Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Goullet de Rugy

Le théorème de Whitney sur les extensions différentiables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 1 (1965-1966), exp. nº 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A4_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 5

27 janvier 1966

LE THÉORÈME DE WHITNEY SUR LES EXTENSIONS DIFFÉRENTIABLES

par Alain GOULLET de RUGY

I

1. Notations. - Pour simplifier les expressions des dérivées multiples, nous introduisons les n-uples :

$$k = (k_1 , \dots , k_n) \qquad k_1 , \dots , k_n \in \mathbb{N} ,$$

et nous notons

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} k_i ,$$

$$(x' - x)^k = \prod_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^{k_i} ,$$

pour x' et x quelconques $\in \mathbb{R}^n$,

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k_1}{\ell_1} \times \dots \times \binom{k_n}{\ell_n}$$

lorsque ℓ est un n-uple tel que

$$\ell_i \leqslant k_i , \qquad i = 1 , \dots , n ,$$

et

$$D_k f(x) = \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x)$$

lorsque f est une application de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la dérivée considérée existe en x .

2. DÉFINITION 1. - Soient m un entier $\geqslant 0$, et A un fermé, borné ou non, de $\mathbb{R}^n$. Soient f et f_k $(\sigma_k \leqslant m)$ des fonctions réelles définies dans A $(f_{(0,\dots,0)} = f)$. On dit que f est de classe C^m sur A , relativement aux f_k $(\sigma_k \leqslant m)$, si, écrivant, pour x et x' quelconques dans A :

$$(1) \qquad f_k(x') = \sum_{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (x' - x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad ,$$

$R_k(x' ; x)$ a la propriété :

$$\forall \eta > 0 , \quad \forall x^o \in A , \quad \exists \delta > 0$$

tel que, pour tout x et $x' \in A$ tels que $d(x , x^o) < \delta$ et $d(x' , x^o) < \delta$, on a

$$(2) \qquad |R_k(x' ; x)| \leqslant \eta[d(x' ; x)]^{m-\sigma_k} \quad .$$

Cette définition se justifie par les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. - Pour tout k , tel que $\sigma_k \leqslant m$, les f_k sont continues dans A . Il suffit, pour le vérifier, d'écrire (1) sous la forme

$$f_k(x') - f_k(x) = \sum_{\substack{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k \\ \sigma_\ell \neq (0,\ldots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (x' - x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si f est de classe C^m sur A relativement aux f_k $(\sigma_k \leqslant m)$, alors en tout point $x \in \mathring{A}$, f_k est la dérivée k-ième de f , i. e.

$$D_k f(x) = f_k(x) \quad .$$

Montrons dans ce but que, si k est tel que $\sigma_k < m$, et si $x \in \mathring{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_h} f_k(x) = f_{k'}(x) \qquad (h = 1 , \ldots , n) \quad \text{où} \quad (k' = k , \ldots , k_{h+1} , \ldots , k_n) \quad .$$

Pour cela il suffit, dans (1), de prendre $x' = (x_1 , \ldots , x_h + \Delta_h , \ldots , x_n)$; nous avons alors

$$f_k(x') - f_k(x) - \Delta x_k \, f_{k'}(x) = \sum_{\substack{\ell \\ \ell \neq (0,\ldots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (x' - x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad .$$

Chaque terme de la somme est soit nul, soit contient $(\Delta x_h)^2$, et, d'après (2), $R_k(x' ; x)$ est un $o(\Delta x_h)$. D'où le résultat.

De ces deux propriétés il résulte que f est C^m , au sens ordinaire, dans $\mathring{A}$; en particulier, les f_k sont déterminés de manière unique en ces points.

D'autre part, si g est une fonction réelle C^m dans un voisinage de A, sa restriction f à A est C^m sur A relativement aux $f_k = D_k g$ d'après la formule de Taylor.

La différence entre ces deux définitions apparaît en les points frontière de A, où f n'est plus C^m au sens ordinaire, et où f peut être C^m relativement à un système de f_k.

Il importe de noter que f peut être C^m sur A relativement à plusieurs systèmes de f_k. Ainsi, pour $n = m = 2$, et si A est un segment parallèle à l'axe Ox_2, on pourra prendre n'importe quelle fonction continue pour $f_{(1,0)}$.

3. THÉORÈME 1. - Soient $m \in \mathbb{N}$, et A un fermé de $\mathbb{R}^n$; soient f, f_k $(\sigma_k \leqslant m)$ des fonctions réelles définies dans A, telles que f soit C^m sur A relativement aux f_k. Alors il existe une fonction réelle F définie dans $\mathbb{R}^n$, C^m au sens ordinaire (que nous appellerons extension de f à $\mathbb{R}^n$) telle que :

1° $F(x) = f(x)$ sur A,

2° $D_k F(x) = f_k(x)$ sur A $(\sigma_k \leqslant m)$,

3° $F(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n - A$.

(Evidemment, 2° $\Longrightarrow$ 1°.)

4. Construction d'un recouvrement fermé $\mathcal{K}$ et d'un recouvrement ouvert $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}^n - A$.

On définit ce recouvrement par récurrence comme suit :

On commence par diviser $\mathbb{R}^n$ en hypercubes fermés de longueur de côté égale à 1, et dont les sommets sont à coordonnées entières. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ces cubes.

- $K_0 = \{C \in \mathcal{H}$ tel que $d(C, A) \geqslant 6\sqrt{n}\}$.
- $K'_0 = \{C \in \mathcal{H}, \ C \notin K_0\}$.
- K''_0 = ensemble des cubes fermés obtenus en divisant chaque cube de K'_0 en 2^n cubes de côté $\frac{1}{2}$.

Et soit :

$$K_1 = \{C \in K''_0 \text{ tel que } d(C, A) \geqslant 6\sqrt{n}\, 2^{-1}\}.$$

Plus généralement, on suppose défini K''_{s-2}, K_{s-1}. On pose alors :

- $K'_{s-1} = \{C \in K''_{s-2}, \ C \notin K_{s-1}\}$.

- K''_{s-1} = ensemble des cubes fermés obtenus en divisant chaque cube de K'_{s-1} en 2^n cubes de côté 2^{-s}, et

$$K_s = \{C \in K''_{s-1} \ , \ d(C \ , \ A) \geqslant 6\sqrt{n}\, 2^{-s}\} \ .$$

Et on pose $\mathcal{K} = \cup K_s$. $\mathcal{K}$ est manifestement un recouvrement de $E - A$.

PROPRIÉTÉ 1. - Soient $C \in K_s$ et $y \in C$, alors

(3) $$d(A \ , \ C) < 14\sqrt{n}\, 2^{-s} \qquad (s \geqslant 1)$$

(4) $$d(A \ , \ C) > \frac{2}{3}\, d(y \ , \ A) \ .$$

Démontrons (3). Le cube C est obtenu par division en 2^n parties d'un cube $C' \in K'_{s-1}$. Donc $C' \notin K_{s-1}$, et par suite :

$$d(C' \ , \ A) < 6\sqrt{n}\, 2^{-s+1} \ ,$$

donc

$$d(C \ , \ A) \leqslant \operatorname{diam}(C') + d(C' \ , \ A) < 7\sqrt{n}\, 2^{-s+1} = 14\sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

Démontrons (4). Comme $y \in C \in K_s$,

$$d(y \ , \ A) \geqslant 6\sqrt{n}\, 2^{-s} \ ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} d(A \ , \ C) &\geqslant d(y \ , \ A) - \operatorname{diam} C \\ &\geqslant d(y \ , \ A) - \sqrt{n}\, 2^{-s} \\ &\geqslant \frac{5}{6}\, d(y \ , \ A) > \frac{2}{3}\, d(y \ , \ A) \ . \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si $C \in K_s$ et $C' \in K_t$ avec $t > s + 1$,

(5) $$d(C \ , \ C') > \sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

On écrit que

$$d(C \ , \ C') \geqslant d(A \ , \ C) - d(A \ , \ C') - \operatorname{diam}(C') \ .$$

D'où l'on déduit le résultat, compte tenu de (3), de $d(C \ , \ A) \geqslant 6\sqrt{n}\, 2^{-s}$ et $t \geqslant s + 2$.

5. Construction du recouvrement $\mathfrak{J}$.

Notons $y' \ , \ y^2 \ , \ \ldots \ , \ y^\nu \ , \ \ldots$ les sommets des cubes de $\mathcal{K}$. Posons, pour

tout $\nu \in \underset{\sim}{N}$:

- $r_\nu = d(y^\nu A)$;
- b^ν = longueur de l'arête du plus grand cube de $\mathcal{K}$ de sommet y^ν ;
- I_ν le cube ouvert ;
- $I_\nu = \{x \in \underset{\sim}{R}^n$ tel que $|x_h - y_h^\nu| < b_\nu$, $h = 1 , \dots , n\}$;
- $\mathfrak{I} = \bigcup_\nu \{\mathfrak{I}_\nu\}$.

PROPRIÉTÉ 1. - $\mathfrak{I}$ est un recouvrement ouvert de $E - A$.

PROPRIÉTÉ 2. - Soient $I_\nu \in \mathfrak{I}$, $C' \in K_t$ de sommet y^ν de longueur d'arête b^ν, et $C \in K_s$ un cube tel que $I_\nu \cap C \neq \emptyset$.

Alors, $s = t$ ou $t + 1$.

Par suite, il existe un entier M tel que, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$ et tout $C \in K_s$, le nombre des I_ν distincts rencontrant C est $< M$.

D'abord si $x \in I_\nu \cap C$, alors $d(x , y^\nu) \leqslant \sqrt{n}\, 2^{-t}$, donc, comme $y^\nu \in C'$, la relation (5) (ou plutôt sa négation) entraîne $s \leqslant t + 1$.

D'autre part, supposons $s < t$; alors, comme les sommets de C sont multiples de $2^{-s} > 2^{-t}$ ainsi que ceux de C' , $C \cap \overline{I_\nu}$ est un cube de côté 2^{-t} et de sommet y^ν ou bien $\overline{I_\nu}$ lui-même. Chacun de ces deux cas est impossible : le premier parce qu'alors C' ne serait pas un plus grand cube de sommet y^ν , le second parce qu'un cube $\in \mathcal{K}$ ne saurait être inclus dans un autre cube $\in \mathcal{K}$.

Cela étant, soit c le centre de C :

$$d(c , y^\nu) < \operatorname{diam}(C) + \operatorname{diam} C' < 3\sqrt{n}\, 2^{-s} \quad . \tag{6}$$

D'autre part, $2b_\nu = 2^{-s+1}$ ou 2^{-s+2} .

Enfin les coordonnées de y^ν sont multiples de 2^{-s} . Par suite

$$\{I_\nu \text{ tels que } I_\nu \cap C \neq 0\}$$

est inclus dans l'ensemble $\mathcal{K}_C$ des cubes ouverts de centre satisfaisant à (6) et à coordonnées multiples de 2^{-s} et de longueur d'arête 2^{-s+1} ou 2^{-s+2} .

Or le nombre d'éléments de $\mathcal{K}_C$ est $< 2(6\sqrt{n} + 1)^n = M$. Il en va de même du nombre d'éléments de l'ensemble de ces I_ν .

DÉFINITION 2. - Soient C et $C' \in K$, et

$$\mathfrak{J} = \{I_\nu \text{ tel que } I_\nu \cap C \neq \emptyset\} \ ,$$
$$\mathfrak{J}' = \{I_\nu \text{ tel que } I_\nu \cap C' \neq \emptyset\} \ .$$

On dit que C et C' sont de même type s'il existe une application

$$\varphi : \underset{\sim}{R}^n \longrightarrow \underset{\sim}{R}^n$$

composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $\geqslant 0$ telle que :

- $C' = \varphi(C)$,
- $\forall\, I_{\nu'} \in \mathfrak{J}'$, $\exists\, I_\nu \in \mathfrak{J}$ tel que $I_{\nu'} = \varphi(I_\nu)$,
- $\forall\, I_\nu \in \mathfrak{J}$, $\varphi(I_\nu) \in \mathfrak{J}'$.

PROPRIÉTÉ 3. - Il existe un nombre fini de types possibles de cubes.

Ceci se déduit facilement de la 2e partie de la propriété 2 et des précisions données au cours de la démonstration de celle-ci.

PROPRIÉTÉ 4. - Soient $C \in K_s$ et $I_\nu \in \mathfrak{J}$ tels que $I_\nu \cap C \neq \emptyset$. Alors pour tout $y \in C$,

(7) $$d(x^o , y^\nu) < 2d(x^o , y) \qquad \text{pour tout } x^o \in A \ ,$$

(7') $$d(A , y^\nu) < 2d(A , y) \ .$$

La démonstration de cette dernière propriété est facile dès que l'on a vu que :

$$d(y^\nu , y) \leqslant 3\sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

6. Partition de l'unité associée au recouvrement $\mathfrak{J}$.

Soit $\Theta(x)$ une fonction réelle C^∞ sur $\underset{\sim}{R}^n$, strictement positive sur le cube $R = \{x \ ; \ |x_h| < 1 \ , \ h = 1 \ , \ldots \ , \ n\}$, nulle en dehors. [Prendre par exemple

$$\Theta(x) = \prod_i \exp(x_i^2 - 1)^{-1}$$

dans le cube.]

Pour tout $\nu \in \underset{\sim}{N}$, posons

$$\pi_\nu(x) = \Theta\left(\frac{x}{2b_\nu}\right) \qquad \text{et} \qquad \Phi_\nu(x) = \frac{\pi_\nu(x)}{\sum_\lambda \pi_\lambda(x)} \ .$$

PROPRIÉTÉ 1. - $(\Phi_\nu)_{\nu \in \underset{\sim}{N}}$ est une partition C^∞ de l'unité de $\underset{\sim}{R}^n - A$, subordonnée au recouvrement $\mathfrak{J}$.

Le seul point peut-être non trivial est que cette partition soit C^∞ . Cela résulte de ce qu'au <u>voisinage</u> de chaque point il y a un nombre fini de π_ν non nuls.

PROPRIÉTÉ 2. - Soit un n-uple k ; il existe un nombre $N_k > 0$, tel que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout cube $C \in K_s$,

$$(8) \qquad |D_k \Phi_\nu(x)| < 2^{s\sigma_k} N_k \quad \text{dans } C \qquad (\nu = 1 , 2 , \dots) .$$

Soient $C_1 , \dots , C_d$ des cubes de $\mathcal{K}$ représentant tous les types possibles de cubes (et, en outre, choisis de façon à ce que chacun appartienne à un K_s d'indice aussi petit que possible).

Soit maintenant $C \in K_s$ un cube quelconque de $\mathcal{K}$, et soit C_p $(p \leqslant d)$, $C_p \in K_t$ de même type que C . Soient $I_{\lambda'_1} , \dots , I_{\lambda'_q}$ ceux des I_ν rencontrant C_p , $I_{\lambda_1} , \dots , I_{\lambda_q}$ ceux rencontrant C .

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $C_p = \varphi(C)$ (cf. définition 2). Soit

$$I_{\lambda_\alpha} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant q) \qquad \text{et} \qquad I_{\lambda'_{\alpha'}} = \varphi(I_{\lambda_\alpha}) \quad (1 \leqslant \alpha' \leqslant q) .$$

Comme l'homothétie intervenant dans la définition de φ est de rapport 2^{s-t} , nous avons pour $x \in I_{\lambda_\alpha}$

$$\Phi_{\lambda_\alpha}(x) = \Phi_{\lambda'_{\alpha'}}(y^{\lambda'_{\alpha'}} + 2^{s-t}(x - y^{\lambda_\alpha})) ,$$

ce qui, différencié k fois, donne

$$D_k \Phi_{\lambda_\alpha}(x) = 2^{(s-t)\sigma_k} D_k(\Phi_{\lambda'_{\alpha'}}(y^{\lambda'_{\alpha'}} + 2^{s-t}(x - y^{\lambda_\alpha}))) ;$$

de sorte que, si nous posons

$$N_k = \sup_{\substack{x \in \bigcup_{i=1}^d C_i \\ \nu \text{ tel que } I_\nu \cap \bigcup_{i=1}^d C_i \neq \Phi}} |D_k \Phi_\nu(x)| ,$$

nous avons pour $x \in C \cap I_{\lambda_\alpha}$, et compte tenu de $0 \leqslant s - t \leqslant s$:

$$|D_k \Phi_{\lambda_\alpha}(x)| < 2^{s\sigma_k} N_k ,$$

d'où (8).

II

La démonstration du théorème proprement dit.

1. Les fonctions $\psi_k(x' ; x)$.

DÉFINITION 3. - Pour $x' \in \underset{\sim}{R}^n$ et $x \in A$, posons :

$$\psi_k(x' ; x) = \sum_{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (x' - x)^\ell \qquad (\sigma_k \leqslant m) \quad . \tag{9}$$

Lorsque x est fixé, $\psi_k(x' ; x)$ est un polynôme de degré $m - \sigma_k$ au plus en $(x' - x)$. Lorsque x' varie dans A , $\psi_k(x' ; x)$ approche $f_k(x)$ à l'ordre $m - \sigma_k$ puisque nous avons :

$$\psi_k(x' ; x) + R_k(x' ; x) = f_k(x') \quad . \tag{10}$$

PROPRIÉTÉ 1. - La ℓ-ième dérivée de $\psi_k(x' ; x)$ en x' est

$$\psi_{k+\ell}(x' ; x) \qquad (\sigma_\ell \leqslant m - \sigma_k) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Pour x et $x' \in A$, et $x'' \in \underset{\sim}{R}^n$,

$$\psi_k(x'' ; x') = \psi_k(x'' ; x) + \sum_\ell \frac{R_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell \quad . \tag{11}$$

Ecrivons d'abord $\psi_k(x'' ; x)$ par son développement de Taylor en x' :

$$\psi_k(x'' ; x) = \sum_\ell \frac{\psi_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell = \sum_\ell (x'' - x')^\ell \Big[\sum_\gamma \frac{f_{k+\ell+\gamma}(x)}{\gamma!} (x' - x)^\gamma \Big] \quad .$$

Compte tenu de cette identité, de (9) et de (10), $\psi_k(x'' ; x')$ devient :

$$\psi_k(x'' ; x') = \sum_\ell \frac{(x'' - x')^\ell}{\ell!} \Big[\sum_\gamma \frac{f_{k+\ell+\gamma}(x)}{\gamma!} (x' - x)^\ell + R_{k+\ell}(x' ; x) \Big]$$

$$= \psi_k(x' ; x) + \sum_\ell \frac{R_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell \quad .$$

2. L'extension de f .

Pour tout $\nu \in \underset{\sim}{N}$, soit $x^\nu \in A$ un point tel que $d(x^\nu , y^\nu) = d(A , y^\nu)$. On

pose alors :

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(x)\ \psi_{(0,\dots,0)}(x\ ;\ x^{\nu}) & \text{dans } \underset{\sim}{R}^n - A \\ F(x) = f(x) & \text{dans } A\ . \end{cases}$$

Par construction, F est C^{∞} dans $\underset{\sim}{R}^n - A$. D'autre part, en tous les points intérieurs de A , F coïncide avec f ainsi que leurs dérivées partielles successives. En outre, toutes ces fonctions sont continues en ces points (propriétés 1 et 2 du § 2 du I). Il nous reste à voir ce qui se passe aux points frontières, à savoir qu'en ces points, $D_k F(x)$ existe, que $D_k F(x) = f_k(x)$, et qu'elle est continue $(\sigma_k \leqslant m)$.

Or pour vérifier ceci il nous suffit de montrer que

$D_k F(x) \longrightarrow f_k(x^o)$ lorsque $x \longrightarrow x^o$ (x^o appartenant à la frontière de A)

en restant dans $\underset{\sim}{R}^n - A$. C'est ce que nous allons montrer.

3. Points frontières.

Soient :

- x^o appartenant à la frontière de A ;
- ε réel > 0 ;
- η réel > 0 tel que :

  $\eta < \varepsilon\{2M[(m+2)!]^n\ (84\sqrt{n})^m\ N\}^{-1}$ et $\eta < \varepsilon/6$ où $N = \sup\limits_{\sigma_k \leqslant m} N_k$;
- δ réel > 0 tel que :

  $\delta < \varepsilon[6(m+1)^n\ L]^{-1}$ et $\delta < 1$ où $L > \sup\limits_{\substack{\sigma_k \leqslant m \\ d(x,x^0) \leqslant 1}} |f_k(x)|$,

δ étant en outre assez petit pour que η satisfasse à la définition 1.

De plus, notons :

- y un point quelconque de $\underset{\sim}{R}^n - A$ tel que $d(y\ ,\ x^o) < \frac{\delta}{4}$;
- $\delta^* = 4d(y\ ,\ A)$;
- $x \in A$ tel que $d(x\ ,\ y) = d(A\ ,\ y)$;
- $C \in K_s$ tel que $y \in C$; et
- $I_{\lambda_1}\ ,\ \dots\ ,\ I_{\lambda_t}$ ceux des I_{ν} rencontrant C .

Nous allons voir que dans ces conditions :

(12) $$|D_k(F(y)) - f_k(x^o)| < \varepsilon \qquad (\sigma_k \leqslant m) \quad .$$

<u>L'astuce est alors de ramener la comparaison de ces deux nombres à celle de chacun d'entre eux à</u> $\psi_k(y\ ;\ x)$.

Ainsi, vérifions que

(13) $$|\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x^o)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\sigma_k \leqslant m) \quad .$$

Par définition de ψ_k , nous avons :

$$\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x) = \sum_{\substack{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k \\ \ell \neq (0,\ldots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!}(y - x)^\ell \quad .$$

Comme $d(x\ ,\ y) = \frac{\delta^*}{4} < \delta < 1$, chaque terme de la somme est majoré par $L.\delta$. Cette somme comportant au plus $(m + 1)^n$ termes, nous avons :

$$|\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x)| < (m + 1)^n L\delta < \frac{\varepsilon}{6} \quad .$$

De manière analogue, comme

$$d(x\ ;\ x^o) < \frac{\delta^*}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta < 1 \quad ,$$

$$|\psi_k(x\ ;\ x^o) - f_k(x^o)| < \frac{\varepsilon}{6} \quad .$$

Enfin, de (10) nous déduisons

$$|f_k(x) - \psi_k(x\ ;\ x^o)| = |R_k(x\ ;\ x^o)| \leqslant \eta < \frac{\varepsilon}{6} \quad .$$

D'où (13).

Montrons maintenant que

$$|D_k(F(y)) - \psi_k(y\ ;\ x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

DÉFINITION 4. - Pour $\nu \in \underset{\sim}{N}$ et $z \in \underset{\sim}{R}^n$, posons :

$$\zeta_{\nu;k}(z) = \psi_k(z\ ;\ x^\nu) - \psi_k(z\ ;\ x) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 1. - $D_k(\zeta_{\nu;0}(z)) = \zeta_{\nu;k}(z)$.

PROPRIÉTÉ 2. - Pour tout $z \in C$:

(14) $$|\zeta_{\nu;k}(z)| < (m + 1)^n\ \delta_*^{m-\sigma_k}\ \eta \quad .$$

Comme $d(x^\nu , x) \leqslant d(x^\nu , y^\nu) + d(y^\nu , x)$ et que, d'après (7) et (7'),

$$d(x^\nu , y^\nu) = d(A , y^\nu) < 2d(A , y) = \frac{\delta^*}{2} , \qquad d(y^* , x) < 2d(y , x) = \frac{\delta^*}{2} ,$$

$$d(x^\nu , x) < \delta^* < \delta < 1 .$$

Nous avons par définition

$$|R_{K+\ell}(x^\nu ; x)| < \delta^{*m-\sigma_k-\sigma_\ell} \eta ,$$

de sorte que, comme $d(z , x^\nu) \leqslant 2d(y^\nu x^\nu) < 4d(y , x) = \delta^*$, nous avons bien :

$$|\zeta_{\nu;k}(z)| < (m + 1)^n \delta^{*m-\sigma_k} \eta .$$

Cela étant, faisons apparaître $\psi(z ; x)$ dans $F(z)$:

$$(\psi(z ; x) = \psi_{(0,\ldots,0)}(z ; x)) ,$$

$$g(z) = \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_1} \psi(z ; x^{\lambda_i}) ,$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_i}(z)[\zeta_{\lambda_i;0}(z) + \psi(z ; x)] ,$$

$$= \psi(z ; x) + \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_i}(z) \zeta_{\lambda_i;0}(z) ,$$

de sorte que :

$$D_k(F(z)) - \psi_k(z ; x) = \sum_{i=1}^{t} [\sum_{\ell} \binom{k}{\ell} D_\ell(\Phi_{\lambda_i}(z)) \zeta_{\lambda_i;k-\ell}(z)] .$$

Minorons le second membre. D'abord :

$$|D_\ell \Phi_{\lambda_i}(z)| < 2^{s\sigma_\ell} N ,$$

d'après (8). Utilisant (14), nous déduisons, compte tenu de

$$t < M \qquad \text{et de} \qquad \binom{k}{\ell} = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_1}{\ell_1} \leqslant (m!)^n ,$$

(15) $$|D_k(F(z)) - \psi_k(z , x)| < \sum_{\ell} M[(m + 1)!]^n 2^{s\sigma_\ell} \delta^{*m-\sigma_k-\sigma_\ell} N\eta .$$

Reste à considérer $2^{s\sigma_\ell}\delta^{*\sigma_\ell}$. Or nous avons vu (inégalités (3) et (4)) que

$$14\sqrt{n}\,2^{-s} > d(A\ ,\ C) > \frac{2}{3}\,d(y\ ,\ A)\quad ,$$

$$d(y\ ,\ A) = \delta^* \implies 2^s\,\delta^* < 84\sqrt{n}\quad .$$

Enfin, comme la somme en (15) porte sur $(m+1)^n < (m+2)^n$ termes, nous voyons que

$$|D_k\,F(z) - \psi_k(z\ ;\ x)| < \frac{\varepsilon}{2}\quad ,$$

d'où (12).

BIBLIOGRAPHIE

Ce théorème, et l'amélioration de ce théorème, qui affirme que l'on peut prendre l'extension analytique dans le complémentaire du fermé, se trouvent dans l'article de WHITNEY :

WHITNEY (H.). - Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

L'extension de ce théorème, au cas où les fonctions prennent leurs valeurs dans un Banach, se trouve dans l'article de GLAESER :

GLAESER (G.). - Etude de quelques algèbres tayloriennes, J. Analyse, Jérusalem, t. 6, 1958, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Paris, 1957).