Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Catherine Doléans

Désintégration des mesures

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 3 (1964), exp. n° 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A5_0>

DÉSINTÉGRATION DES MESURES

par Mlle Catherine DOLÉANS

(d'après les travaux de A. et C. IONESCU TULCEA [2])

Soient donnés :

Z et B : deux espaces localement compacts,

μ : une mesure de Radon positive sur Z ,

p : une application μ-propre de Z dans B ,

α : une mesure de Radon positive sur B , telle que

$$\nu = p(\mu) = \psi . \alpha$$

pour une fonction ψ localement α-intégrable.

Le problème est de trouver une application

$$\lambda : \quad b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ (ensemble des mesures de Radon positives sur Z) telle que

(i) $\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B f \langle g , \lambda \rangle \, d\alpha \quad \forall f \in K(B) , \quad \forall g \in K(Z)$

(λ devant être telle que la deuxième intégrale existe)

(ii) $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque partout, et vérifiant en plus dans certains cas

(iii) λ_b est concentrée sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque partout.

On verra que si α est non nulle, il existe toujours une application λ vérifiant (i) et (ii).

Pour la propriété (iii), il faudra supposer l'existence d'un relèvement fort pour B.

1. Notations.

Si Z est un espace localement compact, et μ une mesure de Radon positive sur Z , $\mu \neq 0$, on notera :

$M_{\mathbb{R}}^{\infty}(Z , \mu)$: l'algèbre de Banach des fonctions de Z dans $\mathbb{R}$ bornées, et μ-mesurables, munies de la norme

$$f \to \|f\|_\infty = \sup_{z \in Z} |f(z)| \ ;$$

$C_R^\infty(Z, \mu)$: la sous-algèbre de $M_R^\infty(Z, \mu)$ formée des fonctions continues, bornées de Z dans $\underset{\sim}{R}$;

$K(Z)$: la sous-algèbre de $C_R^\infty(Z, \mu)$ formée des fonctions continues, à support compact.

$$f \equiv g \iff f = g \text{ localement presque partout pour } \mu \ .$$

Les autres notations : $\overset{1}{\mathcal{L}}_R$, $\overset{-1}{\mathcal{L}}_R$, $\mathcal{T}^*$..., seront celles utilisées dans BOURBAKI. [1]

Si $f \in \overset{-1}{\mathcal{L}}_R$, on notera par $\tilde{f}$ sa classe dans L_R^1

2. Propriété de relèvement.

Soit $T : f \to T_f$ une application de $M_R^\infty(Z, \mu)$ dans $M_R^\infty(Z, \mu)$, et considérons les propriétés suivantes

(1) $T_f \equiv f$,
(2) $f \equiv g \implies T_f = T_g$,
(3) $T_1 = 1$,
(4) $f \geqslant 0 \implies T_f \geqslant 0$,
(5) $T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$, $\alpha , \beta \in \underset{\sim}{R}$,
(6) $T_{fg} = T_f \, T_g$,
(7) $T_f = f$, $\forall \ f \in C_R^\infty(Z)$.

T sera un relèvement linéaire s'il vérifie (1) - (5).
T sera un relèvement linéaire fort s'il vérifie (1) - (5), et (7).
T sera un relèvement s'il vérifie (1) - (6).
T sera un relèvement fort s'il vérifie (1) - (7).

Considérons $T(\mu)$, tribu des ensembles μ-mesurables avec la relation d'équivalence

$$A \equiv B \iff A \vartriangleright B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ est localement } \mu\text{-négligeable.}$$

Si T est un relèvement de $M_R^\infty(Z, \mu)$ pour tout $A \in T(\mu)$, T_{φ_A} est la fonction caractéristique d'un ensemble de $T(\mu)$ que l'on notera $\rho_T(A)$, et ρ_T vérifie les propriétés :

(i) $\rho_T(A) \equiv A$,

(ii) $A \equiv B \Longrightarrow \rho_T(A) = \rho_T(B)$,

(iii) $\rho_T(\emptyset) = \emptyset$, $\rho_T(Z) = Z$,

(iv) $\rho_T(A \cap B) = \rho_T(A) \cap \rho_T(B)$,

(v) $\rho_T(A \cup B) = \rho_T(A) \cup \rho_T(B)$.

Réciproquement, si une application ρ de $T(\mu)$ dans $T(\mu)$ vérifie (i) - (v), il existe un relèvement T et un seul de $M_R^\infty(Z , \mu)$ tel que $\rho = \rho_T$.

Dans la suite, on ne différenciera plus les deux notations T et ρ_T .

THÉORÈME 2.1. - Pour tout espace localement compact Z et toute mesure de Radon positive μ , non nulle, sur Z , il existe un relèvement de $M_R^\infty(Z , \mu)$. (IONESCU TULCEA [2].)

Dans la suite, on utilisera souvent le lemme suivant :

LEMME 2.1. - Si ρ est un relèvement de $M_R^\infty(Z , \mu)$, et si $\mathfrak{F}$ est un ensemble filtrant pour $\leqslant$ de fonctions de $M_R^\infty(Z , \mu)$ telles que

(2.1.1) $$f \geqslant 0 ,$$

et

(2.1.2) $$\rho(f) = f \quad \forall f \in \mathfrak{F} .$$

Alors $f_\infty = \sup_{f \in \mathfrak{F}} f$ est μ-mesurable, et pour toute mesure de Radon positive ν absolument continue relativement à μ , on a :

$$\overline{\int}^* f_\infty \, d\nu = \sup \overline{\int}^* f \, d\nu .$$

Si ν est absolument continue relativement à μ , on a $\nu = g.\mu$ avec g localement μ-intégrable et positive.

On peut se ramener au cas où g est borné, et on a alors $\nu = \rho(g).\mu$.

$\mathfrak{F}_g = \{f\rho(g) \; ; \; f \in \mathfrak{F}\}$ vérifie les conditions (2.1.1) et (2.1.2), et on est donc ramené au cas $\nu = \mu$.

Si $\nu = \mu$, pour tout $g , h \in M_R^\infty(Z , \mu)$, on a $\rho(\inf(g , h)) = \inf(\rho(g) , \rho(h))$, car

$$\rho(|f|)^2 = \rho(f.f) = [\rho(f)]^2$$

et par suite

$$|\rho(f)| = \rho(|f|) .$$

On peut donc supposer f_∞ borné, car sinon on considère, pour tout p entier,

$$\mathfrak{F}_p = \{\inf(f , p) , \quad f \in \mathfrak{F}\}$$

qui vérifie aussi les conditions (2.1.1) et (2.1.2), puis l'on fait tendre p vers $+\infty$.

Considérons donc le cas où f_∞ est borné. Pour tout compact $K \subset Z$, on a

$$f_\infty \varphi_{\rho(K)} = \sup_{\mathfrak{F}} f \varphi_{\rho(K)} \;;$$

or $f \varphi_{\rho(K)} \in \overline{\mathfrak{L}}^1_R$ pour tout $f \in \mathfrak{F}$, et f_∞ est borné, par suite

$$\mathfrak{F}_K = \{\tilde{f}\, \tilde{\varphi}_{\rho(K)} , \quad f \in \mathfrak{F}\}$$

a une borne supérieure $\tilde{g} \in L^1_R$, et $\mathfrak{F}_K$ converge dans L^1_R vers $\tilde{g}$.

On a alors

$$\rho(g) \geqslant \rho(f \varphi_{\rho(K)}) = f \varphi_{\rho(K)} \quad \forall\, f \in \mathfrak{F}$$

donc

$$\rho(g) \geqslant f_\infty \varphi_{\rho(K)} \,.$$

Soit d'autre part une suite f_n croissante d'éléments de $\mathfrak{F}$ tels que

$$f_n \varphi_{\rho(K)} \to g \quad \text{dans} \quad \overline{\mathfrak{L}}^1_R \;.$$

On a

$$f_\infty \varphi_{\rho(K)} \geqslant \lim_n f_n \varphi_{\rho(K)} = g$$

localement presque partout. $f_\infty \varphi_{\rho(K)}$ est donc μ-mesurable, et

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \int f \varphi_{\rho(K)}\, d\mu = \int g\, d\mu = \int f_\infty \varphi_{\rho(K)}\, d\mu \,.$$

Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset Z$ (et $\rho(K) \equiv K$), on a

$$\overline{\int}^* f_\infty\, d\mu = \sup \overline{\int}^* f\, d\mu \,.$$

3. Propriété d'un relèvement fort.

PROPOSITION 3.1. - Soit $T : f \to T_f$ un relèvement de $M^\infty_R(Z , \mu)$; alors

T relèvement fort $\Longleftrightarrow$ (3.1.1) $\rho_T(U) \supset U$, $\forall\, U$ ouvert de Z ,

$\Longleftrightarrow$ (3.1.2) $\rho_T(F) \subset F$, $\forall\, F$ fermé de Z .

Les propriétés (3.1.1) et (3.1.2) se déduisent l'une de l'autre par dualité.

Soient T un relèvement fort, et U un ouvert de Z. Soit

$$F_U = \{f \in K(Z) \ , \ 0 \leqslant f \leqslant \varphi_U\} .$$

On a

$$\varphi_U = \sup_{F_U} f$$

d'où

$$T_{\varphi_U} \geqslant T_f = f \ , \ \forall\, f \in F_U$$

$$T_{\varphi_U} \geqslant \varphi_U \quad \text{et} \quad \rho_T(U) \supset U .$$

Réciproquement, supposons que $\rho_T(U) \supset U$ pour tout ouvert U de Z. Soit $g \geqslant 0$, $g \in C^\infty_R(Z\ ,\ \mu)$ et

$$U_g = \{\alpha\varphi_U \ ; \ \alpha \geqslant 0 \ , \ U \text{ ouvert de } Z \ , \ \alpha\varphi_U \leqslant g\} ;$$

on a

$$g = \sup_{U_g} \alpha\varphi_U$$

d'où

$$T_g \geqslant g .$$

Soient maintenant $f \in C^\infty_R(Z)$ et λ une constante telle que

$$\lambda + f \geqslant 0 ,$$

$$\lambda - f \geqslant 0 ;$$

on a

$$T_{\lambda+f} = \lambda + T_f \geqslant \lambda + f ,$$

$$T_{\lambda-f} = \lambda - T_f \geqslant \lambda - f ,$$

et donc

$$T_f = f .$$

4. Remarques sur les applications à valeurs dans un espace de mesures.

Soient B un espace localement compact,

α une mesure de Radon positive sur B,

$C(B\ ,\ \alpha)$ l'ensemble des familles localement dénombrables $K = (K_j)_{j \in J}$ de compacts disjoints tels que $E \setminus \bigcup_{j \in J} K_j$ soit localement α-négligeable.

PROPRIÉTÉS.

a. Si $(K_{j'})_{j'\in J'}$ et $(K_{j''})_{j''\in J''}$ sont deux familles de $C(B , \alpha)$, la famille $(K_{j'} \cap K_{j''})_{(j',j'')\in J'\times J''}$ est dans $C(B , \alpha)$.

b. Si α est non nulle, si T est un relèvement de $M^{\infty}_{R}(B , \alpha)$ et si $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$, il existe $(L_i)_{i\in I} \in C(B , \alpha)$ telle que tout L_i soit contenu dans un $\rho_T(K_j)$ pour un certain j .

Soient Z et B deux espaces localement compacts. Pour toute application λ $(b \to \lambda_b)$ de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$, et pour tout $g \in K(Z)$, on note $\langle g , \lambda\rangle$ l'application

$$b \to \langle g , \lambda_b\rangle$$

de B dans $\underset{\sim}{R}$.

DÉFINITION. - _Si_ α _est une mesure de Radon positive sur_ B , _on note_ $F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ _le cône des applications_ λ

$$\lambda : b \to \lambda_b$$

_de_ B _dans_ $\mathfrak{M}^+(Z)$, _telles qu'il existe_ $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ _pour laquelle_

$$\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \in M^{\infty}_{R}(B , \alpha) , \quad \forall\, j \in J , \quad \forall\, g \in K(Z) .$$

Remarque. - Si $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, $\langle g , \lambda\rangle$ est α-mesurable, $\forall\, g \in K(Z)$.

DÉFINITIONS.

1° Si $\alpha \neq 0$, si $T = \rho_T : f \to T_f$ est un relèvement de $M^{\infty}_{R}(B , \alpha)$ et si $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que $\rho_T[\lambda] = \lambda$ s'il existe $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ telle que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle , \quad \forall\, g \in K(Z) , \quad \forall\, j \in J$$

(ceci suppose $\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \in M^{\infty}_{R}(B , \alpha)$).

2° Si λ' et $\lambda'' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que $\lambda' \equiv \lambda''$ si

$$\langle g , \lambda'\rangle \equiv \langle g , \lambda''\rangle , \quad \forall\, g \in K(Z) .$$

PROPOSITION 4.2.

(4.2.1) $\forall\, \lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, _il existe_ $\lambda' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ _tel que_

$$\rho_T[\lambda] = \lambda \quad \underline{\text{et}} \quad \lambda' \equiv \lambda .$$

(4.2.2) <u>Si</u> λ' <u>et</u> $\lambda'' \in F(B, \mathcal{M}^+(Z), \alpha)$, <u>si</u> $\rho_T[\lambda'] = \lambda'$,

$$\rho_T[\lambda''] = \lambda'' \quad \underline{\text{et}} \quad \lambda' \equiv \lambda''$$

<u>alors</u> λ'_b et λ''_b <u>coïncident localement</u> α-<u>presque partout</u>.

<u>Démonstration</u>.

(4.2.1). - Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B, \alpha)$ telle que $\varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle \in M_R^\infty(B, \alpha)$, $\forall j \in J$, $\forall g \in K(Z)$. Posons

$$\lambda'_b(g) = \begin{cases} \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle) & \text{si } b \in \rho_T(K_j) \\ 0 & \text{si } b \notin \bigcup_{j\in J} \rho_T(K_j) . \end{cases}$$

Pour $j' \neq j''$, on a

$$\rho_T(K_{j'}) \cap \rho_T(K_{j''}) = \rho_T(K_{j'} \cap K_{j''}) = \rho_T(\emptyset) = \emptyset .$$

λ'_b est donc bien défini. Les propriétés de relèvement de T donnent $\lambda'_b \in \mathcal{M}^+(Z)$.

Soit $(L_i)_{i\in I} \in C(B, \alpha)$ tel que, pour tout i, il existe un $j \in J$ pour lequel $L_i \subset \rho_T(K_j)$. Soient i et j ainsi choisis. On a

$$\varphi_{L_i}\langle g, \lambda'\rangle = \varphi_{L_i}\, \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle) \in M_R^\infty(B, \alpha)$$

et ceci $\forall i \in I$, $\forall g \in K(Z)$. Donc $\lambda' \in F(B, \mathcal{M}^+(Z), \alpha)$.

On a de plus

$$\varphi_{L_i}\langle g, \lambda'\rangle \equiv \varphi_{L_i}\, \varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle \equiv \varphi_{L_i}\langle g, \lambda\rangle, \quad \forall i \in I, \quad \forall g \in K(Z)$$

donc

$$\lambda \equiv \lambda' .$$

Soient i et j tels que $L_i \subset \rho_T(K_j)$. On a

$$\rho_T(\varphi_{L_i}\langle g, \lambda'\rangle) = \rho_T(\varphi_{L_i}\, \varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(L_i)}\, \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle)$$

mais on a $\rho_T(L_i) \subset \rho_T(K_j)$, donc

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g, \lambda\rangle) = \langle g, \lambda'\rangle \quad \text{sur} \quad \rho_T(L_i)$$

et

$$\lambda' = \rho_T[\lambda'] .$$

(4.2.2). - Soient $(K'_{j'})_{j'\in J'} \in C(B , \alpha)$ et $(K''_{j''})_{j''\in J''} \in C(B , \alpha)$ telles que

$$\rho_T(\varphi_{K'_{j'}}\langle g , \lambda'\rangle) = \varphi_{\rho_T(K'_{j'})}\langle g , \lambda'\rangle \ , \quad \forall\ j' \in J' \quad \forall\ g \in K(Z)$$

$$\rho_T(\varphi_{K''_{j''}}\langle g , \lambda''\rangle) = \varphi_{\rho_T(K''_{j''})}\langle g , \lambda''\rangle \ , \quad \forall\ j'' \in J'' \ .$$

On a alors, pour tout j' , j'' et $g \in K(Z)$,

$$\varphi_{\rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})}\langle g , \lambda'\rangle = \rho_T(\varphi_{K'_{j'} \cap K''_{j''}}\langle g , \lambda'\rangle)$$

$$= \rho_T(\varphi_{K'_{j'} \cap K''_{j''}}\langle g , \lambda''\rangle) = \varphi_{\rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})}\langle g , \lambda''\rangle$$

donc $\lambda'_b = \lambda''_b$, $\forall\ b \in \rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})$, et par suite

$$\lambda'_b = \lambda''_b \quad \text{localement } \alpha\text{-presque-partout.}$$

DÉFINITION. - <u>Soit</u> $F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ <u>le cône des applications</u>

$$\lambda : b \to \lambda_b$$

<u>de</u> B <u>dans</u> $\mathfrak{M}^+(Z)$ <u>telles que</u>

(*) $\langle g , \lambda\rangle$ <u>soit</u> α-<u>mesurable</u>, $\forall\ g \in K(Z)$,

(**) $b \to \|\lambda_b\|$ <u>soit une application bornée</u>.

On a

$$F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha) \subset F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha) \ .$$

Supposons $\alpha \neq 0$, et soit T un relèvement de $M^\infty_R(B , \alpha)$:

- Si $\lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que

$$\rho_T(\lambda) = \lambda \ ;$$

- Si $\rho_T(\langle g , \lambda\rangle) = \langle g , \lambda\rangle$, $\forall\ g \in K(Z)$, $\lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ et $\rho_T(\lambda) = \lambda$, on a aussi

$$\rho_T[\lambda] = \lambda \ .$$

PROPOSITION 4.3.

(4.3.1) $\forall\ \lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ <u>il existe</u> $\lambda' \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ <u>tel que</u> $\rho_T(\lambda') = \lambda'$ <u>et</u> $\lambda' \equiv \lambda$.

Démonstration analogue à celle de (4.2.1).

PROPOSITION 4.4. - <u>Soit</u> $\lambda \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^{+}(Z) , \alpha)$ <u>telle que</u> $\rho_T(\lambda) = \lambda$. <u>Soit</u> K <u>compact</u> $\subset Z$ <u>et soit</u>

$$\lambda_K : b \to \lambda_{K,b}$$

<u>définie par</u> $\lambda_{K,b} = (\lambda_b)_K$, $\forall\, b \in B$, <u>alors</u>

$$\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^{+}(K) , \alpha)$$

<u>et si</u> λ'_K : $(b \to \lambda'_{K,b}) \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^{+}(K) , \alpha)$ <u>est tel que</u>

$$\rho_T(\lambda'_K) = \lambda'_K \tag{4.4.1}$$

$$\lambda'_K \equiv \lambda_K , \tag{4.4.2}$$

<u>on a</u> $\lambda'_{K,b} = \lambda_{K,b}$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

Montrons d'abord que $\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^{+}(K) , \alpha)$.

Pour $g \in K^{+}(K)$ et $b \in B$, on a

$$\langle g , \lambda_{K,b}\rangle = \langle \varphi_K\, h , \lambda_b\rangle \quad \text{si} \quad h \in K_{+}(Z) \quad \text{et} \quad h/K = g$$

mais

$$\langle \varphi_K\, h , \lambda_b\rangle = \inf_{\substack{f\in K(Z)\\ f\geq\varphi_K}} \langle fh , \lambda_b\rangle$$

et

$$\rho_T(\langle fh , \lambda_b\rangle) = \langle fh , \lambda_b\rangle .$$

Donc, en vertu du lemme 1, $\langle g , \lambda_K\rangle$ est α-mesurable. Ceci se généralise à tout $g \in K(Z)$.

D'autre part, on a $\|\lambda_{K,b}\| \leq \|\lambda_b\|$, donc

$$\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^{+}(K) , \alpha) .$$

Soit maintenant $g \in K^{+}(K)$. On a

$$\langle g , \lambda'_K\rangle = \rho_T(\langle g , \lambda'_K\rangle) = \rho_T(\langle g , \lambda_K\rangle)$$

mais, $\forall\, b \in B$,

$$\langle g , \lambda_{K,b}\rangle = \inf_{\substack{f\in K(Z)\\ f\geq\varphi_K}} \langle fh , \lambda_b\rangle \qquad \text{où} \quad h \in K^{+}(Z) \quad \text{et} \quad h/K = g ,$$

donc

$$\rho_T(\langle g , \lambda_K\rangle) \leq \inf_{\substack{f\in K(Z)\\ f\geq\varphi_K}} \rho_T(\langle fh , \lambda_b\rangle) = \inf \langle fh , \lambda_b\rangle = \langle g , \lambda_{K,b}\rangle$$

et par suite $\lambda'_{K,b} \leq \lambda_{K,b}$, $\forall\ b \in B$, mais on a

$$\langle 1\ ,\ \lambda'_{K,b}\rangle \equiv \langle 1\ ,\ \lambda_{K,b}\rangle$$

λ'_K et λ_K coïncident donc localement α-presque-partout.

5. Désintégration des mesures.

Soient Z et B deux espaces localement compacts,
$\alpha \neq 0$ une mesure de Radon positive sur B ,
T un relèvement de $M^\infty_R(B\ ,\ \alpha)$.

DÉFINITION. - On dit qu'une application λ

$$\lambda\ :\ b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ est appropriée relativement à $(\alpha\ ,\ T)$ si

(A$_1$) $\lambda \in F(B\ ,\ \mathfrak{M}^+(Z)\ ,\ \alpha)$ et $\rho_T[\lambda] = \lambda$,

(A$_2$) $\langle g\ ,\ \lambda\rangle$ est essentiellement α-intégrable, $\forall\ g \in K(Z)$.

$\mu = \int_B \lambda_b\, d\alpha(b)$ est alors une mesure de Radon positive sur Z .

Remarque. - Si $\alpha \neq 0$, et si T est un relèvement fort de $M^\infty_R(B\ ,\ \alpha)$, toute application α-adéquate de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ est appropriée relativement à $(\alpha\ ,\ T)$.

PROPOSITION 5.1. - Soit $\lambda\ :\ b \to \lambda_b$ une application de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ appropriée relativement à $(\alpha\ ,\ T)$ et soit

$$\mu = \int \lambda_b\, d\alpha(b)\ .$$

Si une fonction $f\ :\ Z \to \underset{\sim}{R}$ est μ-intégrable, il existe $H \subset B$ localement α-négligeable tel que $\forall\ b \notin H$, f soit λ_b intégrable ;

$b \to \int_Z f\, d\lambda_b$ est essentiellement α-intégrable et

$$\int_Z f\, d\mu = \int_B d\alpha(b) \int_Z f\, d\lambda_b\ .$$

On se limite d'abord au cas où f est semi-continue inférieurement, positive. Le passage à f μ-intégrable quelconque se fait comme dans BOURBAKI ([1], chap. V, p. 21-23).

f est semi-continue inférieurement, et $(K_j)_{j\in J} \in C(B\ ,\ \alpha)$ est tel que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g\ ,\ \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g\ ,\ \lambda\rangle\ .$$

Soit

$$f : Z \to R_+ \quad \text{semi-continue inférieurement,}$$

et

$$F_f = \{g \in K(Z) \; ; \quad 0 \leqslant g \leqslant f\} .$$

Soit $F(J)$: l'ensemble des parties finies de J. Pour tout $H \in F(J)$,

$$K_H = \bigcup_{j\in H} K_j ,$$

on a

$$\int_Z^* f(Z)\, d\lambda_b(Z) = \sup_{\substack{g\in F_f \\ H\in F(J)}} \rho_T(\varphi_{K_H}\langle g , \lambda\rangle)(b)$$

pour tout $b \in \bigcup_{j\in J} \rho_T(K_j)$, et d'après le lemme 1, on a alors

$$\overline{\int}_B^* d\alpha(b) \int_Z^* f(Z)\, d\lambda_b(Z) = \sup_{\substack{g\in F_f \\ H\in F(J)}} \int_B \varphi_{\rho_T(K_H)}\langle g , \lambda\rangle\, d\alpha$$

$$= \sup_{g\in F_f} \int_B \langle g , \lambda\rangle\, d\alpha = \sup_{g\in F_f} \int g\, d\mu = \int_Z^* f\, d\mu .$$

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $A \subset Z$ <u>est</u> μ-<u>négligeable, il existe</u> $H \subset B$ <u>localement</u> α-<u>négligeable tel que</u> A <u>soit</u> λ_b <u>négligeable pour tout</u> $b \notin H$.

THÉORÈME 5.2. - <u>Soient</u> Z <u>et</u> B <u>deux espaces localement compacts,</u>
μ : <u>mesure de Radon, positive sur</u> Z,
p : <u>application</u> μ-<u>propre de</u> Z <u>dans</u> B,
$\nu = p(\mu)$,
α <u>une mesure de Radon positive sur</u> B <u>telle que</u> $\nu = \psi\cdot\alpha$, ψ <u>étant localement</u> α-<u>intégrable</u>.

<u>Supposons</u> α <u>non nulle, et soit</u> $T : f \to T_f$ <u>un relèvement de</u> $M_R^\infty(B , \alpha)$. <u>Alors</u>

(5.2.1) <u>il existe une application</u> λ

$$\lambda : b \to \lambda_b$$

<u>de</u> B <u>dans</u> $\mathfrak{M}^+(Z)$ <u>appropriée relativement à</u> (α , T) <u>telle que</u>

(i) $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

(ii) $\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B f\langle g , \lambda\rangle\, d\alpha , \quad \forall f \in K(B) , \quad \forall g \in K(Z)$.

(5.2.2) <u>De plus, si</u> T <u>est un relèvement fort,</u> λ_b <u>est concentré sur</u> $p^{-1}(\{b\})$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

(5.2.3) <u>Si</u> $\lambda' : b \to \lambda'_b$, $\lambda'' : b \to \lambda''_b$ <u>sont deux applications de</u> B <u>dans</u> $\mathfrak{M}^+(Z)$

<u>appropriées relativement à</u> (α , T) <u>et telles que</u>

(j) λ'_b et λ''_b <u>sont concentrées sur</u> $p^{-1}(\{b\})$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>,

(jj) $\mu = \int_B \lambda'_b \, d\alpha(b) = \int_B \lambda''_b \, d\alpha(b)$,

<u>alors</u> $\lambda'_b = \lambda''_b$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

(5.2.1)<u>Existence de</u> λ . - **Pour** tout $g \in K(Z)$, considérons $\mu_g = p(g.\mu)$. On a

$$|\int f \, d\mu_g| = |\int (f \circ p) \, g \, d\mu| \leq \|g\|_\infty \int |f \circ p| \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| \, d\nu \, .$$

Donc il existe h_g localement ν-intégrable telle que

$$\mu_g = h_g . \nu$$

(on peut choisir h_g telle que $\|h_g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, et $h_g \geq 0$ si $g \geq 0$).

Soit ρ un relèvement de $M^\infty_{\mathbb{R}}(B , \nu)$. On a $\rho(h_g)(b) = \langle g , \delta_b \rangle$ avec δ_b application linéaire positive de $K(Z)$ dans $\mathbb{R}$.

$$|\langle g , \delta_b \rangle| \leq \|g\|_\infty$$

$$\langle g , \delta_b \rangle , \quad \nu\text{-mesurable} \quad \forall \, g \in K(Z)$$

et
$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B f \langle g , \delta_b \rangle \, d\nu(b)$$

par suite $\delta \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \nu)$.

Posons $\gamma_b = \psi(b) \, \delta_b$. $\langle g , \gamma \rangle = \psi \langle g , \delta \rangle$ est α-mesurable $\forall \, g \in K(Z)$ et $\gamma \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$. Il existe donc $\lambda : b \to \lambda_b$, $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ telle que $\gamma \equiv \lambda$ et $\rho_T[\lambda] = \lambda$. On a alors

$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B f \langle g , \delta \rangle \, d\alpha \quad \forall \, g \in K(Z) \; , \quad \forall \, f \in K(B) \, .$$

De plus, on a

(α)
$$\mu = \int_B \lambda_b \, d\alpha(b)$$

car, si $g \in K_+(Z)$ et $F_1 = \{f \in K(B) \, , \; 0 \leq f \leq 1\}$

$$\int_B \langle g , \lambda \rangle \, d\alpha = \sup_{f \in F_1} \int_B f \langle g , \lambda \rangle \, d\alpha = \sup_{F_1} \int_Z g(f \circ p) \, d\mu$$

$$= \sup_{F_1} \int_B f \, dp(g.\mu) = \int_Z g . d\mu \, .$$

(β)
$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B g(b) \, d\alpha(b) \int_Z g \, d\lambda_b$$

pour toute

$$f : B \to \underset{\sim}{R} \quad \alpha\text{-mesurable bornée à support compact}$$

et toute

$$g : Z \to \underset{\sim}{R} \quad \mu\text{-mesurable bornée à support compact.}$$

(On utilise pour cela la proposition 5.1, et on approche f et g par des fonctions de $K(B)$ et $K(Z)$.)

<u>Montrons que</u> $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B\,,\,\alpha)$ telle que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g\,,\,\lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g\,,\,\lambda\rangle$$

et $\forall\ H \in F(J)$ (ensemble des parties finies de J), soit $K_H = \bigcup_{j\in J} K_j$.

Soit $f \in K_+(B)$ et $F_1 = \{g \in K(Z)\ ,\ 0 \leq g \leq 1\}$; en appliquant le lemme 2.1 et la propriété (β), on obtient

$$\begin{aligned}\int_B f(b)\ \lambda_b^*(1)\ d\alpha(b) &= \sup_{\substack{g\in F_1\\ H\in F(J)}} \int_B f\varphi_{\rho_T(K_H)}\langle g\,,\,\lambda\rangle\ d\alpha \\ &= \sup_{\substack{g\\ H}} \int g\ (f\varphi_{K_H}\circ p)\ d\mu \\ &= \sup_{H\in F(J)} \int_Z (f\varphi_{K_H})\circ p\ d\mu \\ &= \int_B f\ dp(\mu) = \int_B f.\psi\ d\alpha\end{aligned}$$

et ceci $\forall\ f \in K_+(B)$; donc $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque-partout.

(5.2.3). <u>Unicité de</u> λ . - Soient λ' et λ'' deux applications appropriées relativement à $(\alpha\ ,\ T)$ vérifiant (j) et (jj).

Soit $A = \{b \in B\ ,\ \lambda'_b$ non concentré sur $p^{-1}(\{b\})\}$. A est localement α-négligeable.

$\forall\ f \in K(B)$ et $\forall\ g \in K(Z)$, $g(f\circ p)$ est μ-intégrable puisqu'à support compact, il existe donc $A_{fg} \subset B$, localement α-négligeable tel que $g(f\circ p)$ soit λ'_b-intégrable pour tout $b \notin A_{fg}$, et l'on a

$$\int_Z g(f\circ p)\ d\mu = \int_B d\alpha(b) \int_Z g(f\circ p)\ d\lambda'_b\ .$$

Si $b \notin A \cup A_{fg}$,

$$\int_Z g(f\circ p)\, d\lambda'_b = \int_Z \varphi_{p^{-1}(\{b\})}(z)\, g(z)\, f(p(z))\, d\lambda'_b(z) = f(b) \int_Z g(z)\, d\lambda'_b(z) ,$$

donc $\forall\ f \in K(B)$ et $\forall\ g \in K(Z)$,

$$\int_B f\langle g , \lambda'\rangle\, d\alpha = \int_B d\alpha(b) \int_Z g(f\circ p)\, d\lambda'_b = \int_Z g(f\circ p)\, d\mu$$

de même,

$$\int_B f\langle g , \lambda''\rangle\, d\alpha = \int_Z g(f\circ p)\, d\mu$$

donc

$$\langle g , \lambda'\rangle \equiv \langle g.\lambda''\rangle , \quad \forall\ g \in K(Z)$$

et la proposition (4.2.2) entraîne

$$\lambda'_b = \lambda''_b \text{ localement } \alpha\text{-presque-partout.}$$

(5.2.2) Il reste à montrer que <u>si</u> T <u>est un relèvement fort</u> λ_b <u>est concentré sur</u> $p^{-1}(\{b\})$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

(A) <u>Supposons d'abord</u> :

T <u>est un relèvement fort de</u> $M^{\infty}_R(B , \alpha)$

Z <u>est compact</u>

p <u>est continue</u>

$\lambda \in F^{\infty}(B , \mathcal{M}^+(Z) , \alpha)$ <u>et</u> $\rho_T(\lambda) = \lambda$.

Soient $b_0 \in B$, et $\mathcal{V}(b_0)$ l'ensemble des voisinages de b_0 . On a

$$\bigcap_{\substack{V=\overset{\circ}{V}\\ V\in\mathcal{V}(b_0)}} p^{-1}(V) = p^{-1}\Big(\bigcap_{\substack{V=\overset{\circ}{V}\\ V\in\mathcal{V}(b_0)}} V \Big) = p^{-1}(\{b_0\}) .$$

Pour tout voisinage W de $p^{-1}(\{b_0\})$, il existe donc $V \in \mathcal{V}(b_0)$, $V = \overset{\circ}{V}$, tel que $p^{-1}(V) \subset W$.

Si $g \in K(Z)$ et si $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(\{b_0\}) = \emptyset$, il existe donc $V = \overset{\circ}{V}$, $V \in \mathcal{V}(b_0)$ tel que $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(V) = \emptyset$ si $f \in K(B)$ est telle que $\operatorname{supp} f \subset V$.

On a

$$f(p(z)) = 0 , \quad \forall\ z \in p^{-1}(V)$$

d'où

$$\int_Z g(f\circ p)\, d\mu = \int_B f\varphi_V\langle g , \lambda\rangle\, d\alpha = 0$$

d'où

$$\varphi_V\langle g , \lambda\rangle \equiv 0$$

et

$$\varphi_{\rho_T(V)}\langle g , \lambda\rangle = \rho_T(\varphi_V\langle g , \lambda\rangle) = 0 .$$

T étant un relèvement fort, on a $\rho_T(V) \supset V \ni b_0$, d'où $\langle g , b_0\rangle = 0$, $\forall\, g \in K(Z)$ telle que $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(\{b_0\}) = \emptyset$, donc on a

$$\operatorname{supp} \lambda_b \subset p^{-1}(\{b\}) \ , \quad \forall\, b \in B \ .$$

(B) <u>Prenons maintenant</u> Z , B , μ , α , p , λ <u>comme dans</u> (5.2.1), <u>et supposons que</u> T <u>est un relèvement fort</u>.

(a) Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ **telle** que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ , \quad \forall\, j \in J \ .$$

On peut supposer que ψ/K_j est borné, $\forall\, j \in J$ et que

$$\|\lambda_b\| = \psi(b) \ , \quad \forall\, b \in K_j$$

pour tout $j \in J$, et $b \in B$, soit $\lambda_b^j = \varphi_{\rho_T(K_j)}(b)\ \lambda_b$.

T étant un relèvement fort, on a $\rho_T(K_j) \subset K_j$, $b \to \|\lambda_b^j\|$ est donc une application bornée, et il suffit de montrer que, pour tout $j \in J$, λ_b^j est concentré sur $p^{-1}(\{b\})$, sauf pour $b \in H_j$ localement α-négligeable.

On aura alors $H_j \subset \rho_T(K_j) \subset K_j$ et $H_\infty = \bigcup_j H_j$ sera localement α-négligeable, et pour tout $b \in \bigcup_{j\in J} \rho_T(K_j) \setminus H_\infty$, $\lambda_b = \lambda_b^j$ sera concentré sur $p^{-1}(\{b\})$.

(b) Soit donc $j \in J$ fixé. On a

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \langle g , \lambda^j\rangle \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ ,$$

et $b \to \|\lambda_b^j\|$ borné. Donc $\lambda^j \in F^\infty(B , \mathcal{M}^+(Z) , \alpha)$ et $\rho_T(\lambda_j) = \lambda_j$. D'autre part $\langle g , \lambda^j\rangle$ est essentiellement α-intégrable pour tout $g \in K(Z)$. λ^j est donc appropriée relativement à (α , T) , et la propriété (β) entraîne

$$\int_Z g(f\varphi_{K_j}) \circ p \, d\mu = \int_B f\varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle \, d\alpha \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ , \quad \forall\, f \in K(B) \ .$$

Soit $\mu_j = (\varphi_{K_j} \circ p).\mu$, on a $\mu_j \leq \mu$, μ_j bornée et

$$\int_Z g(f \circ p)\, d\mu_j = \int f\langle g , \lambda^j\rangle \, d\alpha \ .$$

(c) μ_j étant bornée, et $\mu_j \leq \mu$, il existe $(L_n)_{n\in \underset{\sim}{N}} \in C(Z , \mu_j)$ telle que $p_n = p/L_n$ soit continue $\forall\, n$.

Soit $\lambda_{L_n}^j : b \to \lambda_{L_{n,b}}^j$, $\lambda_{L_n}^j \in F^\infty(B , \mathcal{M}^+(L_n) , \alpha)$, définie par

$$\lambda^j_{L_{n,b}} = (\lambda^j_b)_{L_n} \ , \quad \forall\, b \in B \ .$$

Les propositions 4.3 et 4.4 entraînent l'existence de $\gamma_n \in F^\infty(B\ ,\ \mathfrak{M}^+(L_n)\ ,\ \alpha)$ telle que $\rho_T(\gamma_n) = \gamma_n$ et $\lambda^j_{L_{n,b}} = \gamma_{n,b}$ pour tout $b \notin D_n$, D_n étant localement α-négligeable .

La propriété (β) appliquée à $(Z\ ,\ B\ ,\ \mu_j\ ,\ p\ ,\ \alpha\ ,\ T\ ,\ \lambda^j)$ entraîne

$$\int_{L_n} g(f \circ p_n)\, d(\mu_j)_{L_n} = \int_Z g'(f \circ p)\, d\mu_j = \int_B f(b)\, d\alpha(b) \int_Z g\, d\lambda^j_b = \int_B f\langle g\ ,\ \lambda_n\rangle d\alpha$$

$\forall\, g \in K(L_n)$, $\forall\, g \in K(B)$ (g' définie par $g' = g$ sur L_n , $g'(Z) = 0$, $\forall\, Z \notin L_n$).

Le résultat de (A), appliqué à $(L_n\ ,\ B\ ,\ (\mu_j)_{L_n}\ ,\ p_n\ ,\ \alpha\ ,\ T\ ,\ \gamma_n)$ entraîne

$$\operatorname{supp} \gamma_{n,b} \subset p_n^{-1}(\{b\})\ ,\quad \forall\, b \in B \implies \operatorname{supp} \lambda^j_{L_{n,b}} \subset p_n^{-1}(\{b\})\ ,\quad \forall\, b \notin D_n\ .$$

Si U_n est l'injection canonique de $L_n \to Z$, on a

$$U_n(\lambda^j_{L_{n,b}}) = \varphi_{L_n} \cdot \lambda^j_b\ ,\quad \forall\, b \in B \implies \operatorname{supp}(\varphi_{L_n} \lambda^j_b) \subset p_n^{-1}(\{b\}) \subset p^{-1}(\{b\})\ ,\quad \forall\, b \notin D_n\ .$$

(d) La famille $(\varphi_{L_n} \lambda^j_b)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\forall\, b \in B$. $Z \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ est μ_j-négligeable, donc λ^j_b-négligeable localement ~~α-presque~~-partout.

Par suite, $\lambda^j_b = \sum_n \varphi_{L_n} \lambda^j_b$ localement α-presque-partout et λ^j_b est concentré sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque-partout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 5. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1244 ; Bourbaki, 21).

[2] IONESCU TULCEA (A.) and IONESCU TULCEA (C.). - On the lifting property, I., J. math. Anal. and Appl., t. 3, 1961, p. 537-546.