Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Leduc

Fonctionnelles positives extrêmes sur certaines algèbres ordonnées

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 2 (1965-1966), exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_2_A2_0>

17 mars 1966

FONCTIONNELLES POSITIVES EXTRÊMES SUR CERTAINES ALGÈBRES ORDONNÉES

par Michel LEDUC

Ces pages exposent, peut-être en les étendant, des travaux de R. PHELPS, qu'on trouve consignés dans une publication récente [1] ([1]).

Les résultats sont presque exclusivement algébriques ; on montre que, sur certaines algèbres ordonnées, les formes linéaires positives extrêmes jouissent de propriétés multiplicatives. Ce fait est bien connu pour l'algèbre des fonctions continues sur un compact, dont les formes positives extrêmes sont les masses ponctuelles, c'est-à-dire les caractères.

J'ai bénéficié de notes manuscrites de G. CHOQUET, dont proviennent, en particulier, la plupart des contre-exemples.

__Notation et définitions__. - Dans la suite, A désigne une algèbre réelle ([2]), commutative ([3]) et préordonnée, avec $A = A_+ - A_+$ ([4]).

Un __caractère__ est un homomorphisme d'algèbres non nul et à valeurs dans le corps de base.

Un élément d'un cône convexe est dit __extrême__, s'il appartient à une génératrice extrémale, mais n'est pas le sommet.

Pour un cône positif :

$$x \text{ extrême } \iff x \neq 0 \text{ et } (0 \leqslant u \leqslant x \implies \exists\, t \in \underset{\sim}{R} : u = tx) ,$$

t étant du reste unique.

LEMME 1. - __Soit__ E __un espace vectoriel préordonné__ ; __si__ E_+^* __admet une génératrice extrémale, alors__ $\operatorname{codim}(E_+ - E_+) \leqslant 1$.

En effet, sinon $\dim(E_+)^\perp > 1$, or $(E_+)^\perp \subset E_+^*$, et un cône convexe, qui contient

---

([1]) Certaines démonstrations de ce papier se trouvent d'ailleurs complétées ici.

([2]) Cf. remarque 4, et le résultat : Soit A une algèbre de fonctions complexes, si A_+^* admet des éléments extrêmes, alors A est autoadjointe.

([3]) Une théorie non commutative a été faite par E. STØRMER [8] qui souligne la pathologie de ce cas.

([4]) Cf. lemme 1.

plus d'une droite, n'admet pas de génératrice extrémale. S'il en contient une, elle est du reste l'unique génératrice extrémale.

Remarque. - Pour E, espace localement convexe (e. l. c.) préordonné, il vient de même que, si E'_+ admet une génératrice extrémale, alors $\operatorname{codim}(\overline{E_+ - E_+}) \leqslant 1$.

PROPOSITION 2. - Etant donnée A, si pour tout $a \in A_+$, l'opérateur

$$x \in A \to x + ax \in A$$

admet un inverse à gauche, linéaire et positif, si, E étant un espace vectoriel préordonné, T est un opérateur extrême du cône $\{L \in \mathcal{L}(A, E) ; L(A_+) \subset E_+\}$, alors :

- ou bien $\forall x$ et $y \in A$, $T(xy) = 0$,

- ou bien il existe b extrême dans E_+ et un caractère φ sur A tels que $\forall x \in A$, $Tx = \varphi(x)\, b$.

En effet, pour tout $a \in A_+$, notons P_a la multiplication par a, choisissons un inverse à gauche, linéaire et positif, $\tilde{a}$ de $\mathrm{id} + P_a$, et écrivons

$$\forall x \in A , \quad x = \tilde{a}(x) + \tilde{a}(ax) \quad ;$$

l'opérateur extrême $T = T \circ \tilde{a} + T \circ \tilde{a} \circ P_a$ apparaît comme somme de deux opérateurs positifs, donc il existe $\lambda \in \underset{\sim}{R}^{A_+}$ tel que $\forall a \in A_+$, $T \circ \tilde{a} = \lambda(a)\, T$, d'où

$$\forall x \in A , \quad Tx = T \circ \tilde{a}(x + ax) = \lambda(a)\, T(x + ax)$$

et, comme $T \neq 0$, $\forall a \in A_+$, $\lambda(a) \neq 0$, d'où finalement

$$\forall x \in A , \quad T(ax) = \frac{1 - \lambda(a)}{\lambda(a)}\, Tx \quad ;$$

posons $\mu = \dfrac{1 - \lambda}{\lambda} \in \underset{\sim}{R}^{A_+}$. Alors, ou bien $\forall a \in A_+$, $\mu(a) = 0$ qui équivaut à la première conclusion en utilisant $A = A_+ - A_+$, ou bien $\exists\, a \in A_+ : \mu(a) \neq 0$ et $\forall x \in A_+$,

$$\mu(a)\, Tx = T(ax) = T(xa) = \mu(x)\, T(a) \quad ,$$

d'où $Tx = \mu(x) \dfrac{Ta}{\mu(a)}$; posons $b = \dfrac{Ta}{\mu(a)}$, alors $\operatorname{Im}(T) \subset (b) \neq \emptyset$, puis,

pour x et $y \geqslant 0$,

$$\mu(xy)\, Ta = T(xya) = \mu(x)\, T(ya) = \mu(x)\, \mu(y)\, Ta \quad ,$$

et en utilisant $A = A_+ - A_+$, on obtient que le prolongement canonique de μ, qui résulte de l'identité $Tx \equiv \mu(x)\, b$, est le caractère φ cherché.

En effet, b est positif, car

$$b = \frac{T(a^2)}{\mu(a^2)} = \frac{(Ta)^2}{[\mu(a)]^2} \geqslant 0 \quad ,$$

et extrême avec T , car si $b = b_1 + b_2$, où b_1 et $b_2 \geqslant 0$, en considérant le plan $(b_1 \ , \ b_2)$ on trouve que si $b \leqslant 0$, c'est-à-dire si φ est non nécessairement positive, il vient aussi (b_1) et $(b_2) \subset E_+$; enfin, l'unicité résulte du fait que deux caractères ne sont jamais proportionnels.

PROPOSITION 3 (Cf. [4], p. 20, "Monotone extension"). - Soient E un espace vectoriel préordonné, F un sous-espace tel que $E = F + E_+$ et φ extrême dans F_+^* , alors il existe un prolongement de φ extrême dans E_+^* .

En effet, l'ensemble des prolongements positifs et extrêmes de φ est U-inductif, car la réunion d'une chaîne de tels graphes définit immédiatement un prolongement $\theta \in G_+^* \setminus \{0\}$, où $G = \mathrm{Dom}(\theta)$, et θ est extrême puisque si $\theta \geqslant \alpha \geqslant 0$, soit $t \in \mathbb{R}$ défini par $\alpha_{|F} = t\varphi$, pour tout élément de la chaîne $\theta_{|G_0}$, comme $\theta_{|G_0} \geqslant \alpha_{|G_0} \geqslant 0$, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_{|G_0} = t'\theta_{|G_0}$ et comme $F \subset G_0$, $t' = t$, d'où finalement $\alpha = t\theta$.

Prenons alors θ maximal (théorème de Zorn), son domaine est E ; sinon, soient $G = \mathrm{Dom}(\theta)$ et $a \in E_+ \setminus G$; en écrivant $\pm\, a \in F + E_+$, on obtient

$$\{x \in F \ ; \ \ x \leqslant a\} \neq \emptyset \neq \{x \in F \ ; \ \ x \geqslant a\} \quad ,$$

puis, pour $\gamma \in [G + (a)]^*$, si $\gamma_{|G} \geqslant 0$,

$$\gamma \geqslant 0 \iff \sup \gamma(\{x \in G \ ; \ \ x \leqslant a\}) \leqslant \gamma(a) \leqslant \inf \gamma(\{x \in G \ ; \ \ x \geqslant a\}) \quad .$$

Définissons alors $\overline{\theta} \in [G + (a)]_+^* \setminus \{0\}$ par

$$\overline{\theta}_{|G} = \theta \quad \text{et} \quad \overline{\theta}(a) = \inf \theta(\{x \in G \ ; \ \ x \geqslant a\}) \quad ;$$

$\overline{\theta}$ est extrême, car si $\overline{\theta} \geqslant \alpha \geqslant 0$, soit $\beta = \overline{\theta} - \alpha \geqslant 0$, comme $\theta \geqslant \alpha_{|G} \geqslant 0$, $\exists\, t \in \mathbb{R}$: $\alpha_{|G} = t\theta$ et $\beta_{|G} = (1 - t)\theta$, or :

- ou bien $0 \leqslant t \leqslant 1$ et

$$\alpha \geqslant 0 \implies \alpha(a) \leqslant \inf t\theta(\{x \in G \ ; \ \ x \geqslant a\}) = t\overline{\theta}(a)$$

$$\beta \geqslant 0 \implies \beta(a) \leqslant \inf\ (1 - t)\ \theta(\{x \in G \ ; \ \ x \geqslant a\}) = (1 - t)\ \overline{\theta}(a)$$

d'où $\beta(a) = \overline{\theta}(a) - \alpha(a) \geqslant (1 - t)\ \overline{\theta}(a) = \beta(a)$, d'où l'égalité, puis $\alpha(a) = t\overline{\theta}(a)$ et finalement $\alpha = t\overline{\theta}$;

- ou bien $t \notin [0 \ , \ 1]$, mais alors $\theta \leqslant 0$, donc $G_+ \subset \mathrm{Ker}\,\theta \subset \mathrm{Ker}\,\alpha$ et $\mathrm{Ker}\,\beta$, d'où, comme $a \geqslant 0$, α et $\beta(\{x \in G \ ; \ \ x \geqslant a\}) = \{0\}$, puis $\alpha(a)$ et $\beta(a) \leqslant 0$;

or comme α et $\beta \geqslant 0$, $\alpha(a)$ et $\beta(a) \geqslant 0$, et finalement $\alpha(a) = \beta(a) = 0 = \overline{\theta}(a)$ d'où encore $\alpha = t\overline{\theta}$.

LEMME 4. - *Etant donnée* A , *si* [5], *pour tout* $a \in A_+$, *l'opérateur* $\mathrm{id} + P_a$ *est injectif et* $x \in A$ *et* $x + ax \geqslant 0 \implies x \geqslant 0$, *alors il existe une suralgèbre* B *de* A *qui vérifie les hypothèses des propositions 3 et 2*.

En effet, considérons sur $A \times A_+$ la relation binaire

$$(x , y) \sim (u , v) \iff x + xv = u + uy \quad ;$$

c'est une équivalence car, si $(x , y) \sim (u , v)$ et $(u , v) \sim (a , b)$,

$$x + xv = u + uy \quad \text{et} \quad u + ub = a + av \quad ,$$

donc

$$\begin{aligned}(x + xb) + (x + xb)v &= (u + uy) + (u + uy)b \\ &= (u + ub) + (u + ub)y = (a + ay) + (a + ay)v \quad ,\end{aligned}$$

d'où $x + xb = a + ay$, et $(x , y) \sim (a , b)$. Elle est compatible avec la structure d'algèbre préordonnée définie par les opérations :

$$(x , y) + (u , v) = (x + u + xv + uy , y + v + yv) \quad ,$$

$$\lambda(x , y) = (\lambda x , y) \quad ,$$

$$(x , y).(u , v) = (xu , y + v + yv) \quad ,$$

et le préordre associé au cône $A_+ \times A_+$, convexe et stable.

Soit alors B le quotient, c'est canoniquement une algèbre préordonnée, réelle et commutative comme la précédente ; $B = B_- + B_+ = A + B_+$, car $\forall (x , y) \in A \times A_+$, comme $A = A_+ - A_+$, il existe x_1 et $x_2 \in A_+$ tels que $x = x_1 - x_2$, d'où $(x , y) = (- x_2 , 0) + (x_1 + yx_2 , y)$; $x \in A \to \overline{(x , 0)} \in B$ injecte A dans B comme algèbre préordonnée, car si $(x , 0) \sim (u , v) \in A_+ \times A_+$, $x + vx = u \geqslant 0$, donc $x \geqslant 0$. Enfin, pour tout $(a , b) \in A_+ \times A_+$, on peut prendre :

$$\widetilde{\overline{(a , b)}} = \text{identité} - \overline{(a , a + b)} \quad ,$$

---

[5] c'est-à-dire : si $\mathrm{id} + P_a$ admet un inverse à gauche positif. Notons par ailleurs que, si A est complètement réticulée, $\forall\, a \in A_+$, on peut prolonger linéairement et positivement, en un $\tilde{a}$, l'inverse défini sur $\{x + ax \; ; \; x \in A\}$ de $\mathrm{id} + P_a$, car puisque

$$\forall\, x \in A \ \text{et} \ u \in A_+ , \quad - (x + ax + u) = (- x - u) + a(- x - u) + au \quad ,$$

$\{x + ax \; ; \; x \in A\} + A_+$ est symétrique ; le résultat du théorème 5 n'est alors qu'un cas particulier de la proposition 2, sans utiliser la proposition 3 ni le lemme 4.

car cet opérateur [6] est positif puisque $\forall\ (x, y) \in A_+ \times A_+$

$$(x, y) - (a, a+b).(x, y) = [x + (a+b)x - ax , a + b + y + (a+b)y]$$
$$= [x + bx , a + b + y + (a+b)y] \geqslant 0 .$$

On obtient alors aisément :

THÉORÈME 5. - Soit A une algèbre commutative, réelle et préordonnée avec $A = A_+ - A_+$, telle que pour tout $a \in A_+$, l'opérateur $id + P_a$ est injectif, et $x \in A$ et $x + ax \geqslant 0 \implies x \geqslant 0$. Si $\varphi \in A_+^*$ est sur une génératrice extrémale, $\exists\ Cte \in [0 , \to)$: $\varphi(xy) \equiv Cte\ \varphi(x)\ \varphi(y)$ [7].

En effet, soit B l'algèbre déduite de A par le lemme 4 ; B, A et φ vérifient les hypothèses de la proposition 3 ; soit donc T un prolongement de φ extrême dans B_+^* ; B, $\underset{\sim}{R}$ et T vérifient les hypothèses de la proposition 2 ; donc finalement, ou bien

$$T(xy) \equiv 0 \equiv 0\ Tx.Ty ,$$

ou bien

$$T(xy) \equiv \mu(xy)\ b \equiv \mu(x)\ \mu(y)\ b \equiv \frac{1}{b}\ Tx.Ty .$$

Remarques.

(1) L'introduction de topologies, si elle est naturelle dans la proposition 2, est inopportune dans la proposition 3 ; on sait en effet que, sans relation entre le préordre et la topologie de E, on ne peut obtenir de prolongement continu et positif.

Par contre, la situation est favorable si, par exemple, A_+ est d'intérieur non vide, ou (Cf. [6], p. 04, proposition 4) A est un Fréchet et A_+ fermé.

(2) L'hypothèse : $\forall\ a \in A_+$, $(x \in A$ et $x + ax \geqslant 0 \implies x \geqslant 0)$ est non surabondante. En effet, pour l'ordre usuel, l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0 , \pi])$, muni de la multiplication

$$(f , g) \to \{t \to f(t) \int_0^t g + g(t) \int_0^t f\} ,$$

est une algèbre A, réelle, ordonnée, commutative, avec $A = A_+ - A_+$, telle que

---

[6] qui est du reste inverse bilatéral.

[7] On dit alors φ multiplicative.

$\forall\, a \in A_+$, l'opérateur $id + P_a$ est injectif. Or les masses de Dirac, en dehors de l'origine, qu'on sait extrêmes dans A_+^* , ne sont pas multiplicatives.

(3) Le résultat du théorème est à rapprocher du suivant (Cf. [5], p. 238, 24.2) : Les formes linéaires positives extrêmes sur un espace vectoriel réticulé sont les morphismes réticulés.

Il serait intéressant de savoir si ce résultat ne peut pas se déduire de notre théorème, en introduisant une multiplication convenable rattachée à l'ordre.

(4) Pour une algèbre de Banach complexe B , le théorème de Gel'fand introduit un cône positif naturel $B_+ = \{x \in B \text{ ; pour tout caractère } \gamma \text{ , } \gamma(x) \geqslant 0\}$.

L'algèbre réelle $A = B_+ - B_+$ vérifie alors les hypothèses de notre théorème, et les éléments extrêmes de A_+^* sont donc multiplicatifs sur A .

(5) Une réciproque partielle à notre théorème est vérifiée. On démontre (Cf. [1], p. 21 et 22) en effet que, pour l'ordre usuel, sur une algèbre A de fonctions numériques, vérifiant $A = A_+ - A_+$, les caractères positifs (8) sont extrêmes dans A_+^* .

Notons, à ce sujet, que l'homomorphisme identique, qui est positif, n'est pas extrême dans $\mathcal{L}(\underset{\approx}{R}^n)_+$.

(6) Les opérateurs positifs vérifiant $T(xy) \equiv 0$ forment un cône convexe héréditaire. Ce cône peut être de dimension supérieure à 1 , et donc contenir des éléments non extrêmes ; en effet, pour

$$A = \{f \in \underset{\approx}{R}^{[-1\,,\,1]} \;;\; f(0) = 0 \;,\; f_{|[-1\,,\,0]} \text{ et } f_{|[0\,,\,1]} \text{ polynômes}\}$$

les dérivations à droite et à gauche en l'origine ne sont pas colinéaires ; notons du reste que ces dérivations sont effectivement extrêmes dans A_+^* .

D'autre part, ce cône est étranger à l'ensemble des caractères positifs extrêmes; en effet, pour $0 \leqslant \theta \leqslant T$, $\forall\, x \in A_+$, $0 \leqslant \theta(x^2) \leqslant T(x^2) = 0$; or si θ est inférieur à un homomorphisme positif extrême, il lui est proportionnel, et par suite, de $\theta(x^2) = 0$ résulte $\theta(x) = 0$, d'où, comme $A = A_+ - A_+$, $\theta = 0$.

(7) Une représentation intégrale (Cf. [2]) des éléments de A_+^* par des formes

---

(8) L'hypothèse de positivité n'est pas superflue ; en effet, sur l'algèbre $\{f_{|[0,1]} \;;\; f \in \underset{\approx}{R}[x]\}$ pour l'ordre usuel, les masses de Dirac aux points de $\underset{\approx}{R} \setminus [0\,,\,1]$ sont des caractères non positifs.

positives multiplicatives est possible dans le cas simple suivant : pour la topologie $\sigma(A^* , A)$ de la convergence simple, A^*_+ est un cône complet et l'ensemble des formes multiplicatives fermé ; on supposera alors qu'il existe $a \in A_+$ tel que $\forall\, x \in A_+ , \ \exists\, t \in \mathbb{R} : \ x \leqslant ta$, condition nécessaire et suffisante pour que $\{\xi \in A^*_+ \ ; \ \xi(a) = 1\}$ soit une base compacte.

(8) G. CHOQUET suggère que, sur les algèbres de fonctions pour l'ordre usuel, les formes positives multiplicatives pourraient être les : $f \rightarrow \lim\limits_{\mathcal{U}} u.f$ pour tous les ultrafiltres $\mathcal{U}$ et fonctions positives u tels que la limite existe (préoccupations voisines dans [3]).

Enfin, il serait intéressant de savoir si la classe des algèbres introduites au théorème 5 est beaucoup plus large que celle des algèbres de fonctions pour l'ordre usuel. C'est, du reste, ce que sous-entend le "peut-être" du début de cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONSALL (F. F.), LINDENSTRAUSS (J.) and PHELPS (R. R.). - Extreme positive operators on algebras of functions (multigraphié).

[2] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[3] CHOQUET (Gustave). - Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 1re année, 1962, n° 4, 10 p.

[4] DAY (Mahlon M.). - Normed linear spaces, 2nd ed. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, 21).

[5] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, Van Nostrand, 1963 (The University Series in higher Mathematics).

[6] ROGALSKI (Marc). - Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 5e année, 1965/66, n° 2, 31 p.

[7] SILVERMAN (Robert J.). - Means on semigroups and the Hahn-Banach extension property, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 222-237.

[8] STØRMER (Erling). - Positive linear maps of operators algebras, Acta Math., Uppsala, t. 110, 1963, p. 233-278.