Doïtchin Doïtchinov

Une généralisation des espaces topologiques et des espaces uniformes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 2 (1965-1966), exp. nº 8, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_2_A1_0>

UNE GÉNÉRALISATION DES ESPACES TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES UNIFORMES (*)

par Doïtchin DOÏTCHINOV

[Résumé]

Le problème d'englober les théories des espaces topologiques, des espaces uniformes et des espaces de proximité dans une théorie unique a été résolu par A. CSÁSZÁR [1] et par M. HACQUE [2]. On propose ici une autre solution du même problème. Cette solution peut être caractérisée par le fait qu'elle conserve pour la notion d'uniformité la conception connue dans l'analyse classique.

Soit E un ensemble quelconque. Désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes ses parties. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-ensemble non-vide de $\mathcal{P}(E)$. Considérons toutes les applications U de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, et désignons par $\Phi(\mathfrak{M})$ leur famille. On dira que Σ est une <u>topologie généralisée</u> par rapport à l'ensemble $\mathfrak{M}$, si $\Sigma \subset \Phi(\mathfrak{M})$, et si les axiomes suivants sont satisfaits :

(1) Si $U \in \Sigma$ et $A \in \mathfrak{M}$, alors $A \subset U(A)$;

(2) Si $U \in \Sigma$, $V \in \Sigma$ et $A \in \mathfrak{M}$, alors il existe au moins une $W \in \Sigma$ telle que $W(A) \subset U(A) \cap V(A)$;

(3) Si $U \in \Sigma$ et $A \in \mathfrak{M}$, alors il existe au moins une $V \in \Sigma$ telle que, pour chaque $B \in \mathfrak{M}$, $B \subset V(A)$, on peut trouver une $W \in \Sigma$ pour laquelle on a $W(B) \subset U(A)$;

(4) Si $\emptyset \in \mathfrak{M}$, alors il existe au moins une $U \in \Sigma$ telle que $U(\emptyset) = \emptyset$;

(5) Si $U \in \Phi(\mathfrak{M})$ et si, pour chaque $A \in \mathfrak{M}$, il existe une $V \in \Sigma$ telle que $V(A) \subset U(A)$, alors $U \in \Sigma$.

<u>Remarque</u>. - Compte tenu de l'axiome (5), il est clair que l'axiome (2) peut être remplacé par l'axiome suivant :

(2') Si $U \in \Sigma$ et $V \in \Sigma$, alors $U \cap V \in \Sigma$, où l'application $U \cap V$ est définie par l'égalité $(U \cap V)(A) = U(A) \cap V(A)$.

(*) Le présent résumé rappelle les passages essentiels de l'article de l'auteur: DOJČINOV (D.). - Sur la théorie unique des espaces topologiques, des espaces de proximité et des espaces uniformes [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 156, 1964, p. 21-24.

Les topologies généralisées diverses, introduites sur un ensemble E par rapport au même ensemble $\mathfrak{M}$, peuvent être comparées entre elles en disant que la topologie Σ_1 est plus fine que la topologie Σ_2 lorsque l'on a $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$.

Si $\Sigma' \subset \Sigma$, on dira que Σ' est une base de la topologie généralisée Σ, introduite sur E par rapport à $\mathfrak{M}$, si, pour chaque $U \in \Sigma$ et pour chaque $A \in \mathfrak{M}$, on peut trouver une $V \in \Sigma'$ telle que $V(A) \subset U(A)$. On voit immédiatement qu'un sous-ensemble de l'ensemble $\Phi(\mathfrak{M})$ peut être base d'une topologie généralisée, si et seulement s'il vérifie les axiomes (1)-(4).

D'une manière analogue à celle de BOURBAKI, on peut définir la borne supérieure d'une famille de topologies généralisées, associées au même ensemble $\mathfrak{M}$.

Etant données une topologie généralisée Σ_1 sur un espace E_1 par rapport à $\mathfrak{M}_1$, et une autre topologie généralisée Σ_2 sur E_2 par rapport à $\mathfrak{M}_2$, on dira que l'application f de l'espace E_1 dans l'espace E_2 est continue quand les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $A \in \mathfrak{M}_1$ entraîne $f(A) \in \mathfrak{M}_2$;

(2) $V \in \Sigma_2$ entraîne $f^{-1} V f \in \Sigma_1$.

Toujours comme dans BOURBAKI, on peut introduire aussi une notion de topologie généralisée dans l'espace produit d'une famille d'espaces topologiques généralisés.

Si $A \in \mathfrak{M}$ et $B \subset E$, on dira que A est près de B (et on désignera cela par $A \delta_\Sigma B$) quand on a $U(A) \cap B \neq \emptyset$ pour chaque $U \in \Sigma$. La topologie généralisée Σ sera dite symétrique si la relation $A \delta_\Sigma B$ implique $B \delta_\Sigma A$ dès que $A \in \mathfrak{M}$ et $B \in \mathfrak{M}$ - une condition qui peut être écrite sous la forme suivante :

(S) Si $U \in \Sigma$, $A \in \mathfrak{M}$ et $B \in \mathfrak{M}$, et si $U(A) \cap B = \emptyset$, alors il existe une $V \in \Sigma$ telle que $V(B) \cap A = \emptyset$.

Remarquons que la borne supérieure d'une famille de topologies généralisées symétriques peut ne pas être symétrique, et cela même dans le cas d'une famille composée de deux topologies seulement.

On obtiendra divers cas particuliers de la notion de topologie généralisée si on fixe l'ensemble $\mathfrak{M}$ d'une manière ou d'une autre, ou bien si l'on impose des conditions supplémentaires à la famille d'applications composant Σ.

Dans le cas où l'ensemble $\mathfrak{M}$ coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{J}(E)$ de tous les sous-ensembles de E réduits à un seul point, la notion de topologie généralisée est équivalente à la notion classique d'espace topologique. La notion d'application continue, de même que celle de l'espace produit, coïncide dans ce cas avec les notions habituelles.

D'autre part, la notion de topologie généralisée symétrique par rapport à $\mathcal{P}(E)$ est équivalente à celle d'espace de proximité. Dans ce cas, une application continue n'est autre qu'une application " δ-continue" dans le sens de EFREMOVIČ-SMIRNOV [3]. En ce qui concerne la notion de topologie généralisée dans l'espace produit, on remarquera que si l'on considère les espaces de proximité appartenant à une famille donnée comme des espaces topologiques généralisés, la topologie généralisée dans le produit n'est pas, en général, symétrique, et ne correspond donc à aucun espace de proximité. Pour obtenir la notion d'espace produit de proximité, il faut alors chercher la moins fine parmi toutes les topologies généralisées symétriques qui sont plus fines que la topologie généralisée dans le produit. Une telle topologie généralisée moins fine existe toujours, et elle est unique.

En remarquant que dans les axiomes (2), (3), (5) et (S) on parle de l'existence de certaines applications qui peuvent cependant dépendre **du choix de certains** éléments appartenant à l'ensemble $\mathfrak{M}$, on peut "uniformiser" ces axiomes en exigeant que ces applications ne doivent pas dépendre de ce choix. On appellera alors une partie de $\Phi(\mathfrak{M})$, <u>topologie généralisée uniforme</u> (par rapport à $\mathfrak{M}$), si elle satisfait aux axiomes (1)-(5) uniformisés, et l'on dira qu'une topologie généralisée uniforme est <u>symétrique</u> si elle vérifie encore l'axiome (S) uniformisé. La définition de la notion de base d'une topologie généralisée peut aussi être uniformisée de même manière, et on obtiendra la notion de base d'une topologie généralisée uniforme.

Dans le cas où $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}(E)$, la notion de topologie généralisée uniforme est équivalente à celle de structure quasi-uniforme [4], tandis que la notion de topologie généralisée uniforme symétrique est équivalente à celle de structure uniforme dans le sens classique. Dans ce dernier cas, les notions d'application continue et de topologie généralisée dans l'espace produit correspondent à celles d'application uniformément continue et d'espace uniforme produit.

D'une manière naturelle se pose la question des rapports entre les topologies généralisées uniformes et les topologies généralisées qui ne sont pas uniformes. Ainsi, étant donnée une topologie généralisée (satisfaisant aux axiomes (1)-(5) non-uniformisés), on peut se demander si elle n'est pas en même temps uniforme. Bien qu'il existe des topologies généralisées qui ne soient pas uniformes, il peut arriver, pour certains choix de l'ensemble $\mathfrak{M}$, que toute topologie généralisée soit uniforme. On peut formuler des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'au moins une topologie généralisée qui ne soit pas uniforme.

D'autre part, toute topologie généralisée uniforme, par rapport à un ensemble $\mathfrak{M}$, peut être considérée comme base d'une topologie généralisée (dans le sens des axiomes non-uniformisés) par rapport au même ensemble $\mathfrak{M}$. Est-ce que toute topologie généralisée peut être engendrée de telle manière ? Il en est ainsi dans les cas $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(E)$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}(E)$. On peut même démontrer que, dans le cas $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(E)$, il existe toujours une topologie généralisée uniforme moins fine engendrant une topologie généralisée donnée. Mais dans le cas général, le problème reste ouvert pour le moment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CSÁSZÁR (Ákos). - Fondements de la topologie générale. - Paris, Gauthier-Villars, 1960.

[2] HACQUE (Michel). - Sur les E-structures, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1905-1907 et p. 2120-2122.

[3] SMIRNOV (Ju. M.). - O prostranstvakh blizosti, Mat. Sbornik, t. 31, 1952, p. 543-574.

[4] TAMARI (Dov). - On a generalization of uniform structures and spaces, Bull. Res. Council Israël, t. 3, 1954, p. 417-428.