - Nous ne savons pas si une algèbre sur $\underset{\sim}{R}$, formée uniquement d'éléments spectraux, est commutative.

4. Extension des mesures spectrales.

Pour obtenir davantage de résultats semblables aux théorèmes de la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens ou normaux dans un Hilbert, il est nécessaire de donner une description plus détaillée des opérateurs spectraux, et, pour ceci, d'étendre la notion de mesure spectrale.

Rappel. - Soit S un opérateur borné normal dans un Hilbert. Le comportement spectral de S est caractérisé par sa représentation :

$$S = \int_{\sigma(S)} \lambda \, dP(\lambda) , \qquad \text{où} \quad \mathcal{P} : \delta \to P(\delta)$$

est une application σ additive et multiplicative des boréliens du complété $\overline{\underset{\sim}{C}}$ du plan complexe, dans l'ensemble des projections orthogonales de H . L'application $\mathcal{P}$ est appelée résolution de l'identité associée à S $(P(\overline{\underset{\sim}{C}}) = I)$.

Nous allons construire, pour un élément d'un algèbre localement convexe A , une résolution de l'identité, mais à valeurs dans l'ensemble des idempotents de A .

5. Prolongement de la mesure spectrale μ .

Soit A une algèbre localement convexe réelle, et soit μ une mesure spectrale: $\mathcal{C}(X) \to A$. Soit $\hat{A}$ le complété faible de A ; $\hat{A}$ est une algèbre localement convexe pour la topologie faible $\sigma(\hat{A} , A')$.

$\mathcal{B}(X)$ désignera la tribu des fonctions boréliennes sur X ,
$\mathcal{B}_0(X)$ celle des fonctions de Baire.

Soit K un cône positif de A , tel que μ soit positive pour l'ordre associé. Pour toute φ de A' , l'application : $f \to \langle \mu(f) , \varphi \rangle$ est une mesure sur X , étendons-la à $\mathcal{B}(X)$. Munissons alors $\mathcal{B}(X)$ de la topologie $\mathcal{T}$ définie par les semi-normes $(f \to \int |f| \, d\tilde{\mu}_\varphi , \ \varphi \in K')$. $\mathcal{C}(X)$ est dense dans $\mathcal{B}(X)$ pour $\mathcal{T}$, et μ est continue de $\mathcal{C}(X)$ munie de $\mathcal{T}$, dans A munie de $\sigma(A , A')$. Il existe donc un prolongement $\tilde{\mu}$ de μ à $\mathcal{B}(X)$, à valeurs dans $\hat{A}$.

Si l'image de $\tilde{\mu}$ était un sous-ensemble de A , et si $\tilde{\mu}(1) = e$, alors

$$\mathcal{P} : \delta \longmapsto \tilde{\mu}(X_\delta)$$

serait une résolution de l'identité engendrée par μ .

THÉORÈME 27. - Soit μ une mesure spectrale sur X à valeurs dans A , telle que $\mu(1) = e$. Soit K le cône positif de A pour l'ordre le plus fin pour lequel μ est positive, et soit J l'intervalle unité correspondant. Si J est faiblement semi-complet (resp. complet), alors $\tilde{\mu}$ envoie $\mathcal{B}_0(X)$ (resp. $\mathcal{B}(X)$) dans A .

Dans le premier cas, appelons I l'intervalle unité de $\mathcal{B}(X)$. $\mathcal{C}(X) \cap I$ est dense dans I pour la topologie $\mathcal{T}$ précédente, et $\mu(\mathcal{C}(X) \cap I) \subset J$, donc

$$\tilde{\mu}(I) \subset J \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mu}(\mathcal{B}(X)) \subset A \ .$$

Dans le cas où J est seulement semi-complet, on remarque que $I \cap \tilde{\mu}^{-1}(J)$ est stable pour les limites simples de suites ; or il contient les fonctions continues; donc les fonctions de Baire ont une image dans A .

Les résolutions de l'identité vont permettre d'étudier les opérateurs à spectre non borné, sur un espace localement convexe.

Nous nous contenterons de donner quelques résultats à ce propos, en renvoyant à [3] (§ 5).

6. Applications spectrales.

Soient E un espace localement convexe, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E faible, munie de la convergence simple. Nous supposons E et $\mathcal{L}(E)$ faiblement semi-complets.

Soient X un espace compact, μ une mesure spectrale sur X à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, et f une fonction de $\mathcal{B}_0(X)$. Le triplet (X , μ , f) définit une application linéaire dans E de la façon suivante :

Soit x fixé dans E ; $\delta \to \mu(\delta)x$ est une mesure sur X . Soit D_f le sous-ensemble de E tel que, pour tout x de D_f , f soit μ_x-intégrable et $\int f \, d\mu_x \in E$.

$x \longmapsto \mu_x(f)$ définit donc une application linéaire T dans E , de domaine D_f . Nous écrirons

$$T \sim (X , \mu , f) \ .$$

Une application linéaire T dans E est dite spectrale, s'il existe (X , μ , f) tels que $T \sim (X , \mu , f)$.

PROPOSITION 28. - Si T est un opérateur spectral, alors D_T est dense dans E, et T est fermé.

THÉORÈME 29. - Si $T \sim (\underset{\sim}{C}, \nu, \tilde{1})$, où ν est une mesure spectrale complexe, alors le support de ν, $S(\nu)$, est égal au spectre de T.

De plus, si $\sigma(T) \neq \overline{\underset{\sim}{C}}$, alors la mesure ν est déterminée de manière unique par T, et commute avec tout opérateur Q de $\mathfrak{L}(E)$ qui commute avec T.

THÉORÈME 30. - Soit T à domaine dense et fermé, dans $\mathfrak{L}(E)$. Alors une condition nécessaire et suffisante, pour que T soit spectral réel, est que :

1° $(I + T^2)^{-1}$ existe, et que

2° Il existe un ordre sur $\mathfrak{L}(E)$ tel que

$$0 \leqslant (I + T^2)^{-1} \leqslant I \quad ,$$

$$- I \leqslant T(I + T^2)^{-1} \leqslant I \quad .$$

Exemple 1. - Les opérateurs normaux quelconques dans un Hilbert. (H et $\mathfrak{L}(H)$ sont faiblement semi-complets.)

Exemple 2. - Soit E un espace localement convexe faiblement semi-complet qui possède une base absolue x_n (tout x s'écrit $\sum_n e_n x_n$, où la série est commutativement convergente). Soit (x_n, x'_n) le système correspondant dans $E \times E'$. Si (λ_n) est une suite quelconque de nombres complexes, alors l'opérateur

$$x \longmapsto Tx = \sum \lambda_n \langle x'_n , x \rangle x_n \quad ,$$

défini sur les éléments x de E tels que la série converge, est un opérateur spectral sur E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROSBERG (J.) et KREIN (M.). - Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives, Doklady Akad. Nauk SSSR, Ser. 2, t. 25, 1939, p. 723-726.

[2] SCHAEFER (Helmut). - Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume, II, Math. Annalen, t. 138, 1959, p. 259-286.

[3] SCHAEFER (Helmut). - Spectral measures in locally convex algebras, Acta Math., Uppsala, t. 107, 1962, p. 125-173.