

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

CATHERINE DOLÉANS

## Mesures invariantes

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 4 (1964-1965), exp. n° 8, p. 1-20

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1964-1965\\_\\_4\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A7_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire CHOQUET,  
Initiation à l'Analyse,  
4e année, 1964/65, n° 8, 20 p.

4 et 11 mars 1965

MESURES INVARIANTES

par Catherine DOLEANS

Introduction. - Soient  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable, et  $\theta$  une application affine de l'ensemble des mesures finies sur  $(X, \mathcal{B})$  dans lui-même; on s'intéresse à l'existence de mesures invariantes par  $\theta$ . On expose ici les travaux de KAKUTANI, HAJIAN et ITO, [1], [2], [3]. Dans ces travaux, on étudie le cas où  $\theta$  est définie par une application  $T$  de  $X$  dans  $X$ , puis le cas où  $\theta$  est définie par un noyau markovien, et on cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une mesure  $\nu$  invariante par  $\theta$  et telle qu'une mesure  $m$  donnée soit absolument continue par rapport à  $\nu$  <sup>(1)</sup>.

A. Mesures invariantes par une application.

1. Position du problème.

Soient  $(X, \mathcal{B}, m)$  un espace mesuré, où la mesure  $m$  est supposée  $\sigma$ -finie et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$ .

On dit qu'une application  $T$  de  $X$  dans  $X$  conserve la mesurabilité, si  $B \in \mathcal{B}$  entraîne  $TB \in \mathcal{B}$  et  $T^{-1}B \in \mathcal{B}$ . Une telle application  $T$  est dite de plus non singulière par rapport à la mesure  $m$ , si  $B \in \mathcal{B}$  et  $m(B) = 0$  entraîne

$$m(TB) = m(T^{-1}B) = 0.$$

On dit qu'une application  $T$  de  $X$  dans  $X$  conserve la mesure  $m$  (ou que  $m$  est invariante par l'application  $T$ ), si on a, pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , les égalités

$$m(TB) = m(T^{-1}B) = m(B).$$

PROBLÈME. - Soient  $(X, \mathcal{B}, m)$  un espace mesuré, où  $m$  est une mesure  $\sigma$ -finie, et  $T$  une application bijective, conservant la mesurabilité et non singulière par rapport à  $m$  de  $X$  dans  $X$ . A quelles conditions sur  $m$  et  $T$ , existe-t-il sur  $(X, \mathcal{B})$  une mesure  $\mu$  finie, équivalente à  $m$ , et invariante par  $T$ ?

---

<sup>(1)</sup> Deux mesures  $m$  et  $\nu$  sur  $(X, \mathcal{B})$  sont dites équivalentes si elles ont les mêmes ensembles de mesure nulle. Si  $m$  et  $\nu$  sont deux fonctions d'ensembles définies sur  $\mathcal{B}$ ,  $m$  est absolument continue par rapport à  $\nu$  si  $\nu(B) = 0 \implies m(B) = 0$ ; elle est uniformément absolument continue par rapport à  $\nu$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que  $\nu(B) < \delta \implies m(B) < \varepsilon$ .

Dans toute la suite de cet exposé, on supposera l'application  $T$  bijective, conservant la mesurabilité, et non singulière par rapport à  $m$ .

## 2. Définitions.

2.1 Un sous-ensemble mesurable  $W$  de  $X$  est dit faiblement itinérant pour  $T$ , s'il existe une suite infinie  $\{n_i\}_{i=0,1,\dots}$  d'entiers positifs, négatifs ou nuls, telle que les ensembles  $T^{n_i} W$  soient deux à deux disjoints.

2.2 Un sous-ensemble mesurable  $S$  de  $X$  est dit fortement récurrent pour  $T$ , s'il existe un entier  $k$  positif tel que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait

$$m(T^n S \cap \bigcup_{i=0}^k T^i S) > 0.$$

2.3 Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit les mesures  $\rho_n$  sur  $(X, \mathcal{B})$  par

$$\rho_n(B) = m(T^n B)$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit les mesures  $\sigma_n$  sur  $(X, \mathcal{B})$  par

$$\sigma_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k B).$$

Les mesures  $\rho_n$ ,  $\sigma_n$  sont toutes équivalentes à  $m$ , puisque  $T$  est non singulière.

## 3. Conditions sur $T$ et $m$ .

3.1  $W$  faiblement itinérant  $\implies m(W) = 0$ .

3.2 Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$ , tel que :  
 $m(W) \geq \varepsilon \implies$  il existe au plus  $k$  images distinctes de  $W$  par des puissances de  $T$ .

3.3  $m(S) > 0 \implies S$  fortement récurrent.

3.4 Pour toute suite infinie d'entiers  $(n_i)_{i=0,1,\dots}$  positifs, négatifs ou nuls, et pour toute fonction mesurable  $f(x)$ , strictement positive presque partout, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) = \infty \text{ presque partout.}$$

3.5 Pour toute partition  $(A_k, k = 1, 2, \dots)$  de  $X$  en sous-ensembles mesurables, pour toute suite infinie  $(n_i)_{i=0,1,\dots}$  d'entiers positifs, négatifs ou nuls et pour presque tout  $x \in X$ , il existe un entier  $k = k(x)$  tel que  $T^{n_i} x \in A_k$  pour une infinité d'entiers  $i$ .

3.6 La famille de mesures  $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est équi-uniformément absolument continue par rapport à  $m$  (c'est-à-dire  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que

$$m(B) < \delta \implies \rho_n(B) < \varepsilon$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ).

4. THÉORÈME. - Si  $(X, \mathfrak{B}, m)$  est un espace mesuré, si la mesure  $m$  est  $\sigma$ -finie, et si  $T$  est une application bijective, conservant la mesurabilité, et non singulière de  $X$  dans  $X$ , chacune des conditions (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure  $\mu$  finie, équivalente à  $m$ , et invariante par  $T$ .

Les conditions (3.1) sont invariantes par le remplacement de la mesure  $m$  par une mesure équivalente. On pourra donc, dans la suite, supposer la mesure  $m$  finie de masse 1.

#### 5. Lemmes préliminaires.

LEMME 5.1. - Soit  $\lambda$  une fonction d'ensembles à valeur réelle positive, monotone, sous-additive, définie sur  $\mathfrak{B}$ . Si pour tout  $A \in \mathfrak{B}$ ,  $\lambda(A) = 0 \implies m(A) = 0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0, \exists \delta$  tel que

$$\lambda(A) < \delta \implies m(A) < \varepsilon.$$

Si ce résultat était faux, il existerait  $\varepsilon > 0$  et une suite  $\{B_n; n = 1, 2, \dots\}$  d'ensembles mesurables tels que

$$\lambda(B_n) < \frac{1}{2^n} \text{ et } m(B_n) \geq \varepsilon \quad n = 1, 2, \dots$$

Pour tout  $n = 1, 2, \dots$ , soit  $p_n$  un entier positif supérieur à  $n$  et tel que

$$m(\Delta_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (\text{où } \Delta_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \bigcup_{k=n}^{p_n} B_k).$$

Ceci est possible puisque, par hypothèse, la mesure  $m$  est finie.

Posons

$$B^{**} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \text{ et } B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{p_n} B_k.$$

On a

$$B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \Delta_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = B^{**} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

donc

$$m(B^*) \geq m(B^{**}) - \sum_1^{\infty} m(\Delta_n) > \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\lambda(B^*) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{p_n} B_k\right) \leq \sum_{k=n}^{p_n} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour tout } n,$$

donc  $\lambda(B^*) = 0$ , ce qui contredit les hypothèses.

LEMME 5.2. - Soient  $(X, \mathfrak{B})$  un ensemble mesurable, et  $\lambda$  une fonction d'ensembles définie sur  $\mathfrak{B}$  à valeurs réelles positives, suradditive. Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante d'ensembles mesurables, alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que  $\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) < \varepsilon$  pour tout  $n > n_0$ .

$\lambda$  est suradditive, donc monotone, et  $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(B_n)$  existe. On a  $\lambda(B_n) \geq \beta$  pour tout  $n$ ; soient  $\varepsilon > 0$  donné et  $n_0$  tel que  $\lambda(B_{n_0}) < \beta + \varepsilon$ . On a alors

$$\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) + \lambda(B_n) \leq \lambda(B_{n_0}) < \beta + \varepsilon \quad \text{pour } n > n_0$$

donc

$$\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) < \lambda(B_{n_0}) - \lambda(B_n) < \varepsilon.$$

LEMME 5.3. - Soient  $(X, \mathfrak{B}, m)$  et  $T$  comme dans les hypothèses du théorème 4, et  $A$  un ensemble mesurable de mesure strictement positive tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(T^n A) = 0,$$

il existe alors un ensemble mesurable  $S \subset A$ , tel que  $S$  soit non fortement récurrent, et tel que  $m(S) > 0$ .

Soit  $m(A) = \alpha > 0$ , et soit  $0 < \varepsilon < \alpha$ ; posons

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{k2^k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Pour tout  $k = 1, 2, \dots$ , on choisit un entier  $n_k$  pour lequel on a

$$m(T^{n_k - i} A) < \varepsilon_k \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

(Ceci est possible car les mesures  $\rho_n$  sont équivalentes à  $m$ .) Posons alors

$$A' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{k-1} T^{k-i} A \cap A .$$

On a 
$$m(A') \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \epsilon_k = \epsilon$$

et si l'on pose  $S = A \setminus A'$ , on a  $m(S) > 0$  et

$$T^{n-k-i} S \cap S \subset T^{n-k-i} A \cap (A \setminus A') = \emptyset \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ et } k = 1, 2, \dots$$

$S$  n'est donc pas fortement récurrent.

LEMME 5.4. - Pour tout ensemble mesurable  $B$  et pour tout ensemble fini  $\{p_i, i = 0, 1, \dots, r-1\}$  d'entiers, positifs, négatifs ou nuls, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) = r\bar{\sigma}(B)$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) = r\underline{\sigma}(B)$$

(où  $\bar{\sigma}(B) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(B)$  et  $\underline{\sigma}(B) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(B)$ ).

En effet, on a

$$|\sigma_n(T^p B) - \sigma_n(B)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{p+n-1} m(T^k B) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k B) \right| \leq \frac{2|p|}{n} m(X)$$

pour tout entier  $p \in \mathbb{Z}$ , et tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc

$$\left| \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) - r\underline{\sigma}(B) \right| \leq \sum_{i=0}^{r-1} |\sigma_n(T^{p_i} B) - \sigma_n(B)| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \frac{2|p_i|}{n} m(X) \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ , d'où les relations énoncées dans le lemme.

LEMME 5.5. - Soit  $A$  un ensemble mesurable avec  $m(A) = \alpha > 0$ . Supposons que

$$\underline{\sigma}(A) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k A) < \delta ,$$

et soit  $k$  un entier positif tel que  $\frac{k(k+1)}{2} \delta < \alpha$ . Alors il existe un ensemble mesurable  $A' \subset A$ , avec  $m(A') < \frac{k(k+1)}{2} \delta$ , et tel que  $W = A \setminus A'$  ait  $k+1$  images disjointes par des puissances de  $T$ .

Soit  $p_0 = 0$  ; choisissons un entier positif  $p_1$  , tel que  $m(T^{p_1} A) < \delta$  . Ceci est possible d'après l'hypothèse sur  $A$  . Soit  $1 \leq i \leq k$  , et supposons les entiers  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{i-1}$  déjà choisis. On prend un entier positif  $p_i$  tel que  $p_i > p_{i-1}$  et que

$$m\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A\right) < i\delta .$$

Ceci est possible, car d'après le lemme 5.4, on a

$$\underline{m}\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{-p_j} A\right) = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{-p_j} A\right) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_n(T^{-p_j} A) = \underline{m}(A) < i\delta .$$

De cette façon, on obtient  $k + 1$  entiers  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_k$  tels que

$$m\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A\right) < i\delta \quad \text{pour } i = 1, \dots, k .$$

Posons

$$A' = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A$$

on a

$$m(A') \leq \sum_{i=1}^k m\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A\right) < \sum_{i=1}^k i\delta = \frac{k(k+1)\delta}{2} .$$

Si l'on pose  $B = A \setminus A'$  , les  $T^{p_i} B$  ,  $i = 0, \dots, k$  sont disjoints car

$$T^{p_i - p_j} B \cap B \subset T^{p_i - p_j} A \cap (A \setminus A') = \emptyset .$$

## 6. Démonstration du théorème.

Nous allons **montrer les implications** suivantes :

$$(3.1) \implies (3.3) \implies (3.4) \implies (3.5) \implies (3.1) .$$

(3.3)  $\implies$  (3.2)  $\implies$  (3.6)  $\implies$  l'existence d'une mesure finie  $\mu$  invariante par  $T$  , équivalente à  $m \implies$  (3.1) .

a. L'existence de la mesure  $\mu \implies$  (3.1) . - Ceci est évident puisque la mesure  $\mu$  est finie, et que tous les ensembles  $T^n W$  ont même  $\mu$ -mesure.

b. (3.1)  $\implies$  (3.3) . - En effet, si un ensemble  $S$  de mesure  $m(S) > 0$  est non fortement récurrent, pour tout entier  $n_k$  , il existe un entier  $n_{k+1}$

tel que

$$m(T^{n_{k+1}} S \cap T^{n_k} S) = 0.$$

Soit  $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k-1} T^{n_k - n_j} S \cap S$ . On a  $m(N) = 0$ , et  $W = S \setminus N$  est faiblement itinérant.

c. (3.3)  $\implies$  (3.4). - Si (3.4) est "non vraie", il existe une fonction mesurable  $f(x) > 0$  presque partout, une suite d'entiers  $\{n_i, i = 1, 2, \dots\}$  et un ensemble mesurable  $A$  de mesure  $m(A) > 0$  tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \text{ pour tout } x \in A.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire ;  $m$  est finie, et  $f(x)$  est presque partout strictement positive, il existe donc un nombre  $\delta_1 > 0$  et un ensemble mesurable  $C_1$  de mesure  $m(C_1) < \varepsilon$ , tel que  $f(x) \geq \delta_1 > 0$  pour tout  $x \in X \setminus C_1$ , et on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{X \setminus C_1}(T^{n_i} x) \leq \frac{1}{\delta_1} \sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \text{ pour tout } x \in A,$$

(où  $\chi_{X \setminus C_1}$  est la fonction caractéristique de  $X \setminus C_1$ ) ; c'est-à-dire, pour tout  $x \in A$ , il existe un entier  $h = h(x)$  tel que

$$T^{n_i} x \in C_1 \text{ pour tout } i \geq h(x).$$

Soit  $A(k) = \{x \mid x \in A, h(x) \leq k\}$  pour  $k = 1, 2, \dots$  et soit  $\eta$  un nombre  $> 0$  tel que  $0 < \eta < \varepsilon = m(A)$  ; il existe un indice  $k_1$  tel que

$$A_1 = A(k_1) \subset A, \quad m(A \setminus A_1) < \eta/2 \text{ et } T^{n_i} x \in C_1 \text{ pour } x \in A_1 \text{ et } i \geq k_1.$$

Par suite, on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(T^{n_i} A_1) \leq m(C_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout  $p = 2, 3, \dots$ , on refait la même construction en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\frac{\varepsilon}{p}$ , on obtient ainsi, pour tout  $p = 2, 3, \dots$ , un nombre  $\delta_p > 0$  et un ensemble mesurable  $C_p$  avec  $m(C_p) < \frac{\varepsilon}{p}$  et  $f(x) \geq \delta_p$  sur tout  $x \in X \setminus C_p$ .

On peut alors construire  $A_p \subset A_{p-1}$  tel que

$$m(A_{p-1} \setminus A_p) < \frac{\eta}{2^p}$$



et

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} m(T^n A_p) \leq m(C_p) \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Soit  $A' = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p$ , on a

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} m(T^n A') = 0,$$

et

$$m(A') = m\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} A_p\right) \geq a - \eta > 0.$$

En vertu du lemme (5.3), (3.3) est non vraie.

d. (3.4)  $\implies$  (3.5). - Si (3.5) est non vraie, il existe une décomposition  $\{A_k, k = 1, 2, \dots\}$  de l'espace  $X$ , une suite d'entiers  $\{n_i, i = 1, 2, \dots\}$  et un ensemble  $A$  de mesure  $m(A) > 0$ , tels que, pour tout  $x \in A$  et pour tout  $k = 1, 2, \dots$ , on ait  $T^{n_i} x \in A_k$  pour un nombre fini au plus de valeurs de  $i$ . Soit  $m(A) = a > 0$ , pour tout  $\varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon < a$ , et tout  $k = 1, 2, \dots$ , il existe  $B_k \subset A$ , et un entier  $M_k$  tel que  $m(B_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ , et  $T^{n_i} x \in A_k$  pour au plus  $M_k$  valeurs de  $i$ , si  $x \in A \setminus B_k$ .

Soit  $A' = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ . On a  $m(A') \geq a - \varepsilon > 0$ , soit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k} \chi_{A_k}(x).$$

$f(x)$  est mesurable, on a  $f(x) > 0$  presque partout, mais pour la suite  $(n_i)$ ,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \quad \forall x \in A',$$

ce qui contredit (3.4).

e. (3.5)  $\implies$  (3.1). - En effet, si  $W$  est un ensemble faiblement itinérant pour la suite  $(n_i)_{i=1,2,\dots}$ , posons

$$A_1 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{n_i} W \quad \text{et} \quad A_k = T^{n_{k-1}} W \quad k = 2, 3, \dots.$$

$\{A_k, k = 1, 2, \dots\}$  est une partition de  $X$  en ensembles mesurables et, pour la suite  $(n_i)$  et pour tout  $x \in W$ , on a  $T^{n_i} x \in A_k$  pour  $i = k + 1$  seulement, ce qui, d'après (3.5), entraîne  $m(W) = 0$ .

f. (3.3)  $\implies$  (3.2). - Si (3.2) n'est pas vérifiée, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout entier  $r$ , il existe un ensemble mesurable  $B_r$  de mesure  $m(B_r) > \varepsilon$ , et ayant  $r$  images  $T^{p_i} B_r$ ,  $i = 0, \dots, r-1$  deux à deux disjointes. On a alors, d'après le lemme (5.4),

$$r\overline{\sigma}(B_r) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B_r) = \overline{\sigma}\left(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^{p_i} B_r\right) \leq m(X) = 1.$$

On obtient donc une suite  $B_r$ , telle que  $m(B_r) \geq \varepsilon$ , et  $r\overline{\sigma}(B_r) \rightarrow 0$ . D'après le lemme (5.1), il existe donc  $A \in \mathcal{B}$  tel que  $\overline{\sigma}(A) = 0$  et  $m(A) > 0$ , mais alors on a

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m(T^n A) \leq \overline{\sigma}(A) = 0,$$

ce qui contredit (3.3).

g. (3.2)  $\implies$  (3.6). - Si (3.6) est non vraie, il existe  $\varepsilon > 0$  et une suite  $(A_i, p_i)$  d'ensembles mesurables  $A_i$  et d'entiers  $p_i$  tels que

$$m(A_i) < \frac{1}{2^i} \quad \text{et} \quad m(T^{p_i} A_i) \geq 2\varepsilon.$$

Soit  $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$ , on a  $B_k \searrow$  et  $m(B_k) \searrow 0$ , mais en vertu du lemme (5.5), la condition (3.2) entraîne que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$m(B) \geq \varepsilon \implies \underline{\sigma}(B) \geq \delta.$$

De plus le lemme (5.2) entraîne l'existence d'un  $k_0$ , tel que  $\underline{\sigma}(B_{k_0} \setminus B_k) < \delta$  pour  $k > k_0$ . Choisissons alors  $k_1 > k_0$  tel que  $m(T^{p_{k_0}} B_{k_1}) < \varepsilon$  (ceci est possible, car  $m(B_k) \searrow 0$ ). Si l'on pose

$$B^* = T^{p_{k_0}}(B_{k_0} \setminus B_{k_1}),$$

on a  $m(B^*) > \varepsilon$  et  $\underline{\sigma}(B^*) < \delta$  ce qui contredit le choix même de  $\delta$ .

h. (3.6)  $\implies$  l'existence d'une mesure finie  $\mu$  invariante par  $T$ , équivalente à  $m$ . - Si (3.6) est vérifiée, posons

$$\mu(B) = \lim \rho_n(B) \quad \text{limite au sens de Banach } (^2)$$

(<sup>2</sup>) Si  $E = \{x = \{x_n\}, \text{ suite bornée}\}$ , il existe une application  $x \rightarrow F(x)$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  ( $F(x)$  est dite limite au sens de Banach de la suite  $(x_n)$ ) telle que:

1°  $F$  est linéaire;

2°  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ;

3° Si  $y = (y_n)$ , avec  $y_n = x_{n+k}$ , on a  $F(x) = F(y)$ .

$\mu$  est invariante par  $T$ , et finement additive sur  $\mathcal{B}$ . D'autre part, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tel que  $m(B) < \delta \implies \rho_n(B) < \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , donc  $\mu(B) < \varepsilon$ . Par suite  $\mu$  est  $\sigma$ -additive, et absolument continue par rapport à  $m$ . De plus,  $\mu(B) < \delta$  entraîne  $m(T^n B) < \delta$  pour un  $n$  au moins, d'où

$$m(B) = \rho_{-n}(T^n B) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que  $\mu$  est équivalente à  $m$ .

## B. Mesures invariantes par un noyau.

### 1. Terminologie.

Soit  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable.

1.1 Définition. - On appelle noyau markovien sur  $(X, \mathcal{B})$  une application qui, à tout couple  $(x, B, x \in X, B \in \mathcal{B})$ , fait correspondre un nombre  $P(x, B)$  tel que :

- (i) Pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , l'application  $x \mapsto P(x, B)$  est mesurable,
- (ii) Pour tout  $x \in X$ , l'application  $B \mapsto P(x, B)$  est une probabilité sur  $(X, \mathcal{B})$ .

1.2 Noyau non-singulier par rapport à une mesure  $m$ . - Soit  $m$  une mesure de probabilité sur  $(X, \mathcal{B})$ , le noyau  $P(x, B)$  est dit non singulier par rapport à  $m$  si

$$m(B) = 0 \implies P(x, B) = 0 \text{ } m\text{-presque partout.}$$

### 1.3 Opérateurs définis par un noyau.

(a) Soit  $\mathcal{M}_b(B)$  l'ensemble des mesures bornées sur  $(X, \mathcal{B})$ ; le noyau markovien définit une application de  $\mathcal{M}_b(B)$  dans  $\mathcal{M}_b(B)$  qui, à la mesure  $\mu$ , fait correspondre la mesure  $\mu P$ , définie par

$$\mu P(B) = \int_X P(x, B) d\mu(x).$$

La mesure  $\mu P^n$  est alors donnée par

$$\mu P^n(B) = \int_X P^n(x, B) d\mu(x)$$

où  $P^n(x, B) = \int_X P^{n-1}(y, B) P(x, dy)$ .

(b) Si le noyau est non-singulier par rapport à  $m$ , l'opérateur, défini en 1.3 (a), laisse invariant l'espace des mesures bornées absolument continues par rapport à  $m$ .

On peut donc définir l'opérateur  $P^*$  de  $L^1(m)$  dans  $L^1(m)$  par

$P^*f = \frac{d}{dm} ((f \cdot m)P)$  ( $\frac{d}{dm}$  désigne la dérivée de Radon-Nykodim par rapport à  $m$ ).  
 $P^*$  est un opérateur linéaire, positif, de norme 1.

(c) Si le noyau est non-singulier par rapport à  $m$ , il définit une application de  $L^\infty(m)$  dans  $L^\infty(m)$  par

$$g \mapsto Pg \quad (\text{où } Pg(x) = \int_X P(x, dy) f(y)).$$

L'opérateur  $P$  est linéaire, positif, de norme 1, et  $P$  et  $P^*$  sont adjoints l'un de l'autre.

## 2. Position du problème.

Soient  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesuré,  $P(x, B)$  un noyau markovien sur  $(X, \mathcal{B})$  et  $m$  une mesure de probabilité sur  $(X, \mathcal{B})$ . On cherche s'il existe une mesure  $\nu$  invariante par le noyau  $P(x, B)$  et telle que  $m$  soit absolument continue par rapport à  $\nu$ .

Remarque. - Si  $T$  est une application mesurable de  $X$  dans  $X$ , elle définit un noyau markovien  $P(x, B) = \chi_{T^{-1}B}(x)$ . Une mesure  $\nu$  est invariante par le noyau  $P$  si, et seulement si, elle est invariante par  $T$ ; le noyau  $P(x, B)$  est non-singulier par rapport à une mesure  $m$  si, et seulement si,  $m(B) = 0 \implies m(T^{-1}B) = 0$ .

## 3. Restriction du problème.

3.1 Soit  $(X, \mathcal{B})$ ,  $m$ ,  $P(x, B)$  donnés comme au § 2. Considérons les mesures  $mP^n$  et la mesure de probabilité

$$m^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} mP^n \quad (\text{où } P^0 = \text{identité}).$$

Le noyau  $P(x, B)$  est non-singulier pour cette mesure  $m^*$ ; en effet, on a

$$\int_X P(x, B) dm^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} mP^{n+1}(B) \leq m^*(B).$$

La mesure  $m$  est absolument continue par rapport à la mesure  $m^*$ , de plus, si  $\nu$  est une mesure invariante par  $P$ , et telle que  $m$  soit absolument continue par rapport à  $\nu$ , on a

$$\nu(B) = 0 \implies \int_X P^n(x, B) d\nu(x) = 0 \quad \forall n,$$

donc

$$P^n(x, B) = 0 \quad \nu\text{-presque sûrement, donc } m\text{-presque sûrement}$$

et par suite  $m^*(B) = 0$ . La mesure  $m^*$  est absolument continue par rapport à la mesure  $\nu$ .

On pourra donc toujours, sans restreindre la généralité du problème, supposer le noyau non-singulier par rapport à la mesure  $m$  donnée.

3.2 On peut alors se restreindre à chercher l'existence d'une mesure  $\nu_0$  invariante par  $P$  et équivalente à  $m$ .

En effet, s'il existe une mesure  $\nu$  invariante par  $P$ , et telle que  $m$  soit absolument continue par rapport à  $\nu$ , soient

$$C = \{B, B \in \mathcal{B}, m(B) = 0, \nu(B) > 0\} \quad \text{et} \quad \alpha = \sup_{B \in C} \nu(B),$$

$C$  est stable par réunion dénombrable, il existe donc  $B_0 \in C$ , tel que  $\alpha = \nu(B_0)$ .

On a  $\nu(B_0) = \int_X P(x, B_0) d\nu(x) > 0$  et  $m(B_0) = 0$ ; comme le noyau  $P(x, B)$  est non-singulier, ceci entraîne que

$$B = \{x \mid P(x, B_0) > 0\} \in C,$$

et par suite  $B \subset B_0$   $\nu$ -presque sûrement.

Les relations  $\nu(B_0) = \nu P(B_0)$ ,  $0 \leq P(x, B_0) \leq 1$ , et  $P(x, B_0) = 0$   $\nu$ -presque sûrement hors de  $B_0$  entraînent

$$P(x, B_0) = \chi_{B_0}(x) \quad \nu\text{-presque sûrement.}$$

Posons alors

$$\nu_0(B) = \nu(B \setminus B_0) \quad \forall B \in \mathcal{B};$$

$\nu_0$  est une mesure équivalente à  $m$  et elle est invariante par  $P$ .

En effet, on a

$$\nu_0 P(B) = \int_X P(x, B) d\nu_0(x) = \int_X [P(x, B) - P(x, B \cap B_0)] d\nu_0(x),$$

$$\text{car } \int_X \chi_{B_0}(x) d\nu_0(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \nu_0 P(B) &= \int_X P(x, B \setminus B_0) d\nu_0(x) \\ &= \int_X P(x, B \setminus B_0) d\nu(x) - \int_{B_0} P(x, B \setminus B_0) d\nu(x) = \nu(B \setminus B_0) = \nu_0(B) \end{aligned}$$

car on a  $P(x, B \setminus B_0) = 0$   $\nu$ -presque sûrement sur  $B_0$ .

Dans toute la suite, on considérera toujours un espace de probabilité  $(X, \mathfrak{B}, m)$  et un noyau markovien non-singulier par rapport à  $m$  ; et on étudiera l'existence d'une mesure de probabilité  $\nu$  invariante par  $P$  et équivalente à  $m$ .

4. THÉORÈME. - Si  $(X, \mathfrak{B}, m)$  est un espace de probabilité, et  $P(x, B)$  un noyau markovien sur  $(X, \mathfrak{B})$  non-singulier par rapport à  $m$ , on a les équivalences suivantes :

(4.1) Il existe une mesure  $\nu$  finie, invariante par  $P$ , et équivalente à  $m$ .

$\Updownarrow$

(4.2) Le théorème ergodique moyen est vrai pour  $P^*$  dans  $L^1(m)$ , et la mesure  $\nu$

$\Updownarrow$

définie par  $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^k$  est telle que  $m(B) > 0 \implies \nu(B) > 0$ .

(4.3)  $m(B) > 0 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^k(B) > 0$ .

5. Démonstration du théorème.

5.1 Rappels.

- Théorème ergodique moyen. - Soient  $\chi$  un Banach,  $T$  un opérateur linéaire continu sur  $\chi$ , et  $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ .

On dit que le théorème ergodique moyen est vrai pour  $\chi$ ,  $T$  si, pour tout  $x \in \chi$  les suites  $A_n x$  convergent fortement dans  $\chi$ .

Pour que le théorème ergodique moyen soit vrai pour  $T$  dans  $\chi$ , il suffit que :

(i) Les moyennes  $A_n$  soient uniformément bornées,  
(ii) Il existe un ensemble  $K \subset \chi$ , tel que le sous-espace vectoriel fermé engendré par  $K$  soit  $\chi$  et tel que, pour tout  $x \in K$ ,

(a)  $\frac{T^n x}{n} \rightarrow 0$ ,

(b) l'ensemble  $\{A_n x, n \in \mathbb{N}\}$  a la propriété de faible compacité pour les suites (c'est-à-dire : de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente faiblement).

- Pour qu'un sous-ensemble  $M$  de  $L^1(m)$  ait la propriété de faible compacité pour les suites, il faut et il suffit qu'il soit borné dans  $L^1(m)$  et que la  $\sigma$ -additivité des mesures  $\{f \cdot m, f \in M\}$  soit uniforme, c'est-à-dire : si  $E_n \searrow \emptyset$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dm(x) = 0$  uniformément pour  $f \in M$ .

5.2 Montrons que (4.2)  $\implies$  (4.1) . - Posons  $U_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^{*k}$ , on suppose donc que, pour tout  $f \in L^1(m)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^* f = U^* f \text{ dans } L^1(m) .$$

Cette fonction  $U^* f$  est alors  $P^*$  invariante, puisque

$$|P^* U^* f - U^* f| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} P^* U_n^* f - U_n^* f \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} P^{*n} f - f \right| \leq \frac{2\|f\|_1}{n} .$$

Considérons la mesure  $\nu = U^* l.m$ , on a

$$\nu(B) = \int_{\mathcal{X}} U^* l(x) dm(x) = \int_B \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^{*k} l(x) dm(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^k(B)$$

car la limite a lieu dans  $L^1(m)$  .

La mesure  $\nu$  est  $P$ -invariante, elle est absolument continue par rapport à  $m$  . Par hypothèse,  $m$  est supposée absolument continue par rapport à  $\nu$ , la mesure  $\nu$  est donc une mesure finie, équivalente à  $m$ , et invariante par  $P$  .

5.3 Montrons que (4.1)  $\implies$  (4.3) . - Si (4.3) est non vraie, il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que l'on ait

$$m(B) > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} mU_n(B) = 0 \quad (\text{où } U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k),$$

il existe donc une suite  $n_i$  telle que

$$mP^{n_i}(B) = \int_{\mathcal{X}} P^{n_i} l(x, B) dm(x) \rightarrow 0 .$$

Il existe donc une sous-suite  $(n_j)$  telle que les fonctions

$$P^{n_j} l(x, B) \rightarrow 0 \text{ m-presque partout.}$$

Si  $\nu$  est la mesure finie, invariante par  $P$ , et équivalente à  $m$ , qui est supposée exister, les fonctions  $P^{n_j} l(x, B) \rightarrow 0$   $\nu$ -presque partout, et on a

$$\nu(B) = \int_{\mathcal{X}} P^{n_j} l(x, B) d\nu(x) \rightarrow 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $m(B) > 0$  .

5.4 Montrons que (4.3)  $\implies$  (4.2) . - Considérons le sous-ensemble  $K = \{ \chi_B, B \in \mathcal{B} \}$  de  $L^1(m)$ , le sous-espace vectoriel fermé engendré par  $K$  est  $L^1(m)$ . De plus, les opérateurs  $U_n^*$  sont uniformément bornés, l'ensemble

$\{U_n^* \chi_B, n \in \mathbb{N}\}$  est borné dans  $L^1(m)$ , et on a

$$\left\| \frac{P^{*n} \chi_B}{n} \right\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Pour montrer que le théorème ergodique moyen est vrai dans  $L^1(m)$ , il suffit donc de prouver que la  $\sigma$ -additivité des mesures  $U_n^* \chi_B \cdot m$  est uniforme pour  $n \in \mathbb{N}$ , et ceci pour tout  $B$  fixé dans  $\mathcal{B}$ . Et si  $\nu$  est défini comme en (4.2), la relation (4.3) assure la relation :

$$m(B) > 0 \implies \nu(B) > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_E U_n^* \chi_B(x) dm(x) &= \int_X \chi_E(x) U_n^* \chi_B(x) dm(x) = \int_X \chi_B(x) U^n \chi_E(x) dm(x) \\ &\leq \int_X U^n \chi_E(x) dm(x) = mU^n(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^k(E). \end{aligned}$$

Pour montrer la  $\sigma$ -additivité uniforme des mesures  $U_n^* \chi_B$ , il suffit donc de montrer que la famille des mesures  $\{mP^n, n \in \mathbb{N}\}$  est équi-uniformément absolument continue par rapport à  $m$  (c'est-à-dire que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $m(B) < \delta \implies mP^n(B) < \epsilon, \forall n$ ).

Pour cela, on montrera d'abord que  $m$  est uniformément absolument continue par rapport à la fonction d'ensemble  $mU = \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n$ , et on déduira l'équi-uniforme absolue continuité de la famille  $mP^n$ . On utilisera le lemme suivant, qui sera démontré plus loin.

LEMME 5.4.1. - Si  $f$  est une fonction de  $L_+^\infty(m)$ , telle que  $Uf = \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n f$  soit invariante par  $P$ , il existe une suite  $g_N$  de fonctions de  $L_+^\infty(m)$  telle que :

- (i)  $0 \leq g_N \leq f$ ,  $g_N(x) \nearrow f(x)$   $m$ -presque sûrement.
- (ii) Pour tout  $N$ , on a

$$\overline{U}g_N(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n g_N(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n f(x) = Uf(x) \quad \text{m-presque sûrement.}$$

LEMME 5.4.2. - (4.3)  $\implies m$  est uniformément absolument continue par rapport à la fonction d'ensemble  $mU$ .

Soit  $B \in \mathcal{B}$ ; la fonction  $g = \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n \chi_B$  vérifie  $Pg \leq g$   $m$ -presque sûrement, et on a l'égalité presque sûre.

En effet, s'il existe  $\epsilon > 0$ , et  $E \in \mathcal{B}$ , de mesure  $m(E) > 0$ , pour lesquels on a  $g - Pg > \epsilon$  sur  $E$ , on obtient



$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} mP^k(E) &\leq \sum_0^{n-1} \int_X (g - Pg) P^{*k} 1(x) \, dm(x) = \int_X \sum_0^{n-1} P^k(g - Pg) \, dm \\ &= \int_X (g - P^n g) \, dm < 2\|g\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

(car  $Pg \leq g$  presque sûrement  $\implies P^n g \leq g$  presque sûrement), mais (4.3) entraîne alors  $m(E) = 0$ .

Pour tout  $B \in \mathfrak{B}$ , la fonction  $g = \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n \chi_B$  est  $P$ -invariante.

La fonction d'ensemble  $\bar{m} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} mU_n$  est sous-additive, la condition (4.3) est donc équivalente à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } m(A) > \frac{\varepsilon}{2} \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} mU_n(A) > \delta.$$

Soit  $B \in \mathfrak{B}$ , vérifiant  $m(B) > \varepsilon$ , d'après le lemme 5.4.1, il existe une suite  $g_N = f(x)$  presque sûrement, et vérifiant 5.4.1(ii). Posons pour tout  $N$

$$B_N = \{x \mid x \in B, \chi_B - g_N < \frac{1}{2}\};$$

il existe  $N$  tel que l'on ait

$$m(B_N) > \frac{1}{2} m(B) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n \chi_{B_N} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n g_N \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n \chi_B$$

et, d'après le lemme de Fatou,

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} mU_n(B_N) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(B).$$

Ce qui démontre le lemme 5.4.2.

LEMME 5.4.3. - Si  $m$  est uniformément absolument continue par rapport à  $mU$ , la famille  $\{mP^n, n \in \mathbb{N}\}$  est équi-uniformément absolument continue par rapport à  $m$ .

Si ce lemme était faux, il existerait  $\varepsilon > 0$  et une suite  $B_i$  d'ensembles tels que  $m(B_i) > 0$  et  $\sup_n mP^n(B_i) > 4\varepsilon$ ,  $\forall i$ . On peut toujours supposer la suite  $B_i$  décroissante (en supposant  $m(B_i) < \frac{1}{2^i}$  et en considérant les  $C_k = \bigcup_{i \geq k} B_i$ ).

Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$m(B) > \varepsilon \implies \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(B) > \delta.$$

Soit  $\delta_1 = \frac{\epsilon \delta}{1 - \epsilon}$ .

D'après le lemme 5.2 du chapitre sur les mesures invariantes par une application T, il existe  $i_0$  tel que

$$i > i_0 \implies \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(B_{i_0} \setminus B_i) < \delta_1.$$

De plus, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $mP^{n_0}(B_{i_0}) \geq 4\epsilon$ , et  $i_1 > i_0$  tel que

$$mP^{n_0}(B_{i_1}) < \epsilon.$$

Soit  $E = B_{i_0} \setminus B_{i_1}$ . On a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(E) < \delta_1 \text{ et } mP^{n_0}(E) > 3\epsilon.$$

Soit  $\hat{E} = \{x \mid P^{n_0}(x, E) > \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\}$ , nous allons montrer que l'on a

$$m(\hat{E}) > \epsilon \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(\hat{E}) < \delta,$$

ce qui contredira les hypothèses.

On a les inégalités

$$3\epsilon < mP^{n_0}(E) = \int_{\hat{E}} P^{n_0}(x, E) dm(x) + \int_{X \setminus \hat{E}} P^{n_0}(x, E) dm(x) \leq m(\hat{E}) + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} m(X \setminus \hat{E})$$

ce qui donne  $m(\hat{E}) > \epsilon$  (si  $\epsilon < \frac{1}{2}$ ), et

$$P^{n_0+1}(x, E) = \int_{\hat{E}} P^{n_0}(y, E) P(x, dy) + \int_{X \setminus \hat{E}} P^{n_0}(y, E) P(x, dy) > \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} P(x, \hat{E})$$

d'où, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^{k+1}(\hat{E}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int P(x, \hat{E}) mP^k(dx) < \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int P^{n_0+1}(x, E) mP^k(dx) \\ &= \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^{k+n_0+1}(E), \end{aligned}$$

ce qui, avec un argument analogue à celui du lemme 5.4 démontré pour les applications T, donne :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(\hat{E}) \leq \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \liminf_{n \rightarrow +\infty} mU_n(E) < \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \delta_1 = \delta.$$

6. Démonstration du lemme 5.4.1.

LEMME 6.1. - Soit  $f \in L^\infty(m)$ , et, pour tout entier  $N \geq 0$ , soit

$$A_N = \left\{ x ; \max_{1 \leq n \leq N} \sum_0^{n-1} P^k f(x) > 0 \right\},$$

il existe alors des fonctions  $h$  et  $\phi$  de  $L^\infty(m)$ , telles que

- (i)  $h^- \leq f^-$ ,
- (ii)  $\phi \geq 0$  et  $h = f + P\phi - \phi$ ,
- (iii)  $h^-(x) = 0$  presque partout sur  $A_N$ .

On définit par récurrence les fonctions  $h_i$  et  $\phi_i$ , pour tout entier  $i$ , par

$$\begin{aligned} h_0 &= f, \\ &\dots \\ h_i &= P h_{i-1}^+ - h_{i-1}, \\ \phi_i &= \sum_{k=0}^{i-1} h_k^+. \end{aligned}$$

Par récurrence, on vérifie que les fonctions  $h_k$  et  $\phi_k$  sont dans  $L^\infty(m)$ , satisfont à (i), (ii), et que  $h_k^+ \geq P^k f$   $m$ -presque partout pour tout  $k$ . On a donc

$$A_N \subset \bigcup_{k=0}^N \{h_k^+(x) > 0\} \text{ } m\text{-presque sûrement,}$$

mais  $h_k^+(x) > 0 \implies h_j^-(x) = 0, \forall j \geq k$ .

Il existe donc  $k \leq N$ , tel que  $h_k$  et  $\phi_k$  vérifient (i), (ii), (iii).

LEMME 6.2. - Soit  $f \in L^\infty(m)$ , et pour tout  $N$  entier positif, posons

$$A_N = \left\{ x \mid \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) > 0 \right\}.$$

On a alors

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_N} f(y) P^k(x, dy) \geq 0 \text{ } m\text{-presque partout.}$$

On considère les fonctions  $h$  et  $\phi$  construites dans le lemme 6.1.

Les ensembles  $A_N \cap \{h^- > 0\}$  et  $(X \setminus A_N) \cap \{f^+ > 0\}$  sont de  $m$  mesure nulle, ils sont donc de  $P^k(x, \cdot)$  mesure nulle,  $\forall k \geq 0$ , sauf pour  $x \in N$ , où  $N$  est

un ensemble de  $m$  mesure nulle. On a alors,  $\forall k \geq 0$  et  $\forall x \notin N$ ,

$$-\int_{X \setminus A_N} f^-(y) P^k(x, dy) \leq -\int_{X \setminus A_N} h^-(y) P^k(x, dy) \leq -\int_X h^-(y) P^k(x, dy) \leq \int_X h(y) P^k(x, dy) \\ = \int_X [f(y) + P_{\Phi}(y) - \phi(y)] P^k(x, dy).$$

Ce qui donne

$$\int_{A_N} f(y) P^k(x, dy) + \int_X (P_{\Phi}(y) - \phi(y)) P^k(x, dy) \geq 0, \quad \forall k \geq 0 \text{ et } \forall x \notin N.$$

Ce qui, compte tenu de ce que l'on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X (P_{\Phi}(y) - \phi(y)) P^k(x, dy) = 0 \text{ m-presque partout}$$

entraîne

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_N} f(y) P^k(x, dy) \geq 0 \text{ m-presque partout.}$$

LEMME 6.3. - Soit  $f \in L^{\infty}(m)$ ,  $f \geq 0$ , supposons qu'il existe une fonction  $p \in L^{\infty}(m)$  invariante par  $P$ , et telle que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) < p(x) \text{ m-presque sûrement,}$$

il existe alors une suite de fonctions  $f_N \in L^{\infty}_+(m)$ , telles que

- (i)  $0 \leq f_N \leq f$ ,  $f_N(x) \nearrow f(x)$  m-presque sûrement,
- (ii) Pour tout  $N$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f_N(x) \leq p(x) \text{ m-presque sûrement.}$$

On considère, pour tout entier  $N$  positif, les ensembles

$$A_N = \left\{ x \mid \min_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) < p(x) \right\}.$$

$A_N$  est une suite croissante d'ensembles qui tendent m-presque sûrement vers  $X$ .

Soient les fonctions

$$f_N = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_N \\ p(x) & \text{si } x \notin A_N \end{cases}$$

elles vérifient (i).

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(p - f_{N_j})(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_N} (p(y) - f(y)) P^k(x, dy) .$$

Soit

$$\hat{A}_N = \left\{ x \mid \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(p - f)(x) > 0 \right\} .$$

$A_N$  et  $\hat{A}_N$  diffèrent d'un ensemble de mesure nulle, donc de  $P^k(x, \cdot)$  mesure nulle, sauf pour  $x \in N$ , ensemble de mesure nulle, et en appliquant le lemme 6.2 à la fonction  $p - f$ , on obtient le lemme 6.3.

6.4 Démonstration du lemme 5.4.1. - Dans les conditions du lemme 5.4.1, considérons  $P_j(x) = \underline{U}f(x) + \frac{1}{j}$ , et associons à  $P_j$  une suite  $f_N^j$  comme dans le lemme 6.3.

Pour tout  $j$ , il existe un entier  $N_j$  tel que

$$m\{x \mid f(x) - f_{N_j}^j(x) > \frac{1}{j}\} < \frac{1}{2^j} ,$$

et si l'on pose

$$g_N^j = \inf_{j \geq N} f_{N_j}^j ,$$

les fonctions  $g_N^j$  satisfont aux conclusions du lemme 5.4.1.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAJIAN (A. B.) and KAKUTANI (S.). - Weakly wandering sets and invariant measures, Trans. Amer. Math. Soc., t. 110, 1964, p. 136-151.
- [2] HAJIAN (A. B.) and ITO (Y.). - Errata of "Hajian (A. B.) : Measurable transformations and Markov operators, Thesis Yale University, New Haven, 1957" (à paraître).
- [3] ITO (Yuji). - Invariant measures for Markov processes, Trans. Amer. math. Soc., t. 110, 1964, p. 152-184.