

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MARC ROGALSKI

Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 1 (1965-1966), exp. n° 2, p. 1-31

http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A2_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS FONCTIONNELLES D'ESPACES VECTORIELS RÉTICULÉS

par Marc ROGALSKI

Le but de cet exposé est d'améliorer un théorème de Kakutani, datant de 1941 ([4]) :

THÉORÈME. - Soit E un espace de Banach réticulé, vérifiant :

- (1) $x \longrightarrow \|x\|$ est croissante sur E^+ , et $\| |x| \| = \|x\|$;
 (2) $\forall x, y \in E^+$, $\| \sup(x, y) \| = \sup(\|x\|, \|y\|)$.

Alors il existe un espace compact Z et une isométrie de E sur un sous-espace fermé réticulé de $C(Z)$, orthogonal d'une famille de mesures biponctuelles $(\delta_{x_\alpha} - \lambda_\alpha \delta_{x'_\alpha})_{\alpha \in A}$, $\lambda_\alpha \in [0, 1[$.

Nous affaiblirons l'hypothèse (1) en la remplaçant par $\| |x| \| \leq \|x\|$, et nous utiliserons (2) sous la forme : Si B est la boule unité de E, $B^+ = B \cap E^+$ est filtrante croissante. Nous utiliserons une démonstration nouvelle, s'appuyant sur le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET, ce qui nous permettra de beaucoup mieux caractériser le sous-espace E de $C(Z)$, ainsi que son dual E' , et de résoudre le problème réciproque.

Nous aurons besoin de résultats préliminaires portant sur la continuité des applications linéaires positives dans certains espaces ordonnés, puis nous démontrons un théorème de représentation d'espaces localement convexes réticulés comme espaces de mesures sur un compact. Nous terminerons par quelques applications du théorème de Kakutani, et nous donnerons dans un appendice quelques propriétés de certains Banach réticulés.

1. Applications linéaires positives.

PROPOSITION 1. - Soit E un Banach ordonné réticulé tel que

- (a) E^+ est fermé,
 (b) $\| |x| \| \leq \|x\|$.

Soit F un espace normé réticulé tel que

- (a') $0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|$.

Alors toute application linéaire positive $T : E \rightarrow F$ est continue.

Démonstration. - Il suffit de montrer que si $x_n \rightarrow 0$ "vite", c'est-à-dire avec

$$\sum_0^{\infty} \|x_n\| \leq \infty ,$$

alors $T(x_n) \rightarrow 0$.

Mais on a alors $\sum \| |x_n| \| < \infty$. Soit $a_n > 0$, $a_n \nearrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, telle que $\sum a_n \| |x_n| \| < \infty$.

Posons $y = \sum a_n |x_n| \in E^+$:

$$|T(x_n)| \leq T(|x_n|) = \frac{1}{a_n} T(a_n |x_n|) \leq \frac{1}{a_n} T(y) .$$

Or, si $x \in F$, $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. Donc, d'après (a'), $\|x^+\|$ et $\|x^-\|$ sont majorés par $\| |x| \|$. Donc $\|x\| \leq 2\| |x| \|$, $\forall x \in F$. D'où

$$\|T(x_n)\| \leq 2\| |T(x_n)| \| \leq \frac{2}{a_n} \|T(y)\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty .$$

C. Q. F. D.

Ce résultat nous suffira dans la suite. Nous allons quand même donner la démonstration d'un théorème plus fort ([6]).

PROPOSITION 2. - Soit E un espace localement convexe métrisable, ordonné par un cône E^+ complet. Soit F un espace vectoriel topologique séparé ordonné, tel que $0 \leq u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow 0$, alors toute application linéaire positive $T : E \rightarrow F$ est continue à droite, c'est-à-dire que si $y \rightarrow x$, $y \geq x$, alors $T(y) \rightarrow T(x)$.

Démonstration. - Il suffit de montrer que si $x_n \geq 0$, $x_n \rightarrow 0$ "vite", alors $T(x_n) \rightarrow 0$. Ici, "vite" signifiera :

Soit V_n un système fondamental de voisinages de 0 dans E , convexes équilibrés, tels que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$.

$$x_n \geq 0 , x_n \rightarrow 0 \text{ vite} \iff x_n \in V_n \cap E^+ = U_n .$$

Posons $y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n$.

$$y_n + y_{n+1} + \dots + y_{n+p} \in \left(\frac{3}{2}\right)^n [U_n + \frac{3}{4} U_n + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^p U_n] \subset 4\left(\frac{3}{2}\right)^n U_n ,$$

(car $U_{n+p} \subset \frac{1}{2^p} U_n$) .

Soit U_r donné. Prenons $n = r + s$.

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^n U_n \subset 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^r \times \left(\frac{3}{4}\right)^s \times U_r \subset U_r$$

si s , c'est-à-dire n , est suffisamment grand. Donc $y_n + y_{n+1} + \dots + y_{n+p} \in U_r$ si $n \geq N$. Donc $\sum y_n$ converge, et $\sum_0^\infty y_n = y \in E^+$. On a alors :

$$0 \leq T(x_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n T(y_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n T(y) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc $T(x_n) \rightarrow 0$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. - Soit E un espace localement convexe métrisable, ordonné par un cône E^+ complet, tel que :

$$(a) \quad E = E^+ - E^+; \quad (b) \quad E \text{ est un espace de Baire.}$$

Soit F un espace séparé ordonné tel que :

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow 0.$$

Alors :

- (1) Toute application linéaire positive $T : E \rightarrow F$ est continue.
- (2) E est un espace de Fréchet.

Démonstration de (2). - Soit V_n un système fondamental de voisinages de 0 convexes équilibrés, dans E , tels que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Posons

$$W_n = V_n \cap E^+ - V_n \cap E^+.$$

Les W_n forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie \mathfrak{W} sur E , plus fine que sa topologie initiale \mathfrak{V} , séparée, localement convexe et métrisable, car

$$W_n \subset V_{n-1} \quad \text{et} \quad W_n + W_n \subset W_{n-1}.$$

LEMME. - Si " (α) : $y_n \in W_n \implies \sum y_n$ converge pour \mathfrak{W} " est vérifiée, alors \mathfrak{W} est complète (la réciproque est vraie).

Soit en effet x_n de Cauchy. Il existe une sous-suite x_{n_p} telle que $y_p = x_{n_p} - x_{n_{p-1}} \in W_p$. Donc $\sum y_p$ converge pour \mathfrak{W} , donc x_{n_p} converge, donc x_n aussi.

Démontrons que \mathbb{W} est complète, en démontrant (α) .

Soit $y_n \in W_n$. $y_n = u_n - v_n$, u_n et $v_n \in V_n \cap E^+$. Si $s_n = \sum_{p=1}^n u_p$, S_n est une suite de Cauchy de E^+ pour \mathcal{V} , croissante, donc converge vers $S \in E^+$. Mais comme la convergence a lieu en croissant, elle a lieu pour \mathbb{W} . Donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent pour \mathbb{W} , donc $\sum y_n$ converge pour \mathbb{W} .

Si on considère alors la bijection : $i : E_{\mathbb{W}} \xrightarrow{c} E_{\mathcal{V}}$, elle est continue, $E_{\mathbb{W}}$ est un Fréchet, et $E_{\mathcal{V}}$ est métrisable de Baire. Donc, d'après le théorème de Banach, $\mathbb{W} = \mathcal{V}$, et E est un Fréchet.

Démonstration de (1). - Les W_n forment un système fondamental de voisinages de 0 pour \mathcal{V} .

Soit $x_n \rightarrow 0$ "vite", c'est-à-dire $x_n \in W_n$. Alors $x_n = u_n - v_n$, u_n et $v_n \in V_n \cap E^+$.

D'après la proposition 2, $T(u_n)$ et $T(v_n) \rightarrow 0$, donc $T(x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, et T est continue.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. - Soit $E = \lim \text{ind } E_\alpha$, où les E_α sont des Fréchet. On suppose E ordonné par E^+ tel que :

$$(a) \quad E_\alpha^+ = E_\alpha \cap E^+ \text{ est fermé dans } E_\alpha,$$

$$(b) \quad E_\alpha = E_\alpha^+ - E_\alpha^+.$$

Soit F séparé ordonné tel que :

$$(a') \quad 0 \leq u_n \leq v_n \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow 0.$$

Alors toute application T linéaire positive $T : E \rightarrow F$ est continue.

Démonstration. - Il suffit de montrer que $\forall \alpha$, $T/E_\alpha : E_\alpha \rightarrow F$ est continue, ce qui résulte de la proposition 3.

C. Q. F. D.

On trouvera à l'appendice quelques propriétés supplémentaires d'une classe de Banach réticulés à laquelle nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce qui suit.

2. Espaces de mesures.

DÉFINITION 1. - Dans un espace vectoriel topologique séparé E , un chapeau d'un cône convexe P est un convexe compact de P , dont le complémentaire dans P est

convexe. Le cône P est dit bien coiffé s'il est réunion de ses chapeaux. Un chapeau est universel s'il engendre le cône.

Si K est un chapeau du cône P, on appellera col de K l'ensemble :

$$L(K) = \{x \neq 0 \mid x \in K \text{ et } \forall \lambda > 1, \lambda x \notin K\} .$$

LEMME 1. - Dans un espace vectoriel localement convexe séparé E, un cône P convexe bien coiffé possède des génératrices extrémales, et, si P est fermé, P est l'enveloppe convexe fermée de la réunion $\mathcal{E}(P)$ de ses génératrices extrémales.

On montre que si K est un chapeau de P, alors $\mathcal{E}(K)$, ensemble des points extrémaux de K, est inclus dans $\mathcal{E}(P)$, qui est donc non vide (la méthode pour étudier un chapeau consiste à couper par des sous-espaces vectoriels de dimension 2, et à étudier les chapeaux des cônes de $\underline{\mathbb{R}}^2$).

Ensuite, on utilise le théorème de Krein et Milmann ([2]).

DEFINITION 2. - Soit E localement convexe séparé réticulé. Si E^+ possède un chapeau universel K (fixé dans la suite), on appellera cospectre de E l'ensemble :

$$X = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\} .$$

LEMME 2. - Soit E vérifiant les hypothèses de la définition 2. Si $\mathcal{E}(E^+)$ est fermé, $L(K)$, $\mathcal{E}(K)$ et X sont des boréliens de K

En effet :

$$L(K) = \bigcap_{n \geq 1} C_K(1 - \frac{1}{n})K$$

est un G_δ .

$$X = L(K) \cap \mathcal{E}(E^+)$$

est donc un borélien, et de même

$$\mathcal{E}(K) = X \cup \{0\} .$$

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant utiliser le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET, dont nous rappelons l'énoncé ([3]) :

THÉORÈME 0.

(1) Soit H un convexe compact de E localement convexe séparé. On définit sur $M(H)$ un ordre par :

$$\mu < \nu \iff \mu(\varphi) \leq \nu(\varphi), \quad \forall \varphi \text{ convexe continue sur } H.$$

Alors tout point x de H est barycentre d'une mesure ≥ 0 de masse 1 maximale pour cet ordre. Toute mesure maximale est portée par $\overline{\mathcal{E}(H)}$, et toute mesure portée par $\mathcal{E}(H)$ est maximale.

(2) On dit que H est un simplexe si tout $x \in H$ est barycentre d'une mesure maximale μ_x unique. Alors l'application $x \rightarrow \mu_x : H \rightarrow M(H)$ est scalairement de 1^{re} classe.

THÉORÈME 1. - Soit E un espace localement convexe séparé, réticulé, vérifiant :

- (a) E^+ possède un chapeau universel K ;
- (b) $\mathcal{E}(E^+)$ est fermé.

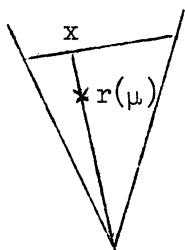
Alors :

1° Les mesures ≥ 0 de masses 1 sur K , maximales au sens de G. CHOQUET, sont les mesures ≥ 0 de masse 1 portées par $\mathcal{E}(K)$.

2° E est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel réticulé, à l'espace $M_X(\overline{X})$ des mesures sur le compact \overline{X} , portées par X (X est le cospectre de E).

Démonstration. - D'abord, le fait que E soit réticulé pour l'ordre de E^+ , prouve que K est un simplexe ([3]).

1° Toute mesure maximale est portée par $\overline{\mathcal{E}(K)}$, donc par $\overline{X} \cup \{0\}$, donc par $\mathcal{E}(E^+) \cap K$.

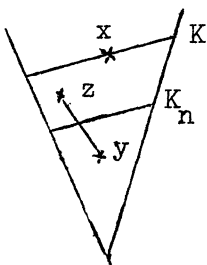


Soit μ maximale, soit $r(\mu)$ son barycentre. $r(\mu) \in K$. Donc $\exists x \in L(K)$ tel que $r(\mu) = \lambda x + (1 - \lambda)0$. D'où, puisque K est un simplexe :

$$\mu = \lambda \mu_x + (1 - \lambda) \delta_0,$$

où μ_x est la mesure maximale de barycentre x . μ_x est portée par $\mathcal{E}(E^+) \cap K$.

Or, soit $K_n = (1 - \frac{1}{n})K$, $n \geq 1$. Si $\exists n \geq 1$ tel que $\mu_x(K_n) > 0$, le barycentre y de $\mu_x|_{K_n}$ appartient à K_n . Le barycentre x de μ_x s'obtient comme un barycentre de y et d'un autre point z de K (le barycentre de $\mu_x|_{K \setminus K_n}$), et ne saurait donc appartenir à $L(K)$, ce qui est absurde. Donc $\mu_x(K_n) = 0$, $\forall n$, et μ_x est donc portée par X si $x \in L(K)$.



Donc $\mu = \lambda \mu_x + (1 - \lambda) \delta_0$ est portée par $\mathcal{E}(K)$.

La réciproque résulte du théorème de représentation intégrale.

2° Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $x = x^+ - x^-$, et $x^+ = \alpha x'$, $x^- = \beta y'$, α et $\beta \geq 0$, x' et $y' \in L(K)$. De plus x' , y' , α , β sont uniques pour x donné, si on impose $\inf(x', y') = 0$.

Posons $m(x) = \alpha \mu_{x'}$, $-\beta \mu_{y'}$, et $m(0) = 0$. $m(x) \in M_X(\bar{X})$, et sa résultante est x .

$$m : E \longrightarrow M_X(\bar{X}) = \{\text{mesures sur } \bar{X}, \text{ portées par } X\},$$

m est linéaire, car on voit, en coupant par le plan $\{0, x, y\}$ que si x et $y \in E^+$, $m(x + y) = m(x) + m(y)$.

m est surjective : à toute $\mu \in M_X(\bar{X})$, on fait correspondre sa résultante, et si $\mu \geq 0$, $r(\mu) \in E^+$.

m est injective : si $m(x) = 0$, $\alpha \mu_{x'} = \beta \mu_{y'}$, d'où $\alpha = \beta$, d'où $\mu_{x'} = \mu_{y'}$, d'où $x' = y'$ (unicité de la représentation intégrale), donc $x = 0$.

Enfin, il est clair que

$$m(E^+) = M_X^+(\bar{X}).$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2.

1° Soit E un espace vérifiant les hypothèses du théorème 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (α) $x \longrightarrow \mu_x$ est continue de K dans $M(K)$ muni de la topologie vague,
- (β) $\mathcal{E}(K)$ est fermé,
- (γ) l'espace A des fonctions affines continues sur K , ordonné par

$$A^+ = \{f \in A \mid f \geq 0 \text{ sur } K\},$$

est réticulé.

2° Si E vérifie l'une des hypothèses (α), (β) ou (γ), alors deux cas, et deux seulement, se présentent :

- (I) X est fermé, et E est isomorphe à $M(X)$.
- (II) $\bar{X} = X \cup \{0\}$, et E est isomorphe à $M_C(X)$, espace des mesures bornées sur X localement compact non compact.

3° Enfin, on a :

$$\{\mathcal{E}(K) \text{ fermé et } 0 \notin \overline{L(K)}\} \iff (I),$$

et si ces conditions sont vérifiées, E^+ a une base compacte.

Démonstration.

1° $(\beta) \iff (\gamma)$ résulte d'un théorème de H. BAUER que nous ne démontrerons pas ici :

$$\{(\nu) \text{ et } K \text{ simplexe}\} \iff (\gamma)$$

(ici, K est déjà un simplexe) ([1]).

$(\beta) \implies (\alpha)$. - Les mesures maximales sont les éléments de $M_1^+[\mathcal{E}(K)]$, compact vague. $\mu \longrightarrow r(\mu) =$ "barycentre de μ " est une application bijective continue de $M_1^+[\mathcal{E}(K)]$ sur K , donc sa réciproque $x \longrightarrow \mu_x$ est continue (la topologie de K est identique à la trace sur K de $\sigma(E, E')$).

$(\alpha) \implies (\beta)$. - Soit $x \in \overline{\mathcal{E}(K)}$. Soit $x_i \in \mathcal{E}(K)$, $x_i \longrightarrow x$. Donc $\mu_{x_i} \longrightarrow \mu_x$. Or $\mu_{x_i} = \delta_{x_i}$. Donc $\delta_{x_i} \longrightarrow \mu_x$. Or $\delta_{x_i} \longrightarrow \delta_x$. Donc $\mu_x = \delta_x$, donc $x \in \mathcal{E}(K)$.

2° $\mathcal{E}(K) = X \cup \{0\}$ est fermé. Donc deux cas sont possibles :

(I) X est fermé. Alors $M_X(\overline{X}) = M(X)$.

(II) $\overline{X} = X \cup \{0\}$. Alors $M_X(\overline{X}) = M_0(X)$.

3° Si $\mathcal{E}(K)$ est fermé, et si $0 \notin \overline{L(K)}$, alors $0 \notin \overline{X}$, car $X \subset L(K)$. Donc $X = \overline{X}$: (I).

Si on a (I), $X = \overline{X}$, donc $\mathcal{E}(K)$ est fermé. De plus, $\overline{\Delta(X)}$, enveloppe convexe fermée de X , est compacte, et $\mathcal{E}[\overline{\Delta(X)}] = X$. Or, si $0 \in \overline{\Delta(X)}$, 0 serait extrémal, donc 0 appartiendrait à X , ce qui est faux. Donc $0 \notin \overline{\Delta(X)}$.

Or, puisque $\forall x \in L(K)$, μ_x est portée par X , $\overline{L(K)} = \overline{\Delta(X)}$. Donc $0 \notin \overline{L(K)}$.

Montrons qu'alors E^+ a une base compacte.

Soit H un hyperplan fermé séparant 0 de $\overline{L(K)}$. Alors $H \cap K$ est une base compacte de E^+ .

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas où E est le dual d'un espace de Banach réticulé. Nous en tirerons, par dualité, la représentation de tels espaces comme espaces de fonctions continues sur un compact.

3. Espaces de fonctions.

PROPOSITION 5. - Soit E un espace de Banach réticulé vérifiant les conditions :

(NC) $x \rightarrow \|x\|$ est croissante sur E^+ ,

(NV) $\| |x| \| \leq \|x\|$.

Alors :

1° $x \rightarrow \| |x| \|$ est une norme sur E , équivalente à $x \rightarrow \|x\|$.

2° E^+ est fermé, et $x \rightarrow |x|$ est uniformément continue.

3° Si E' est le dual topologique de E , on a $E' = E'^+ - E'^+$ et $E'^* = E'^+$.

4° E' est un Banach complètement réticulé, tel que E'^+ soit fermé, et que l'on ait les propriétés :

(NC) $_{E'}$, $\ell \rightarrow \|\ell\|$ est croissante sur E'^+ ,

(NV') $_{E'}$, $\|\ell\| \leq \| |\ell| \|$,

(NV'') $_{E'}$, $|\ell| \leq |\ell'| \Rightarrow \| |\ell| \| \leq 2\|\ell'\|$.

De plus si E vérifie

(V) $\|x\| = \| |x| \|$,

alors E' vérifie aussi

(V) $_{E'}$, $\|\ell\| = \| |\ell| \|$.

Démonstration.

1° On a $\|x^+\|$ et $\|x^-\| \leq \| |x| \|$, d'où

$$\| |x| \| \leq \|x\| \leq 2\| |x| \|.$$

2° $\| |x| - |y| \| \leq |x - y|$. Donc $\| |x| - |y| \| \leq 2\|x - y\|$, donc $x \rightarrow |x|$ est uniformément continue, et E^+ est fermé.

3° Soit $\ell \in E'$, de norme $\|\ell\|$. Si $|y| \leq x$, $x \in E^+$, $|\ell(y)| \leq \|y\| \|\ell\|$ et $\|y\| \leq 2\| |y| \| \leq 2\|x\|$. Donc $|\ell(y)| \leq 2\|x\| \|\ell\|$, c'est-à-dire que ℓ est relativement bornée. Donc $\ell = \ell^+ - \ell^-$, ℓ^+ et $\ell^- \in E'^*$. Or la proposition 1 nous prouve que $E'^* = E'^+$. Donc

$$E' = E'^+ - E'^+.$$

4° E' , étant donc le dual relativement borné de E , est complètement réticulé pour l'ordre défini par $E'^+ = E'^*$, E' est un Banach, bien sûr (cf. [2]).

Si $0 \leq \ell \leq \ell'$:

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(x)| \leq \sup_{\| |x| \| \leq 1} \ell(|x|) \leq \sup_{\substack{y \geq 0 \\ \| |y| \| \leq 1}} |\ell'(y)| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} |\ell'(y)| = \|\ell'\|.$$

Donc $(NC)_{E'}$ est vérifiée.

$$|\ell(x)| \leq |\ell|(|x|) \leq \|\ell\| \| |x| \| \leq \|\ell\| \|x\| .$$

Donc $\|\ell\| \leq \|\ell\|$: $(NV')_{E'}$.

Soit $|\ell| \leq |\ell'|$,

$$\begin{aligned} \|\ell\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell|(|x|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell'|(|x|) \\ &= \sup_{\substack{0 \leq z \\ \|z\| \leq 1}} |\ell'(z)| = \sup_{\|z\| \leq 1} \sup_{|y| \leq z} \ell'(y) \leq \sup_{\|y\| \leq 1} |\ell'(y)| \quad (\text{cf. [2]}). \end{aligned}$$

Si on n'a que (NV) sur E , alors le dernier terme est majoré par

$$\sup_{\|y\| \leq 2} |\ell'(y)| = 2\|\ell'\| .$$

D'où $(NV'')_{E'}$: $|\ell| \leq |\ell'| \implies \|\ell\| < 2\|\ell'\|$.

Si E vérifie (V) , le dernier terme est $\|\ell'\|$, d'où, en prenant $\ell = |\ell'|$: $\|\ell'\| \leq \|\ell'\|$, et avec $(NV')_{E'}$, on déduit $(V)_{E'}$, pour E' :

$$\|\ell\| = \|\ell\| .$$

Enfin, $(NV'')_{E'}$ $\implies \|\ell\| \leq \|\ell\| \leq 2\|\ell\|$. Donc $\ell \longrightarrow \|\ell\|$ est une norme équivalente sur E' , et on voit, comme pour E , que $\ell \longrightarrow |\ell|$ est continue, donc E'^+ fermé.

C. Q. F. D.

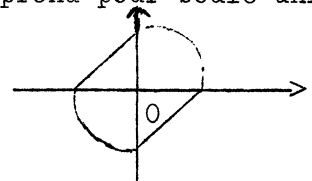
LEMME 3. - Soit E un Banach réticulé, vérifiant (NC) et (NV) . Alors $\forall \ell \in E'^+$,

$$\|\ell\| = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ \|x\| \leq 1}} \ell(x) .$$

C'est évident ($\|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(x^+) - \ell(x^-)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup[\ell(x^+) , \ell(x^-)]$).

Remarque. - On peut exhiber des Banach réticulés vérifiant (NC) et (NV) , et non (V) . Exemple : $E = \underline{\mathbb{R}}^2$, ordonné par $\underline{\mathbb{R}}_+^2$, où l'on prend pour boule unité :

$$B = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{|y - x| \leq 1\}$$



DÉFINITION 3. - Soit E un espace normé réticulé. On dira que E vérifie la condition (F) si $B^+ = B \cap E^+$, ensemble des éléments ≥ 0 de la boule unité B , est filtrant croissant.

On dira que E vérifie la condition (U) si B^+ possède un plus grand élément e , appelé élément unité. Bien sûr, (U) \implies (F).

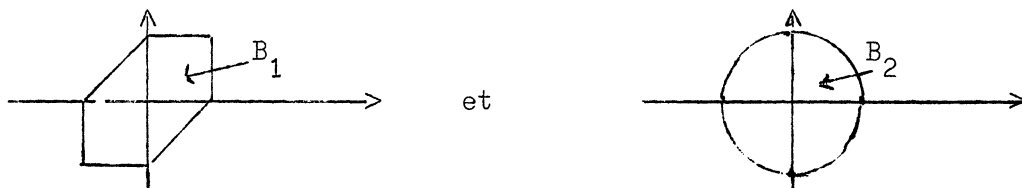
Bien entendu, la condition de Kakutani :

(K) : Si x et $y \geq 0$, $\|\sup(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$,

implique (F) (en fait, (K) et (F) sont équivalentes si (NC) est vraie).

Remarque 1. - E peut vérifier (F) pour une norme, et non pour une autre norme équivalente.

Exemple : Si $E = \underline{\mathbb{R}}^2$, avec deux boules unités différentes :



$$B_1 = \{\sup(|x|, |y|) \leq 1\} \cap \{|y - x| \leq 1\}$$

$$B_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Remarque 2. - Si $E = C_0(X)$, X localement compact non compact, E vérifie (F) et non (U).

PROPOSITION 6. - Soit E un Banach réticulé vérifiant les conditions (NV), (NC) et (F). Alors la norme sur E' est additive sur E'^+ .

Démonstration. - En effet, d'après le lemme 3, si $\ell \in E'^+$, on a :

$$\|\ell\| = \sup_{\substack{0 \leq x \\ \|x\| \leq 1}} \ell(x) = \lim_{B^+} \ell(x)$$

puisque, d'après (F), B^+ est filtrante croissante.

D'où l'additivité de cette norme.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. - Soit E un espace de Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F). Alors E' vérifie les hypothèses (a) et (b) du théorème 1, pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, et avec comme chapeau universel :

$$K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\}.$$

$X = \mathfrak{E}(K) \setminus \{0\}$, cospectre de E' , s'appellera le spectre de E .

Donc on a le résultat du théorème 1 :

$$E' \xrightarrow{\sim} M_X(\bar{X}) ,$$

et cet isomorphisme conserve la norme des éléments de E'^+ .

Démonstration. - La topologie $\sigma(E', E)$ est localement convexe séparée, et E'^+ est fermé pour cette topologie. E' est réticulé (et même complètement réticulé). K est l'intersection de E'^+ avec la boule unité de E' , donc est $\sigma(E', E)$ -compact, et il résulte de la proposition 6 que K et $E'^+ \setminus K$ sont convexes. Donc K est un chapeau, évidemment universel. Il reste à montrer que $\mathfrak{E}(E'^+)$ est $\sigma(E', E)$ -fermé. Nous aurons besoin pour cela de deux lemmes classiques, qui figurent par exemple dans [5], et qui serviront plus loin :

LEMME 4. - Soit E un espace vectoriel réticulé. $\forall u \in E^+$ et $\forall f \in E^{*+}$, $\exists g \in E^{*+}$ telle que : $g \leq f$, $g(u) = f(u)$, $g(x) = 0$, $\forall x \geq 0$ étranger à u .

LEMME 5. - Soit E un espace vectoriel réticulé. Soit $\delta \in E^*$. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes pour δ :

- (i) $\delta \geq 0$ et si $x, y \geq 0$ sont étrangers, $\inf[\delta(x), \delta(y)] = 0$.
- (ii) δ est un homomorphisme d'espaces réticulés : $E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$.
- (iii) $\delta \geq 0$ et $\forall \ell \in E^*$, $0 \leq \ell \leq \delta \Rightarrow \ell$ proportionnelle à δ .
- (iv) δ est sur une génératrice extrême de E^{*+} : $\delta \in \mathfrak{E}(E^{*+})$.

Admettons ces deux lemmes pour un instant. Alors :

$$\ell \in \mathfrak{E}(E'^+) \iff \forall x, y \geq 0 \text{ étrangers } \inf[\ell(x), \ell(y)] = 0 ;$$

comme $\ell \rightarrow \inf[\ell(x), \ell(y)]$ est $\sigma(E', E)$ -continue, $\mathfrak{E}(E'^+)$ est $\sigma(E', E)$ -fermé.

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 5. - (i) \Rightarrow (ii) est facile (on considère $x - \inf(x, y)$ et $y - \inf(x, y)$).

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $0 \leq \ell \leq \delta$. Soit $x \in E$ tel que $\delta x = 0$, $x = x^+ - x^-$, et $\inf[\delta(x^+), \delta(x^-)] = 0$. Or $\delta(x^+) - \delta(x^-) = 0$. Donc $\delta(x^+) = \delta(x^-) = 0$. $0 \leq \ell \leq \delta$, donc $\ell(x^+) = \ell(x^-) = 0$, donc $\ell(x) = 0$. Donc $\delta(x) = 0 \Rightarrow \ell(x) = 0$. D'où $\ell = \lambda \delta$.

(iii) \Rightarrow (i) : Soient x et $y \geq 0$, étrangers. Si $\delta(x) = \delta(y) = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $\delta(x) \neq 0$ par exemple. D'après le lemme 4, il existe $g \in E^*$ telle que $0 \leq g \leq \delta$, $g(x) = \delta(x)$, $g(y) = 0$, $0 \leq g \leq \delta$, donc

$g = \lambda \delta$, et $g(x) = \delta(x)$, donc $\lambda = 1$. Donc $g = \delta$; $g(y) = 0$, donc $\delta(y) = 0$, donc $\inf[\delta(x), \delta(y)] = 0$.

(iii) \implies (iv) : Supposons que $\delta = \frac{u+v}{2}$, u et $v \in E^{**+}$; alors $\frac{u}{2} \leq \delta$, donc $\frac{u}{2} = \lambda \delta$, et $\frac{v}{2} = (1-\lambda)\delta$, et δ est extrémale.

(iv) \implies (iii) : Soit $0 \leq \ell \leq \delta$. Donc $\delta = \frac{2\ell + 2u}{2}$, $u \in E^{**+}$. Donc $\frac{2\ell}{2} = \ell$ est proportionnel à δ .

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 4. - Pour tout $x \geq 0$, posons

$$g(x) = \sup\{f(y) \mid 0 \leq y \leq x \text{ et } \exists t \geq 0 : y \leq tu\}, \quad g(x) \geq 0.$$

Si x et $y \geq 0$, alors $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$. Soit en effet z tel que $0 \leq z \leq x+y$, et $z \leq tu$. $z = a+b$ avec $0 \leq a \leq x$, $0 \leq b \leq y$, $a \leq tu$, $b \leq tu$ (théorème de partition).

$$f(z) = f(a) + f(b) \leq g(x) + g(y);$$

donc $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

Si x et $y \geq 0$, alors $g(x) + g(y) \leq g(x+y)$. Si $0 \leq a \leq x$, $a \leq tu$, et $0 \leq b \leq y$, $b \leq su$, alors $0 \leq a+b \leq x+y$, et $a+b \leq (s+t)u$. Donc

$$f(a) + f(b) = f(a+b) \leq g(x+y).$$

D'où $g(x) + g(y) \leq g(x+y)$.

$$x \geq 0 \text{ et } t \geq 0 \implies g(tx) = tg(x).$$

Donc g s'étend en une forme linéaire ≥ 0 notée encore g .

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \sup f(y) \quad \text{pour des } y \leq x.$$

Donc $g \leq f$.

$g(u) = f(u)$ est évident.

Soient $x \geq 0$ étranger à u , et y tel que $0 \leq y \leq x$, $y \leq tu$.

$$0 \leq y \leq \inf(x, tu) = 0 \implies f(y) = 0; \text{ donc } g(x) = 0.$$

C. Q. F. D.

THÉOREME 4.

1° Soit E un Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F), et soit X son spectre. Si on pose, $\forall x \in E$:

$$\|x\|_X = \sup_{\ell \in X} \ell(|x|)$$

alors on a :

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x\|_X \leq \| |x| \| \leq \|x\| \quad .$$

2° E est isomorphe pour l'ordre et la norme à un sous-espace fermé réticulé de $C(\bar{X})$, espace des fonctions continues sur le compact \bar{X} .

3° Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$(V) : \forall x \in E, \quad \| |x| \| = \|x\| \quad .$$

(G) : L'isomorphisme précédent est une isométrie.

$$(V)_{E'} : \forall \ell \in E', \quad \| |\ell| \| = \|\ell\| \quad .$$

4° Si E, Banach réticulé, vérifie (NC) et (NV), l'hypothèse de Kakutani

$$(K) : \quad \forall x, y \geq 0 \text{ de } E, \quad \|\sup(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$$

est équivalente à (F). On a donc :

$$(U) \implies (K) \iff (F) \quad .$$

Démonstration.

1° D'abord, on a $\|x\|_X = \sup_{\ell \in K} \ell(|x|)$. En effet, $\ell \rightarrow \ell(|x|)$ est linéaire continue sur K , donc atteint son maximum sur $\mathcal{E}(K) = X \cup \{0\}$. Si $x = 0$, l'égalité est évidente, sinon le \sup a lieu sur X .

Puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x\| &= \frac{1}{2} \sup_{\|\ell\| \leq 1} |\ell(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{\|\ell\| \leq 1} |\ell(|x|)| \leq \frac{1}{2} \sup_{\|\ell\| \leq 2} |\ell(|x|)| \\ &= \sup_{\ell \in K} \ell(|x|) = \|x\|_X \leq \| |x| \| \leq \|x\| \quad . \end{aligned}$$

Si E vérifie (V), on a vu que E' vérifie $(V)_{E'}$, (proposition 5), d'où disparition du facteur $\frac{1}{2}$, et

$$\|x\| \leq \|x\|_X \leq \| |x| \| \leq \|x\| \implies \|x\|_X = \|x\| \quad .$$

Donc $(V) \implies (V)_{E'} \implies \|x\|_X = \|x\| \quad .$

2° Donc E est isomorphe à un sous-espace de $C(\bar{X})$, fermé, car on a aussi

$$\|x\|_X = \sup_{\ell \in \bar{X}} \ell(|x|) = \text{norme de } x \text{ dans } C(\bar{X}) \quad .$$

De plus, comme $\mathcal{E}(E'^+) \supset \bar{X}$, on voit, d'après le lemme 5, que

$$\ell[\inf(x, y)] = \inf[\ell(x), \ell(y)] \quad \text{pour } \ell \in \bar{X} \quad .$$

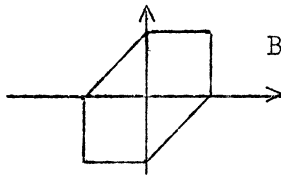
Donc E est isomorphe à un sous-espace réticulé de $C(\bar{X})$.

3° Dire que $\|x\|_X = \|x\|$, c'est dire que l'isomorphisme est une isométrie. On sait donc déjà : $(V) \Rightarrow (V)_E, \Rightarrow (\mathcal{J})$; et comme $\|x\|_X = \|x\|$, $(\mathcal{J}) \Rightarrow (V)$.

4° Enfin, si (V) , et donc (\mathcal{J}) , est vérifiée, l'hypothèse (K) est vraie sur E , car elle l'est sur $C(\bar{X})$. Donc, pour la norme $x \rightarrow \|x\|$, (K) est vérifiée, et comme cette norme est la même que $\|x\|$ sur E^+ , (K) est vérifiée pour $\|x\|$. Donc $(F) \Rightarrow (K)$, et la réciproque est évidente.

C. Q. F. D.

Remarque 1. - Il est faux, (NC) et (NV) étant toujours vérifiées, que $(K) \Rightarrow (V)$. Contre-exemple pour $E = \mathbb{R}^2$, avec pour boule unité :



$$B = \{\sup(|x|, |y|) \leq 1\} \cap \{|y - x| \leq 1\}$$

Cette norme vérifie (NC) , (NV) , (U) et (K) , et non (V) .

Remarque 2. - Il est facile de démontrer directement que $(F) \Rightarrow (K)$, sans passer par le plongement dans $C(\bar{X})$.

Remarque 3. - On trouvera dans [4] une hypothèse

$$(K') \quad \inf(x, y) = 0 \Rightarrow \|\sup(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|) .$$

KAKUTANI, par un plongement aussi, montre que (NC) , (V) et $(K') \Rightarrow (K)$. Cela reste vrai pour (NV) seulement, donc on a :

$$(U) \Rightarrow (F) \Leftrightarrow (K) \Leftrightarrow (K') .$$

4. Caractérisation du sous-espace E de $C(\bar{X})$.

Pour caractériser E , nous utiliserons le théorème 3, qui caractérise E' comme espace de mesures sur \bar{X} . Etudions d'abord ce qui se passe dans un cas simple.

THÉOREME 5.

1° Soit E un espace de Banach réticulé satisfaisant aux conditions (NC) , (NV) et (F) , et soit X son spectre. Si E' satisfait l'une des conditions (α) , (β) ou (γ) du théorème 2, alors deux cas seulement sont possibles :

(I) X est fermé, et E est isomorphe à $C(X)$.

(II) $\bar{X} = X \cup \{0\}$, et E est isomorphe à $C_0(X)$, espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur X localement compact non compact.

2° Si E vérifie de plus la condition (U) , c'est le cas (I) qui a lieu, et la réciproque est vraie si (V) est vérifiée.

Démonstration.

1° D'après le théorème 2, deux cas sont possibles :

(I) X est fermé, et $E' \xrightarrow{\sim} M(X)$.

(II) $\bar{X} = X \cup \{0\}$, et $E' \xrightarrow{\sim} M_0(X)$, espace des mesures bornées sur X .

Dans le cas (I), $E \xrightarrow{c} C(X)$ et $E' \xrightarrow{\sim} M(X) = C(X)'$. Donc $E = C(X)$.

Dans le cas (II), $E \xrightarrow{c} C_0(X)$, et $E' \xrightarrow{\sim} M_0(X) = C_0(X)'$. Donc $E = C_0(X)$.

2° Si E possède un élément unité e , $L(K) = K \cap \{\ell \mid \ell(e) = 1\}$ est fermé pour $\sigma(E', E)$, donc X est fermé. Réciproquement, si (V) est vérifiée, $E \xrightarrow{\sim} C(X)$ est une isométrie, et l'élément e de E qui correspond à la fonction constante 1 de $C(X)$ est un élément unité de E .

C. Q. F. D.

Reste à étudier le cas général. Pour ce faire, donnons d'abord une définition.

Soient \bar{X} un espace compact, et $\lambda : \bar{X} \rightarrow [0, 1]$ une application semi-continue inférieurement (s. c. i.), nulle en au plus un point (noté a s'il existe). On suppose que $X = \lambda^{-1}(\{1\})$, qui est un G_δ de \bar{X} , est dense dans \bar{X} . On posera $Y = \bar{X} \setminus X$. On suppose de plus qu'on s'est donné une application $u : Y \rightarrow X$ (ou $u : Y \setminus \{a\} \rightarrow X$, si a existe), borélienne.

DÉFINITION 4. - On dit que le sous-espace de $C(\bar{X})$

$$E = \{f \mid \forall y \in Y \setminus \{a\}, f(y) = \lambda(y) f[u(y)] \text{ (et } f(a) = 0 \text{ si } \lambda(a) = 0)\}$$

est un espace K-canonique s'il sépare les points de \bar{X} . On le note alors

$$C_X(\bar{X}, \lambda, u) ,$$

c'est un sous-espace réticulé fermé de $C(\bar{X})$.

On dit que c'est un espace K-canonique fort, s'il vérifie de plus une condition de séparation forte :

$$\forall x \in X, \exists f \in E \text{ telle que } 0 \leq f \leq 1 \text{ et } f(x) = 1 .$$

Il est facile de voir que, si E vérifie cette condition, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(S) : E^+ sépare \bar{X} ,

(\Delta U) : $\begin{cases} (1) \ u \text{ est injective sur } \lambda^{-1}(t) , \forall t \in \lambda[Y \setminus \{a\}] , \\ (2) \ \lambda \text{ est injective continue sur } u^{-1}(x) , \forall x \in \text{Im } u . \end{cases}$

Le théorème 6 va affirmer qu'un espace de Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F) est de ce type.

THÉORÈME 6. - Soit E un espace de Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F).
Si X est son spectre, alors E est isomorphe à un espace K-canonique

$$C_X(\bar{X}, \lambda, u)$$

et cet isomorphisme est une isométrie à la condition nécessaire et suffisante que (V) soit vérifiée.

Démonstration.

1° On suppose qu'on n'est pas dans les conditions du théorème 5, c'est-à-dire que \bar{X} n'est ni $X \cup \{0\}$, ni X lui-même. Posons $\bar{X} \setminus X = Y$. X est un borélien dense de \bar{X} (lemme 2). $\bar{X} \subset \mathcal{E}(E^+)$, donc $\forall y \in Y \setminus \{0\}$, $\exists \lambda(y) \in]0, 1[$, unique, et $u(y) \in X$, unique, tels que $y = \lambda(y) u(y)$. On peut poser, si $0 \in Y$, $\lambda(0) = 0$. λ et u sont bien reliés par les conditions (1) et (2), E sépare bien les points de \bar{X} , et $\forall x \in E$, $x(y) = \lambda(y) x[u(y)]$.

Donc, dès que l'on aura montré que λ est s. c. i. et que u est borélienne, on pourra affirmer que

$$E \xrightarrow{c} C_X(\bar{X}, \lambda, u) .$$

2° λ est un s. c. i., car $\lambda^{-1}(]-\infty, a]) = aK$, qui est fermé, $u(y) = \frac{y}{\lambda(y)}$, et λ est s. c. i. Donc u est borélienne (cela résulte d'un lemme sur les espaces vectoriels topologiques).

Remarque. - En fait, on peut montrer que l'espace $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ est K-canonique fort (cf. [8]).

3° Nous sommes donc dans la situation suivante :

$$E \xrightarrow{c} C_X(\bar{X}, \lambda, u) = F \xrightarrow{c} C(\bar{X}) \quad \text{et} \quad E' \xrightarrow{\sim} M_X(\bar{X}) .$$

Soit $\varphi : F' \rightarrow E'$ l'application restriction.

Soit $\psi : E' \rightarrow F'$ l'application composée : $E' \xrightarrow{\sim} M_X(\bar{X}) \rightarrow F'$.

$$\ell \rightsquigarrow \mu \rightsquigarrow \psi(\ell) \text{ définie par } \psi(\ell)(f) = \mu(f) .$$

Alors $\varphi \circ \psi = 1_{E'}$. Donc ψ est injective. Nous allons montrer que ψ est surjective.

$\forall \alpha \in F'$, $\exists \mu \in M(\overline{X})$ telle que, $\forall f \in F$, on ait :

$$\mu(f) = \alpha(f) \quad (\text{HAHN-BANACH}).$$

Comme toutes les fonctions de F sont nulles en 0 si $0 \in \overline{X}$, on peut supposer que $\mu(\{0\}) = 0$.

Définissons la mesure $\tilde{\mu}$ comme suit, si $\mu \geq 0$:

$$\forall \varphi \in C(\overline{X}) , \quad \tilde{\mu}(\varphi) = \int_{X \cup \{0\}} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{Y \setminus \{0\}} \lambda(y) \varphi[u(y)] d\mu(y) .$$

Ceci a un sens, car u est borélienne et λ borélienne bornée. Si $\mu \geq 0$, $\tilde{\mu}$ aussi, donc $\tilde{\mu}$ est une mesure ≥ 0 . Sinon, on pose $\tilde{\mu} = \mu^+ - \mu^-$

Si $\varphi \in F$,

$$\tilde{\mu}(\varphi) = \int_{X \cup \{0\}} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{Y \setminus \{0\}} \varphi(y) d\mu(y) = \mu(\varphi) .$$

Donc $\tilde{\mu}|_F = \mu|_F = \alpha$. Or

$$\tilde{\mu}(1_Y) = \mu(\{0\}) + \int_{Y \setminus \{0\}} 0 d\mu(y) = 0 .$$

Donc $\tilde{\mu} \in M_X(\overline{X}) \xrightarrow{\sim} E'$, et $\tilde{\mu}|_F = \alpha$, c'est-à-dire $\psi(\tilde{\mu}) = \alpha$. Donc ψ est surjective.

Donc $\psi : E' \xrightarrow{\sim} F'$. D'où (HAHN-BANACH) :

$$E = C_X(\overline{X} , \lambda , u) .$$

C. Q. F. D.

5. Applications.

On trouvera dans [4] de nombreuses applications. Donnons-en quelques unes.

A. THÉOREME de Stone-Weierstrass. - Soit X un espace compact et soit E un sous-espace fermé réticulé de $C(X)$, contenant 1 , et séparant X . Alors $E = C(X)$.

Démonstration. - Posons

$$K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\} \quad \text{et} \quad Y = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\} .$$

E ayant un élément unité, Y est compact, et il existe une isométrie $\varphi :$

$E \xrightarrow{\sim} C(Y)$. De plus, $X \xrightarrow{c} Y$ par $x \rightarrow \delta_x$, car E sépare X . Donc on a la situation suivante :

$$\left. \begin{array}{l} X \xrightarrow{c} Y \\ E \xrightarrow{c} C(X) \\ \varphi \searrow \sim C(Y) \end{array} \right\} \text{avec } \varphi(f)|_X = f .$$

Soit alors $u \in C(X)$. Il existe un prolongement \tilde{u} de u à Y : $\tilde{u} \in C(Y)$ (URYSOHN). Il existe alors $f \in E$ telle que $\varphi(f) = \tilde{u}$.

$$u = \tilde{u}|_X = \varphi(f)|_X = f \in E .$$

Donc $u \in E$, et $E = C(X) = C(Y)$, $X = Y$.

C. Q. F. D.

B. $L^\infty(X, \mu)$ est isomorphe à un espace de fonctions continues sur un compact. $E = L^\infty(X, \mu)$ vérifie (NC), (V), (K) et (U). Donc il existe un espace compact $Y \subset E'^+$ tel que $L^\infty(X, \mu) \xrightarrow{\sim} C(Y)$ (c'est même une isométrie). On peut, en fait, décrire Y comme espace des μ -filtres maximaux sur X .

C. Compactifié de Stone-Čech. - Soient Z un espace topologique séparé, et $E = C_b(Z)$ l'espace des fonctions continues bornées sur E , muni de la norme uniforme.

Soit X le spectre de E . Il est compact, car E vérifie (V), (NC), (K) et (U). Donc $E \xrightarrow{c} C(X)$. De plus, $\varphi : Z \rightarrow X : x \rightarrow \delta_x$ est continue si X est muni de la topologie $\sigma(E', E)$.

Si $C_b(Z)$ sépare les points de Z , alors φ est injective. De plus, si Z est complètement régulier, sa topologie est la topologie initiale pour les fonctions de $C_b(Z)$, donc $\varphi : Z \xrightarrow{c} X$ est un homéomorphisme.

Montrons que $\varphi(Z)$ est dense dans X , $\overline{\varphi(Z)} \subset X$. Le bipolaire A de $\overline{\varphi(Z)}$ est l'enveloppe convexe fermée de 0 et de $\overline{\varphi(Z)}$, et $\mathcal{E}(A) \subset \overline{\varphi(Z)} \cup \{0\}$. Or

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(Z)}^0 &= \varphi(Z)^0 = \{f \mid \forall x \in Z, f(x) \leq 1\} = \{f \mid \|f^+\| \leq 1\} . \\ A &= \overline{\varphi(Z)}^{00} = \varphi(Z)^{00} \subset E'^+ . \end{aligned}$$

Donc

$$A = \{\ell \in E'^+ \mid \forall f \leq 1, \ell(f) \leq 1\} = K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\} .$$

Donc $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(K) = X \cup \{0\}$. Donc $\overline{\varphi(Z)} = X$.

Enfin, si $u : Z \rightarrow Y$ compact est continue, u se prolonge uniquement à X : $\alpha \in X \setminus \varphi(Z)$ détermine un élément de $C(Y)^+$ limite d'éléments δ_y , donc un élément $u(\alpha)$ de Y , et on voit facilement que le prolongement est continu.

D. Banach réticulés qui sont des espaces de mesures. - Nous avons vu que si E est un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (F), E' est un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (A) : la norme est additive sur E'^+ . La réciproque est vraie. Précisément :

PROPOSITION 7. - Soit E un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (A). Alors E' est un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (U), et donc (K).

Démonstration. - Nous savons déjà que (NC) et (V) pour E impliquent (NC) et (V) pour E'. Si (A) est vérifiée, l'application $x \rightarrow \|x\| : E^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se prolonge uniquement à E en une forme linéaire e, positive, donc continue (par la proposition 1, ou parce que $x \rightarrow x^+$ et $x \rightarrow x^-$ sont continues, et que e est continue sur E^+). Donc $e \in E'^+$, et $\|e\| = 1$ évidemment. Soit $\ell \in E'^+$, avec $\|\ell\| \leq 1$. Si $x \in E^+$, $\ell(x) \leq \|x\| = e(x)$. Donc $e \geq \ell$. Par suite e est un élément unité de E', qui vérifie (U), donc (K).

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7. - Soit E un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (A). Alors il existe un espace compact X tel que E soit isomorphe (et même isomètre) à un sous-espace fermé réticulé de M(X) (pour la norme).

Démonstration. - E' vérifie (NC), (V) et (U), donc E' est isomètre à un espace C(X), X compact. Donc $E'' \xrightarrow{c} M(X)$ est une isométrie. Admettons pour un instant que E est un sous-espace réticulé de E''. Comme E est un sous-espace fermé, avec même norme, de E'', on en déduit le théorème.

Si $i : E \xrightarrow{c} E''$ est l'injection canonique, il reste donc à montrer que

$$i[\inf_E(x, y)] = \inf_{E''}[i(x), i(y)] \quad \text{pour } x \text{ et } y \geq 0,$$

et il suffit de le montrer pour x et y étrangers, c'est-à-dire qu'on a alors

$$\inf_{E''}[i(x), i(y)] = 0.$$

Pour cela, il faut montrer que si $\alpha \in E''$, $\alpha \leq i(x)$ et $i(y)$ dans E'', alors $\alpha \leq 0$ dans E''.

Soit $\ell \in E'^+$. D'après le lemme 4, $\exists m \in E'^+$ telle que $0 \leq m \leq \ell$, $m(x) = \ell(x)$, $m(y) = 0$. Si on pose $m' = \ell - m$, $m' \in E'^+$, $m'(y) = \ell(y)$, $m'(x) = 0$,

$$\alpha \leq i(x) \text{ et } i(y) \implies \alpha(m) \leq m(y) = 0,$$

et

$$\alpha(m') \leq m'(x) = 0.$$

Donc $\alpha(\ell) = \alpha(m + m') \leq 0$, c'est-à-dire $\alpha \leq 0$ dans E''.

C. Q. F. D.

Remarque. - On trouvera dans [4] ou [5] le complément suivant au théorème 7 :

X est totalement discontinu et stonien, et E est isomorphe à l'espace des mesures sur X nulles sur tout borélien maigre de X.

Démonstration partielle. - Montrons que X est totalement discontinu et stonien. Soit U ouvert de X. $E' \xrightarrow{\sim} C(X)$ est complètement réticulé. Donc, si $g = \sup B$ où $B = \{f \in C(X) \mid 0 \leq f \leq 1, f = 0 \text{ sur } \complement U\}$, $g \in C(X)$, et $g = 1$ sur U, 0 sur $\complement \bar{U}$. Donc $g = 1_{\bar{U}} \in C(X)$. Donc, si U est ouvert, \bar{U} est à la fois ouvert et fermé, ce qui prouve que X est totalement discontinu et stonien (cf. [2], exercices).

Montrons que si $x \in E^+$, et si R est un borélien rare de X, alors $i(x)(R) = 0$. En effet, si $B = \{f \in C(X) \mid 0 \leq f \leq 1, f = 0 \text{ sur } R\}$, on a aussi $B = \{f \in C(X) \mid 0 \leq f \leq 1, f = 0 \text{ sur } \bar{R}\}$, et, comme ci-dessus,

$$g = \sup B = 1_{\overline{\complement R}} = 1_X \equiv 1, \quad \text{car } \complement \bar{R} \text{ est dense.}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists f \in B$ telle que $\varepsilon > i(x)[1 - f] \geq 0$. Puisque $1 - f \equiv 1$ sur R, on a donc $i(x)(R) < \varepsilon$. D'où $i(x)(R) = 0$.

Pour la réciproque (toute mesure sur X nulle sur tout ensemble borélien maigre appartient à $i(E)$), on se reportera à [4], ou [5], appendix.

Exemple. - On a vu que $L^\infty(X, \mu) \xrightarrow{\sim} C(Y)$, Y espace compact. Comme $L^\infty = L^1$, Y est totalement discontinu stonien, et L^1 est isomorphe aux mesures sur Y nulles sur tout borélien maigre.

E. Opérateur hermitien dans un espace de Hilbert. - On peut montrer le résultat suivant :

Soit H un espace de Hilbert, et soit A un opérateur hermitien. La plus petite algèbre réelle fermée pour la norme d'opérateurs, contenant A, est un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (K), dont le spectre est isomorphe au spectre de A. La plus petite algèbre réelle d'opérateurs contenant A et fermée pour la convergence forte, est un Banach réticulé dual d'un Banach réticulé vérifiant (NC), (V) et (A), donc vérifiant (NC), (V), (K) et (U).

C'est essentiellement le théorème spectral (cf. [7]).

F. Signalons enfin la possibilité d'appliquer les théorèmes 5, 6 et 7 à la théorie du potentiel, à la théorie des frontières de Šilov et au problème de Dirichlet généralisé (cf. [8]).

6. Problème réciproque.

Dans le théorème de Kakutani que nous citions au début, le sous-espace E de $C(Z)$, Z compact, était caractérisé comme suit : A est un ensemble d'indices quelconque, et on se donne une famille de triplets $(x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$, où x_α et $x'_\alpha \in Z$, $\lambda_\alpha \in [0, 1[$;

$$E = C(Z, x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha, A) = \{f \in C(Y) \mid \forall \alpha : f(x'_\alpha) = \lambda_\alpha f(x_\alpha)\} \quad (\text{cf. [4]}).$$

Nous avons vu que l'on pouvait préciser ces résultats (en utilisant les fonctions boréliennes λ et μ). Il était a priori évident que Z et la famille $(x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ ne pouvaient être quelconques, puisque construits canoniquement à partir de l'espace E abstrait.

Exemple. - $Z = [0, 1]$, $A = \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = \frac{1}{n}$, les x_n sont une suite quelconque d'irrationnels, les x'_n forment une numérotation bijective des rationnels de $[0, 1]$. On voit alors facilement que $C(Z, x_n, x'_n, \frac{1}{n}, \mathbb{N}^*) = \{0\}$. Or, si on pose

$$X = \{x'_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{\text{rationnels de } [0, 1]\},$$

$\bar{X} = Z$, et on voit que toutes les hypothèses de la définition 4 sont vérifiées, sauf la dernière : $\{0\}$ ne sépare pas $[0, 1]$.

On peut donc se poser le problème suivant :

Soit $C_X(\bar{X}, \lambda, u) = E$ un espace K -canonique. La construction que nous avons faite : $E \xrightarrow{\sim} C_Y^S(\bar{Y}, \lambda', u')$ redonne-t-elle la situation initiale, c'est-à-dire a-t-on $X = Y$, $\bar{X} = \bar{Y}$, $\lambda = \lambda'$, $u = u'$?

PROPOSITION 8. - Soit $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ un espace K -canonique fort. Alors l'application $\psi : M_X(\bar{X}) \rightarrow E' : \mu \rightarrow \psi(\mu)$, définie par $\psi(\mu)(f) = \mu(f)$, $\forall f \in E$, est une isométrie d'espaces de Banach réticulés.

Démonstration.

1° ψ est bien sûr linéaire, et $\mu \geq 0 \implies \psi(\mu) \geq 0$. La surjectivité de ψ se démontre comme dans la démonstration du théorème 6.

2° Pour montrer que ψ est injective, nous procéderons en plusieurs étapes :

(a) $\left[\begin{array}{l} \forall a, b \in X, a \neq b, \exists f, g \in E^+ \text{ telles que } f(a) = 1, f(b) < 1, \\ g(a) < 1, g(b) = 1. \end{array} \right.$

$\exists h \in E^+$ telle que $h(a) > h(b)$, par exemple :

$$f = \lambda h \in E^+, \quad f(a) = 1, \quad f(b) < 1.$$

Soit $g_1 \in E^+$ telle que $g_1(b) = 1$, $\|g_1\| = 1$. Si $g_1(a) < 1$, $g_1 = g$ convient. Sinon $g_1(a) = 1$.

$$\text{Posons } g_2 = g_1 - f. \quad g_2(a) = 0, \quad g_2(b) = 1 - f(b) > 0.$$

$$g_2^+(a) = 0, \quad g_2^+(b) > 0.$$

Donc $g = \lambda' g_2^+ \in E^+$, $g(b) = 1$, $g(a) = 0 < 1$. (Ceci permet de démontrer l'équivalence de (S) et (AU) énoncée dans la définition 4.)

$$(b) \left[\begin{array}{l} \forall a, b \in X, \quad a \neq b, \quad \exists v \in E^+ \text{ telle que } \|v\| = 1, \quad v(a) = 1, \\ v = 0 \text{ dans un voisinage de } b. \end{array} \right.$$

Soient f et g construites au (a). Posons $f - g = h \in E$. $h(a) = 1 - g(a) > 0$, $h(b) = f(b) - 1 < 0$. Donc $h^+ \in E^+$, $h^+(a) > 0$, $h^+ = 0$ dans un voisinage de b . $u = \lambda h^+ \in E^+$, $u(a) = 1$, $u = 0$ dans un voisinage de b . Or $\exists w \in E^+$, $\|w\| = 1$, $w(a) = 1$. Posons $v = \inf(u, w) \in E^+$. $\|v\| = 1$, $v \in E^+$, $v(a) = 1$, $v = 0$ dans un voisinage de b .

$$(c) \left[\begin{array}{l} \forall K \text{ compact } \subset X, \quad \forall a \in X \setminus K, \quad \exists v_{a,K} \in E^+, \quad \|v_{a,K}\| = 1, \quad v_{a,K}(a) = 1, \\ v_{a,K} \equiv 0 \text{ sur } K. \end{array} \right.$$

En effet, $\forall x \in K$, $\exists u_x \in E^+$, $\|u_x\| = 1$, $u_x = 0$ dans un voisinage V_x de x , $u_x(a) = 1$. V_{x_1}, \dots, V_{x_n} recouvrant K , on pose

$$v_{a,K} = \inf(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \in E^+, \quad \|v_{a,K}\| = 1, \quad v_{a,K}(a) = 1, \quad v_{a,K} \equiv 0 \text{ sur } K.$$

$$(d) \left[\begin{array}{l} \forall K \text{ compact } \subset X, \text{ il existe une fonction } v_K, \text{ nulle sur } K, \text{ égale à } 1 \\ \text{sur } X \setminus K, \text{ comprise entre } 0 \text{ et } 1 \text{ sur } Y, \text{ et qui est un sup de fonc-} \\ \text{tions de } E^+. \end{array} \right.$$

$$\text{On pose } v_K = \sup_{a \in X \setminus K} v_{a,K}.$$

$$(e) \left[\begin{array}{l} \text{Si } \mu \text{ et } \nu \text{ sont deux mesures } \geq 0 \text{ portées par } X, \quad \mu(X) = \nu(X) \text{ si} \\ \psi(\mu) = \psi(\nu). \end{array} \right.$$

$\forall x \in X$, $\exists f_x \in E^+$, $\|f_x\| = 1$, $f_x(x) = 1$. $p = \sup_{x \in X} f_x$. $p \equiv 1$ sur X , $0 \leq p \leq 1$.

$$\mu(1_X) = \mu(p|_X) = \mu(p) = \sup \mu(f_x) = \sup \nu(f_x) = \nu(1_X).$$

Donc $\mu(X) = \nu(X)$.

(f) [Si μ et $\nu \in M_X^+(\bar{X})$, et si $\psi(\mu) = \psi(\nu)$, $\mu(K) = \nu(K)$, $\forall K$ compact $\subset K$.

$$\mu(K) = \mu(X) - \mu(X \setminus K) = \nu(X) - \nu(X \setminus K) .$$

D'après (d), $\mu(X \setminus K) = \nu(X \setminus K)$, d'où $\mu(K) = \nu(K)$.

(g) [ψ est injective.

$$\psi(\mu) = 0 \iff \psi(\mu^+) = \psi(\mu^-) .$$

Soit A un borélien de \bar{X} . $\mu^+(A) = \mu^+(A \cap X) = \sup_{K \text{ compact} \subset A \cap X} \mu^+(K)$. D'où $\mu^+(A) = \mu^-(A)$, d'où $\mu^+ = \mu^- = 0$.

3° Montrons que si $\psi(\mu) \geq 0$, alors $\mu \geq 0$. $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Supposons $\psi(\mu) = \psi(\mu^+) - \psi(\mu^-) \geq 0$. Cela signifie que $\forall f \in E^+$, $\mu^+(f) \geq \mu^-(f)$.

Nous allons voir que c'est impossible si $\mu^- \neq 0$. μ^+ est portée par un borélien $A \subset X$, μ^- est portée par un borélien $B \subset X$, et $A \cap B = \emptyset$. Si $\mu^- \neq 0$, $\exists H$ compact $\subset B$ tel que $\mu^-(H) > \varepsilon + \eta$. Soit K compact $\subset A$ tel que $\mu^+(A \setminus K) < \eta$.

$\forall x_1, \dots, x_n \in B$, $\exists f_{x_1 \dots x_n} \in E^+$, $\|f_{x_1 \dots x_n}\| = 1$, $f_{x_1 \dots x_n}(x_i) = 1$,

$$f_{x_1 \dots x_n} \equiv 0 \text{ sur } K \text{ (cf. (c))} .$$

$$\mu^-(\sup_{x_1 \dots x_n} f_{x_1 \dots x_n}) = \sup_{x_1 \dots x_n} \mu^-(f_{x_1 \dots x_n}) = \mu^-(B) .$$

Donc $\exists \varphi = f_{x_1 \dots x_n}$ telle que $\mu^-(\varphi) > \mu^-(H) - \varepsilon$. $\varphi \equiv 0$ sur K , donc $\mu^+(\varphi) < \eta$. D'où : $\mu^+(\varphi) < \eta < \mu^-(H) - \varepsilon < \mu^-(\varphi)$, $\varphi \in E^+$, ce qui est contraire à $\psi(\mu^+) \geq \psi(\mu^-)$.

Donc si $\psi(\mu) \geq 0$, $\mu \geq 0$.

4° Si $\mu \in M_X^+(\bar{X})$, on a enfin :

$$\|\mu\| = \mu(X) = \mu \left[\sup_{\substack{\|f_X\|=1 \\ f_X \in E^+ \\ f_X(x)=1 \\ x \in X}} f_X \right] = \mu \left[\sup_{\|f\|=1} f \right] = \sup_{\|f\|=1} \mu(f) = \|\psi(\mu)\| ,$$

E' et $M_X(\bar{X})$ vérifiant (V), ψ est une isométrie.

PROPOSITION 9. - Soit $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ un espace K-canonique fort. Alors le procédé de construction du théorème 6 redonne X, \bar{X}, λ et u .

Démonstration. - Posons en effet

$$K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\}, \quad Y = \mathfrak{E}(K) \setminus \{0\}.$$

Alors, d'après le théorème 6 : $E \xrightarrow{\sim} C_Y^S(\bar{Y}, \lambda', u')$. Or $x \rightarrow \delta_x$ plonge \bar{X} dans K , et X dans $L(K)$, car $\|\delta_x\| = 1$ si $x \in X$. De plus

$$\delta_x[\inf(f, g)] = \inf[\delta_x(f), \delta_x(g)],$$

donc, d'après le lemme 5, $\delta_x \in \mathfrak{E}(E'^+)$, et $\bar{X} \xrightarrow{c} \mathfrak{E}(E'^+)$. D'où $\bar{X} \subset \bar{Y}$, $X \subset Y$.

Soit $\varphi : M_Y(\bar{Y}) \rightarrow M_X(\bar{Y}) = M_X(\bar{X})$, ainsi définie :

$$\varphi : M_Y(\bar{Y}) \xrightarrow{\theta} E' \xrightarrow{\psi^{-1}} M_X(\bar{Y}).$$

Si $\mu \in M_Y^+(\bar{Y})$, $\theta(\mu) \in E'^+$, et $\|\theta(\mu)\| = \|\mu\|$. Puis, si $\alpha \in E'^+$,

$$\psi^{-1}(\alpha) \in M_X^+(\bar{Y}), \quad \text{et} \quad \|\alpha\| = \|\psi^{-1}(\alpha)\|,$$

donc, si $\mu \in M_Y^+(\bar{Y})$, $\|\varphi(\mu)\| = \|\mu\|$.

Soit $y \in Y$. $\varphi(\delta_y)(f) = f(y)$, $\forall f \in E$. $\varphi(\delta_y)$ est une mesure ≥ 0 de masse 1 portée par X , donc par K .

Donc $\varphi(\delta_y)$, mesure ≥ 0 de masse 1 portée par X , donc par Y , est maximale au sens de CHOQUET, et a y pour résultante. K étant un simplexe, on a donc $\varphi(\delta_y) = \delta_y$, donc $y \in X$. Donc $X = Y$, et par suite $\bar{X} = \bar{Y}$, $\lambda = \lambda'$, $u = u'$.

C. Q. F. D.

7. Compléments ; problème du meilleur quotient.

PROPOSITION 10. - Si le spectre X de E , Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F), comporte n points isolés x_1, \dots, x_n , alors $E = \underline{\mathbb{R}}^n \oplus F$, où F est un Banach réticulé vérifiant (NC), (NV) et (F), avec $E^+ = \underline{\mathbb{R}}_+^n \oplus F^+$, le spectre de F étant $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

C'est à peu près évident.

Deux exemples :

1° $E_1 = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = f(1)\}$. Alors on voit que $\delta_0 = \delta_1$, et le procédé du théorème 6 consiste à faire le quotient de $[0, 1]$ par la relation d'équivalence dont les classes sont $\{0\} \cup \{1\}$ et les points de $]0, 1[$. On obtient

$E \xrightarrow{\sim} C(\underline{T}_1)$.

2° $E_2 = \{f \in C(0, 1) \mid f(0) = \frac{1}{2} f(1)\}$. Alors on obtient $\delta_0 = \frac{1}{2} \delta_1$; le spectre X est $]0, 1)$, et $\bar{X} = [0, 1]$, $Y = \{0\}$, $\lambda(0) = \frac{1}{2}$, $u(0) = 1$.

Soit $\psi : E_1 \rightarrow E_2 : \psi(f)(x) = f(x) - f(1) \times \frac{x}{2}$, c'est une bijection linéaire bicontinue de E_1 sur E_2 , et on obtient donc $E_1 \xrightarrow{\sim} C(\underline{T}_1)$, et E_1 est ainsi caractérisé comme un espace plus simple que celui fourni par le procédé du théorème 6. Plus généralement :

PROPOSITION 11. - Soit E un espace de fonctions continues sur \bar{X} obtenu par le procédé du théorème 6 : $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ (K -canonique). Si u est injective et si $Y \setminus \{0\}$ est fini, alors, si Z est l'espace compact obtenu en identifiant les points y et $u(y)$, $\forall y \in Y \setminus \{0\}$, il existe une application linéaire bijective bicontinue de E sur $C(Z)$ si $0 \notin Y$, sur $C_0(Z)$ si $0 \in Y$ ($C_0(Z)$ est l'espace des fonctions continues sur Z nulles en 0).

Démonstration. - $\forall y \in Y \setminus \{0\}$, soit φ_y une fonction continue, $0 \leq \varphi_y \leq 1$, $\varphi_y[u(y)] = 1$, $\varphi_y(z) = 0$, $\forall z \in Y$, $\varphi_y[u(z)] = 0$. $\forall z \in Y \setminus \{0\}$, $z \neq y$ (par exemple, $\text{supp } \varphi_y \subset V_y$ voisinage de $u(y)$ qui ne coupe $Y \cup u[Y \setminus \{0\}]$ qu'en $u(y)$, et $\text{supp } \varphi_y \cap \text{supp } \varphi_z = \emptyset$).

Pour tout $f \in E$, posons

$$\psi(f)(x) = f(x) - \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} [1 - \lambda(y)] \varphi_y(x) f[u(y)] , \quad \psi(f)(y) = f(y) = \psi(f)[u(y)] .$$

$\psi(f) \in C(\bar{X})$, et $\psi(f)(0) = 0$ si $0 \in \bar{X}$. Donc $\psi(f)$ passe au quotient par identification de y et $u(y)$, et on peut écrire $\widetilde{\psi(f)} \in C(Z)$ ou $C_0(Z)$.

$$\widetilde{\psi} : E \rightarrow C(Z) \text{ ou } C_0(Z)$$

est linéaire, injective.

$\widetilde{\psi}$ est continue :

$$\|\widetilde{\psi}(f)\| \leq \|f\| \sup_x [1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \varphi_y(x)] \leq 2\|f\| ,$$

donc $\|\widetilde{\psi}\| \leq 2$.

$\widetilde{\psi}$ est surjective : si $g \in C(Z)$ ou $C_0(Z)$, on pose

$$f(x) = g(x) + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} [1 - \lambda(y)] \varphi_y(x) \times \frac{g(y)}{\lambda(y)}$$

(on considère g comme fonction sur \bar{X} , égale en y et $u(y)$). Alors $f \in C(\bar{X})$, $f(y) = \lambda(y) f[u(y)]$ pour $y \in Y \setminus \{0\}$, $f(0) = 0$ si $0 \in \bar{X}$, et $\widetilde{\psi(f)} = g$, $f \in E$.

Enfin, ψ^{-1} est continue. Cela résulte du théorème de Banach, mais c'est évident directement :

$$\|\tilde{\psi}^{-1}(g)\| \leq \|g\| \sup_x [1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \varphi_y(x) \times \frac{1}{\lambda(y)}]$$

$$\|\tilde{\psi}^{-1}\| \leq 1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda(y)} < \infty .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Bien entendu, $\tilde{\psi}$ ne conserve pas l'ordre.

Le problème se pose de savoir si l'on peut généraliser cette proposition. Si l'on conserve l'hypothèse de finitude pour Y , on peut supprimer l'injectivité pour u .

Exemple : $E = \{f \in C[0, 2] \mid f(0) = \frac{1}{2} f(1), f(2) = \frac{1}{3} f(1)\}$.

$$u(0) = u(2) = 1, \quad \lambda(0) = \frac{1}{2}, \quad \lambda(2) = \frac{1}{3} .$$

On ramène d'abord g à avoir même valeur en 0 et 1 : on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \varphi(x) f(1) ,$$

où φ est une courbe en cloche autour de 1 . Puis, ψ étant une courbe à deux cloches autour de 0 et 1 , on pose :

$$h(x) = g(x) - \frac{1}{3} \psi(x) g(0) ,$$

et on obtient $h(0) = h(1) = h(2)$. $h \in C(Z)$, où Z est un espace compact "en 8"

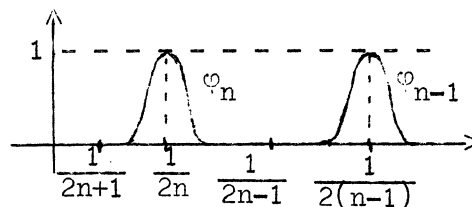
$$\bar{X} : \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \longrightarrow Z : \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ 1 \quad 0 \end{array} .$$

On utilise donc le fait que $u^{-1}(x)$ est fini si $x \in u(Y \setminus \{0\})$, pour procéder de proche en proche.

Par contre, la proposition 11 devient fausse si on supprime l'hypothèse de finitude pour Y .

Contre-exemple : $E = \{f \in C[0, 1] \mid \forall n \geq 1, f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n} f(\frac{1}{2n})\}$. En particulier, si $f \in E$, $f(0) = 0$.

Soit φ_n une famille de fonctions en cloches, à supports disjoints 2 à 2 , autour des points $\frac{1}{2n}$, et nulles aux points $\frac{1}{2n+1}$:



Posons, $\forall f \in E$:

$$g(x) = \psi(f)(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_n(x) \times f\left(\frac{1}{2n}\right), \text{ continue car } f\left(\frac{1}{2n}\right) \rightarrow 0.$$

$$g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = g\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$ng\left(\frac{1}{2n}\right) = nf\left(\frac{1}{2n+1}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Posons $Z =$ quotient de $[0, 1]$ par l'identification de $\frac{1}{2n+1}$ et $\frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 1$. $\psi : E \rightarrow C_0(Z)$ est linéaire injective continue : $\|\psi\| \leq 2$, comme dans la démonstration de la proposition 11. Mais

$$\text{Im } \psi = \left\{ g \in C_0(Z) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} ng\left(\frac{1}{2n}\right) = 0 \right\} = F.$$

$\text{Im } \psi \subset F$, bien sûr. Si $g \in F$, posons

$$f(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi_n(x) ng\left(\frac{1}{2n}\right),$$

qui est bien continue sur $[0, 1]$, car $ng\left(\frac{1}{2n}\right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. $f \in E$, et $\psi(f) = g$ évidemment.

Or $\psi^{-1} : F \rightarrow E$ continue $\iff F$ fermé.

En effet, c'est évident dans un sens ($F \xrightarrow{\sim} E$ Banach $\implies F$ complet, donc fermé), et dans l'autre, c'est le théorème de Banach.

Montrons que F n'est pas fermé.

F est l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, vérifiant $g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = g\left(\frac{1}{2n}\right)$ et $ng\left(\frac{1}{2n}\right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ (ceci $\implies g(0) = 0$).

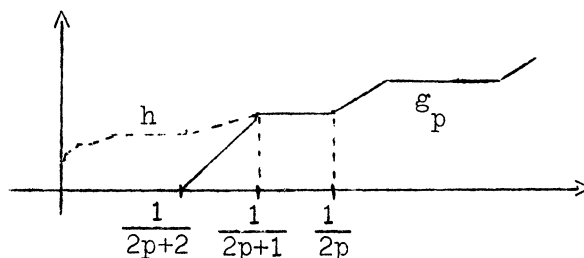
Soit h la fonction constante sur $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$, égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sur cet intervalle, et linéaire entre $\frac{1}{2n+2}$ et $\frac{1}{2n+1}$:



$h \notin F$, car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh\left(\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Or soit g_p la fonction qui coïncide avec h sur $\left[\frac{1}{2p+1}, 1\right]$, qui est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2p+2}\right]$, et linéaire sur $\left[\frac{1}{2p+2}, \frac{1}{2p+1}\right]$:



Alors $g_p \in F$, et $\|h - g_p\| = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$. Donc F n'est pas fermé, et ψ^{-1} n'est pas continue. Pourtant λ et u sont injectives, et $u[Y \setminus \{0\}] \cup [Y \setminus \{0\}]$ est un sous-espace discret de \bar{X} .

Donc, dans le cas général, il ne semble pas possible de trouver un "meilleur quotient" que celui fourni par le théorème 6.

D'autre part, si l'on veut conserver l'ordre de E , le "meilleur quotient" est évidemment celui fourni par le théorème 6.

8. Appendice sur les Banach réticulés.

DÉFINITION 5. - Soit E un Banach réticulé vérifiant (NC) et (NV). Un sous-cône Γ de E^+ est dit étrangement riche si $\forall x \in E^+$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($x_n \in \Gamma$, $\forall n$, les x_n étrangers 2 à 2), tels que

$$\sum_0^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \text{et} \quad x = \sum_0^{\infty} x_n$$

(si (A) est vérifiée, on a $\|x\| = \sum_0^{\infty} \|x_n\|$).

DÉFINITION 6. - Soit E un espace réticulé. Un sous-cône Γ de E^+ est dit module de domination si $\forall x \in E^+$, $\exists y \in E^+$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon \in \Gamma$ tel que $0 \leq x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$; on dit que y domine x modulo Γ : $x \ll y \pmod{\Gamma}$.

PROPOSITION 12. - Soit E un Banach réticulé vérifiant (NC) et (NV). Tout sous-cône Γ de E^+ étrangement riche est un module de domination.

Démonstration. - Soit $x \in E^+$. $x = \sum x_n$, $\sum \|x_n\| < \infty$. Soit $a_n > 0$, $a_n \nearrow +\infty$, telle que $\sum a_n \|x_n\| < \infty$. Soit $y = \sum a_n x_n$. Montrons que $x \ll y \pmod{\Gamma}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $z_\varepsilon = (x - \varepsilon y)^+$. $z_\varepsilon \in E^+$, $z_\varepsilon \geq x - \varepsilon y$, c'est-à-dire $x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$. Comme dans un espace réticulé $x \rightarrow x^+$ est croissante, $0 \leq x - z_\varepsilon$. Il reste à montrer que $z_\varepsilon \in \Gamma$.

Or, grâce à (NC) et (NV), $x \rightarrow x^+$ est continue dans E . Donc

$$z_\varepsilon = (x - \varepsilon y)^+ = \left(\sum (1 - \varepsilon a_n) x_n \right)^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n [(1 - \varepsilon a_p) x_p]^+$$

parce que les x_n sont étrangers 2 à 2.

$$z_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n (1 - \varepsilon a_p)^+ x_p .$$

Or $a_p \nearrow +\infty$. Donc $\exists n_\varepsilon$ tel que

$$p > n_\varepsilon \implies (1 - \varepsilon a_p)^+ = 0, \quad p \leq n_\varepsilon \implies 1 - \varepsilon a_p \geq 0 .$$

D'où

$$z_\varepsilon = \sum_{p=0}^{n_\varepsilon} (1 - \varepsilon a_p) x_p \in \Gamma .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 13. - Soit E un espace réticulé muni d'un sous-cône Γ de E^+ qui est un module de domination. Si T est linéaire positive $T : E \rightarrow F$, où F est un espace vectoriel archimédien, alors $\forall x \in E^+$,

$$T(x) = \sup_{\substack{z \in \Gamma \\ z \leq x}} T(z) .$$

$\forall x \in E^+$, $\exists y \in E^+$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon \in \Gamma$ tel que $0 \leq x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$, donc $T(x) - \varepsilon T(y) \leq T(z_\varepsilon) \leq T(x)$.

Soit $\alpha \in F$, $\alpha \geq T(z)$, $\forall z \in \Gamma$, $z \leq x$. $\alpha \geq T(z_\varepsilon) \geq T(x) - \varepsilon T(y)$, donc $\alpha - T(x) \geq -\varepsilon T(y)$, $\forall \varepsilon$. Donc $\alpha \geq T(x)$, car F est archimédien.

C. Q. F. D.

Exemples.

1° $E = L^1(X, \mu)$. $\Gamma = L^{1+} \cap L^\infty$ est étrangement riche. Si $f \in L^1_+$,

$$f = \sum f \times 1_{\{n \leq f < n+1\}} = \sum f_n .$$

2° $E = M_0(X)$, mesures bornées sur X localement compact. $M_K^+ = \Gamma$, mesures ≥ 0 à support compact, est étrangement riche :

$$\mu = \sum \mu \times 1_{K_{n+1} \setminus K_n}, \quad K_n \text{ compacts } \nearrow .$$

3° $E = C_0(X)$, $\Gamma = C_K^+(X)$ est un module de domination :

$$h_\varepsilon = (f - \varepsilon \sqrt{f})^+ \in \Gamma .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (H.). - Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.
- [2] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chap. 2 : Espaces de Riesz. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 12).
- [3] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.
- [4] KAKUTANI (S.). - Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 994-1028.
- [5] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1963 (The University Series in higher Mathematics).
- [6] NACHBIN (L.). - Topology and order. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 4).
- [7] RIESZ (F.) and NAGY (B. Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 3e édition. - Budapest, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.
- [8] ROGALSKI (Marc). - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66, n° 12, 62 p.
-