Jean-Michel Bony

Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 3 (1964), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
3e année, 1963/64, n° 5

REPRÉSENTATION INTÉGRALE SUR LES CÔNES CONVEXES FAIBLEMENT COMPLETS

par Jean-Michel BONY

Le théorème classique de représentation intégrale affirme que tout point x d'un cône convexe à base compacte peut être considéré comme l'intégrale faible

$$x = \int y \, d\mu(y) \ ,$$

où μ est une mesure de Radon maximale sur la base. Si cette base est métrisable, μ est portée par l'ensemble des points extrémaux.

Nous exposerons ici une généralisation de ce résultat, due à G. CHOQUET [2], dans le cas de cônes convexes saillants faiblement complets. Dans une première partie, nous introduirons les mesures coniques, et montrerons que tout point du cône peut être représenté à l'aide d'une mesure conique maximale.

Dans une seconde partie, nous étudierons les relations entre mesures coniques et mesures de Radon. Le théorème 3 précise les conditions dans lesquelles une mesure conique maximale peut être identifiée à une mesure de Radon portée par les génératrices extrémales.

1. Mesures coniques.

Notations. - Soit E un espace vectoriel topologique faible. On notera $h(E)$ l'espace des fonctions linéaires par morceaux sur E. $f \in h(E)$, si f est continue et s'il existe une partition de E en un nombre fini de cônes polyédraux (intersection d'un nombre fini de demi-espaces) telle que f coïncide dans chacun d'eux avec une forme linéaire.

$h(E)$ est un espace vectoriel réticulé.

Soit S le cône des fonctions linéaires par morceaux convexes (fonctions de la forme $\sup(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, où les ℓ_i sont des formes linéaires). Alors, $h(E) = S - S$.

DÉFINITION 1. - On appelle mesure conique sur E toute forme linéaire positive sur $h(E)$.

$M^+(E)$, ensemble des mesures coniques sur E, est un cône convexe complètement réticulé.

On munit $M^+(E)$ de la topologie faible associée aux formes linéaires $\mu \rightsquigarrow \mu(f)$ où $f \in h(E)$.

Exemple. - Soient K un compact de E et θ une mesure de Radon positive sur K . Alors

$$\mu(f) = \int_K f \, d\theta \qquad \text{pour} \quad f \in h(E)$$

est une mesure conique. μ est dite localisable sur K . Une mesure conique n'est pas nécessairement localisable. Si elle existe, la localisation n'est évidemment pas unique.

En particulier, nous noterons ε_x la mesure conique $\varepsilon_x(f) = f(x)$. On appelle mesure discrète, une combinaison linéaire positive de mesures ponctuelles :

$$\mu = \sum_1^n \lambda_i \, \varepsilon_{x_i} .$$

DÉFINITION 2. - Soit X un cône fermé de E . μ est dite portée par X si $f \geqslant 0$ sur X entraîne $\mu(f) \geqslant 0$.

DÉFINITION 3. - On appelle résultante de μ , le point r de E (s'il existe) tel que $\mu(\ell) = \ell(r)$ pour toute forme linéaire ℓ sur E .

PROPOSITION 1. - Si μ est portée par un cône X convexe complet, alors μ a une résultante $r \in X$.

En effet, la restriction de μ aux formes linéaires définit un point $r \in E'^* = \hat{E}$; X étant complet, est fermé dans $\hat{E}$. Enfin,

$$\ell \in E' \, , \quad \ell \geqslant 0 \ \text{ sur } X \implies \ell(r) = \mu(\ell) \geqslant 0 \, ;$$

X est l'intersection dans $\hat{E}$ des demi-espaces fermés le contenant, donc $r \in X$.

Rappelons le

LEMME de décomposition. - Dans un espace vectoriel réticulé, supposons

$$\sum_1^n x_i = \sum_1^p y_j \qquad \text{avec} \quad x_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_j \geqslant 0 .$$

Alors, il existe une famille z_{ij} telle que

$$x_i = \sum_{j=1}^p z_{ij} \qquad \text{et} \qquad y_j = \sum_{i=1}^n z_{ij} \qquad \text{et} \qquad z_{ij} \geqslant 0 .$$

(Voir BOURBAKI [1], chapitre 2.)

PROPOSITION 2. - Soit A un cône fermé.
Pour $f \in h(E)^+$, posons $\mu_A(f) = \inf \{\mu(\varphi) \mid \varphi \in h(E)^+$ et $\varphi \geqslant f$ sur $A\}$.
Pour $f \in h(E)$, $\mu_A(f) = \mu_A(f^+) - \mu_A(f^-)$. Alors :

(a) μ_A est une mesure conique nommée restriction de μ à A .
(b) μ_A est portée par A .
(c) $\mu_A \leqslant \mu$ et, si μ est portée par A , $\mu = \mu_A$.
(d) Si $A = \bigcup_1^n A_i$, alors $\mu_A \leqslant \sum_1^n \mu_{A_i}$.

En effet : si f_1 et f_2 sont positives, soient φ_1 et $\varphi_2 \geqslant 0$, $\mu(\varphi_i) \leqslant \mu_A(f_i) + \varepsilon$, alors

$$\mu_A(f_1 + f_2) \leqslant \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) \leqslant \mu_A(f_1) + \mu_A(f_2) + 2\varepsilon .$$

Pour démontrer que $\mu_A(f_1) + \mu_A(f_2) \leqslant \mu_A(f_1 + f_2)$, soit ψ telle que $\mu(\psi) \leqslant \mu_A(f_1 + f_2) + \varepsilon$, $\psi \geqslant f_1 + f_2$ sur A . Posons $\psi = f_1 + f_2 + \theta$. Il suffit d'appliquer le lemme de décomposition à $\psi + \theta^- = f_1 + f_2 + \theta^+$.

(b) , (c) et (d) sont immédiats.

PROPOSITION 3. - Soit X convexe complet. Si μ est portée par X , et a pour résultante r , μ est limite de mesures discrètes portées par X , et de même résultante.

Donnons-nous un voisinage de μ de la forme $V = \{\theta \mid |\theta(f_K) - \mu(f_K)| \leqslant \varepsilon\}$, où les f_K $(K = 1 \dots p)$ sont linéaires par morceaux.

Il existe une partition de E en cônes polyédraux $C_1 \dots C_n$, telle que, dans chacun d'eux, toutes les f_K soient linéaires. Les cônes $X_i = X \cap C_i$ sont convexes et complets.

On a $\mu \leqslant \sum_1^n \mu_{X_i}$. D'après le lemme de décomposition, il existe $\nu_1 \dots \nu_n$ telles que $\mu = \sum_i^n \nu_i$ et $\nu_i \leqslant \mu_{X_i}$. Comme μ_{X_i} est portée par X_i et $\nu_i \leqslant \mu_{X_i}$, on a ν_i portée par X_i . Soit r_i la résultante de ν_i .

Pour f_K , qui coïncide avec une forme linéaire sur X_i , on a

$$\nu_i(f_K) = f_K(r_i) = \varepsilon_{r_i}(f_K)$$

et

$$\mu(f_K) = \left(\sum_1^n \varepsilon_{r_i}\right)(f_K) \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_1^n \varepsilon_{r_i}\right) \in V .$$

PROPOSITION 4. - Tout cône convexe complet saillant X est plongeable dans $(\underset{\sim}{R}^+)^I$. Plus précisément, il existe un isomorphisme de $\hat{E}$ sur $\underset{\sim}{R}^I$ qui applique X sur un sous-cône de $(\underset{\sim}{R}^+)^I$.

En effet, si X est saillant, son polaire X^0 (dans la dualité $\hat{E}$, E') n'est contenu dans aucun hyperplan fermé, donc dans aucun hyperplan car $\hat{E} = E'^*$. On peut donc choisir une base algébrique de E' dans X^0 : $(e'_i)_{i\in I}$, et l'application $x \rightsquigarrow (x_i)_{i\in I}$ où $x_i = -(x , e'_i)$ est un isomorphisme de $\hat{E}$ sur $\underset{\sim}{R}^I$ appliquant X dans $(\underset{\sim}{R}^+)^I$.

DÉFINITION 4. - Ordre sur les mesures coniques.

On notera $\mu \prec \nu$, la relation $\forall f \in S$, $\mu(f) \leqslant \nu(f)$. Si $\mu \prec \nu$, μ et ν ont même résultante : $E' = S \cap (-S)$.

PROPOSITION 5. - Soit X convexe complet saillant. Pour les mesures portées par X, l'ordre est inductif.

Montrons d'abord que, sur X, toute fonction f de $h(E)$ est majorée par une forme linéaire. En plongeant X dans $(\underset{\sim}{R}^+)^I$, il existe un voisinage de la forme $\{x_1 \leqslant \alpha , \ldots , x_n \leqslant \alpha\}$ où $|f(x)| \leqslant 1$. Alors, sur X,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{n\alpha}(x_1 + \ldots + x_n) .$$

Soit alors une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ totalement ordonnée de mesures coniques. Elles ont toutes même résultante. f étant majorée par une forme linéaire, l'ensemble $\{\mu_i(f)\}$ est borné. Soit un ultrafiltre $\mathfrak{U}$, plus fin que le filtre des sections de I ; alors, $\lim_{\mathfrak{U}} \mu_i(f)$ existe, soit $\mu(f)$ sa valeur. μ est une mesure conique, et $\forall i$, $\mu_i \leqslant \mu$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> X <u>convexe complet saillant. Tout point de</u> X <u>est résultante d'une mesure maximale portée par</u> X.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. Citons sans démonstration le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Pour qu'il y ait unicité de la représentation précédente, il faut et il suffit que</u> X <u>soit réticulé pour son ordre propre</u>.

On trouvera une démonstration complète dans [3].

2. Localisation des mesures coniques.

Désormais, X désignera un cône convexe complet saillant de E , et les mesures coniques considérées seront portées par X .

DÉFINITION 5. - On appellera chapeau de X , un convexe compact K de X tel que son complémentaire X - K soit convexe.

X est dit "bien coiffé" s'il est réunion de ses chapeaux. Tout sous-cône d'un cône bien coiffé l'est aussi.

PROPOSITION 6. - Si la résultante de μ appartient à K , μ est localisable sur K par une mesure de Radon de masse $\leqslant 1$.

1° Supposons μ discrète :

$$\mu = \sum_1^n \lambda_i \, \varepsilon_{x_i} \ , \quad r = \sum \lambda_i \, x_i \ , \qquad \lambda_i > 0 \ .$$

La somme de 2 éléments a et b de X ne peut appartenir à K sans que a et b appartiennent à K (il suffit de regarder dans le plan Oab , où le résultat est évident) ; donc, le point $\lambda_i \, x_i \in K$. L'intersection de la droite Ox_i avec K est un segment fermé, non réduit à 0 , car il contient $\lambda_i \, x_i$. Soit $[Oy_i]$ ce segment. Si $y_i = \beta_i \, x_i$, posons

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\beta_i} \ , \quad \mu = \sum_1^n \alpha_i \, \varepsilon_{y_i} \quad \text{et} \quad r = \sum \alpha_i \, y_i \ .$$

On a $m = \sum \alpha_i \leqslant 1$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $r = \sum \frac{\alpha_i}{m} (my_i)$ qui serait barycentre des points de X - K . La mesure de Radon $\sum \alpha_i \, \varepsilon_{y_i}$ localise la mesure μ .

2° Si μ est quelconque, elle est limite des μ_i discrètes, qui ont des localisations θ_i de masse $\leqslant 1$. Lorsque $\mu_i \to \mu$, les θ_i ont au moins une valeur d'adhérence θ . θ est évidemment une localisation de μ .

PROPOSITION 7. - Si l'origine a dans X un système fondamental de voisinages, alors X est bien coiffé.

Supposons X plongé dans $(\underset{\sim}{R}^+)^I$. Il existe une infinité dénombrable d'indices $i_1 , \dots , i_n , \dots$, tels que les ensembles $\{x_{i_1} \leqslant \varepsilon , \dots , x_{i_n} \leqslant \varepsilon\}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans X . x_i est bornée par 1 dans un certain voisinage de 0 .

$$\forall \ i \ , \ \exists \ n \ , \ \exists \ \varepsilon \ , \qquad x_i \leqslant \frac{1}{n\varepsilon} (x_{i_1} + \dots + x_{i_n}) \quad \text{pour} \quad x \in X \ .$$

Soit $K = \{x \in X \mid \sum_1^\infty \lambda_i x_i \leqslant 1\}$ pour une suite donnée de $\lambda_i > 0$. K est convexe, et $X - K$ l'est aussi. Sur K, chacun des x_{i_n} est borné, donc chacun des x_i l'est aussi. K est donc relativement compact, et il est fermé. C'est donc un chapeau.

Pour x donné, choisissons λ_n tel que

$$0 < \lambda_n \leqslant \frac{1}{2^n x_{i_n}} .$$

Le chapeau associé contient x. X est bien coiffé.

COROLLAIRE 1. - <u>Si la topologie de</u> X <u>est métrisable,</u> X <u>est bien coiffé</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> X <u>est un produit dénombrable de cônes à base compacte (ou un sous-cône convexe fermé d'un tel produit),</u> X <u>est bien coiffé</u>.

Rappelons que, pour des mesures de Radon positives, de masse 1, portées par un compact convexe K de E, on note $\theta_1 \prec \theta_2$ la relation $\theta_1(\varphi) \leqslant \theta_2(\varphi)$, pour toute φ continue et convexe sur K. Toute mesure de Radon est majorée par une mesure maximale. Si K est métrisable, toute mesure maximale est portée par l'ensemble des points extrémaux de K.

PROPOSITION 8. - Toute mesure conique maximale localisable sur un chapeau K, admet une localisation maximale (au sens de l'ordre $\prec$ sur les mesures de Radon de K).

En effet, soient μ mesure conique maximale, et θ une localisation sur K. θ est majorée par une mesure de Radon maximale θ', à laquelle correspond une mesure conique μ'.

$$\forall f \in S , \qquad \mu(f) = \int f \, d\theta \leqslant \int f \, d\theta' = \mu'(f) .$$

Donc $\mu \prec \mu'$ et, μ étant maximale, $\mu = \mu'$. θ' est une localisation maximale de μ.

PROPOSITION 9. - Les points extrémaux d'un chapeau appartiennent aux génératrices extrémales de X.

En effet, soit x extrémal de K. Supposons que $x = x_1 + x_2$, avec x_1 et $x_2 \in X$. Il suffit de regarder dans le plan $Ox_1 x_2$, où il est immédiat que x_1 et x_2 doivent être proportionnels à x. x appartient donc à une génératrice extrémale.

THÉORÈME 3. - Si X est bien coiffé et si ses chapeaux sont métrisables, tout point est résultante d'une mesure conique maximale, localisable sur un chapeau en une mesure de Radon portée par l'ensemble des génératrices extrémales de X.

C'est une conséquence immédiate des propositions précédentes. Les chapeaux sont métrisables dans le cas particulier important où il existe une infinité dénombrable de formes linéaires séparant X.

On trouvera dans [2] un exemple de cône convexe saillant faiblement complet n'ayant pas de génératrice extrémale, donc, d'après la proposition 9, aucun chapeau autre que $\{0\}$. On en déduit que $(\underset{\sim}{R}^+)^I$ n'est pas bien coiffé, si I a au moins la puissance du continu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, chap. 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[2] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 445-447.

[3] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, n° 12, 15 p.