Claude Mayer

Points invariants dans les espaces localement convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. n° 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A9_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 10, 11 p. 29 avril 1965

POINTS INVARIANTS DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par Claude MAYER

On établit quelques théorèmes des points invariants pour des applications continues d'un espace localement convexe (e. l. c.) dans lui-même, en commençant par le théorème classique de Brouwer pour les espaces de dimension finie.

La méthode employée consiste à généraliser directement le théorème de Brouwer au cas d'espaces localement convexes quelconques.

D'autres résultats sont fournis par la méthode de Leray-Schauder (se reporter à l'exposé n° 11 de BREZIS).

En dernière partie, on résumera quelques notions sur les fonctions multivoques et les points fixes essentiels.

I. Le théorème de Brouwer.

Soit f une application continue de la boule fermée unité B de R^n dans elle-même. Il existe $x \in B$ tel que $f(x) = x$.

I.1 Un énoncé équivalent.

La plupart des démonstrations de ce théorème sont fondées sur la topologie algébrique [1]. Pour l'établir ici de manière analytique, nous allons démontrer son équivalence avec la proposition suivante :

PROPOSITION. - Il n'existe pas de rétraction continûment différentiable de B sur sa frontière S .

[On rappelle qu'une rétraction d'un espace topologique B sur un sous-espace S est une application continue de B dans S , qui se réduit sur S à l'application identique.]

I.1.1 Supposons démontré le théorème de Brouwer ; alors il ne peut exister de rétraction, même simplement continue, de B sur S ; car si f était une telle rétraction, la fonction $g(x) = - f(x)$ serait une fonction continue de B dans B , n'admettant pas de point fixe.

I.1.2 Inversement, supposons admis qu'il n'existe pas de rétraction de classe C^1 de B sur S.

(a) Montrons d'abord que toute fonction de classe C^1 de B dans B admet un point fixe ([9], exercices III_2 p. 161 et V_{10} p. 171).

Supposons qu'une telle fonction f, vérifie $f(x) \neq x$, pour tout $x \in B$; nous allons construire une rétraction de classe C^1 de B sur S, dont l'existence est absurde.

Pour cela, appelons $g(x)$ le point où la demi-droite d'origine $f(x)$, et passant par x, coupe la sphère S. Comme $f(x) \neq x$, $g(x)$ est univoquement déterminée ; de plus, si $x \in S$, il est immédiat que $g(x) = x$. Il reste donc à démontrer que g est de classe C^1.

$$\forall x \in B , \qquad g(x) = \lambda(x).x + (1 - \lambda(x)).f(x) ,$$

où $\lambda(x)$ est une application de B dans $[1, +\infty[$. Etablissons la différentiabilité de $\lambda(x)$.

$$(\lambda.x + (1 - \lambda) f(x) , \lambda.x + (1 - \lambda) f(x)) = 1 ,$$

d'où :

$$\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(x , f(x)) + (1 - \lambda)^2 \|f(x)\|^2 = 1 .$$

Il s'en suit que $\lambda(x)$ est solution d'une équation du second degré dont les coefficients sont différentiables en même temps que $\|x\|^2$, $\|f(x)\|^2$, et $(x , f(x))$. Un argument géométrique montre ensuite que $\lambda(x)$ est l'unique solution $\geqslant 1$ de cette équation ; $\lambda(x)$ est donc une fonction continûment différentiable ; et il en est de même de $g(x) = \lambda(x).x + (1 - \lambda(x)) f(x)$.

(b) Il reste à montrer que l'existence d'un point invariant pour toute application de classe C^1 de B dans B implique celle d'un point invariant pour toute fonction continue (théorème de Brouwer).

Soit f une fonction continue de B dans B. On peut approcher uniformément f par une suite (f_n) d'applications de classe C^1. Pour tout n, il existe $x_n \in B$ tel que $f_n(x_n) = x_n$; soit x une valeur d'adhérence de la suite (x_n) ; par convergence et continuité uniformes, on vérifie aisément que $f(x) = x$.

I.2 <u>Démonstration analytique</u> ([9], exercices III_2 p. 161 et V_{10} p. 171).

D'après I.1, il suffit pour établir le théorème de Brouwer de démontrer qu'il n'existe pas de rétraction continûment différentiable de B sur S.

Si f était une telle rétraction, on aurait, en posant

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \quad \text{et} \quad \alpha = x^1\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n :$$

$$\int_S \alpha = \int_B d\alpha = \mathrm{vol}(B) \neq 0 .$$

Mais d'autre part $f^* d\alpha = 0$, car la forme $d\alpha$ de degré n est nulle sur la surface S de dimension $n-1$; et comme f est l'identité sur S, on peut écrire :

$$\int_S \alpha = \int_S f^*\alpha = \int_B df^*\alpha = \int_B f^* d\alpha = 0 ,$$

une contradiction.

I.3 Généralisation.

On dit qu'un espace topologique A a la propriété du point fixe si toute fonction continue de A dans A admet un point fixe. Il est immédiat que la propriété du point fixe est invariante par homéomorphie.

THÉORÈME général de Brouwer. - Tout convexe compact K de dimension finie a la propriété du point fixe.

Démonstration. - Soit R^n l'espace affine engendré par K. Montrons que K est homéomorphe à la boule unité B. Pour cela, on se ramène, par translation et homothétie, à supposer que K est contenu dans B, et $0 \in \mathring{K}$. Soit $j(x)$ la jauge de K ; c'est une fonction continue ; et $j(x) = 0 \iff x = 0$. L'homéomorphisme de B sur K est alors la fonction suivante (projection radiale) :

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{|x|}{j(x)} \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \ ; \ \text{et} \quad \varphi(0) = 0 .$$

I.4 Théorème de Abian-Brown.

Une conséquence immédiate du théorème de Brouwer est qu'il ne peut exister de rétraction de la boule B sur sa frontière (cf. I.1.1). De ce résultat nous pouvons tirer plusieurs théorèmes plus ou moins particuliers ([5] ; cf. aussi l'exposé de BREZIS). Nous allons en citer un.

THÉORÈME de Abian-Brown. - Soit f une application continue de B dans R^n, telle que $f(S) \subset B$. Alors il existe un point fixe dans B.

Démonstration. - Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout x ; soit $g(x)$ le point le plus éloigné de $f(x)$ où la demi-droite, d'origine $f(x)$ et passant par x, coupe la sphère S ; on a

$$g(x) = \lambda(x).x + (1 - \lambda(x))\ f(x) ,$$

où $\lambda(x)$ est une application de B dans $[1 , \infty[$. On vérifie alors, comme en I.1.2, que $\lambda(x)$ (et donc $g(x)$) est une application continue. De plus, il est immédiat que g est l'identité sur S .

Remarque. - On généralise immédiatement ce théorème au cas d'un convexe compact et de sa frontière.

II. Extensions au cas d'un e. l. c. séparé.

II.1 Introduction.

Le théorème de Brouwer a subi de nombreuses généralisations.

Tout d'abord, SCHAUDER a montré que dans un espace normé, tout convexe compact a la propriété du point fixe. Puis TIKHONOV a étendu ce résultat au cas d'un e. l. c. séparé.

On en déduit immédiatement le résultat suivant : dans un e. l. c. séparé, soient C un convexe complet, et K un compact contenu dans C ; toute application continue de C dans K admet un point fixe. [L'enveloppe convexe fermée de K est alors un convexe compact stable par f .]

BONSALL [2] a montré par des procédés assez complexes le résultat suivant : Dans un espace normé, soient C un convexe fermé, et K un compact contenu dans C . Toute application continue de C dans K admet un point fixe.

Mais on peut déduire directement du théorème de Brouwer un théorème généralisant tous ces résultats, à l'aide d'un lemme important dû à NAGUMO.

II.2 Le théorème général de Hukuhara [6].

II.2.1 LEMME de Nagumo. - Soient E un espace localement convexe séparé, et K un précompact contenu dans un convexe C de E . $\forall$ U voisinage de 0 dans E , il existe un sous-espace L de dimension finie de E , et une application continue T_U de K dans $L \cap C$, telle que $T_U(x) - x \in U$ pour tout $x \in K$.

Remarque. - Ce lemme est un théorème d'approximation ; il signifie qu'on peut approcher uniformément la fonction identique d'un précompact par des fonctions à valeurs dans des espaces de dimension finie.

<u>Démonstration</u>. - Supposons U ouvert convexe symétrique ; soit $p(x)$ la jauge de U : c'est une semi-norme continue. D'autre part, $\exists\, x_1 , \dots , x_n \in U$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Pour tout i , posons $\mu_i(x) = \sup(0 , 1 - p(x - x_i))$. Cette fonction est continue sur K , à valeurs dans $[0 , 1]$; de plus

$$x \in x_i + U \iff \mu_i(x) > 0$$
$$x \notin x_i + U \iff \mu_i(x) = 0 .$$

Posons alors

$$T_U(x) = \frac{\sum x_i \cdot \mu_i(x)}{\sum \mu_i(x)} .$$

Le dénominateur ne s'annulant pas sur K , $T_U(x)$ est continue ; c'est le barycentre des x_i affectés des coefficients $\mu_i(x)$. Donc, si L est l'espace de dimension finie engendré par les x_i , T_U est à valeurs dans $L \cap C$; enfin

$$T_U(x) - x = \frac{\sum (x_i - x)\, \mu_i(x)}{\sum \mu_i(x)} ,$$

donc

$$p(T_U(x) - x)) \leqslant \frac{\sum p(x_i - x)\, \mu_i(x)}{\sum \mu_i(x)} < 1 ,$$

ce qui prouve que $T_U(x) - x \in U$.

II.2.2 En corollaire du lemme de Nagumo, nous allons démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME de Hukuhara. - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c. séparé,</u> C <u>un convexe quelconque de</u> E , K <u>un compact contenu dans</u> C . <u>Alors toute application continue de</u> C <u>dans</u> K <u>admet un point invariant</u>.

<u>Remarque sur la généralité du théorème</u>.

(a) On ne peut pas supposer seulement C connexe ; on a un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ en prenant $C = K =$ un cercle.

(b) Il est nécessaire de supposer K compact ; on a un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ en prenant $C = K = \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>. - Soient U un voisinage symétrique de 0 dans E , et T_U la fonction introduite dans la démonstration du théorème de Nagumo. On pose

$$f_U = T_U \circ f .$$

f_U est une fonction continue de C dans un compact K' de dimension finie contenu dans C ; soit K'' l'enveloppe convexe de K' ; K'' est compact puisque K' est de dimension finie ; de plus $K'' \subset C$, donc $f_U(K'') \subset K''$; d'après le théorème de Brouwer, il existe un point x_U tel que $f_U(x_U) = x_U$, soit

$$T_U(f(x_U)) = x_U \ ;$$

mais $T_U(f(x_U)) - f(x_U) \in U$, donc

$$f(x_U) - x_U \in U \ .$$

Faisons maintenant parcourir à U l'ensemble des voisinages symétriques de l'origine. Les $f(x_U)$, restant dans K , ont une valeur d'adhérence x ; la continuité de f en x montre alors que pour tout voisinage V de l'origine, $f(x) - x \in V$; donc x est un point fixe pour f .

III. Théorèmes plus particuliers.

Nous allons démontrer quelques corollaires évidents du théorème de Hukuhara.

Définition. - Une application f (non nécessairement linéaire) d'un espace vectoriel topologique dans un autre est dite compacte si elle est continue et si elle transforme tout borné en un ensemble relativement compact.

III.1 THÉORÈME. - *Soient E un e. l. c. séparé, et f une application compacte de E dans lui-même. Si $f(E)$ est borné, f admet un point fixe.*

Démonstration. - Il suffit de considérer la restriction de f à l'enveloppe convexe fermée de $f(E)$, et d'appliquer le théorème de Hukuhara.

III.2 Si une application f d'un e. l. c. séparé dans lui-même est compacte, et s'il existe un convexe borné stable par f , il existe un point invariant. En particulier :

THÉORÈME [2]. - *Si E est normé, f compacte de E dans E , telle que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} < 1 \ ,$$

f admet un point fixe.

Démonstration. - En effet, l'hypothèse entraîne l'existence d'une boule B de centre 0 telle que $f(B) \subset B$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'Hukuhara.

Notons que dans l'énoncé du théorème on ne peut pas remplacer le signe $<$ par $\leq$, même si $E = R$ (prendre pour f une translation).

III.3 Voici encore une application du théorème de Hukuhara à une application faiblement continue.

THÉORÈME. - Soient E un espace semi-réflexif, C un convexe fermé de E ; alors toute application faiblement continue de C dans lui-même, dont l'image est bornée, admet un point fixe.

[Par faiblement continue, on entend une application continue pour les topologies faibles sur les espaces de départ et d'arrivée.]

Démonstration. - C est faiblement fermé (car les convexes fermés sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité entre E et E'). Comme E est semi-réflexif, tout ensemble borné et fermé pour la topologie faible est faiblement compact. Donc $\overline{f(C)}$ est un compact contenu dans C , et on peut appliquer le théorème de Hukuhara.

IV. Applications positives dans les espaces vectoriels ordonnés.

Les théorèmes intéressants pour ces applications ne sont pas des théorèmes de points fixes, mais des théorèmes de vecteurs propres. (Par vecteur propre, nous entendrons ici un $x \in E$ tel qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f(x) = \lambda x$.)

Il existe cependant quelques "vrais" théorèmes de points fixes pour les applications positives (cf. [8]), mais ils sont beaucoup plus particuliers.

L'exposé de BREZIS donnant à ce sujet, par la méthode de Leray-Schauder et un théorème de prolongement de Dugundji, un énoncé très général, nous allons nous contenter ici d'en démontrer un cas particulier par une méthode directe.

Les résultats qui suivent généralisent ceux de SCHAEFFER [10]. Pour des applications à l'Analyse, on pourra aussi consulter cet article.

IV.1 Théorème général.

IV.1.1 Définitions. - Soit E un espace vectoriel ; nous désignerons par "cône positif" un cône convexe pointé saillant, considéré comme l'ensemble des éléments positifs de E pour une structure d'ordre compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Une application de E dans E qui conserve C est dite positive ; et si E est topologique, une application continue de E dans E est strictement positive si elle est positive, et si dans C , la relation $\lim f(x) = 0$ entraîne $\lim x = 0$.

IV.1.2 THÉORÈME. - Soient E un e. l. c. séparé, et C un cône positif de E, admettant une base.

Soit A un ouvert de E, ayant 0 pour point intérieur, et tel que $A \cap C$ soit convexe borné ; on note $A^* =$ frontière(A).

Soit f une application continue de $A^* \cap C$ dans un compact $K \subset C$ disjoint de l'origine ; alors f admet un vecteur propre.

Démonstration. - Soit B une base de C. $A \cap C$ étant borné, la projection radiale de B sur $A^* \cap C$ est un homéomorphisme qui préserve les directions. Ceci permet de se ramener au cas où f est définie sur B.

Soit $\ell(x) = 1$ une équation de B ; posons

$$T(x) = \frac{f(x)}{\ell(f(x))} ;$$

le dénominateur ne s'annule pas, puisque $0 \notin K$; T est donc une application continue de B dans un compact de B ; d'après le théorème de Hukuhara, $\exists\ x$ tel que $T(x) = x$; alors $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda = \ell(f(x)) > 0$.

IV.. COROLLAIRE. - Soit E un e. l. c. séparé, ordonné par un cône positif C sur lequel on fait les hypothèses suivantes :

(a) C admet une base ;

(b) Il existe dans E une semi-norme continue qui redéfinit la topologie de C. Pour cette semi-norme p, la sphère de centre 0 et de rayon r sera notée S_r.

Soit f une application compacte et strictement positive de E dans E ; alors $\forall\ r > 0$, il existe un vecteur propre dans $S_r \cap C$.

Remarque. - Ce théorème est valable pour un opérateur linéaire compact positif.

Démonstration. - L'ensemble $A = \{x : p(x) < r\}$ répond aux conditions du théorème IV.1.1. De plus, f, étant strictement positive et compacte, envoie

$$S_r \cap C = A^* \cap C$$

dans un compact disjoint de l'origine.

V. Fonctions multivoques ; applications aux points fixes essentiels.

V.1 Généralités.

V.1.1 Définitions. - Soient E un espace topologique, F un espace uniforme ; pour tout entourage W de F, et pour tout $A \subset F$, nous désignerons par $W(A)$ le voisinage d'ordre W de A .

On appelle fonction multivoque de E dans F une application Γ de E dans $\mathcal{P}_0(F) = \mathcal{P}(F) - \{\emptyset\}$.

Γ est dite semi-continue supérieurement en x si, $\forall W$ entourage de F , $\exists V$ voisinage de x tel que $y \in V \implies \Gamma(y) \subset W(\Gamma(x))$.

Γ est semi-continue inférieurement en x si les mêmes hypothèses entraînent $\Gamma(x) \subset W(\Gamma(y))$; une fonction à la fois s. c. s. et s. c. i. est continue pour la topologie de E et la topologie classique sur $\mathcal{P}_0(F)$.

Nous aurons à considérer le cas où F est métrique compact pour une distance d , et où la fonction Γ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{K}_0(F)$ des fermés non vides de F ; cet espace sera muni de la distance de Hausdorff :

$$\rho(A , B) = \inf\{\varepsilon : A \subset W_\varepsilon(B) \text{ et } B \subset W_\varepsilon(A)\} .$$

Les définitions se particularisent aisément à ce cas, en utilisant la métrique ρ .

V.1.2 THÉORÈME. - Dans le cas où F est métrique compact, l'ensemble des points de continuité d'une fonction s. c. s. à valeurs dans $\mathcal{K}_0(F)$ est un G_δ résiduel de E .

Nous admettrons ce théorème (facile) qui découle d'une théorie différente [cf. M. K. FORT, Jr [5], p. 239].

V.2 Théorèmes de points fixes.

V.2.1 THÉORÈME (KY FAN). - Soient E un e. l. c. séparé, K un convexe compact de E ; soit Γ une application multivoque s. c. s. de K dans K , telle que pour tout $x \in K$, $\Gamma(x)$ soit convexe compact. Alors $\exists x \in K$ tel que $x \in \Gamma(x)$.

Nous admettrons aussi ce théorème, dont la démonstration fait appel à des méthodes très différentes de celles employées jusqu'ici ([1]) ; nous le retenons afin d'en citer un corollaire très simple concernant une application univoque.

V.2.2 COROLLAIRE. - Soient E un e. l. c. séparé, K un convexe compact de E ; soit f une application affine continue de K dans E , telle que $f(K) \supset K$; alors f admet un point fixe.

Démonstration. - Posons $\Gamma = f^{-1}$; on vérifie que Γ , définie sur $f(K)$, obéit aux conditions du théorème V.2.1 ; il existe donc un $x \in K$ tel que $x \in f^{-1}(x)$; soit $f(x) = x$.

V.3 Points fixes essentiels ([6]).

V.3.1 Définition. - Soit (F, d) un espace métrique compact ayant la propriété du point fixe. On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des applications continues de F dans F, muni de la métrique σ de la convergence uniforme.

Un point fixe p de $f \in \mathcal{C}$ est dit essentiel si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\sigma(f, g) \leqslant \eta \implies g$ a un point fixe dans $W_\varepsilon(p)$.

V.3.2 Dans ce numéro, on considère les fonctions dont tous les points fixes sont essentiels. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME (FORT). - L'ensemble des fonctions dont tous les points fixes sont essentiels est un G_δ résiduel de $\mathcal{C}$ (donc partout dense dans $\mathcal{C}$).

Le théorème résultera des deux lemmes suivants.

LEMME 1. - Soit $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}_0(F)$ l'application qui, à $f \in \mathcal{C}$, fait correspondre l'ensemble de ses points fixes ; alors Γ est semi-continue supérieurement.

LEMME 2. - Soit $f \in \mathcal{C}$; les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) tous les points fixes de f sont essentiels ;

(b) f est un point de continuité de Γ.

La démonstration de ces deux lemmes est évidente à partir des définitions ; nous allons simplement établir la relation (a) $\implies$ (b) dans le lemme 2.

Si tout point fixe de f est essentiel, soit $\varepsilon > 0$; $\forall x \in \Gamma(f)$, $\exists V_x$ voisinage de f tel que $g \in V_x \implies g$ a un point fixe dans $W_{\varepsilon/2}(x)$. Comme $\Gamma(x)$ est compact, $\exists x_1, \dots, x_n \in \Gamma(f)$ tels que tout $x \in \Gamma(f)$ soit à distance $< \frac{\varepsilon}{2}$ de l'un des x_i. Soit V l'intersection des V_{x_i}. V est un voisinage de f ; et si $g \in V$, $\Gamma(f) \subset W_\varepsilon(\Gamma(g))$, ce qui montre que Γ est s. c. i. en f, donc continue.

Le théorème résulte alors du n° V.1.2, comme $\mathcal{C}$ est métrique complet, le résiduel trouvé est partout dense dans $\mathcal{C}$.

V.3.3 THÉORÈME. - Si $f \in \mathcal{C}$ a un point fixe unique, il est essentiel.

Démonstration. - Comme $\Gamma(f)$ est réduit à un point, la semi-continuité supérieure de Γ est équivalente à la continuité en f.

V.3.4 Voici une condition suffisante pour qu'un point $p \in F$ soit un point fixe essentiel :

THÉORÈME. - Si $f \in \mathcal{C}$, un point $p \in F$ qui admet un système fondamental de voisinages V tels que $\overline{V}$ ait la propriété du point fixe, et $f(\overline{V}) \subset V$ est un point fixe essentiel.

Démonstration. - p est évidemment un point fixe. Soit V un voisinage de p tel que $\overline{V}$ ait la propriété du point fixe, que $f(\overline{V}) \subset V$, et $\complement V \neq \emptyset$; et soit $\varepsilon = d(f(\overline{V}) , \complement V)$; $\varepsilon > 0$.

Si $g \in \mathcal{C}$ est tel que $\sigma(g , f) < \varepsilon$, alors $g(\overline{V}) \subset V$; donc g a un point fixe dans V, ce qui montre que p est essentiel

Exemple. - Soit $f(z) = z^2$ dans le disque unité de $\underset{\sim}{C}$; f admet deux points fixes 0 et 1 ; le théorème précédent prouve que 0 est essentiel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE (Claude). - Espaces topologiques et fonctions multivoques. - Paris, Dunod, 1959 (Collection universitaire de Mathématiques, 3).

[2] BONSALL (F. F.). - Lectures on some fixed points theorems in functional analysis. - Bombay, Tata Institute, 1962 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 26).

[3] BROWDER (Felix F.). - On a generalization of the Schauder fixed point theorem, Duke math. J., t. 26, 1959, p. 291-303.

[4] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators. Vol. 1. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, 7).

[5] FORT (M. K., Jr). - A unified theory of semi-continuity, Duke math. J., t. 16, 1949, p. 237-246.

[6] FORT (M. K., Jr). - Essential and non essential fixed points, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 315-322.

[7] HUKUHARA (Masuo). - Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel, Japan. J. of Math., t. 20, 1950, p. 1-4.

[8] KRASNOSEL'SKIJ (M. A.). - Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators, Soviet Math. Doklady, t. 1, 1960, p. 1285-1288.

[9] LELONG-FERRAND (Jacqueline). - Dérivées et différentielles, 4e édition suivie d'exercices. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1964 (Certificat de Mathématiques 2).

[10] SCHAEFFER (H. H.). - On nonlinear positive operators, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 847-860.