Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Haïm R. Brezis

Les opérateurs monotones

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 2 (1965-1966), exp. n° 10, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_2_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 10

24 mars, 14 et 21 avril 1966

LES OPÉRATEURS MONOTONES

par Haïm R. BREZIS

La théorie des opérateurs monotones a pour objet l'étude des solutions de certaines équations non linéaires dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Les méthodes employées jusqu'à présent utilisaient surtout la compacité et conduisaient à des théorèmes de point fixe, tels que le théorème de Schauder, et à la notion de degré topologique. Elles sont fondées sur le principe suivant : Remplacer le problème, à l'aide de la compacité, par un problème approché en dimension finie.

Dans la théorie des opérateurs monotones, on se ramène à un problème en dimension finie par projection sur des sous-espaces de dimension finie. Ceci permet de s'affranchir de l'hypothèse de compacité ; mais il faut la remplacer par des conditions de continuité.

La théorie a été développée par G. J. MINTY et surtout par F. BROWDER (on trouvera dans [8] une importante bibliographie) en vue d'applications aux équations intégrales et aux équations aux dérivées partielles.

Récemment, J. LERAY et J.-L. LIONS dans [13], et P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA dans [11] ont démontré des résultats plus généraux que ceux de F. BROWDER, sans toutefois les englober complètement.

L'objet de cet exposé est de présenter une synthèse de ces résultats et de donner quelques applications des méthodes de compacité et de monotonie.

Préliminaire sur les espaces uniformément convexes.

DÉFINITION (N. BOURBAKI [4], chap. 5, § 1, exercice 15). - On dit qu'un espace normé E est <u>uniformément convexe</u> si, pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 2$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ et $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ impliquent

$$\|x + y\| \leqslant 2 - \delta \quad .$$

On démontre qu'un espace uniformément convexe vérifie les propriétés suivantes :

1° E est <u>strictement convexe</u>, c'est-à-dire que les relations $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $x \neq y$ impliquent

$$\|tx + (1 - t)y\| < 1 \qquad \forall\ t \in]0\ ,\ 1[\quad .$$

2° Si un filtre x_i converge faiblement vers x, et si $\|x_i\|$ converge vers $\|x\|$, alors x_i converge fortement vers x.

3° Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

4° Dans un espace de Banach uniformément convexe, tout point admet une projection unique sur tout convexe fermé.

Exemples. - Les espaces de Hilbert, les espaces L_p, pour $1 < p < \infty$, sont des espaces uniformément convexes.

I. Exemples et propriétés élémentaires des opérateurs monotones.

DÉFINITION. - Soient E un Banach réel, E' son dual, et X un sous-ensemble de E. On dit qu'une application F de X dans E' est monotone sur X si

$$(Fx - Fy, x - y) \geqslant 0 \qquad \forall\, x, y \in X .$$

I.1. Exemples et caractérisations d'applications monotones.

1° Soient H un Hilbert, et X un convexe fermé de H. L'application P_X, projection de H sur X, est monotone. Plus précisément

$$(P_X x - P_X y, x - y) \geqslant \|P_X x - P_X y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in H .$$

En effet, on a

$$(x - P_X x, u - P_X x) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X, \tag{1}$$

$$(y - P_X y, u - P_X y) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X . \tag{2}$$

On fait $u = P_X y$ dans (1), et $u = P_X x$ dans (2) ; par addition de (1) et (2), on obtient le résultat.

2° Soit $H = L_2(0, 1)$. L'application $u \in H \longmapsto Fu(t) = \int_0^t u(s)\, ds$ est monotone ; en effet,

$$(Fu, u) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 u(t)\, dt\right]^2 .$$

3° Les applications de dualité : ce sont des applications monotones "canoniques" de E dans E'. Soient E un Banach et $x \in E$, posons :

$$\begin{aligned} Jx &= \{y \in E' ;\ (y, x) = \|x\|^2 \text{ et } \|y\| = \|x\|\} , \\ &= \{y \in E' ;\ (y, x) = \|x\|^2 \text{ et } \|y\| \leqslant \|x\|\} . \end{aligned}$$

Jx est un convexe fermé non vide (d'après HAHN-BANACH) de E'. Si E' est strictement convexe, Jx est réduit à un point, et l'on désigne par J l'application de dualité $x \in E \longmapsto Jx \in E'$.

Propriétés de J :

- J est monotone ; plus précisément $(Jx - Jy , x - y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2$, car

$$(Jx - Jy , x - y) = \|x\|^2 - (Jx , y) - (Jy , x) + \|y\|^2 \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 .$$

- J est continue de E fort dans E' faible ; en effet, si J n'est pas continue au point $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U de Jx dans E' faible et un ultrafiltre x_i sur E tels que $x_i \longrightarrow x$ dans E fort, $Jx_i \notin U$ et $Jx_i \longrightarrow y$ dans E' faible avec $y \notin U$. Par suite,

$$(Jx_i , x_i) = \|x_i\|^2 \longrightarrow (y , x) = \|x\|^2$$

et

$$\|y\| \leqslant \liminf \|Jx_i\| = \|x\| .$$

D'où $y = Jx \in U$, ce qui est absurde.

Remarquons que si E' est uniformément convexe, J est continue de E fort dans E' fort.

4° Caractérisations de certaines applications monotones.

DÉFINITION. - Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, $x \in E_1$, et U un voisinage de x. On dit qu'une application f de U dans E_2 est différentiable au sens de GATEAUX au point x si, pour tout $y \in E_1$, l'application

$$t \longmapsto f(x + ty)$$

est dérivable au point $t = 0$. Soit $f'(x).y$ cette dérivée ; on suppose que l'application $y \longmapsto f'(x).y$ est linéaire et continue de E_1 dans E_2.

PROPOSITION 1. - Soient E un Banach, Ω un ouvert convexe de E, et f une fonction numérique sur Ω, différentiable au sens de GATEAUX. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est convexe.

(2) L'application $x \in \Omega \longmapsto f'(x) \in E'$ est monotone sur Ω.

Démonstration. - Soient $x , y \in \Omega$ et $\varphi(t) = f[tx + (1 - t)y]$.

(1) $\Longrightarrow$ (2). L'hypothèse entraîne que φ est convexe et dérivable sur $[0 , 1]$ avec

$$\varphi'(t) = f'[tx + (1 - t)y](x - y) \quad .$$

Donc φ' est croissante et par suite $\varphi'(0) \leqslant \varphi'(1)$, d'où

$$(f'x - f'y \, , \, x - y) \geqslant 0 \qquad \forall \, x \, , \, y \in \Omega \quad .$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). L'hypothèse entraîne que φ est dérivable avec φ' croissante. Par suite φ est convexe et donc f aussi.

PROPOSITION 2. - Soient E un Banach, Ω un ouvert convexe de E , et F une application de Ω dans E' , différentiable au sens de GATEAUX. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) F est monotone dans Ω .

(2) $(F'(a).x \, , \, x) \geqslant 0 \, , \quad \forall \, a \in \Omega \, , \quad \forall \, x \in E$.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2). On a

$$F'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tx) - F(a)}{t} \quad ,$$

d'où

$$(F'(a).x \, , \, x) = \lim_{t \to 0} \frac{(F(a + tx) - F(a) \, , \, x)}{t} \quad .$$

Mais $(F(a + tx) - F(a) \, , \, tx) \geqslant 0$, et donc $(F'(a).x \, , \, x) \geqslant 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Soient $x \, , \, y \in \Omega$ et $\varphi(t) = F[tx + (1 - t)y]$. L'hypothèse entraîne que φ est dérivable avec

$$\varphi'(t) = F'[tx + (1 - t)y].(x - y) \quad .$$

D'où $\varphi'(t).(x - y) \geqslant 0$; la fonction $\psi(t) = \varphi(t).(x - y)$, ayant pour dérivée $\psi'(t) = \varphi'(t).(x - y)$, est croissante. En particulier $\psi(1) \geqslant \psi(0)$, ou encore $(Fx - Fy \, , \, x - y) \geqslant 0$.

I.2. Propriétés élémentaires des applications monotones.

DÉFINITION. - Soient E un Banach et $x \in E$. On dit que $S \subset E$ entoure x si $x \notin S$ et si toute demi-droite issue de x rencontre S .

PROPOSITION 3. - Soient E un Banach, $x_0 \in E$, S entourant x_0 , et F une application monotone de $S \cup \{x_0\}$ dans E' . Alors $Fx_0 \in \overline{c[F(S)]}$: enveloppe convexe fermée de F(S) dans E' faible.

Démonstration. - Supposons que $Fx_0 \notin \overline{c[F(S)]}$. Il existe $u \in E$ (d'après HAHN-BANACH) tel que

$$(Fx , u) < (Fx_0 , u) \qquad \forall\, x \in S \ .$$

Mais la demi-droite $x_0 + \lambda u$, $\lambda > 0$, rencontre S en un point $x_0 + \lambda_0 u$. On a

$$(F(x_0 + \lambda_0 u) - F(x_0) , \lambda_0 u) \geqslant 0 \ ;$$

d'où $(Fx_0 , u) \leqslant (F(x_0 + \lambda_0 u) , u)$. Ce qui est absurde.

Pour obtenir des théorèmes sur l'existence de solutions de l'équation $Fx = 0$, il est naturel de faire, en plus de la monotonie, une hypothèse de continuité. Il suffit d'imposer une condition de continuité très faible pour avoir des résultats satisfaisants.

DÉFINITION. - Soient E un Banach, et X un convexe de E . On dit qu'une application F de X dans E' est hémicontinue si les restrictions de F aux segments de X sont continues dans E' faible.

PROPOSITION 4. - *Soient E un Banach, X un convexe de E , et F une application monotone hémicontinue de X dans E' . Soient $x \in X$ et $y \in E'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(y - Fu , u - x) \leqslant 0$, $\forall\, u \in X$.
(2) $(y - Fx , u - x) \leqslant 0$, $\forall\, u \in X$.
(3) Si $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$, $(y - Fu , u - x) \leqslant 0$, $\forall\, u \in \overset{\circ}{X}$ (intérieur de X).

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Soient $u \in X$ et $v_t = tu + (1 - t)x$, $t \in]0 , 1[$. D'après l'hypothèse,

$$(y - Fv_t , v_t - x) = t(y - Fv_t , u - x) \leqslant 0 \ .$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, on a

$$(y - Fx , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X \ .$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). $(y - Fu , u - x) = (y - Fx , u - x) + (Fx - Fu , u - x) \leqslant 0$.

Supposons que $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. (1) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

Montrons que (3) $\Longrightarrow$ (2) . Soit $u \in \overset{\circ}{X}$, donc $v_t \in \overset{\circ}{X}$ pour $t \in]0 , 1[$. D'après l'hypothèse, $(y - Fv_t , v_t - x) \leqslant 0$; en passant à la limite quand $t \to 0$, on a

$$(y - Fx , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{X} \;;$$

mais $\overline{\overset{\circ}{X}} = \overline{X}$, d'où

$$(y - Fx , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X \;.$$

COROLLAIRE 5. - Soient E un Banach, X un convexe partout dense de E , et F une application monotone hémicontinue de X dans E' . Alors $\forall\, y \in E'$, $F^{-1}(y)$ est un convexe fermé de X .

Démonstration.

$$x \in F^{-1}(y) \iff (y - Fx , u - x) \leqslant 0 , \;\forall\, u \in X$$

$$\iff (y - Fu , u - x) \leqslant 0 , \;\forall\, u \in X \;.$$

Ce qui montre que $F^{-1}(y)$ est la trace sur X d'une intersection de demi-espaces fermés.

Remarques.

1° L'image ou l'image réciproque d'un convexe par une application monotone hémicontinue n'est pas en général un convexe.

2° L'hypothèse " F hémicontinue" est essentielle dans le corollaire 5 ; par exemple, tout sous-ensemble d'un hyperplan fermé peut être considéré comme l'image réciproque d'un point par une application monotone (non hémicontinue).

PROPOSITION 6. - Soient E un Banach, et F une application monotone hémicontinue de E dans E' . Pour tout filtre x_i sur E , tel que $x_i \longrightarrow x$ dans E faible, $Fx_i \longrightarrow y$ dans E' faible et $\limsup (Fx_i , x_i) \leqslant (y , x)$, on a $Fx = y$.

Démonstration. - $(Fx_i - Fu , x_i - u) \geqslant 0$, $\forall\, u \in E$; d'où, en passant à la limite, $(y - Fu , x - u) \geqslant 0$, $\forall\, u \in E$. Donc $Fx = y$ d'après la proposition 4.

COROLLAIRE 7. - Soit E un Banach ; toute application A linéaire positive de E dans E' (c'est-à-dire que $(Ax , x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in E$) est continue.

Démonstration. - A est monotone hémicontinue, donc, d'après la proposition 6, son graphe est fermé dans $E \times E'$.

COROLLAIRE 8. - Soient H un Hilbert, P le cône convexe des applications linéaires positives de H dans H , et $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H . On a $\mathcal{L}(H) = P - P$.

<u>Démonstration</u>. - D'après le corollaire 7, $P - P \subset \mathcal{L}(H)$. Inversement, soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'application $x \longmapsto Ax + \|A\|x$ est linéaire positive et

$$Ax = Ax + \|A\|x - \|A\|x \quad .$$

PROPOSITION 9. - <u>Soient</u> E <u>un Banach, et</u> F <u>une application monotone hémicontinue de</u> E <u>dans</u> E'. <u>Les restrictions de</u> F <u>aux sous-espaces de dimension finie de</u> E <u>sont continues dans</u> E' <u>faible</u>.

<u>Démonstration</u>. - Si $\dim E < \infty$, la proposition 6 exprime que le graphe de F est fermé. Il suffit donc de montrer que F est bornée (c'est-à-dire transforme les bornés en des bornés). Supposons que F ne soit pas bornée ; il existe une suite x_n de E telle que

$$x_n \longrightarrow x \; , \qquad \|Fx_n\| \longrightarrow \infty \qquad \text{et} \qquad z_n = \frac{Fx_n}{\|Fx_n\|} \longrightarrow z \quad \text{avec} \quad \|z\| = 1 \quad .$$

D'autre part, $(Fx_n - Fu \, , \, x_n - u) \geqslant 0$, $\forall\, u \in E$. D'où, en divisant par $\|Fx_n\|$ et en passant à la limite, on a $(z \, , \, x - u) \geqslant 0$, $\forall\, u \in E$; donc $z = 0$, ce qui est absurde. Dans le cas général, soient E_0 un sous-espace de dimension finie de E et $u \in E$. Montrons que l'application $x \in E_0 \longmapsto (Fx \, , \, u)$ est continue. Soient E_1 l'espace engendré par E_0 et u, j l'injection canonique de E_1 dans E, et j^* son adjoint de E' sur E_1'. Il est évident que $j^* F j$ est une application monotone hémicontinue de E_1 dans E_1'. D'après ce qui précède, $j^* F j$ est continue ; donc $x \in E_0 \longmapsto (Fx \, , \, u)$ aussi.

<u>Remarque</u>. - Les propositions 6 et 9 ne s'étendent pas à des applications monotones hémicontinues définies seulement sur un sous-ensemble convexe. Aussi est-on conduit à introduire deux généralisations de la notion d'application monotone : les applications de type M et les applications demi-monotones, ces dernières moins générales étant mieux adaptées à l'étude d'applications définies uniquement sur un convexe.

II. Les applications de type M.

II.1. Définition et propriétés des applications de type M.

DÉFINITION. - Soient E un Banach, et X un sous-ensemble de E. On dit qu'une application F de X dans E' est de <u>type</u> M si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(M_1) Pour tout filtre x_i porté par un ensemble borné de X tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible, $Fx_i \longrightarrow y$ dans E' faible et $\limsup(Fx_i , x_i) \leqslant (y , x)$, on a $Fx = y$.

(M_2) Les restrictions de F aux traces sur X des sous-espaces de dimension finie sont continues dans E' faible.

Remarques.

1° Si E est un Banach réflexif séparable et si F est bornée, il est équivalent de formuler (M_1) avec des suites ; en effet, les traces des topologies faibles sur les ensembles bornés sont métrisables.

2° Les propriétés (M_1) et (M_2) sont en général indépendantes, mais elles sont parfois liées. Par exemple, si $\dim E < \infty$, $(M_2) \Longrightarrow (M_1)$; si F est bornée, $(M_1) \Longrightarrow (M_2)$; plus précisément :

PROPOSITION 10. - Soient E un Banach, $X \subset E$, et F une application bornée de X dans E', vérifiant (M_1), alors F est continue de X fort dans E' faible.

Démonstration. - Soit x_i un filtre sur X tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X fort. Suivant un ultrafiltre plus fin $x_i \longrightarrow x$ dans X fort, $Fx_i \longrightarrow y$ dans E' faible et $(Fx_i , x_i) \longrightarrow (y , x)$; donc $Fx = y$. Ceci montre que, suivant tout ultrafiltre plus fin, $Fx_i \longrightarrow Fx$ dans E' faible ; d'où le résultat.

PROPOSITION 11. - Soient E un Banach, $X \subset E$ faiblement compact, et F une application de type M de X dans E'. Alors $F(X)$ est fermé (dans E' fort).

Démonstration. - Soit $y \in \overline{F(X)}$, il existe un ultrafiltre x_i tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible, $Fx_i \longrightarrow y$ dans E' fort, $(Fx_i , x_i) \longrightarrow (y , x)$. D'où $Fx = y$.

THÉORÈME 12. - Soient E un Banach réflexif, $r > 0$,

$$B_r = \{x \in E \; ; \; \|x\| \leqslant r\} , \qquad S_r = \{x \in E \; ; \; \|x\| = r\} ,$$

et F une application de type M de B_r dans E' telle que $(Fx , x) \geqslant 0$, $\forall x \in S_r$. Alors il existe $x_0 \in B_r$ tel que $Fx_0 = 0$.

On utilisera, dans la démonstration, les lemmes suivants :

LEMME 13. - Soient E un Banach de dimension finie, X un convexe fermé borné de E, et F une application continue de X dans E'. Alors, $\forall y \in E'$, il existe $x \in X$ tel que $(y - Fx , u - x) \leqslant 0$, $\forall u \in X$.

Démonstration. - On identifie E avec E', et on les munit d'une structure hilbertienne ; soit P_X la projection sur X. L'inégalité $(y - Fx, u - x) \leqslant 0$, $\forall u \in X$, équivaut à $x = P_X(y - Fx + x)$. D'après le théorème de point fixe de Brouwer, un tel x existe.

LEMME 14. - Conclusion identique à celle du théorème 12, en supposant de plus $\dim E < \infty$.

Démonstration. - On applique le lemme 13 avec $X = B_r$ et $y = 0$. Il existe donc $x_0 \in B_r$ tel que $(Fx_0, u - x_0) \geqslant 0$, $\forall u \in B_r$. Si $x_0 \notin S_r$, $Fx_0 = 0$; et si $x_0 \in S_r$, $(Fx_0, u) \geqslant 0$, $\forall u \in B_r$. D'où $Fx_0 = 0$.

Démonstration du théorème 12. - Soit $\mathfrak{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de E de dimension finie. Soient j_i l'injection canonique de E_i dans E, et j_i^* son adjoint de E' sur E_i'. L'application $F_i = j_i^* F j_i$ est continue de $B_r \cap E_i$ dans E_i' et

$$(F_i x, x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in S_r \cap E_i .$$

Il existe donc $x_i \in B_r \cap E_i$ tel que $F_i x_i = 0$. On a

$$(F_i x_i, x_i) = (Fx_i, x_i) = 0$$

et $Fx_i \longrightarrow 0$ dans E' faible. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$. Comme E est réflexif, B_r est faiblement compact, et suivant $\mathcal{U}$, $x_i \longrightarrow x_0$ dans B_r faible, $Fx_i \longrightarrow 0$ dans E' faible, $(Fx_i, x_i) = 0$. D'où $Fx_0 = 0$.

II.2. Exemples d'applications de type $\mathcal{M}$.

1° Soient E un Banach, et F une ~~application~~ monotone ~~hémicontinue~~ de E dans E'. Les propositions 6 et 9 montrent que F est de type $\mathcal{M}$.

2° Soient E un Banach, et $X \subset E$. Toute application continue de X faible dans E' faible est de type $\mathcal{M}$. Le théorème 12 généralise un résultat de M. ALTMAN [1].

3° Soient H un Hilbert, $X \subset E$, et f une application compacte de X dans H (c'est-à-dire continue de X fort dans H fort, et qui applique les bornés dans des compacts). On vérifie aisément que $Fx = x - fx$ est de type $\mathcal{M}$. Le théorème 12 permet de retrouver un autre résultat de M. ALTMAN [2].

4° D'autres exemples d'applications de type $\mathcal{M}$ se trouvent dans III.2.

II.3. Corollaires du théorème 12.

COROLLAIRE 15. - Soient E un Banach réflexif, et F une application de type M de E dans E' telle que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(Fx\ ,\ x)}{\|x\|} = +\infty\ .$$

Alors F est surjective.

Démonstration. - Soient $y \in E'$, et $F_y\, x = Fx - y$. F_y est une application de E dans E' qui vérifie les mêmes hypothèses que F. On se ramène donc à montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $Fx_0 = 0$; ce qui est évident d'après le théorème 12.

On voit facilement, en reprenant la démonstration du théorème 12, qu'on aurait pu faire l'hypothèse : $(Fx\ ,\ x)$ conserve un signe constant sur S_r au lieu de $(Fx\ ,\ x) \geqslant 0$, $\forall\ x \in S_r$. D'autre part, si $\dim E \geqslant 2$, S_r est connexe et donc si $(Fx\ ,\ x) \neq 0$, $\forall\ x \in S_r$, $(Fx\ ,\ x)$ conserve un signe constant sur S_r. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 16. - Soient E un Banach réflexif avec $\dim E \geqslant 2$, et F une application de type M de E dans E' telle que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{|(Fx\ ,\ x)|}{\|x\|} = +\infty\ .$$

Alors F est surjective.

COROLLAIRE 17. - Soient E un Banach réflexif, et F une application hémicontinue de E dans E' telle que

$$(Fx - Fy\ ,\ x - y) \geqslant c\|x - y\|^2 \qquad \forall\ x\ ,\ y \in E\ , \text{ avec } c > 0\ .$$

Alors F est bijective, et de plus F^{-1} est lipschitzienne.

Démonstration. - F est monotone hémicontinue, donc de type M et

$$(Fx\ ,\ x) \geqslant c\|x\|^2 - \|F_0\|\ \|x\| \qquad \forall\ x \in E\ .$$

On déduit du corollaire 15 que F est surjective. Il est évident que F est injective, et F^{-1} lipschitzienne.

COROLLAIRE 18. - Soient E un Banach réflexif, et F une application hémicontinue de E dans E' telle que

$$(Fx - Fy\ ,\ x - y) \geqslant c(\|x\| - \|y\|)^2 \qquad \forall\ x\ ,\ y \in E\ ,\ \underline{\text{avec}}\quad c > 0\ .$$

Alors F est surjective.

Si, de plus, E est strictement convexe, F est bijective, et F^{-1} est monotone, bornée et continue de E' fort dans E faible.

Démonstration. - F est monotone hémicontinue, donc de type M, et de plus

$$(Fx\ ,\ x) \geqslant c\|x\|^2 - \|F_0\|\ \|x\| \qquad \forall\ x \in E\ .$$

On déduit du corollaire 15 que F est surjective.

Si E est strictement convexe, F est injective ; en effet, $Fx = Fy = a$ entraîne que $\|x\| = \|y\|$, et $x\ ,\ y \in F^{-1}(a)$ qui est convexe d'après le corollaire 5 ; ces conditions exigent $x = y$. F^{-1} est bornée puisque

$$\|F^{-1}\ u\| \leqslant \frac{1}{c}\ (\|u\| + \|F_0\|) \qquad \forall\ u \in E'\ .$$

Enfin F^{-1} est continue de E' fort dans E faible ; plus généralement, on vérifie aisément que si F est de type M, et si F^{-1} existe et est bornée, F^{-1} est de type M, donc continue de E' fort dans E faible d'après la proposition 10.

Remarquons que si E est uniformément convexe, F^{-1} est continue de E' fort dans E fort.

COROLLAIRE 19. - Soient E un Banach réflexif tel que E' soit strictement convexe, et F une application monotone hémicontinue de E dans E', telle que l'image réciproque de tout ensemble borné de E' soit un ensemble borné de E. Alors F est surjective.

Démonstration. - On se ramène à montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $Fx_0 = 0$. Soient $\varepsilon > 0$, et J l'application de dualité de E dans E'. On pose

$$F_\varepsilon\ x = Fx + \varepsilon Jx\ \ ;$$

F_ε est une application hémicontinue de E dans E' telle que

$$(F_\varepsilon\ x - F_\varepsilon\ y\ ,\ x - y) \geqslant \varepsilon(\|x\| - \|y\|)^2\ .$$

D'après le corollaire 18, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$F_\varepsilon\ x_\varepsilon = Fx_\varepsilon + \varepsilon Jx_\varepsilon = 0\ .$$

On a $\varepsilon\|x_\varepsilon\| \leqslant \|F_0\|$, et par suite $\varepsilon Jx_\varepsilon$ est borné, donc x_ε aussi.

Quand $\varepsilon \to 0$, $Fx_\varepsilon \to 0$ dans E' fort ; suivant un ultrafiltre plus fin, $x_\varepsilon \to x_0$ dans E faible, et donc $Fx_0 = 0$.

COROLLAIRE 20. - *Soient* E *un Banach réflexif tel que* E' *soit strictement convexe,* S *un sous-ensemble borné de* E *entourant* 0 , *et* F *une application monotone hémicontinue de* E *dans* E' *telle que* $(Fx , x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in S$. *Alors il existe* $x_0 \in \overline{c(S)}$ *tel que* $Fx_0 = 0$.

Démonstration. - Il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $F_\varepsilon x_\varepsilon = Fx_\varepsilon + \varepsilon J x_\varepsilon = 0$. Montrons que $x_\varepsilon \in \overline{c(S)}$; sinon il existe $u \in S$ et $\rho > 1$ tels que $x_\varepsilon = \rho u$. Mais

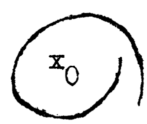
$$(Fx_\varepsilon - Fu , x_\varepsilon - u) \geqslant 0 \quad ;$$

d'où $(Fu , u) \leqslant - \varepsilon\rho\|u\|^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Quand $\varepsilon \to 0$, $Fx_\varepsilon \to 0$ dans E' fort ; suivant un ultrafiltre plus fin, $x_\varepsilon \to x_0$ dans E faible avec $x_0 \in \overline{c(S)}$ et $Fx_0 = 0$.

Remarques.

1° On démontre aisément, dans les deux corollaires précédents, que si E est uniformément convexe, les x_ε convergent fortement vers la projection de 0 sur $F^{-1}(0)$ (convexe fermé non vide).

2° La conclusion du corollaire 20 n'est pas valable, même en dimension finie, si F est seulement de type M . Pour le voir, il suffit de prendre $E = \mathbb{R}^2$ et un ensemble S de la forme



S est homéomorphe à un convexe fermé, et donc l'identité sur S se prolonge en une application continue F de E sur S telle que

$$(Fx , x) \geqslant 0 , \quad \forall\, x \in S \qquad \text{et} \qquad Fx \neq 0 , \quad \forall\, x \in E \ .$$

(Le résultat énoncé par F. BROWDER dans [6], théorème 5, paraît être incomplet.)

Toutefois, la conclusion du corollaire 20 reste valable pour des applications de type M , si S est la frontière d'un voisinage borné de 0 .

II.4. Cas d'addition d'applications de type M .

En général la somme de deux applications de type M n'est pas de type M , même si l'une d'elles est monotone.

Exemple. - Soit H un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_1(x) = - x$ est une application de type M ; et F_2 , projection de H sur la boule unité, est monotone continue. Montrons que $F = F_1 + F_2$ n'est pas de type M . Soit $x_n = e_0 + e_n$, $Fx_n = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)x_n$.

On a $x_n \to e_0$ dans H faible,

$$Fx_n \longrightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)e_0 \qquad \text{et} \qquad (Fx_n , x_n) = \sqrt{2} - 2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 ,$$

or

$$Fe_0 = 0 \neq (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)e_0 .$$

Cependant on vérifiera aisément les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 21. - Soient E un Banach, $X \subset E$, F une application de X dans E' de type M , et G une application de X dans E' continue de X faible dans E' fort. Alors $F + G$ est de type M .

PROPOSITION 22. - Soient E un Banach, $X \subset E$, F une application de X dans E' de type M , et G une application de X dans E' monotone faiblement continue (c'est-à-dire continue de X faible dans E' faible). Alors $F + G$ est de type M .

II.5. Résolution numérique de l'équation $Fx = a$.

PROPOSITION 23. - Soient H un Hilbert, et F une application de H dans H telle que :

(1) $(Fx - Fy , x - y) \geqslant c\|x - y\|^2$, $\forall x , y \in H$ avec $c > 0$,

(2) $\|Fx - Fy\| \leqslant M\|x - y\|$, $\forall x , y \in H$.

Alors $\forall a \in H$, l'équation $Fx = a$ admet une solution unique, et peut se résoudre par approximations successives.

Démonstration. - Soit $\rho > 0$ et $G_\rho x = x - \rho(Fx - a)$. L'équation $Fx = a$ est équivalente à $G_\rho x = x$. Mais

$$G_\rho x - G_\rho y = x - y - \rho(Fx - Fy) \quad ;$$

d'où

$$\|G_\rho x - G_\rho y\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\rho(Fx - Fy , x - y) + \rho^2\|Fx - Fy\|^2 .$$

Par suite,

$$\|G_\rho x - G_\rho y\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 (1 - 2\rho c + \rho^2 M^2) .$$

Il en résulte que G_ρ est contractante pour $\rho = \frac{c}{M^2}$, et alors l'équation $G_\rho x = x$ peut se résoudre par approximations successives.

Remarque. - Cette méthode se généralise aux applications qui sont seulement lipschitziennes sur les ensembles bornés.

III. Les applications demi-monotones.

III.1. Définition et propriétés des applications demi-monotones.

DÉFINITION. - Soient E un Banach, et X un convexe de E. On dit qu'une application F de X dans E' est demi-monotone s'il existe une application G de $X \times X$ dans E' avec $Fx = G(x , x)$, $\forall x \in X$, telle que :

(1) $\forall y \in X$, $x \longmapsto G(x , y)$ est monotone hémicontinue ;

(2) $\forall x \in X$, $y \longmapsto G(x , y)$ est bornée ;

(3) Pour tout filtre x_i porté par un ensemble borné de X tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible, et $\lim\sup(Fx_i , x_i - x) \leqslant 0$, on a

$$\forall u \in X \qquad G(u , x_i) \longrightarrow G(u , x)$$

dans E' faible et

$$(G(u , x_i) , x_i) \longrightarrow (G(u , x) , x) \ .$$

Remarque. - Si E est réflexif et séparable, cette dernière propriété est équivalente à la même propriété formulée pour des suites.

PROPOSITION 24. - Soient E un Banach, X un convexe ouvert de E, et F une application demi-monotone de X dans E'. Alors F est de type M sur X.

Démonstration. - Montrons d'abord (M_1). Soit x_i un filtre porté par un ensemble borné de X tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible, $Fx_i \longrightarrow y$ dans E' faible et $\lim\sup(Fx_i , x_i) \leqslant (y , x)$. Il résulte des hypothèses que, $\forall u \in X$, $G(u , x_i) \longrightarrow G(u , x)$ dans E' faible et $(G(u , x_i) , x_i) \longrightarrow (G(u , x) , x)$. D'autre part,

$$(G(x_i , x_i) - G(u , x_i) , x_i - u) \geqslant 0 \ ;$$

donc, en passant à la limite, on a

$$(y - G(u , x) , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall u \in X \ .$$

D'où

$$(y - Fx , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall u \in X \ ,$$

et comme X est ouvert, on a $Fx = y$. Pour démontrer la propriété (M_2), on utilisera les deux lemmes suivants :

LEMME 25. - Soient E un Banach, X un convexe de E, et F une application demi-monotone de X dans E'. Soient E_0 un sous-espace fermé de E avec

$X \cap E_0 \neq \emptyset$, j l'injection canonique de E_0 dans E , et j^* son adjoint de E' sur E'_0 . Alors $j^* F j$ est demi-monotone de $X \cap E_0$ dans E'_0 .

La démonstration de ce lemme est évidente.

LEMME 26. - Soient E un Banach avec $\dim E < \infty$, X un convexe ouvert de E , et F une application demi-monotone de X dans E' . Alors F est continue.

Démonstration. - Soit x_n une suite de X telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X . Montrons que la suite Fx_n est bornée. Sinon on peut extraire une sous-suite notée encore x_n telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X ,

$$\|Fx_n\| \to +\infty \qquad \text{et} \qquad z_n = \frac{Fx_n}{\|Fx_n\|} \dashrightarrow z \quad \text{avec} \quad \|z\| = 1 \ .$$

D'autre part,

$$(G(x_n , x_n) - G(u , x_n) , x_n - u) \geqslant 0 \qquad \forall u \in X \ .$$

En divisant par $\|Fx_n\|$ et en passant à la limite, on a

$$(z , x - u) \geqslant 0 \qquad \forall u \in X \ .$$

D'où $z = 0$, ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$.

Montrons enfin que $Fx_n \longrightarrow Fx$; sinon on peut extraire une sous-suite, notée encore x_n , telle que $x_n \longrightarrow x$, $Fx_n \longrightarrow y \neq Fx$, ce qui est absurde puisque F vérifie (M_1).

On achève la démonstration de la proposition 24 comme celle de la proposition 9.

THÉORÈME 27. - Soient E un Banach réflexif, X un convexe fermé de E , et F une application demi-monotone de X dans E' . On suppose qu'il existe $u_0 \in X$ tel que

$$\lim_{\substack{x \in X \\ \|x\| \to +\infty}} \frac{(Fx , x - u_0)}{\|x\|} = +\infty$$

(aucune condition si X borné).

Alors $\forall y \in E'$, il existe $x \in X$ tel que

$$(y - Fx , u - x) \leqslant 0 \qquad \forall u \in X \ .$$

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes. Après un changement de variables, on peut se ramener au cas $y = 0$ et $u_0 = 0$.

LEMME 28. - Conclusion du théorème 27, en supposant de plus $\dim E < \infty$, X borné et d'intérieur non vide.

Démonstration. - On peut trouver une suite X_n croissante de convexes fermés tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \overset{\circ}{X}$ (il suffit par exemple d'utiliser la jauge de X). D'après le lemme 26, F est continue sur les X_n, et par conséquent, il existe $x_n \in X_n$ (lemme 13) tel que $(Fx_n , x_n - u) \leqslant 0$, $\forall\, u \in X_n$. Montrons que la suite Fx_n est bornée ; sinon on peut extraire une sous-suite notée encore x_n, telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X,

$$\|Fx_n\| \to +\infty \qquad \text{et} \qquad z_n = \frac{Fx_n}{\|Fx_n\|} \longrightarrow z \quad \text{avec} \quad \|z\| = 1 \ .$$

D'autre part,

$$(G(u , x_n) , x_n - u) \leqslant (Fx_n , x_n - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X_n \ .$$

D'où, en divisant par $\|Fx_n\|$ et en passant à la limite, on a

$$0 \leqslant (z , x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{X} \ .$$

Donc $z = 0$, ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$.

On peut donc extraire une sous-suite, notée encore x_n, telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X,

$$(Fx_n , x_n - x) \to 0 \ ,$$

et

$$\forall\, u \in X \qquad G(u , x_n) \longrightarrow G(u , x) \ .$$

Mais

$$(G(u , x_n) , x_n - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X_n \ ;$$

d'où, en passant à la limite,

$$(G(u , x) , x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{X} \ ,$$

et d'après la proposition 4,

$$(Fx , x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X \ .$$

LEMME 29. - Conclusion du théorème 27, en supposant de plus $\dim E < \infty$ et X borné.

Démonstration. - On suppose que $0 \in X$. Soient E_0 l'espace engendré par X, j l'injection canonique de E_0 dans E, et j^* son adjoint de E' sur E'_0. X est d'intérieur non vide dans E_0. D'après le lemme 28, il existe $x \in X$ tel que :

$$(j^*Fjx\ ,\ x-u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X\ ,$$

ou encore

$$(Fx\ ,\ x-u) \leqslant 0\ .$$

LEMME 30. - Conclusion du théorème 27, en supposant de plus $\dim E < \infty$.

Démonstration. - Soit $X_n = \{x \in X\ ;\ \|x\| \leqslant n\}$. D'après le lemme 29, il existe $x_n \in X_n$ tel que

$$(Fx_n\ ,\ x_n - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X_n\ .$$

En particulier, $(Fx_n\ ,\ x_n) \leqslant 0$, et donc la suite x_n est bornée puisque

$$\lim_{\substack{x\in X\\ \|x\|\to+\infty}} \frac{(Fx\ ,\ x)}{\|x\|} = +\infty\ .$$

On peut alors extraire une sous-suite, notée encore x_n, telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X,

$$\limsup\,(Fx_n\ ,\ x_n - x) \leqslant 0\ ,$$

et donc

$$\forall\ u \in X \qquad G(u\ ,\ x_n) \longrightarrow G(u\ ,\ x)\ .$$

D'autre part,

$$(G(u\ ,\ x_n)\ ,\ x_n - u) \leqslant (Fx_n\ ,\ x_n - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X_n\ .$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$(G(u\ ,\ x)\ ,\ x-u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X\ ,$$

d'où

$$(Fx\ ,\ x-u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X\ .$$

Démonstration du théorème 27. - Soit $\mathfrak{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de E de dimension finie. Soient j_i l'injection canonique de E_i dans E, et j_i^* son adjoint de E' sur E_i'. L'application $F_i = j_i^* F j_i$ est demi-monotone de $X \cap E_i$ dans E_i', et vérifie les hypothèses du lemme 30 ; par suite, il existe $x_i \in X \cap E_i$ tel que

$$(F_i\, x_i\ ,\ x_i - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \cap E_i\ ,$$

ou encore

$$(Fx_i\ ,\ x_i - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \cap E_i\ .$$

En particulier $(Fx_i , x_i) \leqslant 0$, et donc l'ensemble x_i est borné. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$; comme E est réflexif, on a, suivant $\mathcal{U}$: $x_i \longrightarrow x$ dans X faible,

$$\limsup (Fx_i , x_i - x) \leqslant 0 \quad ,$$

et donc

$$\forall\ u \in X \qquad G(u , x_i) \longrightarrow G(u , x)$$

dans E' faible et

$$(G(u , x_i) , x_i) \longrightarrow (G(u , x) , x) \quad .$$

D'autre part,

$$(G(u , x_i) , x_i - u) \leqslant (G(x_i , x_i) , x_i - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \cap E_i \quad .$$

En passant à la limite, suivant $\mathcal{U}$, on en déduit que

$$(G(u , x) , x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \quad ,$$

d'où

$$(Fx , x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \quad .$$

III.2. Exemples d'applications demi-monotones.

Il est aisé de vérifier que les applications suivantes sont demi-monotones :

1° Les applications monotones hémicontinues, plus généralement les applications semi-monotones introduites par F. BROWDER [6]. On dit qu'une application F est semi-monotone si $Fx = G(x , x)$, où $G(x , y)$ est une application de $X \times X$ dans E' telle que $\forall\ y \in X$, $x \longmapsto G(x , y)$ est monotone hémicontinue et $\forall\ x \in X$, $y \longmapsto G(x , y)$ est bornée et continue de X faible dans E' fort.

2° Soit E un Banach uniformément convexe tel que E' soit strictement convexe, et soit J l'application de dualité de E dans E' . Les applications de la forme $F + C + \varepsilon J$ $(\varepsilon > 0)$, où F est semi-monotone et C compacte, qui ont été considérées par F. BROWDER [9], sont aussi demi-monotones.

3° Plus généralement, les applications introduites par J. LERAY et J.-L. LIONS [13], puis par P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [11], qui vérifient les hypothèses suivantes : Soient E un Banach, X un convexe de E , et $Fx = G(x , x)$, où $G(x , y)$ est une application de $X \times X$ dans E' telle que :

(H_1) $\forall\ y \in X$, $x \longmapsto G(x , y)$ est monotone hémicontinue ;
(H_2) $\forall\ x \in X$, $y \longmapsto G(x , y)$ est bornée ;

(H_3) Pour tout filtre x_i porté par un ensemble borné de X, tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible et

$$(G(x_i , x_i) - G(x , x_i) , x_i - x) \to 0 ,$$

on a

$$\forall u \in X \qquad G(u , x_i) \longrightarrow G(u , x)$$

dans E' faible ;

(H_4) Pour tout filtre x_i porté par un ensemble borné de X, tel que $x_i \longrightarrow x$ dans X faible et $G(u , x_i) \longrightarrow y$ dans E' faible, on a

$$(G(u , x_i) , x_i) \longrightarrow (y , x) .$$

(Si E est réflexif et séparable, il est équivalent de formuler (H_3) et (H_4) à l'aide des suites.)

Le théorème 27 généralise des résultats obtenus dans [7], [13] et [11]. En particulier, on se passe des hypothèses suivantes : E séparable ; F bornée ; les restrictions de F aux sous-espaces de dimension finie sont continues dans E' faible.

III.3. Cas d'addition des applications demi-monotones.

PROPOSITION 31. - La somme $F + G$ d'une application demi-monotone F et d'une application G, vérifiant les hypothèses (H), est demi-monotone.

La démonstration est évidente.

III.4. Corollaires du théorème 27.

COROLLAIRE 32. - Soient E un Banach réflexif, et F une application demi-monotone de B_r dans E' telle que $(Fx , x) \geqslant 0$, $\forall x \in S_r$. Il existe $x_0 \in B_r$ tel que $Fx_0 = 0$.

Démonstration. - D'après le théorème 27, il existe $x_0 \in B_r$ tel que

$$(Fx_0 , x_0 - u) \leqslant 0 \qquad \forall u \in B_r .$$

Si $x_0 \notin S_r$, on en déduit que $Fx_0 = 0$, et si $x_0 \in S_r$,

$$(Fx_0 , u) \geqslant 0 , \quad \forall u \in B_r \qquad \text{entraîne} \qquad Fx_0 = 0 .$$

PROPOSITION 33. - Soient E un Banach, X un convexe de E, et F une application monotone hémicontinue de X dans E'. Alors :

$$\forall\, y \in E' \qquad \{x \in X\ ;\ (y - Fx\ ,\ u - x) \leqslant 0\ ,\ \forall\, u \in X\}$$

est un convexe fermé de X.

La démonstration est évidente à l'aide de la proposition 4.

PROPOSITION 34. - Soient E un Banach réflexif, X un convexe fermé de E, et F une application hémicontinue de X dans E', telle que

$$(Fu - Fv\ ,\ u - v) \geqslant c\|u - v\|^2 \qquad \forall\, u\ ,\ v \in X\ , \text{ avec } c > 0\ .$$

Alors $\forall\, y \in E'$, il existe $x \in X$ unique tel que

$$(y - Fx\ ,\ u - x) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in X\ .$$

Démonstration. - L'existence résulte du théorème 27. Montrons l'unicité : soient x_1 et x_2 deux solutions. On a en particulier

$$(y - Fx_1\ ,\ x_2 - x_1) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (y - Fx_2\ ,\ x_1 - x_2) \leqslant 0\ .$$

Par addition, il vient

$$c\|x_1 - x_2\|^2 \leqslant (Fx_1 - Fx_2\ ,\ x_1 - x_2) \leqslant 0\ ;$$

d'où $x_1 = x_2$.

Remarques.

1° Si E est strictement convexe, il suffit de supposer

$$(Fu - Fv\ ,\ u - v) \geqslant c(\|u\| - \|v\|)^2 \qquad \forall\, u\ ,\ v \in X\ , \text{ avec } c > 0\ .$$

2° Si E est un Hilbert et F lipschitzienne, l'inéquation peut se résoudre par approximations successives. Il suffit de remarquer que le problème est équivalent à la recherche des points fixes de l'application

$$x \longmapsto P_X[x - \rho(Fx - y)] \qquad (\rho > 0)\ ,$$

et que cette application est contractante pour des valeurs de ρ convenables.

IV. L'équation $x + KFx = 0$.

Certaines équations intégrales non linéaires du type de Hammerstein peuvent se mettre sous la forme $x + KFx = 0$, où K est un opérateur monotone (en général linéaire) et F un opérateur non linéaire. Les théorèmes suivants généralisent des résultats obtenus par DOLPH et MINTY [10].

THÉORÈME 35. - Soit E un Banach réflexif tel que E et E' soient strictement convexes. Soient K une application monotone hémicontinue de E' dans E avec $K(0) = 0$, et F une application demi-monotone et bornée de E dans E' telle que $(Fx , x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in S_r$. Alors il existe $x_0 \in B_r$ tel que $x_0 + KFx_0 = 0$.

Démonstration. - Soit J l'application de dualité de E' dans E. On pose $K_\varepsilon = K + \varepsilon J$. D'après le corollaire 18, K_ε est bijective et K_ε^{-1} est monotone hémicontinue de E dans E'. Il en est de même pour $M_\varepsilon x = -K_\varepsilon^{-1}(-x)$. $M_\varepsilon + F$ est demi-monotone (proposition 31) de E dans E', et vérifie les hypothèses du corollaire 32. Donc il existe $x_\varepsilon \in B_r$ tel que $M_\varepsilon x_\varepsilon + Fx_\varepsilon = 0$, ou encore

$$x_\varepsilon + KFx_\varepsilon + \varepsilon JFx_\varepsilon = 0 \ .$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $x_\varepsilon + KFx_\varepsilon \to 0$ dans E fort, et suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin, $x_\varepsilon \to x_0$ dans E faible, $Fx_\varepsilon \longrightarrow y$ dans E' faible, $KFx_\varepsilon \longrightarrow -x_0$ dans E faible. Mais K est monotone, d'où

$$(KFx_\varepsilon - Ky \, , \, Fx_\varepsilon - y) \geqslant 0 \ ,$$

ou encore

$$(-x_\varepsilon - \varepsilon JFx_\varepsilon - Ky \, , \, Fx_\varepsilon - y) \geqslant 0 \ .$$

En passant à la limite, on a $\limsup (Fx_\varepsilon , x_\varepsilon) \leqslant (y , x_0)$; d'où $Fx_0 = y$. D'autre part, F est demi-monotone, d'où

$$(G(x_\varepsilon , x_\varepsilon) - G(x_0 , x_\varepsilon) \, , \, x_\varepsilon - x_0) \geqslant 0 \ ,$$

et $G(x_0 , x_\varepsilon) \longrightarrow G(x_0 , x_0)$ dans E' faible,

$$(G(x_0 , x_\varepsilon) \, , \, x_\varepsilon) \longrightarrow (G(x_0 , x_0) \, , \, x_0) \ .$$

En passant à la limite, on a

$$\limsup (Fx_\varepsilon \, , \, KFx_\varepsilon) \leqslant (Fx_0 \, , \, -x_0) \ ,$$

ce qui entraîne $x_0 + KFx_0 = 0$.

Si K est linéaire, on a un résultat plus général :

THÉORÈME 36. - Soit E un Banach réflexif tel que E et E' soient strictement convexes. Soient K une application linéaire positive de E' dans E, et F une application de type M et bornée de B_r dans E' telle que $(Fx , x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in S_r$. Alors il existe $x_0 \in B_r$ tel que $x_0 + KFx_0 = 0$.

Démonstration. - Dans le cas où E est un Hilbert, la démonstration est relativement simple. $K_\varepsilon = K + \varepsilon I$ est bijective et K_ε^{-1} est linéaire, positive, donc, d'après la proposition 22, $K_\varepsilon^{-1} + F$ est de type M sur B_r et vérifie les hypothèses du théorème 12. Donc il existe $x_\varepsilon \in B_r$ tel que

$$x_\varepsilon + KFx_\varepsilon + \varepsilon Fx_\varepsilon = 0 \quad .$$

On passe aisément à la limite quand $\varepsilon \to 0$, et on en déduit qu'il existe $x_0 \in B_r$ tel que $x_0 + KFx_0 = 0$.

La démonstration est beaucoup plus délicate dans le cas général, car K_ε^{-1} n'est pas faiblement continue, et $K_\varepsilon^{-1} + F$ n'est pas nécessairement de type M. En reprenant le raisonnement du théorème 12, on montre qu'il existe une constante k, indépendante de ε, et $x_\varepsilon \in B_r$, tels que

$$\|x_\varepsilon + KFx_\varepsilon\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, k \quad .$$

On peut alors passer à la limite, et en déduire qu'il existe $x_0 \in B_r$ tel que $x_0 + KFx_0 = 0$.

COROLLAIRE 37. - Soit E un Banach réflexif tel que E et E' soient strictement convexes. Soient K une application monotone hémicontinue de E' dans E, et F une application hémicontinue et bornée de E dans E' telle que

$$(Fx - Fy , x - y) \geqslant c\|x - y\|^2 \qquad \forall\, x , y \in E , \ \text{avec} \ c > 0 \quad .$$

Alors $\forall\, u \in E$, l'équation $x + KFx = u$ admet une solution unique.

Démonstration. - On pose $K_1 = K - K_0$ et $F_1\, y = F(y + u - K_0)$. Avec ces notations, l'équation devient $y + K_1\, F_1\, y = 0$ où $y = x - u + K_0$. K_1 et F_1 vérifient les conditions du théorème 35 ; d'où l'existence d'une solution.

Montrons l'unicité : Soient x_1 et x_2 deux solutions. On a

$$x_1 + KFx_1 = x_2 + KFx_2 = u \quad .$$

Mais

$$(Fx_1 - Fx_2 , x_1 - x_2) \geqslant c\|x_1 - x_2\|^2 \quad .$$

D'où

$$c\|x_1 - x_2\|^2 \leqslant (Fx_1 - Fx_2 , KFx_2 - KFx_1) \leqslant 0 \quad .$$

Donc $x_1 = x_2$.

Remarque. - On démontre facilement que la solution dépend continûment de u.

V. Applications maximales monotones.

DÉFINITION. - Soient H un Hilbert, et $D(L)$ un sous-espace dense de H. On dit qu'une application linéaire L de $D(L)$ dans H est maximale monotone, si L est monotone et s'il n'existe aucune application linéaire monotone qui prolonge L.

PHILLIPS [16] a démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 38. - *Soient H un Hilbert, et L une application linéaire maximale monotone. Alors L a un graphe fermé et $\forall \lambda > 0$, $L + \lambda I$ est bijective de $D(L)$ sur H.*

DÉFINITION. - Soient H un Hilbert, $X \subset H$, et L une application linéaire maximale monotone. On dit que L et X sont compatibles si $\forall x \in X$, il existe $h, k > 0$ et une application φ de $]0, h]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$|\varphi(\varepsilon) - 1| \leqslant k\varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in]0, h] ,$$

et que

$$\varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x \in X \qquad \forall \varepsilon \in]0, h] .$$

PROPOSITION 39. - *Soient H un Hilbert, L une application linéaire maximale monotone, et $X \subset H$ tels que L et X soient compatibles. Alors*

$$u_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x$$

converge fortement vers x et $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} (Lu_\varepsilon , u_\varepsilon - x) \leqslant 0$.

En particulier, $D(L) \cap X$ est dense dans X.

Démonstration. - Montrons que $y_\varepsilon = (I + \varepsilon L)^{-1} x$ converge vers 0. On a

$$y_\varepsilon + \varepsilon L y_\varepsilon = x \quad ;$$

d'où $\|y_\varepsilon\| \leqslant \|x\|$. Suivant un ultrafiltre, $y_\varepsilon \longrightarrow y$ dans H faible. Mais

$$(Ly_\varepsilon - La , y_\varepsilon - a) \geqslant 0 \qquad \forall a \in D(L) .$$

En passant à la limite, on a

$$\|y\|^2 \leqslant (x , y) - (a , x - y) \qquad \forall a \in D(L) ,$$

d'où $y = x$. Donc quand $\varepsilon \to 0$, $y_\varepsilon \longrightarrow x$ dans H faible. Mais

$$\|y_\varepsilon - x\|^2 \leqslant (y_\varepsilon - x\ ,\ x) \quad .$$

D'où $y_\varepsilon \longrightarrow x$ dans H fort. Et par suite $u_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)y_\varepsilon$ aussi. Enfin

$$(Lu_\varepsilon\ ,\ u_\varepsilon - x) = (Lu_\varepsilon\ ,\ \varphi(\varepsilon)x - \varepsilon Lu_\varepsilon - x) \leqslant k\|x\|\ \|\varphi(\varepsilon)x - u_\varepsilon\|$$

entraîne que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup(Lu_\varepsilon\ ,\ u_\varepsilon - x) \leqslant 0 \quad .$$

<u>Exemple</u>. - La boule B_r est compatible avec toute application linéaire maximale monotone.

THÉORÈME 40. - <u>Soient</u> H <u>un Hilbert,</u> X <u>un convexe fermé de</u> H , <u>et</u> L <u>une application linéaire maximale monotone telle que</u> L <u>et</u> X <u>soient compatibles. Soit</u> $Fx = G(x\ ,\ x)$ <u>une application demi-monotone telle que</u> G <u>soit bornée de</u> $X \times X$ <u>dans</u> H . <u>Soit</u> $T = L + F$ <u>définie sur</u> $D(L) \cap X$. <u>On suppose qu'il existe</u>

$$u_0 \in D(L) \cap X$$

<u>tel que</u>

$$\lim_{\substack{x\in D(L)\cap X\\ \|x\|\to+\infty}} \frac{(Tx\ ,\ x - u_0)}{\|x\|} = +\infty$$

(<u>aucune condition si</u> X <u>borné). Alors</u> $\forall\ y \in H$, <u>il existe</u> $x \in D(L) \cap X$ <u>tel que</u>

$$(y - Tx\ ,\ u - x) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On peut toujours supposer $y = 0$ et $u_0 = 0$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de $D(L)$ de dimension finie. D'après le théorème 27, il existe $x_i \in X \cap E_i$ tel que

$$(Tx_i\ ,\ x_i - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \cap E_i \quad .$$

L'ensemble x_i est borné, donc Fx_i aussi, et, suivant un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$, on a $x_i \longrightarrow x$ dans X faible, $Fx_i \longrightarrow \ell$ dans H faible. Mais

$$(Fx_i\ ,\ x_i) \leqslant (Fx_i\ ,\ u) + (Lx_i\ ,\ u - x_i) \qquad \forall\ u \in X \cap E_i \quad ,$$

donc

$$(Fx_i\ ,\ x_i) \leqslant (Fx_i\ ,\ u) + (Lu\ ,\ u - x_i) \qquad \forall\ u \in X \cap E_i \quad .$$

D'où

$$\lim \sup(Fx_i\ ,\ x_i) \leqslant (\ell\ ,\ u) + (Lu\ ,\ u - x) \qquad \forall\ u \in D(L) \cap X \quad .$$

En faisant $u = u_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1}\ x$, on en déduit que

$$\limsup (Fx_i\ ,\ x_i) \leqslant (\ell\ ,\ x)\ .$$

Il en résulte que $G(u\ ,\ x_i) \longrightarrow G(u\ ,\ x)$ dans H faible et que

$$(G(u\ ,\ x_i)\ ,\ x_i) \longrightarrow (G(u\ ,\ x)\ ,\ x) \qquad \forall\ u \in X\ .$$

D'autre part, $(Lu + G(u\ ,\ x_i)\ ,\ x_i - u) \leqslant (Tx_i\ ,\ x_i - u) \leqslant 0$, $\forall\ u \in X \cap E_i$. En passant à la limite, on a

$$(Lu + G(u\ ,\ x)\ ,\ x - u) \leqslant 0 \qquad \forall \in D(L) \cap X\ .$$

En faisant $u = u_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1}\ x$, on en déduit que

$$\|Lu_\varepsilon\|^2 \leqslant \|Lu_\varepsilon\|\,(k\|x\| + \|G(u_\varepsilon\ ,\ x)\|) + k\|x\|\ \|G(u_\varepsilon\ ,\ x)\|\ .$$

Ceci entraîne que Lu_ε est borné, et par conséquent $x \in D(L)$ puisque L a un graphe fermé. Enfin $u \longmapsto Lu + G(u\ ,\ x)$ est monotone hémicontinue sur $D(L) \cap X$ et d'après la proposition,

$$(Lx + G(x\ ,\ x)\ ,\ x - u) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in D(L) \cap X\ .$$

Mais $D(L) \cap X$ est dense dans X ; d'où le résultat.

Il est utile, dans les applications aux équations aux dérivées partielles, d'introduire deux espaces de Hilbert. Soient H un Hilbert muni du produit scalaire $(\ ,\ )$ et de la norme $|\ |$, et $V \subset H$ avec injection continue muni du produit scalaire $((\ ,\ ))$ et de la norme $\|\ \|$.

THÉORÈME 41. - <u>Soient</u> L <u>une application linéaire maximale monotone de</u> $D(L) \subset H$ <u>dans</u> H , <u>et</u> L^* <u>son adjoint de</u> $D(L^*)$ <u>dans</u> H . <u>On suppose que</u>

$$((Lx\ ,\ x)) \geqslant 0 \qquad \forall\ x \in D(L) \cap V\ , \text{ tel que } Lx \in V\ .$$

<u>Soient</u> $0 \in X$ <u>un convexe fermé de</u> V <u>compatible avec</u> L , <u>et</u> $Fx = G(x\ ,\ x)$ <u>une application demi-monotone et bornée de</u> X <u>dans</u> V <u>telle que</u>,

$$\forall\ y \in X \qquad x \longmapsto G(x\ ,\ y)$$

<u>soit continue de</u> X <u>fort dans</u> V <u>faible. Si</u>

$$\lim_{\substack{x\in D(L)\cap X\\ \|x\|\to+\infty}} \frac{(Lx\ ,\ x) + ((Fx\ ,\ x))}{\|x\|} = +\infty\ ,$$

<u>alors</u>, $\forall\ y \in H$, <u>il existe</u> $x \in X$ <u>tel que</u>

(1) $\quad (y\ ,\ u - x) - (x\ ,\ L^*u) - ((Fx\ ,\ u - x)) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in D(L) \cap D(L^*) \cap X\ .$

Démonstration. - Soit $\mathfrak{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de $D(L) \cap V$ de dimension finie. D'après le théorème 27, il existe $x_i \in X \cap E_i$ tel que

$$(y , u - x_i) - (Lx_i , u - x_i) - ((Fx_i , u - x_i)) \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \cap E_i$$

(on utilise l'existence d'une application linéaire S_i de E_i dans E_i telle que $((x , y)) = (S_i x , y)$, $\forall\ x , y \in E_i$). L'ensemble x_i est borné dans V , donc Fx_i aussi. Suivant un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$, on a $x_i \longrightarrow x$ dans V faible, et on montre, comme dans le théorème 40, que

$$\forall\ u \in D(L) \cap X \qquad (y , u - x) - (Lu , u - x) - ((G(u , x) , u - x)) \leqslant 0 \ .$$

Soit $v \in D(L) \cap D(L^*) \cap X$; on pose

$$u(\varepsilon , t) = (1 - t)u_\varepsilon + tv = (1 - t)\ \varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x + tv \qquad \text{pour } t \in \,]0 , 1[\ .$$

En remplaçant u par $u(\varepsilon , t)$ dans la relation précédente, et en faisant d'abord tendre ε vers 0 puis t , on obtient le résultat.

Remarque. - Si X est un cône convexe, il existe $x \in X$ tel que

$$\forall\ u \in D(L) \cap D(L^*) \cap X \qquad (y , u) - (x , L^* u) - ((Fx , u)) \leqslant 0 \ .$$

La démonstration est identique à celle du théorème 41, en prenant $u(\varepsilon , t) = u_\varepsilon + tv$.

PROPOSITION 42. - Si de plus $L^* = - L$ et si

$$((Fx - Fy , x - y)) \geqslant c\|x - y\|^2 \qquad \forall\ x , y \in X , \ \text{avec} \ c > 0 ,$$

alors la solution de (1) est unique.

Démonstration. - Soit x une solution de (1) et $u_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x$. On montre d'abord, comme dans le théorème 40, qu'il existe C_1 , C_2 indépendants de ε tels que $|Lu_\varepsilon|^2 \leqslant C_1\|Lu_\varepsilon\| + C_2$. D'où

$$\varepsilon|Lu_\varepsilon|^2 \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \varepsilon \to 0 \ .$$

Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1),

$$u_\varepsilon = \varphi_1(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x_1 \qquad \text{et} \qquad v_\varepsilon = \varphi_2(\varepsilon)\ (I + \varepsilon L)^{-1} x_2 \ .$$

On a

(2) $$(y , u - x_1) - (x_1 , L^* u) - ((Fx_1 , u - x_1)) \leqslant 0 \ ,$$

(3) $$(y , u - x_2) - (x_2 , L^* u) - ((Fx_2 , u - x_2)) \leqslant 0 \ .$$

On fait $u = v_\varepsilon$ dans (2), et $u = u_\varepsilon$ dans (3). Par addition de (2) et (3), et en faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat (on remarquera que

$$(x_1 - u_\varepsilon , Lv_\varepsilon) \to 0 \qquad \text{et} \qquad (x_2 - v_\varepsilon , Lu_\varepsilon) \to 0 \quad).$$

Les théorèmes 40 et 41 s'appliquent à la résolution d'équations d'évolution et de problèmes paraboliques. Le théorème 41 et la proposition 42 permettent de retrouver un résultat de [14].

VI. Applications des méthodes de compacité et de monotonie.

VI.1. Généralisation du théorème de Péano.

THÉORÈME 43. - Soient E un espace localement convexe séparé, C un convexe fermé de E, K un convexe compact de E, et $f(t , x)$ une application continue de $[0 , T] \times C$ dans K. Soit $x_0 \in C$ tel que $x_0 + T.K \subset C$. Alors l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(t , x)$ admet une solution définie sur $[0 , T]$, avec $x(0) = x_0$.

La démonstration fait appel à trois résultats préliminaires :

THÉORÈME de point fixe de Hukuhara [15]. - Soient $\mathcal{E}$ un espace localement convexe séparé, A un convexe fermé de $\mathcal{E}$, et F une application continue de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$ telle que $\overline{F(\mathbf{A})}$ soit compact. Alors il existe $x \in A$ tel que $Fx = x$.

THÉORÈME (ASCOLI). - Soient I un espace topologique compact, X un espace uniforme séparé, et H une partie équicontinue de $\mathcal{C}(I , X)$ telle que $\overline{H(t)}$ soit compact pour tout $t \in I$. Alors $\overline{H}$ est compact dans $\mathcal{C}(I , X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

LEMME 44. - Soient I un espace topologique compact, X et Y des espaces uniformes, et $Z \subset X$ compact. Soit $f(t , x)$ une application continue de $I \times \mathbf{X}$ dans Y. Alors, $\forall\, V$ entourage de Y, $\exists\, U$ entourage de X tel que $\forall\, z \in Z$, $\forall\, x \in U(\mathbf{z})$ et $\forall\, t \in I$, on a

$$(f(t , x) , f(t , z)) \in V \quad .$$

La démonstration de ce lemme est évidente.

Démonstration du théorème 43. - Soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}([0 , T] , E)$. $\mathcal{E}$, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace localement convexe supérieurement

(e. l. c. s.). $A = \mathcal{C}([0\ ,\ T]\ ,\ C)$ est un convexe fermé de $\mathcal{E}$. F est une application de A dans A définie par

$$u \in A \longmapsto Fu(t) = x_0 + \int_0^t f(s\ ,\ u(s))\ ds \quad .$$

Cette intégrale a un sens puisque E est un e. l. c. s., $f(s\ ,\ u(s))$ est continue et son image est contenue dans un convexe compact. Résoudre l'équation différentielle équivaut à trouver les points fixes de F . On vérifie aisément, à l'aide du lemme 44, que F est continue de A dans A . Le théorème d'Ascoli montre que $\overline{F(A)}$ est compact. Il résulte alors du théorème de Hukuhara que F a un point fixe dans A .

Remarque. - Ce résultat généralise le théorème classique de Péano en dimension finie (cf. N. BOURBAKI [3], chap. IV, § 1). Il généralise aussi un théorème de F. BROWDER [5] (théorème 7) qui démontre l'existence d'une solution dans le cas où E est un espace de Hilbert et $f(t\ ,\ x)$ faiblement continue. La solution est alors de classe C^1 pour la topologie faible. (Le théorème de Browder énonce l'existence d'une solution de classe C^1 pour la topologie forte, mais ce résultat est inexact.)

VI.2. Applications du théorème 40 à la résolution d'équations d'évolution.

THÉORÈME 45. - Soient H un Hilbert, $f(t\ ,\ x)$ une application continue de $[0\ ,\ T] \times B(x_0\ ,\ r)$ dans H telle que

$$(f(t\ ,\ x) - f(t\ ,\ y)\ ,\ x - y) \leqslant c\|x - y\|^2$$

$\forall\ t \in [0\ ,\ T]$, $\forall\ x\ ,\ y \in B(x_0\ ,\ r)$, avec $c \geqslant 0$. Alors il existe $0 < h \leqslant T$ tel que l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(t\ ,\ x)$ admette une solution unique (unicité à droite) définie sur $[0\ ,\ h]$ avec $x(0) = x_0$.

Plus précisément, si $\|f(t\ ,\ x)\| \leqslant M$, $\forall\ t \in [0\ ,\ T]$ et $\forall\ x \in B(x_0\ ,\ r)$, et si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

(a) $MT < r$,

(b) $e^{cT} \int_0^T e^{-cs}\|f(s\ ,\ x_0)\|\ ds < r$,

alors l'équation admet une solution définie sur $[0\ ,\ T]$.

Démonstration. - Montrons d'abord l'unicité. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions. On a

$$\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\ ,\ x_1(t) - x_2(t)\right) \leqslant c\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \quad .$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leqslant 2c\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \quad .$$

Ce qui entraîne

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant e^{2ct}\|x_1(0) - x_2(0)\| \quad .$$

<u>Existence</u>. – On fait le changement de variable $x(t) = e^{ct}\, y(t) + x_0$. L'équation devient :

$$\frac{dy}{dt} + g(t\, ,\, y) = 0 \qquad y(0) = 0 \quad ,$$

avec

$$g(t\, ,\, y) = cy - e^{-ct}\, f(t\, ,\, e^{ct}\, y + x_0) \quad .$$

Soient $\mathcal{H} = L_2([0\, ,\, T]\, ,\, H)$ muni du produit scalaire usuel, et

$$X = \{y \in \mathcal{H}\ ;\quad e^{ct}\, y(t) + x_0 \in B(x_0\, ,\, r) \quad \text{p. p.}\} \quad .$$

X est un convexe fermé borné de $\mathcal{H}$. $Fy(t) = g(t\, ,\, y(t))$ est une application monotone hémicontinue et bornée de X dans $\mathcal{H}$.

$$D(L) = \{y \in \mathcal{H}\ ;\ \frac{dy}{dt} \in \mathcal{H} \ \text{ et } \ y(0) = 0\} \quad ,$$

où $\frac{dy}{dt}$ est la dérivée au sens des distributions. (Tout élément de $D(L)$ est égal p. p. à une fonction continue, de sorte que la condition $y(0) = 0$ a un sens.) Enfin $Ly = \frac{dy}{dt}$ définie sur $D(L)$ est une application linéaire maximale monotone.

Montrons que L et X sont compatibles. Soient $y \in X$ et $z_\varepsilon = (I + \varepsilon L)^{-1}\, y$; on a

$$z_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\, y(s)\, ds \ .$$

D'où l'on déduit que

$$\|e^{ct}\, z_\varepsilon(t)\| \leqslant \frac{r}{1 - \varepsilon c} \qquad \forall\ t \in [0\, ,\, T] \quad .$$

Ce qui montre que L et X sont compatibles avec $\varphi(\varepsilon) = 1 - \varepsilon c$. D'après le théorème 40, il existe $y \in D(L) \cap X$ tel que

(1) $$(Ly + Fy\, ,\, y - u)_{\mathcal{H}} \leqslant 0 \qquad \forall\ u \in X \quad .$$

Majoration a priori de y : l'inégalité (1) étant vérifiée $\forall\ u \in X$, on a

$$\int_a^b (Ly + Fy\, ,\, y - u)_H\, dt \leqslant 0 \qquad \forall\ a < b \quad .$$

Ce qui permet de passer à l'inégalité presque partout, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{dy}{dt} + g(t , y) , y(t) - u(t)\right)_H \leqslant 0 \quad \text{p. p. sur } (0 , T) .$$

En particulier, si $u = 0$, on en déduit :

$$\left(\frac{dy}{dt} , y\right)_H \leqslant - (g(t , y) , y(t))_H \leqslant - (g(t , 0) , y(t))_H \leqslant \|g(t , 0)\| \, \|y(t)\| .$$

D'où

$$\|y(t)\| \leqslant \int_0^t e^{-cs}\|f(s , x_0)\| \, ds ,$$

et par suite

$$\|e^{ct} y(t)\| \leqslant e^{cT} \int_0^T e^{-cs}\|f(s , x_0)\| \, ds .$$

Ou encore

$$\left(\frac{dy}{dt} , y\right)_H \leqslant - c\|y(t)\|^2 + e^{-ct}(f(t , e^{ct} y + x_0) , y) .$$

D'où

$$\left(\frac{dy}{dt} , y\right) \leqslant - c\|y(t)\|^2 + e^{-ct} M\|y(t)\| ,$$

ce qui entraîne

$$\|e^{ct} y(t)\| \leqslant Mt \leqslant MT .$$

Par conséquent, si l'une des conditions (a) ou (b) est réalisée, on a

$$\|e^{ct} y(t)\| \leqslant r' < r \qquad \forall \; t \in (0 , T) .$$

On déduit alors de (1) que $\frac{dy}{dt} + g(t , y) = 0$ avec $y(0) = 0$.

Cette méthode peut être généralisée lorsque l'on introduit un générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Soit $A(t)$ une famille d'opérateurs linéaires de $D(A(t))$ sous-espaces denses de H dans H. $-A(t)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions si, et seulement si, $\forall \; t$, $A(t)$ est maximal monotone.

<u>Hypothèses</u> (H). – On suppose que $t \longmapsto (A(t) + I)^{-1}$ est de classe C^1 et qu'il existe un opérateur d'évolution $U(t , s)$, c'est-à-dire une application continue $U(t , s)$ de $(0 , T) \times (0 , T)$ dans $\mathcal{L}(H)$ avec $\|U(t , s)\| \leqslant 1$ telle que toute solution de l'équation :

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t) , & f \in L_2((0 , T) , H) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

soit donnée par

(3) $$x(t) = \int_0^t U(t\ ,\ s)\ f(s)\ ds + U(t\ ,\ 0)x_0 \ .$$

Inversement, on dit que $x(t)$, défini par (3), est solution faible de (2).

THÉORÈME 46. - <u>Soient</u> H <u>un Hilbert,</u> $f(t\ ,\ x)$ <u>une application continue de</u> $[0\ ,\ T] \times B(x_0\ ,\ r)$ <u>dans</u> H <u>telle que</u>

$$(f(t\ ,\ x) - f(t\ ,\ y)\ ,\ x - y) \leqslant c\|x - y\|^2$$

$\forall\ t \in [0\ ,\ T]$, $\forall\ x\ ,\ y \in B(x_0\ ,\ r)$, <u>avec</u> $c \geqslant 0$. <u>Soit</u> $A(t)$ <u>vérifiant les hypothèses</u> (H). <u>Alors il existe</u> $0 < h \leqslant T$ <u>tel que l'équation</u> $\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t\ ,\ x)$ <u>admette une solution faible unique définie sur</u> $[0\ ,\ h]$ <u>avec</u> $x(0) = x_0$. <u>C'est-à-dire qu'il existe</u> $x(t)$ <u>continue sur</u> $[0\ ,\ h]$ <u>telle que</u>

$$x(t) = \int_0^t U(t\ ,\ s)\ f(s\ ,\ x(s))\ ds + U(t\ ,\ 0)x_0 \ .$$

<u>Plus précisément, si</u> $\|f(t\ ,\ x)\| \leqslant M$, $\forall\ t \in [0\ ,\ T]$ <u>et</u> $\forall\ x \in B(x_0\ ,\ r)$, <u>et si l'une des conditions suivantes est réalisée</u> :

(a) $\sup\limits_{t\in[0,1]} \|U(t\ ,\ 0)x_0 - x_0\| + MT < r$,

(b) $\sup\limits_{t\in[0,1]} \|U(t\ ,\ 0)x_0 - x_0\| + e^{cT} \int_0^T e^{-cs}\|f(s\ ,\ x_0)\|\ ds < r$,

<u>alors l'équation admet une solution faible sur</u> $[0\ ,\ T]$.

<u>Démonstration</u>. - L'unicité est presque évidente.

Montrons l'existence : Supposons d'abord $x_0 = 0$. On fait le changement de variable $x(t) = e^{ct}\ y(t)$. L'équation devient :

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + g(t\ ,\ y) = 0 \qquad \text{avec} \quad y(0) = 0 \ ,$$

où $g(t\ ,\ y) = cy - e^{-ct}\ f(t\ ,\ e^{ct}\ y)$. On définit $\mathcal{H}$, X , F comme dans le théorème 45. Soit $x \in \mathcal{H}$, on pose

$$Ux(t) = \int_0^t U(t\ ,\ s)\ x(s)\ ds \ .$$

U est un opérateur linéaire monotone injectif de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et $L = U^{-1}$ est une application linéaire maximale monotone. $(I + \varepsilon L)^{-1}$ est défini par :

$$z_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon L)^{-1}\ y = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\ U(t\ ,\ s)\ y(s)\ ds \ .$$

On en déduit que si $y \in X$, on a :

$$\|e^{ct} z_\varepsilon(t)\| \leqslant \frac{r}{1 - \varepsilon c} \qquad \forall\ t \in [0 , T] \ .$$

On achève la démonstration comme celle du théorème 45.

Démontrons le théorème dans le cas général $x_0 \neq 0$. On a l'équation :

$$x(t) = \int_0^t U(t , s)\ f(s , x(s))\ ds + U(t , 0)x_0 \ .$$

En faisant le changement de variable $x_1(t) = x(t) - U(t , 0)x_0$, l'équation devient :

$$\frac{dx_1}{dt} + A(t)x_1 = f_1(t , x_1) \qquad \text{avec} \quad x_1(0) = 0 \ ,$$

où $f_1(t , x_1) = f(t , x_1 + U(t , 0)x_0)$. Soit

$$\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \|U(t , 0)x_0 - x_0\| \ .$$

$f_1(t , x_1)$ est définie pour $t \in [0 , T]$ et $x_1 \in B(x_0 , r - \alpha)$. Avec les hypothèses faites, on peut se ramener au cas précédent.

Remarque. - Ce théorème généralise des résultats démontrés par F. BROWDER [5] et KATO [12]. En particulier, cette méthode a l'avantage de fournir l'existence de solutions locales. D'autre part, contrairement aux démonstrations de [5] et [12], elle ne fait pas appel au théorème de Péano, ce qui doit permettre d'étendre ces résultats à des opérateurs F plus généraux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALTMAN (M.). - A fixed point theorem in Hilbert space, Bull. Acad. polon. Sc., Sér. Sc. math., t. 5, 1957, p. 19-22.

[2] ALTMAN (M.). - A fixed point theorem in Banach space, Bull. Acad. polon. Sc., Sér. Sc. math., t. 5, 1957, p. 89-92.

[3] BOURBAKI (N.). - Fonctions d'une variable réelle, Chap. 4-7. - Paris, Hermann, 1951 (Act. scient. et ind., 1132 ; Bourbaki, 12).

[4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[5] BROWDER (F. E.). - Non linear equations of evolution, Annals of Math., Series 2, t. 80, 1964, p. 485-523.

[6] BROWDER (F. E.). - Mappings theorems for non compact nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 54, 1965, p. 337-342.

[7] BROWDER (F. E.). - Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach sets, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 780-785.

[8] BROWDER (F. E.). - Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics, p. 24-49. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Proceedings of Symposia in applied Mathematics, 17).

[9] BROWDER (F. E.). - Nonlinear elliptic functionnal equations in non reflexive Banach spaces, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 89-95.

[10] DOLPH (C. L.) and MINTY (G. S.). - On nonlinear integral equations of the Hammerstein type, Nonlinear integral equations, Proceedings of one advanced Seminar conducted by Mathematics Research Center, p. 99-154. - Madison, The University of Wisconsin Press, 1964.

[11] HARTMAN (P.) and STAMPACCHIA (G.). - On some nonlinear elliptic differential functionnal equations, Acta Math., t. 115, 1966, p. 271-310.

[12] KATO (T.). - Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics, p. 50-65. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Proceedings of Symposia in applied Mathematics, 17).

[13] LERAY (J.) et LIONS (J.-L.). - Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. math. France, t. 93, 1965, p. 97-107.

[14] LIONS (J.-L.). - Sur un nouveau type de problème non linéaire pour des opérateurs paraboliques du 2e ordre, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, Collège de France, 1965/66.

[15] MAYER (C.). - Points invariants dans les espaces localement convexes, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 4e année, 1964/65, n° 10, 11 p. - Paris, Secrétariat mathématique, 1965 (Mathematica Seminosa, 1).

[16] PHILLIPS (R. S.). - Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 90, 1959, p. 193-254.