Michel Leduc

Sur des monoïdes de fonctions continues

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 2 (1965-1966), exp. nº 11, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_2_A4_0>

SUR DES MONOÏDES DE FONCTIONS CONTINUES

par Michel LEDUC

Cet exposé relate un travail, entrepris par R. SPECTOR [4], et que nous avons poursuivi ensemble.

Il s'agit d'associer à certains homomorphismes de monoïdes de fonctions numériques [1] continues des applications continues entre les espaces sous-jacents.

Dans cet ordre d'idées, le théorème 2 et la proposition 8 généralisent strictement un résultat classique ([1], 10.6, p. 142) ; mais notre démonstration paraît notoirement différente. D'autre part, le théorème 6 généralise un résultat assez ancien de A. MILGRAM [3] ; on en trouvera une démonstration directe plus rapide dans [2].

G. CHOQUET suggère que les homomorphismes réguliers introduits pourraient bien jouir de propriétés en relation avec la structure d'ordre.

Première partie

Soit E un espace topologique. Pour tout $f \in \mathcal{C}(E)$, notons $Z(f) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(0)}}$; alors on a

$$\overline{Z(f)} \subset f^{-1}(0) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\overline{Z(f)}} = Z(f) \ .$$

LEMME 1. - Si A et B sont des parties fermées, $\overline{A \overset{\circ}{\cup} B} = \overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}}$.

En effet : $\overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}} \subset \overline{A \overset{\circ}{\cup} B}$ est immédiat.

Réciproquement, soit Ω l'ouvert : $A \overset{\circ}{\cup} B \setminus (\overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}})$,

$$\Omega \subset A \cup B \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) \subset (A \setminus \mathring{A}) \cup (B \setminus \mathring{B}) \ ,$$

par suite : $\Omega \setminus A \subset B \setminus \mathring{B}$, or $\Omega \setminus A$ est ouvert, donc vide, et $\Omega \subset A$, d'où $\Omega \subset \mathring{A}$, puis $\Omega \subset B \setminus \mathring{B}$, donc $\Omega = \emptyset$; finalement $A \overset{\circ}{\cup} B \subset \overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}}$, donc

$$\overline{A \overset{\circ}{\cup} B} \subset \overline{\mathring{A}} \cup \overline{\mathring{B}} \ .$$

---

[1] Ou à valeurs dans un corps séparé.

Le lemme se généralise par récurrence à une famille finie de parties fermées [2].

Soient F un espace topologique, et $\mathfrak{a} \subset \mathcal{C}(E)$ un monoïde multiplicatif (partie stable par multiplication). Un homomorphisme α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$ est dit régulier si $0 \in \mathfrak{a}$ et $\alpha(0) = 0$ et si, pour $a \neq b$ dans E, $\varphi(a) \cap \varphi(b) = \emptyset$ où

$$\forall\, x \in E\,, \qquad \varphi(x) = \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a};\, x\in Z(f)\}} \overline{Z(\alpha f)}\ .$$

Alors :

THÉORÈME 2. - Soient E et F des espaces topologiques, $\mathfrak{a}$ un monoïde de $\mathcal{C}(E)$; si E est compact, alors à tout homomorphisme régulier α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$ est associée une application $\tilde{\alpha}$ de F dans E, telle que, pour tout $f \in \mathfrak{a}$,

$$\tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset Z(\alpha f)\ .$$

De plus, $\tilde{\alpha}$ est continue, et, pour toute partie fermée A de E :

$$\tilde{\alpha}^{-1}(A) = \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a};\, A\subset Z(f)\}} Z(\alpha f)\ .$$

En effet, soit A un fermé de E,

$$\bigcup_{x\in A} \varphi(x) = \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a};\, A\subset Z(f)\}} \overline{Z(\alpha f)}\ ;$$

l'inclusion est immédiate. Réciproquement, si $y \notin \bigcup_{x\in A} \varphi(x)$:

$$\forall\, x \in A\,, \quad \exists\, f \in \mathfrak{a}\,, \qquad x \in Z(f) \quad \text{et} \quad y \notin \overline{Z(\alpha f)}\ ,$$

donc $(Zf)_{\{f\in\mathfrak{a};\, y\notin\overline{Z(\alpha f)}\}}$ recouvre A, et comme A est compact, il existe une partie finie $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{a}$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{f\in\mathfrak{a}_0} Z(f) \qquad \text{et} \qquad \forall\, f \in \mathfrak{a}_0\,, \quad y \notin \overline{Z(\alpha f)}\ ;$$

posons $g = \prod_{\mathfrak{a}_0} f$; il vient $g \in \mathfrak{a}$ et $g^{-1}(0) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}_0} f^{-1}(0)$, donc

$$Z(g) = \overset{0}{\bigcup_{f\in\mathfrak{a}_0}} f^{-1}(0) \supset \bigcup_{f\in\mathfrak{a}_0} Z(f) \supset A\ ;$$

or, comme $\alpha(g) = \prod_{f\in\mathfrak{a}_0} \alpha(f)$,

---

[2] Sauf peut-être une, car dans le lemme, on n'a pas utilisé la fermeture de B.

$$(\alpha g)^{-1}(0) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}_o} (\alpha f)^{-1}(0)$$

et, d'après le lemme,

$$\overline{Z(\alpha g)} = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}_o} \overline{Z(\alpha f)} \quad ,$$

donc $y \notin \overline{Z(\alpha g)}$.

En particulier :

$$\bigcup_{x\in E} \varphi(x) = \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; E\subset Z(f)\}} \overline{Z(\alpha f)} = \overline{Z(\alpha(0))} = \overline{Z(0)} = F \quad ,$$

donc $(\varphi(x))_{x\in E}$ forme une partition de F .

Soit $\tilde{\alpha} : F \longrightarrow E$, si $\forall f \in \mathfrak{a}$, $\tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset Z(\alpha f)$, alors

$$\forall x \in E , \quad \tilde{\alpha}^{-1}(x) \subset \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; x\in Z(f)\}} \tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; x\in Z(f)\}} Z(\alpha f) \subset \varphi(x) \quad ,$$

donc $\tilde{\alpha}$ est l'application canonique associée à la partition $(\varphi(x))_{x\in E}$.

Réciproquement, soit $\tilde{\alpha}$ cette application : pour A fermé,

$$\tilde{\alpha}^{-1}(A) = \bigcup_{x\in A} \tilde{\alpha}^{-1}(x) = \bigcup_{x\in A} \varphi(x)$$

est fermé comme intersection de fermés, donc $\tilde{\alpha}$ est continue. Enfin, soit $f \in \mathfrak{a}$, $\forall y \in \tilde{\alpha}^{-1}(Zf)$, $\tilde{\alpha}(y) \in Z(f)$, donc

$$\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}(y)) = \bigcap_{\{g\in\mathfrak{a}; \tilde{\alpha}(y)\in Z(g)\}} \overline{Z(\alpha g)} \subset \overline{Z(\alpha f)} \quad ,$$

or $y \in \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}(y))$, donc finalement $\tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset \overline{Z(\alpha f)}$, et puisque $\tilde{\alpha}^{-1}(Zf)$ est ouvert,

$$\tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset \overset{\circ}{\overline{Z(\alpha f)}} = Z(\alpha f) \quad .$$

Soit A un fermé de E , si $f \in \mathfrak{a}$ et $A \subset Z(f)$,

$$\tilde{\alpha}^{-1}(A) \subset \tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset Z(\alpha f) \quad ,$$

donc

$$\bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; A\subset Z(f)\}} \overline{Z(\alpha f)} = \tilde{\alpha}^{-1}(A) \subset \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; A\subset Z(f)\}} Z(\alpha f) \quad ,$$

puis l'égalité [3].

---

[3] A posteriori : $\varphi(x) = \bigcap_{\{f\in\mathfrak{a}; x\in Z(f)\}} Z(\alpha f)$; pourtant il semble nécessaire d'énoncer le second axiome de régularité avec des adhérences, au moins pour obtenir une application $\tilde{\alpha}$ qui soit continue.

Remarque. - Pour $E = F$, si α = injection canonique est régulière, $\tilde{\alpha} = \mathrm{id}^0$ car $\forall\, x \in E$, $\tilde{\alpha}^{-1}(x) \ni x$.

PROPOSITION 3. - Soient E et F des espaces compacts, G un espace topologique, $\mathfrak{a}$ un monoïde de $\mathcal{C}(E)$, α un homomorphisme régulier de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$, et β un homomorphisme régulier de $\alpha(\mathfrak{a})$ dans $\mathcal{C}(G)$; si $\beta \circ \alpha$ **est régulier** [4], alors $\widetilde{\beta\alpha} = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$.

En effet :

$$\forall\, f \in \mathfrak{a}, \qquad (\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta})^{-1}\ (Zf) = \tilde{\beta}^{-1}(\tilde{\alpha}^{-1}(Zf)) \subset \tilde{\beta}^{-1}(Z(\alpha f)) \subset Z(\beta\alpha(f)) \quad .$$

Seconde partie

Soit E un espace topologique.

Un monoïde $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{C}(E)$ est dit riche si $1 \in \mathfrak{a}$ et si, pour tout fermé A de E,

$$\forall\, x \in E \setminus A, \quad \exists\, f \in \mathfrak{a} : \qquad A \subset f^{-1}(1) \quad \text{et} \quad x \in Z(f) \quad .$$

Remarquons qu'alors : pour tout compact K disjoint de A, il existe $f \in \mathfrak{a}$ tel que

$$A \subset f^{-1}(1) \qquad \text{et} \qquad K \subset Z(f) \quad ,$$

et si A et B sont compacts disjoints, il existe f et $g \in \mathfrak{a}$ tels que

$$A \subset Z(f) \ , \quad B \subset Z(g) \quad \text{et} \quad \overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \emptyset \qquad (^5) \quad ,$$

car $\exists\, f \in \mathfrak{a}$: $A \subset Z(f)$ et $B \subset f^{-1}(1)$, donc $B \cap \overline{Z(f)} = \emptyset$, puis $\exists\, g \in \mathfrak{a}$: $B \subset Z(g)$ et $\overline{Z(f)} \subset g^{-1}(1)$, donc $\overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \emptyset$.

LEMME 4. - Soient E et F des espaces topologiques, $\mathfrak{a}$ un monoïde riche de $\mathcal{C}(E)$, et α un homomorphisme injectif de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$, d'image riche, alors, pour f et $g \in \mathfrak{a}$,

$$\overline{Z(f)} \ \text{et} \ \overline{Z(g)} \ \text{compacts disjoints} \implies \overline{Z(\alpha f)} \cap \overline{Z(\alpha g)} = \emptyset \quad .$$

Et par suite également :

$$\overline{Z(\alpha f)} \ \text{et} \ \overline{Z(\alpha g)} \ \text{compacts disjoints} \implies \overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \emptyset \quad .$$

---

[4] Peut-être ces hypothèses sont-elles surabondantes ; il ne semble pourtant pas exister de relation simple entre la régularité de α, de β et celle de $\beta\alpha$.

[5] En particulier, si $0 \in \mathfrak{a}$, l'injection canonique de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(E)$ est un homomorphisme régulier ; la réciproque est fausse.

En effet : d'abord $\alpha(1) = 1$, car dès que $\alpha^{-1}(1) \neq \emptyset$, soit $g \in \alpha^{-1}(1)$,

$$1 = \alpha(g) = \alpha(g.1) = \alpha(g).\alpha(1) = \alpha(1) \quad .$$

Ensuite (cf. appendice), on démontre facilement que, pour f et $g \in \mathcal{C}(E)$,

$$Z(f) \subset Z(g) \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ et } fh = f \implies gh = g) \quad ,$$

puis

$$(h \in \mathcal{C}(E) \text{ , } gh = g \text{ et } Z(f) \subset Z(h)) \implies \overline{Z(f)} \subset Z(g) \quad ,$$

et

$$Z(g) \supset \overline{Z(f)} \text{ , } \overline{Z(f)} \text{ compact} \implies \exists\, h \in \mathfrak{A} : gh = g \text{ et } Z(f) \subset Z(h) \quad ,$$

enfin :

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ , } fh = f \text{ et } gh = g \implies h = 1) \quad ;$$

on en déduit immédiatement que, si α est injectif et d'image riche, pour f et $g \in \mathfrak{A}$:

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \iff Z(\alpha f) \cap Z(\alpha g) = \emptyset \quad \text{et} \quad Z(f) \subset Z(g) \iff Z(\alpha f) \subset Z(\alpha g) \quad .$$

Alors : si $\overline{Z(f)}$ et $\overline{Z(g)}$ sont des compacts disjoints, il existe f_1 et $g_1 \in \mathfrak{A}$ avec

$$\overline{Z(f)} \subset Z(f_1) \text{ , } \overline{Z(g)} \subset Z(g_1) \quad \text{et} \quad Z(f_1) \cap Z(g_1) = \emptyset \quad ;$$

donc, il existe h et $k \in \mathfrak{A}$ tels que

$$f_1\, h = f_1 \text{ , } g_1\, k = g_1 \text{ , } Z(f) \subset Z(h) \quad \text{et} \quad Z(g) \subset Z(k) \quad ;$$

finalement : $\alpha(h)$ et $\alpha(k) \in \mathcal{C}(F)$, $\alpha(f_1)\, \alpha(h) = \alpha(f_1)$, $\alpha(g_1)\, \alpha(k) = \alpha(g_1)$, $Z(\alpha f) \subset Z(\alpha h)$, $Z(\alpha g) \subset Z(\alpha k)$ et $Z(\alpha f_1) \cap Z(\alpha g_1) = \emptyset$, donc

$$\overline{Z(\alpha f)} \subset Z(\alpha f_1) \text{ , } \overline{Z(\alpha g)} \subset Z(\alpha g_1) \quad \text{et} \quad Z(\alpha f_1) \cap Z(\alpha g_1) = \emptyset \quad ,$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 5. - Soient E un espace compact, F un espace topologique, $\mathfrak{A}$ un monoïde riche de $\mathcal{C}(E)$, et α un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{C}(F)$:

(1) si α est régulier et $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, alors $E = \overline{\tilde{\alpha}(F)}$,

(2) si α est injectif (6) d'image riche, alors α est régulier,

(3) si, de plus, F est localement compact, $\tilde{\alpha}$ est injectif.

---

(6) Cette condition peut être remplacée par $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$ en utilisant, les caractérisations pour F compact (cf. [2]) :

$$Z(f) \subset Z(g) \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ et } fh = 0 \implies gh = 0)$$

et

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ et } fh = 0 = hg \implies h = 0) \quad .$$

En effet :

(1) Si $x \in E \setminus \overline{\tilde{\alpha}(F)}$, $\exists\, f \in \mathfrak{A}$: $f(x) = 1$ et $\overline{\tilde{\alpha}(F)} \subset Z(f)$, or

$$F = \tilde{\alpha}^{-1}(\overline{\tilde{\alpha}(F)}) \subset \tilde{\alpha}^{-1}(Zf) \subset Z(\alpha f) \quad ,$$

donc $\alpha(f) = 0$ et $\alpha^{-1}(0) \neq \{0\}$.

(2) D'une part, $0 \in \mathfrak{A}$ (prendre $K = E$), et si $\forall\; y \in F$, $\exists\; f \in \mathfrak{A}$;

$$\Phi \subset (\alpha f)^{-1}(0) \quad \text{et} \quad y \in Z(\alpha f) \;;$$

or $\alpha(0) = \alpha(0.f) = \alpha(0).\alpha(f)$ implique $(\alpha(0))(y) = 0$, contradictoire à $x \in Z(\alpha f)$.

D'autre part, soient $a \neq b$ dans E , $\exists$ f et $g \in \mathfrak{A}$:

$$a \in Z(f) \;, \quad b \in Z(g) \quad \text{et} \quad \overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \emptyset \quad ,$$

mais alors $\overline{Z(\alpha f)} \cap \overline{Z(\alpha g)} = \emptyset$ d'après le lemme, donc

$$\varphi(a) \cap \varphi(b) = \emptyset \quad .$$

(3) De même, soient $u \neq v$ dans F , il existe f et $g \in \mathfrak{A}$ tels que

$$u \in Z(\alpha f) \;, \quad v \in Z(\alpha g) \quad \text{et} \quad \overline{Z(\alpha f)} \cap \overline{Z(\alpha g)} = \emptyset \quad ,$$

de plus F étant localement compact, on peut prendre $\overline{Z(\alpha f)}$ et $\overline{Z(\alpha g)}$ compacts, donc

$$\overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \emptyset \quad ;$$

or $\tilde{\alpha}(u) \in \overline{Z(f)}$ et $\tilde{\alpha}(v) \in \overline{Z(g)}$, donc $\tilde{\alpha}(u) \neq \tilde{\alpha}(v)$. En effet :

$$Z(\alpha f) \subset \tilde{\alpha}^{-1}(\overline{Zf}) = \bigcap_{\{h \in \mathfrak{A} ;\, \overline{Z(f)} \subset Z(h)\}} Z(\alpha h) \quad ,$$

car $Z(h) \supset \overline{Z(f)} \supset Z(f)$ implique $Z(\alpha h) \supset Z(\alpha f)$.

THÉORÈME 6. - Soient E et F deux espaces compacts ; à tout isomorphisme α entre deux monoïdes riches de $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}(F)$, est associé un homéomorphisme entre E et F .

Il y a deux démonstrations possibles :

Première méthode. - D'après (2), α , α^{-1} , $\alpha . \alpha^{-1}$ et $\alpha^{-1} . \alpha$ sont réguliers, donc :

$$\tilde{\alpha} \circ \widetilde{\alpha^{-1}} = \widetilde{\alpha^{-1} . \alpha} = \text{identité}_E \quad ,$$

$$\widetilde{\alpha^{-1}} \circ \tilde{\alpha} = \widetilde{\alpha . \alpha^{-1}} = \text{identité}_F \quad ,$$

et $\tilde{\alpha}$ est bijective continue, ainsi que son inverse $\widetilde{\alpha^{-1}}$.

Deuxième méthode. – D'après (2), α est régulier ; $\tilde{\alpha}(F)$, image continue d'un compact, est fermée, donc $\tilde{\alpha}$ est surjective d'après (1) ; enfin d'après (3), $\tilde{\alpha}$ est injective.

Finalement, $\tilde{\alpha}$, bijection continue d'un compact sur un séparé, est une homéomorphie.

Remarque. – En général, $\alpha(f) \not\equiv f \circ \tilde{\alpha}$.

Exemple [7] : $E = F$, $\mathfrak{a} = \mathcal{C}_+(E)$, soit $p \in \mathcal{C}(E,]0, \infty[) \setminus \{1\}$, prendre $\alpha(f) = f^p \in \mathcal{C}(E)$.

Troisième partie

Achevons par quelques compléments.

PROPOSITION 7. – *Soient E et F des espaces topologiques, $\mathfrak{a}$ une algèbre riche* [8] *de $\mathcal{C}(E)$; si E est séparé, alors tout homomorphisme d'algèbres unitaire α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$ est régulier ; si de plus E est compact et si $f \in \mathfrak{a}_+$ et $f^{-1}(0) = \emptyset$ impliquent $1/f \in \mathfrak{a}$, alors $\forall f \in \mathfrak{a}$, $\alpha(f) = f \circ \tilde{\alpha}$.*

En effet : soient $a \neq b$ dans E, E étant séparé, il existe un voisinage fermé A de b tel que $a \notin A$, donc $\exists f \in \mathfrak{a}$: $A \subset f^{-1}(1)$ et $a \in Z(f)$; alors $b \in Z(1 - f)$, or

$$\overline{Z(\alpha f)} \cap \overline{Z(\alpha(1 - f))} \subset (\alpha f)^{-1}\ (0) \cap (1 - \alpha f)^{-1}\ (0) = \emptyset\ ,$$

donc α est régulier.

Puis, soit $f \in \mathfrak{a}$, $\operatorname{Ker} \alpha(f) \subset \operatorname{Ker} f \circ \tilde{\alpha}$; en effet :

$$(f \circ \tilde{\alpha})^{-1}\ (0) = \tilde{\alpha}^{-1}(f^{-1}(0)) = \bigcap_{\{g \in \mathfrak{a} ; f^{-1}(0) \subset Z(g)\}} Z(\alpha g) \supset (\alpha f)^{-1}\ (0)\ ,$$

car, si $f^{-1}(0) \subset Z(g)$, il existe $h \in \mathfrak{a}$ tel que : $f^{-1}(0) \subset h^{-1}(1)$ et $\complement\, Z(g) \subset Z(h)$, donc $gh = 0$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + h^2) = \emptyset$; alors $1/(f^2 + h^2) \in \mathfrak{a}$ et $\alpha(f^2 + h^2) . \alpha(1/(f^2 + h^2)) = \alpha(1) = 1$, d'où $\operatorname{Ker} \alpha(f^2 + h^2) = \emptyset$; or :

$$\alpha(f^2 + h^2) = \alpha(f)^2 + \alpha(h)^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha(g) . \alpha(h) = \alpha(gh) = \alpha(0) = 0\ ,$$

---

(7) R. SPECTOR a, du reste, donné un exemple (cf. [2]) où α est un isomorphisme d'algèbres.

(8) La démonstration est donnée dans le cas réel ; pour le cas complexe, il convient de supposer $\mathfrak{a}$ et α autoconjugués.

donc

$$(\alpha f)^{-1}\ (0) \subset \complement\ (\alpha h)^{-1}\ (0) \qquad \text{et} \qquad \complement\ (\alpha h)^{-1}\ (0) \subset Z(\alpha g) \ .$$

Finalement, $\forall\ t \in \underset{\sim}{R}$,

$(\alpha f)^{-1}\ (t) = \mathrm{Ker}(t1 - \alpha f) = \mathrm{Ker}\ \alpha(t1 - f) \subset \mathrm{Ker}(t1 - f) \circ \tilde{\alpha} = \mathrm{Ker}(t1 - f \circ \tilde{\alpha})$,

soit $(\alpha f)^{-1}\ (t) \subset (f \circ \tilde{\alpha})^{-1}\ (t)$, d'où $\alpha(f) = f \circ \tilde{\alpha}$.

PROPOSITION 8. - Soient E un espace compact, avec $1 < \mathrm{card}(E)$, F un espace topologique, $\mathfrak{A}$ un monoïde, et α un homomorphisme régulier de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{C}(F)$; une condition nécessaire et suffisante pour que, $\forall\ f \in \mathfrak{A}$, $\alpha(f) = f \circ \tilde{\alpha}$ est que α se prolonge à $\mathcal{C}(E)$ en un homomorphisme d'algèbres.

La condition nécessaire est immédiate.

Réciproquement : soit $\beta : \mathcal{C}(E) \longrightarrow \mathcal{C}(F)$ un homomorphisme d'algèbres ; si β prolonge α , alors $\beta(1) = 1$, en effet :

$$\beta(1) = \beta(1.1) = \beta(1).\beta(1)$$

implique $\mathrm{Im}\ \beta(1) \subset \{0\ ,\ 1\}$, donc $\mathrm{Ker}\ \beta(1)$ est ouvert ; or, pour tout $f \in \mathfrak{A}$,

$$\alpha(f) = \beta(f) = \beta(1.f) = \beta(1).\beta(f) \ ,$$

donc $\mathrm{Ker}\ \alpha(f) \supset \mathrm{Ker}\ \beta(1)$, d'où

$$Z(\alpha f) \supset \mathrm{Ker}\ \beta(1) \ ;$$

soient alors $a \neq b$ dans E , $\mathrm{Ker}\ \beta(1) \subset \varphi(a) \cap \varphi(b) = \emptyset$, d'où

$$\mathrm{Im}\ \beta(1) = \{1\} \ .$$

Alors, E étant compact, donc normal, $\mathcal{C}(E)$ est riche, et par suite, d'après la proposition 7 : $\forall\ f \in \mathcal{C}(E)$,

$$\beta(f) = f \circ \tilde{\beta} \ .$$

De plus, $\forall\ f \in \mathfrak{A}$, $\tilde{\beta}^{-1}(Zf) \subset Z(\beta f) = Z(\alpha f)$, donc $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$, et $\forall\ f \in \mathfrak{A}$,

$$\alpha(f) = \beta(f) = f \circ \tilde{\alpha} \ .$$

PROPOSITION 9. - Soient $(E\ ,\ d)$ et $(F\ ,\ \delta)$ des métriques ; supposons E compact, ainsi $\mathrm{lip}(E)$ est une algèbre ; tout homomorphisme d'algèbres unitaire α de $\mathrm{lip}(E)$ dans $\mathcal{C}(F)$ est régulier ; si, de plus, $\mathrm{Im}\ \alpha \subset \mathrm{lip}\ F$, alors $\tilde{\alpha}$ est lipschitzienne.

En effet : $\mathrm{lip}(E)$ est riche, car soient A fermé et $a \in E \setminus A$, par locale compacité, il existe un voisinage compact K de a tel que $K \cap A = \emptyset$, donc $d(A\ ,\ K) > 0$; posons :

$$f : x \in E \longrightarrow \min\{1 , \frac{d(x , K)}{d(A , K)}\} \in [0 , \infty[,$$

alors $f \in \mathrm{lip}(E)$, $A \subset f^{-1}(1)$ et $x \in \mathring{K} = Z(f)$.

D'autre part, E étant compact, si $f \in \mathrm{lip}(E)$ et $f^{-1}(0) = \emptyset$, $1/f$ est lipschitzienne (et même $|||1/f||| \leqslant |||f||| \cdot \|1/f\|$) ; finalement α est régulier, et $\forall\ f \in \mathrm{lip}(E)$,

$$\alpha(f) = f \circ \tilde{\alpha} ,$$

d'où il résulte, si $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \mathrm{lip}(F)$, que :

$$\mathrm{Im}\,\alpha \subset \mathcal{B} = \{g \in \mathcal{C}(F) \ ; \ \|g\| + |||g||| < \infty\}$$

avec

$$\|g\| = \sup_{F} |g(y)| \qquad \text{et} \qquad |||g||| = \sup_{F\times F} \frac{|g(u) - g(v)|}{\delta(u , v)} .$$

Or on sait que $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach semi-simple, donc α est continue ; en particulier :

$$\forall\ f \in \mathrm{lip}(E) , \qquad |||f \circ \tilde{\alpha}||| < |||\alpha||| \cdot (\|f\| + |||f|||) .$$

Par suite, soient $u \neq v$ dans F , comme pour

$$f : x \in E \longrightarrow d(x , \tilde{\alpha}(v)) \in [0 , \infty[,$$

on a

$$\|f\| = \sup_{E} d(x , \tilde{\alpha}(x)) \leqslant r = \mathrm{diam}(E) < \infty \qquad \text{et} \qquad |||f||| = 1 ,$$

il vient :

$$\frac{d(\tilde{\alpha}(u) , \tilde{\alpha}(v))}{\delta(u , v)} = \frac{|f \circ \tilde{\alpha}(u) - f \circ \tilde{\alpha}(v)|}{\delta(u , v)} \leqslant (1 + r) \cdot |||\alpha||| < \infty .$$

<u>Remarque</u>. - De même : soient E et F des variétés différentiables de classe $\mathcal{C}^n$, E étant compacte, et α un homomorphisme d'algèbres unitaire de $\mathcal{C}^n(E)$ dans $\mathcal{C}^n(F)$; alors $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}^n(F , E)$.

En effet : E étant compacte, $\dim(E)$ est finie et il y a partition différentiable de l'unité, donc $\mathcal{C}^n(E)$ est riche ; de plus, si $f \in \mathcal{C}^n(E)$ et $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors $1/f \in \mathcal{C}^n(E)$. Finalement, pour toute coordonnée f ,

$$f \circ \tilde{\alpha} = \alpha(f) \in \mathcal{C}^n(F) ,$$

donc $\tilde{\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Appendice

Soient E un espace topologique, f et $g \in \mathcal{C}(E)$. Remarquons d'abord que :

$$fg = f \iff g^{-1}(1) \supset \complement\, Z(f) \quad .$$

Alors :

$$Z(f) \subset Z(g) \implies (h \in \mathcal{C}(E) \text{ et } fh = f \implies gh = g) \quad ,$$

en effet, soit $h \in \mathcal{C}(E)$, si $fh = f$, alors $gh = g$, car

$$h^{-1}(1) \supset \complement\, Z(f) \supset \complement\, Z(g) \quad ;$$

puis :

$$h \in \mathcal{C}(E) \text{ , } gh = g \text{ et } Z(f) \subset Z(h) \implies \overline{Z(f)} \subset Z(g) \quad ,$$

en effet

$$\overline{Z(f)} \subset \overline{Z(h)} \subset h^{-1}(0) \subset \complement\, h^{-1}(1) \subset Z(g) \quad ;$$

enfin :

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \implies (h \in \mathcal{C}(E) \text{ , } fh = f \text{ et } gh = g \implies h = 1) \quad ,$$

en effet, soit $h \in \mathcal{C}(E)$, si $fh = f$ et $gh = g$, alors

$$h^{-1}(1) \supset \complement\, Z(f) \cup \complement\, Z(g) = \complement(Zf \cap Zg) = E \quad .$$

Soit $\mathfrak{A}$ un monoïde riche de $\mathcal{C}(E)$. Alors :

$$Z(f) \subset Z(g) \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ et } fh = f \implies gh = g) \quad ,$$

en effet, si $Z(f) \not\subset Z(g)$, soit $x \in Z(f) \setminus Z(g)$, alors

$$\exists\, h \in \mathfrak{A} : \complement\, Z(f) \subset h^{-1}(1) \text{ et } x \in Z(h) \quad ,$$

donc $fh = f$, mais $gh \neq g$, car $x \in \complement\, Z(g) \setminus h^{-1}(1)$.

Puis $Z(g) \supset \overline{Z(f)}$, $\overline{Z(f)}$ compact $\implies \exists\, h \in \mathfrak{A} :$ $gh = g$ et $Z(f) \subset Z(h)$,

en effet, $\exists\, h \in \mathfrak{A} :$ $\complement\, Z(g) \subset h^{-1}(1)$ et $\overline{Z(f)} \subset Z(h)$.

Enfin $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \iff (h \in \mathfrak{A} \text{ , } fh = f \text{ et } gh = g \implies h = 1)$,

en effet, si $Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset$, soit $x \in Z(f) \cap Z(g)$, alors

$$\exists\, h \in \mathfrak{A} : \complement(Zf \cap Zg) \subset h^{-1}(1) \text{ et } x \in Z(h) \quad ,$$

donc $h \neq 1$, mais $\complement\, Z(f) \cup \complement\, Z(g) \subset h^{-1}(1)$, d'où

$$fh = f \qquad \text{et} \qquad gh = g \quad .$$

Pour terminer : soient E et F des espaces topologiques, $\mathfrak{A}$ un monoïde riche de $\mathcal{C}(E)$, et α une injection homomorphe d'image riche de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{C}(F)$. Pour f et $g \in \mathfrak{A}$,

$$Z(f) \subset Z(g) \iff Z(\alpha f) \subset Z(\alpha g) \quad ,$$

car

$$Z(\alpha f) \subset Z(\alpha g) \iff \left(\left.\begin{matrix} h \in \mathfrak{A} \\ \alpha(f) . \alpha(h) = \alpha(f) \end{matrix}\right\} \implies \alpha(g) . \alpha(h) = \alpha(g) \right)$$

$$\iff (h \in \mathfrak{A} \text{ et } fh = f \implies g . h = g) \quad ;$$

d'autre part :

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \iff Z(\alpha f) \cap Z(\alpha g) = \emptyset \quad ,$$

car

$$Z(\alpha f) \cap Z(\alpha g) = \emptyset \iff \left(h \in \mathfrak{A} \text{ et } \left.\begin{matrix} \alpha(f) . \alpha(h) = \alpha(f) \\ \alpha(g) . \alpha(h) = \alpha(g) \end{matrix}\right\} \implies \alpha(h) = 1 \right)$$

$$\iff (h \in \mathfrak{A} \, , \ fh = f \text{ et } gh = g \implies h = 1) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GILLMAN (L.) and JERISON (M.). - Rings of continuous functions. - Princeton, Van Nostrand, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[2] LEDUC (Michel). - Séminaire d'Analyse harmonique de la Faculté des Sciences d'Orsay, 1965/66, exposé n° 3.

[3] MILGRAM (A. N.). - Multiplicative semigroups of continuous functions. - Duke math. J., t. 16, 1949, p. 377-383.

[4] SPECTOR (René). - Caractérisation des espaces compacts par certains semi-groupes de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 1396-1399.