

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GABRIEL MOKOBODZKI

## Capacités fonctionnelles

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 6, n° 1 (1966-1967), exp. n° 1, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1966-1967\\_\\_6\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A1_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CAPACITÉS FONCTIONNELLES

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - Dans son article "Forme abstraite du théorème de capacitabilité" [1], G. CHOQUET a proposé diverses extensions de la notion de capacité, en supposant que l'ensemble des valeurs prises par les capacités n'est plus  $\underline{\mathbb{R}}$ , mais un ensemble réticulé convenable, permettant d'obtenir la capacitabilité pour les ensembles sousliniens.

La notion de capacité fonctionnelle est alors un cas particulier d'une telle extension, utile dans les applications.

Définitions. Notations. - Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques séparés,  $F_X, F_Y$  respectivement les fonctions numériques définies sur  $X, Y$ , à valeurs dans  $(0, \infty)$ ,  $K_X, K_Y$  les sous-ensembles de  $F_X, F_Y$  composés de fonctions semi-continues supérieurement, à support compact.

On dira qu'une application de  $F_X$  dans  $F_Y$  est une capacité fonctionnelle si elle satisfait aux propriétés suivantes :

$$1^\circ (f_1 \leq f_2) \implies (C(f_1) \leq C(f_2)) ;$$

$$2^\circ (h \in K_X) \implies C(h) \in K_Y ;$$

3° Pour toute suite croissante  $(f_n) \subset F_X$ , on a

$$C(\sup f_n) = \sup C(f_n) ;$$

4° Pour toute suite décroissante  $(h_n) \subset K_X$ , on a

$$C(\inf h_n) = \inf C(h_n) .$$

On a alors une notion de capacitabilité : un élément  $f \in F_X$  est dit capacitable si l'on a

$$C(f) = \sup C(h) \quad (h \leq f, h \in K_X) .$$

Au moyen de l'opération  $A$  de Souslin, on définira des éléments  $K$ -analytiques (ou  $K$ -sousliniens) dans  $F_X$  et  $F_Y$ .

Les principaux résultats obtenus sont les suivants : soit  $C$  une capacité fonctionnelle de  $F_X$  dans  $F_Y$  ;

1° Pour tout  $f \in F_X$ , capacitabile pour toute capacité,  $\mathcal{C}(f)$  est capacitabile pour toute capacité ;

2° Tout  $f \in F_X$ ,  $K$ -analytique, est capacitabile ;

3° Pour tout  $f \in F_X$ ,  $K$ -analytique,  $\mathcal{C}(f)$  est aussi  $K$ -analytique.

EXEMPLE 1. - Soient  $X$  un espace localement compact dénombrable à l'infini,  $V$  un noyau positif de  $C_K(X)$  dans  $C(X)$ , et, pour tout  $x \in X$ , soit  $\mu_x$  la mesure  $\varepsilon_x V$ . Pour tout  $f$  positive sur  $X$ , on pose

$$\mathcal{C}(f)(x) = \int^{**} f d\mu_x .$$

L'application  $f \mapsto \mathcal{C}(f)$  est une capacité fonctionnelle et, pour tout  $f \in F_X$ ,  $K$ -analytique,  $\mathcal{C}(f)$  est  $K$ -analytique, donc universellement mesurable, et l'on a, pour toute mesure de Radon  $\mu \geq 0$  sur  $X$ ,

$$\int V(f) d\mu = \int \mathcal{C}(f) d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \in K_X}} \int V(\varphi) d\mu$$

(en fait, on sait que si  $f$  est universellement mesurable,  $V(f)$  l'est aussi).

EXEMPLE 2. - Soit  $X$  un ensemble convexe compact dans un e. l. c. On dira qu'une fonction numérique  $f$  positive est concave sur  $X$ , si, pour tout  $x \in X$  et toute mesure de Radon  $\mu \geq 0$  sur  $K$ , de barycentre  $x$ , on a

$$\int^{**} f d\mu \leq f(x) .$$

On peut montrer que l'application qui, à tout élément  $f$  de  $F_X$ , fait correspondre la plus petite fonction concave  $g = \mathcal{C}(f)$ , majorant  $f$ , est une capacité fonctionnelle, et que si  $f$  est  $K$ -analytique, alors

$$\mathcal{C}(f)(x) = \sup_{\mu < \varepsilon_x} \int f d\mu , \quad \text{où } x \in X \text{ et } \mu < \varepsilon_x ,$$

signifie que  $\mu$  est  $\geq 0$ , de barycentre  $x$  dans  $X$ .

Remarque. - On peut étendre la notion de capacité fonctionnelle en supposant seulement que, pour tout  $f \in K_X$ ,  $\mathcal{C}(f)$  est  $K$ -analytique. Il résulte alors des propriétés de l'opération  $A$  de Souslin que si  $f$  est  $K$ -analytique, alors  $\mathcal{C}(f)$  est  $K$ -analytique, et si  $f$  est universellement capacitabile,  $\mathcal{C}(f)$  l'est aussi.

Soit  $S$  l'ensemble des suites finies (ordonnées) de nombres entiers. On désigne par  $\Sigma$  l'ensemble des suites infinies de nombres entiers. On ordonne  $S$  de la

manière suivante :

$$(s < s') \iff (s \text{ est section commençante de } s') .$$

De même, pour  $s \in S$  et  $\sigma \in \Sigma$ , on écrira  $s < \sigma$  si  $s$  est une section commençante de  $\sigma$ .

On appelle système déterminant sur  $F_X$ , une application décroissante  $\Delta$  de  $S$  dans  $K_X$ .

On prolonge  $\Delta$  à  $\Sigma$  en posant, pour tout  $\sigma \in \Sigma$ ,

$$\Delta(\sigma) = \inf_{s < \sigma} \Delta(s) .$$

On appelle noyau du système déterminant, la fonction numérique

$$f = \Delta(\Sigma) = \sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} \Delta(s)) = \sup_{\sigma \in \Sigma} \Delta(\sigma) .$$

On dit que  $f$  est K-analytique, si c'est le noyau d'un système déterminant sur  $F_X$ .

**DÉFINITION.** - On dira qu'un système déterminant  $\Delta$  est privilégié si, pour toute capacité  $C$  sur  $F_X$ , on a

$$C(\Delta(\Sigma)) = \sup_{\sigma \in \Sigma} C(\Delta(\sigma)) .$$

**REMARQUE 1.** - Dans la définition précédente, on peut se restreindre aux capacités à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**REMARQUE 2.** - Le noyau d'un système déterminant privilégié est automatiquement capacitabile.

**PROPOSITION.** - Tout  $f$ , K-analytique, peut être obtenu comme noyau d'un système déterminant privilégié.

**Démonstration.** - Appelons longueur d'une suite  $s \in S$ , le nombre  $l(s)$  de ses éléments ; introduisons le nouvel ordre sur  $S$  ( $s \leq s'$ ) si  $l(s) = l(s')$ , et  $s$  et  $s'$  s'écrivent

$$s = (n_1, n_2, \dots, n_p), \quad s' = (n'_1, n'_2, \dots, n'_p),$$

si l'on a  $n_q \leq n'_p$  pour  $1 \leq q \leq p$ .

Désignons par  $S_p$  l'ensemble des éléments de  $S$  de longueur  $p$ , et par  $T_q(s)$  (resp.  $T_q(\sigma)$ ) le terme de rang  $q$  de  $s \in S$  (resp.  $\sigma \in \Sigma$ ).

Considérons le nouveau système déterminant, défini pour tout  $\sigma \in S$  par

$$\Delta'(s) = \sup_{s' \leq s} \Delta(s') .$$

On a évidemment  $\Delta(\Sigma) \subset \Delta'(\Sigma)$  . Soient

$$\sigma \in \Sigma ; \quad (x, \lambda) \in X \times \underline{\mathbb{R}} ; \quad \lambda < [\Delta'(\sigma)](x) .$$

L'ensemble  $S_p$  est aussi bien ordonné pour l'ordre lexicographique. Pour tout entier  $p$ , posons alors

$$s_p = \inf_{\substack{\ell(s)=p \\ s \leq \sigma \\ \lambda < [\Delta(s)](x)}} s \quad (\text{inf au sens de l'ordre lexicographique}) .$$

Pour tout entier  $q$ , soit  $m_q = \sup_{p \geq q} T_q(s_p)$ ; on a  $T_q(s_p) \leq T_q(\sigma)$ . Soit  $\sigma'$  la suite infinie de terme général  $m_q$ , on a bien

$$[\Delta(\sigma')](x) > \lambda ,$$

par suite

$$\Delta'(\Sigma) = \Delta(\Sigma) .$$

Montrons maintenant que  $\Delta'$  est privilégié. Pour tout  $s \in S$ , posons

$$g_s = \sup_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ s < \sigma}} \Delta(\sigma) ; \quad f_s = \sup_{s' \leq s} g_{s'} .$$

Soit  $C$  une capacité sur  $F_X$  à valeurs dans  $\underline{\mathbb{R}}$ . Pour tout  $p \in \underline{\mathbb{N}}$ , la famille des fonctions  $(f_s)_{\ell(s)=p}$  est dénombrable, filtrante croissante, et, en particulier,

$$f_s = \sup_{\substack{s < t \\ \ell(t)=\ell(s)+1}} f_t ; \quad \Delta'(\Sigma) = \sup_{\ell(s)=1} f_s .$$

Par suite  $C(f_s) = \sup_{\substack{s < t \\ \ell(t)=\ell(s)+1}} C(f_t)$  .

Soit  $\lambda < C(\Delta(\Sigma))$ . Construisons par récurrence une suite  $s_n$  d'éléments de  $S$ , telle que :

- 1°  $\ell(s_{n+1}) = \ell(s_n) + 1$  et  $s_n < s_{n+1}$  ;
- 2°  $C(f_{s_n}) > \lambda$  .

Cette construction est possible d'après les remarques précédentes. Il existe une suite  $\sigma$ , définie par  $s_n < \sigma$ ,  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$ ; on a

$$\Delta'(\sigma) \leq \Delta'(\Sigma) \quad \text{et} \quad \Delta'(s_n) \geq f_{s_n} ,$$

d'où

$$C(\Delta'(s_n)) \geq C(f_{s_n}) > \lambda$$

et

$$C(\Delta'(\sigma)) = \inf C(\Delta'(s_n)) \geq \lambda .$$

(On reprend la méthode de Choquet pour montrer que tout ensemble  $K$ -analytique est capacitabile.)

Pour toute capacité  $C$  sur  $F_X$ , on a bien

$$C(\Delta'(\Sigma)) = \sup_{\sigma \in \Sigma} C(\Delta'(\sigma)) .$$

Soient maintenant  $f$  une fonction  $K$ -analytique,  $\Delta$  un système déterminant privilégié sur  $F_X$  tel que  $\Delta(\Sigma) = f$ ,  $C$  une capacité fonctionnelle sur  $F_X$  à valeurs dans  $F_Y$ . D'après ce qui précède, le système déterminant sur  $F_Y$ , défini par

$$\Delta_1(s) = C(\Delta(s)) , \quad \forall s \in S ,$$

a pour noyau

$$\Delta_1(\Sigma) = \sup_{\sigma \in \Sigma} \Delta_1(\sigma) = \sup_{\sigma \in \Sigma} C(\Delta(\sigma)) = C(\Delta(\Sigma)) = C(f) .$$

Plus généralement, soient  $f \in F_X$ , un élément capacitabile pour toute capacité,  $C$  une capacité fonctionnelle de  $F_X$  dans  $F_Y$ ,  $\mathcal{C}$  une capacité fonctionnelle de  $F_Y$  dans  $F_Z$ , où  $Z$  est un espace topologique séparé, alors  $\mathcal{C} \circ C$  est une capacité fonctionnelle de  $F_X$  dans  $F_Z$ .

Comme  $f$  est capacitabile pour  $\mathcal{C} \circ C$ , on a

$$(\mathcal{C} \circ C)(f) = \sup_{\substack{\varphi \in K_X \\ \varphi \leq f}} \mathcal{C} \circ C(\varphi) = \sup_{\substack{\varphi \in K_X \\ \varphi \leq f}} \mathcal{C}(C(\varphi)) = \mathcal{C}(C(f)) .$$

Mais comme  $C(\varphi) \in K_Y$ , lorsque  $\varphi \in K_X$ , la dernière égalité montre que  $C(f)$  est capacitabile pour toute capacité.

Remarque. - Le choix de l'ensemble  $K_X \subset F_X$  permet d'identifier les éléments  $K$ -analytiques de  $F_X$  avec l'ensemble des applications  $f$  de  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , tels que, dans  $X \times \overline{\mathbb{R}^+}$ , l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, \lambda) \in X \times \overline{\mathbb{R}^+} ; \lambda \leq f(x)\}$$

soit  $K$ -analytique au sens classique.

En particulier, la proposition précédente reste valable dans les hypothèses les plus générales où s'est placé G. CHOQUET pour établir la capacitabilité des ensembles  $K$ -sousliniens.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (Gustave). - Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 9, 1959, p. 83-89.
-