Catherine Doléans

Mesures invariantes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 8, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A7_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 8, 20 p. 4 et 11 mars 1965

MESURES INVARIANTES

par Catherine DOLÉANS

Introduction. - Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et θ une application affine de l'ensemble des mesures finies sur $(X, \mathcal{B})$ dans lui-même,; on s'intéresse à l'existence de mesures invariantes par θ. On expose ici les travaux de KAKUTANI, HAJIAN et ITO, [1], [2], [3]. Dans ces travaux, on étudie le cas où θ est définie par une application T de X dans X, puis le cas où θ est définie par un noyau markovien, et on cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une mesure ν invariante par θ et telle qu'une mesure m donnée soit absolument continue par rapport à ν ([1]).

A. Mesures invariantes par une application.

1. Position du problème.

Soient $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré, où la mesure m est supposée σ-finie et T une application de X dans X.

On dit qu'une application T de X dans X conserve la mesurabilité, si $B \in \mathcal{B}$ entraîne $TB \in \mathcal{B}$ et $T^{-1} B \in \mathcal{B}$. Une telle application T est dite de plus non singulière par rapport à la mesure m, si $B \in \mathcal{B}$ et $m(B) = 0$ entraîne

$$m(TB) = m(T^{-1} B) = 0 .$$

On dit qu'une application T de X dans X conserve la mesure m (ou que m est invariante par l'application T), si on a, pour tout $B \in \mathcal{B}$, les égalités

$$m(TB) = m(T^{-1} B) = m(B) .$$

PROBLÈME. - Soient $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré, où m est une mesure σ-finie, et T une application bijective, conservant la mesurabilité et non singulière par rapport à m de X dans X. A quelles conditions sur m et T, existe-t-il sur $(X, \mathcal{B})$ une mesure μ finie, équivalente à m, et invariante par T ?

([1]) Deux mesures m et ν sur $(X, \mathcal{B})$ sont dites équivalentes si elles ont les mêmes ensembles de mesure nulle. Si m et ν sont deux fonctions d'ensembles définies sur $\mathcal{B}$, m est absolument continue par rapport à ν si $\nu(B) = 0 \implies m(B) = 0$; elle est uniformément absolument continue par rapport à ν si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que $\nu(B) < \delta \implies m(B) < \varepsilon$.

Dans toute la suite de cet exposé, on supposera l'application T bijective, conservant la mesurabilité, et non singulière par rapport à m .

2. Définitions.

2.1 Un sous-ensemble mesurable W de X est dit faiblement itinérant pour T , s'il existe une suite infinie $\{n_i\}_{i=0,1,\dots}$ d'entiers positifs, négatifs ou nuls, telle que les ensembles $T^{n_i} W$ soient deux à deux disjoints.

2.2 Un sous-ensemble mesurable S de X est dit fortement récurrent pour T, s'il existe un entier k positif tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait

$$m(T^n S \cap \bigcup_{i=0}^{k} T^i S) > 0 .$$

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit les mesures ρ_n sur $(X , \mathcal{B})$ par

$$\rho_n(B) = m(T^n B)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les mesures σ_n sur $(X , \mathcal{B})$ par

$$\sigma_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k B) .$$

Les mesures ρ_n , σ_n sont toutes équivalentes à m , puisque T est non singulière.

3. Conditions sur T et m .

3.1 W faiblement itinérant $\Longrightarrow$ $m(W) = 0$.

3.2 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que : $m(W) \geqslant \varepsilon$ $\Longrightarrow$ il existe au plus k images distinctes de W par des puissances de T .

3.3 $m(S) > 0$ $\Longrightarrow$ S fortement récurrent.

3.4 Pour toute suite infinie d'entiers $(n_i)_{i=0,1,\dots}$ positifs, négatifs ou nuls, et pour toute fonction mesurable $f(x)$, strictement positive presque partout, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) = \infty \text{ presque partout.}$$

3.5 Pour toute partition $(A_k\ ,\ k = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$ de X en sous-ensembles mesurables, pour toute suite infinie $(n_i)_{i=0,1,\dots}$ d'entiers positifs, négatifs ou nuls et pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $k = k(x)$ tel que $T^{n_i} x \in A_k$ pour une infinité d'entiers i.

3.6 La famille de mesures $\{\rho_n\ ,\ n \in \underset{\sim}{Z}\}$ est équi-uniformément absolument continue par rapport à m (c'est-à-dire $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta > 0$ tel que

$$m(B) < \delta \implies \rho_n(B) < \varepsilon$$

pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$).

4. THÉORÈME. - <u>Si</u> $(X\ ,\ \mathcal{B}\ ,\ m)$ <u>est un espace mesuré, si la mesure</u> m <u>est</u> σ-<u>finie, et si</u> T <u>est une application bijective, conservant la mesurabilité, et non singulière de</u> X <u>dans</u> X , <u>chacune des conditions</u> (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) <u>est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure</u> μ <u>finie, équivalente à</u> m , <u>et invariante par</u> T .

Les conditions (3.i) sont invariantes par le remplacement de la mesure m par une mesure équivalente. On pourra donc, dans la suite, supposer la mesure m finie de masse 1 .

5. <u>Lemmes préliminaires.</u>

LEMME 5.1. - <u>Soit</u> λ <u>une fonction d'ensembles à valeur réelle positive, monotone, sous-additive, définie sur</u> $\mathcal{B}$. <u>Si pour tout</u> $A \in \mathcal{B}$, $\lambda(A) = 0 \implies m(A) = 0$, <u>alors pour tout</u> $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta$ <u>tel que</u>

$$\lambda(A) < \delta \implies m(A) < \varepsilon\ .$$

Si ce résultat était faux, il existerait $\varepsilon > 0$ et une suite $\{B_n\ ;\ n = 1\ ,\ 2, \dots\}$ d'ensembles mesurables tels que

$$\lambda(B_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad m(B_n) \geqslant \varepsilon \qquad n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ .$$

Pour tout $n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots$, soit p_n un entier positif supérieur à n et tel que

$$m(\Delta_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (\text{où } \Delta_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \bigcup_{k=n}^{p_n} B_k\ ).$$

Ceci est possible puisque, par hypothèse, la mesure m est finie.

Posons

$$B^{**} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \quad \text{et} \quad B^{*} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{p_n} B_k\ .$$

On a

$$B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \Delta_n) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = B^{**} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n .$$

donc

$$m(B^*) \geqslant m(B^{**}) - \sum_{1}^{\infty} m(\Delta_n) > \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\lambda(B^*) \leqslant \lambda(\bigcup_{k=n}^{p_n} B_k) \leqslant \sum_{k=n}^{p_n} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour tout } n ,$$

donc $\lambda(B^*) = 0$, ce qui contredit les hypothèses.

LEMME 5.2. - Soient $(X , \mathcal{B})$ un ensemble mesurable, et λ une fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{B}$ à valeurs réelles positives, suradditive. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$.

λ est suradditive, donc monotone, et $\beta = \lim_{n\to+\infty} \lambda(B_n)$ existe. On a $\lambda(B_n) \geqslant \beta$ pour tout n ; soient $\varepsilon > 0$ donné et n_0 tel que $\lambda(B_{n_0}) < \beta + \varepsilon$. On a alors

$$\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) + \lambda(B_n) \leqslant \lambda(B_{n_0}) < \beta + \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > n_0$$

donc

$$\lambda(B_{n_0} \setminus B_n) < \lambda(B_{n_0}) - \lambda(B_n) < \varepsilon .$$

LEMME 5.3. - Soient $(X , \mathcal{B} , m)$ et T comme dans les hypothèses du théorème 4, et A un ensemble mesurable de mesure strictement positive tel que

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} m(T^n A) = 0 ,$$

il existe alors un ensemble mesurable $S \subset A$, tel que S soit non fortement récurrent, et tel que $m(S) > 0$.

Soit $m(A) = \alpha > 0$, et soit $0 < \varepsilon < \alpha$; posons

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{k2^k} \quad \text{pour} \quad k = 1 , 2 , \dots .$$

Pour tout $k = 1 , 2 , \dots$, on choisit un entier n_k pour lequel on a

$$m(T^{n_k - i} A) < \varepsilon_k \quad \text{pour} \quad i = 0 , 1 , 2 , \dots , k - 1 .$$

(Ceci est possible car les mesures ρ_n sont équivalentes à m .) Posons alors

$$A' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{k-1} T^{n_k - i} A \cap A .$$

On a
$$m(A') \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon_k = \varepsilon$$

et si l'on pose $S = A \setminus A'$, on a $m(S) > 0$ et

$T^{n_k - i} S \cap S \subset T^{n_k - i} A \cap (A \setminus A') = \emptyset$ pour $i = 0 , 1 ,\ldots, k - 1$ et $k = 1 , 2 ,\ldots$

S n'est donc pas fortement récurrent.

LEMME 5.4. - *Pour tout ensemble mesurable* B *et pour tout ensemble fini* $\{p_i \ , \ i = 0 , 1 , \ldots , r - 1\}$ *d'entiers, positifs, négatifs ou nuls, on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) = r\overline{\sigma}(B)$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) = r\underline{\sigma}(B)$$

(où $\overline{\sigma}(B) = \limsup_{n\to+\infty} \sigma_n(B)$ *et* $\underline{\sigma}(B) = \liminf_{n\to+\infty} \sigma_n(B)$).

En effet, on a

$$|\sigma_n(T^p B) - \sigma_n(B)| = \left|\frac{1}{n} \sum_{k=p}^{p+n-1} m(T^k B) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k p)\right| \leqslant \frac{2|p|}{n} m(X)$$

pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, et tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\left|\sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B) - r\sigma_n(B)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} |\sigma_n(T^{p_i} B) - \sigma_n(B)| \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} \frac{2|p_i|}{n} m(X) \longrightarrow 0$$

quand $n \to +\infty$, d'où les relations énoncées dans le lemme.

LEMME 5.5. - *Soit* A *un ensemble mesurable avec* $m(A) = \alpha > 0$. *Supposons que*

$$\underline{\sigma}(A) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(T^k A) < \delta ,$$

et soit k *un entier positif tel que* $\frac{k(k+1)}{2} \delta < \alpha$. *Alors il existe un ensemble mesurable* $A' \subset A$, *avec* $m(A') < \frac{k(k+1)}{2} \delta$, *et tel que* $W = A \setminus A'$ *ait* $k + 1$ *images disjointes par des puissances de* T .

Soit $p_0 = 0$; choisissons un entier positif p_1 , tel que $m(T^{p_1} A) < \delta$. Ceci est possible d'après l'hypothèse sur A . Soit $1 \leqslant i \leqslant k$, et supposons les entiers $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{i-1}$ déjà choisis. On prend un entier positif p_i tel que $p_i > p_{i-1}$ et que

$$m(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A) < i\delta .$$

Ceci est possible, car d'après le lemme 5.4, on a

$$\underline{\sigma}(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{-p_j} A) = \varliminf_{n\to+\infty} \sigma_n(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{-p_j} A) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_n(T^{-p_j}(A)) = i\underline{\sigma}(A) < i\delta .$$

De cette façon, on obtient $k + 1$ entiers $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_k$ tels que

$$m(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A) < i\delta \qquad \text{pour } i = 1 , \dots , k .$$

Posons

$$A' = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j}(A)$$

on a

$$m(A') \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(\bigcup_{j=0}^{i-1} T^{p_i - p_j} A) < \sum_{i=1}^{k} i\delta = \frac{k(k+1)\delta}{2} .$$

Si l'on pose $B = A \setminus A'$, les $T^{p_i} B$, $i = 0 , \dots , k$ sont disjoints car

$$T^{p_i - p_j} B \cap B \subset T^{p_i - p_j} A \cap (A \setminus A') = \emptyset .$$

6. Démonstration du théorème.

Nous allons **montrer les** implications suivantes :

(3.1) $\Longrightarrow$ (3.3) $\Longrightarrow$ (3.4) $\Longrightarrow$ (3.5) $\Longrightarrow$ (3.1) .

(3.3) $\Longrightarrow$ (3.2) $\Longrightarrow$ (3.6) $\Longrightarrow$ l'existence d'une mesure finie μ invariante par T , équivalente à m $\Longrightarrow$ (3.1) .

a. L'existence de la mesure μ $\Longrightarrow$ (3.1) . - Ceci est évident puisque la mesure μ est finie, et que tous les ensembles $T^n W$ ont même μ-mesure.

b. (3.1) $\Longrightarrow$ (3.3) . - En effet, si un ensemble S de mesure $m(S) > 0$ est non fortement récurrent, pour tout entier n_k , il existe un entier n_{k+1}

tel que

$$m(T^{n_{k+1}} S \cap T^{n_k} S) = 0 .$$

Soit $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k-1} T^{n_k - n_j} S \cap S$. On a $m(N) = 0$, et $W = S \setminus N$ est faiblement itinérant.

c. (3.3) $\Longrightarrow$ (3.4) . - Si (3.4) est "non vraie", il existe une fonction mesurable $f(x) > 0$ presque partout, une suite d'entiers $\{n_i , i = 1 , 2 , \ldots\}$ et un ensemble mesurable A de mesure $m(A) > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \quad \text{pour tout} \quad x \in A .$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ; m est finie, et $f(x)$ est presque partout strictement positive, il existe donc un nombre $\delta_1 > 0$ et un ensemble mesurable C_1 de mesure $m(C_1) < \varepsilon$, tel que $f(x) \geqslant \delta_1 > 0$ pour tout $x \in X \setminus C_1$, et on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{X\setminus C_1}(T^{n_i} x) \leqslant \frac{1}{\delta_1} \sum_{i=1}^{\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \quad \text{pour tout} \quad x \in A ,$$

(où $\chi_{X\setminus C_1}$ est la fonction caractéristique de $X \setminus C_1$) ; c'est-à-dire, pour tout $x \in A$, il existe un entier $h = h(x)$ tel que

$$T^{n_i} x \in C_1 \quad \text{pour tout} \quad i \geqslant h(x) .$$

Soit $A(k) = \{x \mid x \in A , h(x) \leqslant k\}$ pour $k = 1 , 2 , \ldots$ et soit η un nombre > 0 tel que $0 < \eta < a = m(A)$; il existe un indice k_1 tel que

$$A_1 = A(k_1) \subset A , \quad m(A \setminus A_1) < \eta/2 \quad \text{et} \quad T^{n_i} x \in C_1 \quad \text{pour} \quad x \in A_1 \quad \text{et} \quad i \geqslant k_1 .$$

Par suite, on a

$$\lim_{i\to+\infty} m(T^{n_i} A_1) \leqslant m(C_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Pour tout $p = 2 , 3 , \ldots$, on refait la même construction en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{p}$, on obtient ainsi, pour tout $p = 2 , 3 , \ldots$, un nombre $\delta_p > 0$ et un ensemble mesurable C_p avec $m(C_p) < \frac{\varepsilon}{p}$ et $f(x) \geqslant \delta_p$ sur tout $x \in X \setminus C_p$

On peut alors construire $A_p \subset A_{p-1}$ tel que

$$m(A_{p-1} \setminus A_p) < \frac{\eta}{2^p}$$

et

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} m(T^n A_p) \leqslant m(C_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{p} .$$

Soit $A' = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p$, on a

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} m(T^n A') = 0 ,$$

et

$$m(A') = m(\bigcap_{p=1}^{\infty} A_p) \geqslant a - \eta > 0 .$$

En vertu du lemme (5.3), (3.3) est non vraie.

d. (3.4) $\Longrightarrow$ (3.5) . - Si (3.5) est non vraie, il existe une décomposition $\{A_k , k = 1 , 2 , \ldots\}$ de l'espace X , une suite d'entiers $\{n_i , i = 1 , 2 , \ldots\}$ et un ensemble A de mesure $m(A) > 0$, tels que, pour tout $x \in A$ et pour tout $k = 1 , 2 , \ldots$, on ait $T^{n_i} x \in A_k$ pour un nombre fini au plus de valeurs de i . Soit $m(A) = a > 0$, pour tout ε avec $0 < \varepsilon < a$, et tout $k = 1 , 2 , \ldots$, il existe $B_k \subset A$, et un entier M_k tel que $m(B_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, et $T^{n_i} x \in A_k$ pour au plus M_k valeurs de i , si $x \in A \setminus B_k$.

Soit $A' = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. On a $m(A') \geqslant a - \varepsilon > 0$, soit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k} \chi_{A_k}(x) .$$

$f(x)$ est mesurable, on a $f(x) > 0$ presque partout, mais pour la suite (n_i) ,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(T^{n_i} x) < +\infty \qquad \forall x \in A' ,$$

ce qui contredit (3.4) .

e. (3.5) $\Longrightarrow$ (3.1) . - En effet, si W est un ensemble faiblement itinérant pour la suite $(n_i)_{i=1,2,\ldots}$, posons

$$A_1 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{n_i} W \quad \text{et} \quad A_k = T^{n_{k-1}} W \qquad k = 2 , 3 , \ldots .$$

$\{A_k , k = 1 , 2 , \ldots\}$ est une partition de X en ensembles mesurables et, pour la suite (n_i) et pour tout $x \in W$, on a $T^{n_i} x \in A_k$ pour $i = k + 1$ seulement, ce qui, d'après (3.5) , entraîne $m(W) = 0$.

f. (3.3) $\Longrightarrow$ (3.2) . - Si (3.2) n'est pas vérifiée, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier r, il existe un ensemble mesurable B_r de mesure $m(B_r) > \varepsilon$, et ayant r images $T^{p_i} B_r$, $i = 0, \ldots, r-1$ deux à deux disjointes. On a alors, d'après le lemme (5.4),

$$r\overline{\sigma}(B_r) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n(T^{p_i} B_r) = \overline{\sigma}(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^{p_i} B_r) \leqslant m(X) = 1 .$$

On obtient donc une suite B_r, telle que $m(B_r) \geqslant \varepsilon$, et $\overline{\sigma}(B_r) \to 0$. D'après le lemme (5.1), il existe donc $A \in \mathcal{B}$ tel que $\overline{\sigma}(A) = 0$ et $m(A) > 0$, mais alors on a

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} m(T^n A) \leqslant \overline{\sigma}(A) = 0 ,$$

ce qui contredit (3.3) .

g. (3.2) $\Longrightarrow$ (3.6) . - Si (3.6) est non vraie, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (A_i, p_i) d'ensembles mesurables A_i et d'entiers p_i tels que

$$m(A_i) < \frac{1}{2^i} \qquad \text{et} \qquad m(T^{p_i} A_i) \geqslant 2\varepsilon .$$

Soit $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$, on a $B_k \searrow$ et $m(B_k) \searrow 0$, mais en vertu du lemme (5.5), la condition (3.2) entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$m(B) \geqslant \varepsilon \Longrightarrow \underline{\sigma}(B) \geqslant \delta .$$

De plus le lemme (5.2) entraîne l'existence d'un k_0, tel que $\underline{\sigma}(B_{k_0} \setminus B_k) < \delta$ pour $k > k_0$. Choisissons alors $k_1 > k_0$ tel que $m(T^{p_{k_0}} B_{k_1}) < \varepsilon$ (ceci est possible, car $m(B_k) \searrow 0$). Si l'on pose

$$B^* = T^{p_{k_0}}(B_{k_0} \setminus B_{k_1}) ,$$

on a $m(B^*) > \varepsilon$ et $\underline{\sigma}(B^*) < \delta$ ce qui contredit le choix même de δ.

h. (3.6) $\Longrightarrow$ l'existence d'une mesure finie μ invariante par T, équivalente à m. - Si (3.6) est vérifiée, posons

$$\mu(B) = \lim \rho_n(B) \qquad \text{limite au sens de Banach } (^2)$$

(^{2}) Si $E = \{x = \{x_n\}$, suite bornée$\}$, il existe une application $x \to F(x)$ de E dans R ($F(x)$ est dite limite au sens de Banach de la suite (x_n)) telle que :
1° F est linéaire ;
2° $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} x_n$;
3° Si $y = (y_n)$, avec $y_n = x_{n+k}$, on a $F(x) = F(y)$.

μ est invariante par T , et finiment additive sur $\mathcal{B}$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $m(B) < \delta \Longrightarrow \rho_n(B) < \varepsilon$ pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$, donc $\mu(B) < \varepsilon$. Par suite μ est σ-additive, et absolument continue par rapport à m . De plus, $\mu(B) < \delta$ entraîne $m(T^n B) < \delta$ pour un n au moins, d'où

$$m(B) = \rho_{-n}(T^n B) < \varepsilon .$$

Ce qui montre que μ est équivalente à m .

B. Mesures invariantes par un noyau.

1. Terminologie.

Soit $(X , \mathcal{B})$ un espace mesurable.

1.1 Définition. - On appelle noyau markovien sur $(X , \mathcal{B})$ une application qui, à tout couple $(x , B , x \in X , B \in \mathcal{B})$, fait correspondre un nombre $P(x , B)$ tel que :

(i) Pour tout $B \in \mathcal{B}$, l'application $x \longrightarrow P(x , B)$ est mesurable,

(ii) Pour tout $x \in X$, l'application $B \longrightarrow P(x , B)$ est une probabilité sur $(X , \mathcal{B})$.

1.2 Noyau non-singulier par rapport à une mesure m . - Soit m une mesure de probabilité sur $(X , \mathcal{B})$, le noyau $P(x , B)$ est dit non singulier par rapport à m si

$$m(B) = 0 \Longrightarrow P(x , B) \quad \text{m-presque partout.}$$

1.3 Opérateurs définis par un noyau.

(a) Soit $\mathfrak{M}_b(B)$ l'ensemble des mesures bornées sur $(X , \mathcal{B})$; le noyau markovien définit une application de $\mathfrak{M}_b(B)$ dans $\mathfrak{M}_b(B)$ qui, à la mesure μ , fait correspondre la mesure μP , définie par

$$\mu P(B) = \int_X P(x , B)\, d\mu(x) .$$

La mesure μP^n est alors donnée par

$$\mu P^n(B) = \int_X P^n(x , dy)\, d\mu(x)$$

où $P^n(x , B) = \int_X P^{n-1}(y , B)\, P(x , dy)$.

(b) Si le noyau est non-singulier par rapport à m , l'opérateur, défini en 1.3 (a), laisse invariant l'espace des mesures bornées absolument continues par rapport à m .

On peut donc définir l'opérateur P^* de $L^1(m)$ dans $L^1(m)$ par

$P^*f = \frac{d}{dm}((f.m)P)$ ($\frac{d}{dm}$ désigne la dérivée de Radon-Nykodim par rapport à m).
P^* est un opérateur linéaire, positif, de norme 1 .

(c) Si le noyau est non-singulier par rapport à m , il définit une application de $L^\infty(m)$ dans $L^\infty(m)$ par

$$g \to Pg \qquad (\text{où } Pg(x) = \int_X P(x\,,\,dy)\ f(y)\ ).$$

L'opérateur P est linéaire, positif, de norme 1 , et P et P^* sont adjoints l'un de l'autre.

2. Position du problème.

Soient $(X\,,\,\mathcal{B})$ un espace mesuré, $P(x\,,\,B)$ un noyau markovien sur $(X\,,\,\mathcal{B})$ et m une mesure de probabilité sur $(X\,,\,\mathcal{B})$. On cherche s'il existe une mesure ν invariante par le noyau $P(x\,,\,B)$ et telle que m soit absolument continue par rapport à ν .

Remarque. - Si T est une application mesurable de X dans X , elle définit un noyau markovien $P(x\,,\,B) = \chi_{T^{-1}B}(x)$. Une mesure ν est invariante par le noyau P si, et seulement si, elle est invariante par T ; le noyau $P(x\,,\,B)$ est non-singulier par rapport à une mesure m si, et seulement si, $m(B) = 0 \implies m(T^{-1}B) = 0$.

3. Restriction du problème.

3.1 Soit $(X\,,\,\mathcal{B})$, m , $P(x\,,\,B)$ donnés comme au § 2. Considérons les mesures mP^n et la mesure de probabilité

$$m^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, mP^n \qquad (\text{où } P^0 = \text{identité}).$$

Le noyau $P(x\,,\,B)$ est non-singulier pour cette mesure m^* ; en effet, on a

$$\int_X P(x\,,\,B)\ dm^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, mP^{n+1}(B) \leq m^*(B)\ .$$

La mesure m est absolument continue par rapport à la mesure m^* , de plus, si ν est une mesure invariante par P , et telle que m soit absolument continue par rapport à ν , on a

$$\nu(B) = 0 \implies \int_X P^n(x\,,\,B)\ d\nu(x) = 0 \qquad \forall\ n\ ,$$

donc

$$P^n(x\ ,\ B) = 0 \quad \nu\text{-presque sûrement, donc } m\text{-presque sûrement}$$

et par suite $m^*(B) = 0$. La mesure m^* est absolument continue par rapport à la mesure ν .

On pourra donc toujours, sans restreindre la généralité du problème, supposer le noyau non-singulier par rapport à la mesure m donnée.

3.2 On peut alors se restreindre à chercher l'existence d'une mesure ν_0 invariante par P et équivalente à m .

En effet, s'il existe une mesure ν invariante par P , et telle que m soit absolument continue par rapport à ν , soient

$$\mathcal{C} = \{B\ ,\ B \in \mathcal{B}\ ,\ m(B) = 0\ ,\ \nu(B) > 0\} \quad \text{et} \quad \alpha = \sup_{B \in \mathcal{C}} \nu(B)\ ,$$

$\mathcal{C}$ est stable par réunion dénombrable, il existe donc $B_0 \in \mathcal{C}$, tel que $\alpha = \nu(B_0)$.

On a $\nu(B_0) = \int_X P(x\ ,\ B_0)\ d\nu(x) > 0$ et $m(B_0) = 0$; comme le noyau $P(x\ ,\ B)$ est non-singulier, ceci entraîne que

$$B = \{x \mid P(x\ ,\ B_0) > 0\} \in \mathcal{C}\ ,$$

et par suite $B \subset B_0$ ν-presque sûrement.

Les relations $\nu(B_0) = \nu P(B_0)$, $0 \leq P(x\ ,\ B_0) \leq 1$, et $P(x\ ,\ B_0) = 0$ ν-presque sûrement hors de B_0 entraînent

$$P(x\ ,\ B_0) = \chi_{B_0}(x) \quad \nu\text{-presque sûrement.}$$

Posons alors

$$\nu_0(B) = \nu(B \setminus B_0) \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}\ ;$$

ν_0 est une mesure équivalente à m et elle est invariante par P .

En effet, on a

$$\nu_0\ P(B) = \int_X P(x\ ,\ B)\ d\nu_0(x) = \int_X [P(x\ ,\ B) - P(x\ ,\ B \cap B_0)]\ d\nu_0(x)\ ,$$

car $\int_X \chi_{B_0}(x)\ d\nu_0(x) = 0$

$$\nu_0\ P(B) = \int_X P(x\ ,\ B \setminus B_0)\ d\nu_0(x)$$
$$= \int_X P(x\ ,\ B \setminus B_0)\ d\nu(x) - \int_{B_0} P(x\ ,\ B \setminus B_0)\ d\nu(x) = \nu(B \setminus B_0) = \nu_0(B)$$

car on a $P(x\ ,\ B \setminus B_0) = 0$ ν-presque sûrement sur B_0 .

Dans toute la suite, on considérera toujours un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, m)$ et un noyau markovien non-singulier par rapport à m ; et on étudiera l'existence d'une mesure de probabilité ν invariante par P et équivalente à m.

4. THÉORÈME. - Si $(X, \mathcal{B}, m)$ est un espace de probabilité, et $P(x, B)$ un noyau markovien sur $(X, \mathcal{B})$ non-singulier par rapport à m, on a les équivalences suivantes :

(4.1) Il existe une mesure ν finie, invariante par P, et équivalente à m.

$\Updownarrow$

(4.2) Le théorème ergodique moyen est vrai pour P^* dans $L^1(m)$, et la mesure ν définie par $\nu = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} mP^k$ est telle que $m(B) > 0 \Longrightarrow \nu(B) > 0$.

$\Updownarrow$

(4.3) $m(B) > 0 \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} mP^k(B) > 0$.

5. Démonstration du théorème.

5.1 Rappels.

- Théorème ergodique moyen. - Soient χ un Banach, T un opérateur linéaire continu sur χ, et $A_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$.

On dit que le théorème ergodique moyen est vrai pour χ, T si, pour tout $x \in \chi$ les suites $A_n x$ convergent fortement dans χ.

Pour que le théorème ergodique moyen soit vrai pour T dans χ, il suffit que :

(i) Les moyennes A_n soient uniformément bornées,

(ii) Il existe un ensemble $K \subset \chi$, tel que le sous-espace vectoriel fermé engendré par K soit χ et tel que, pour tout $x \in K$,

(a) $\frac{T^n x}{n} \longrightarrow 0$,

(b) l'ensemble $\{A_n x, n \in \mathbb{N}\}$ a la propriété de faible compacité pour les suites (c'est-à-dire : de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente faiblement).

- Pour qu'un sous-ensemble M de $L^1(m)$ ait la propriété de faible compacité pour les suites, il faut et il suffit qu'il soit borné dans $L^1(m)$ et que la σ-additivité des mesures $\{f.m, f \in M\}$ soit uniforme, c'est-à-dire : si $E_n \searrow \varphi$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{E_n} f(x)\, dm(x) = 0$ uniformément pour $f \in M$.

5.2 Montrons que (4.2) $\Longrightarrow$ (4.1). - Posons $U_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^{*k}$, on suppose donc que, pour tout $f \in L^1(m)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n^* f = U^* f \quad \text{dans} \quad L^1(m) .$$

Cette fonction $U^* f$ est alors P^* invariante, puisque

$$|P^* U^* f - U^* f| = |\lim_{n\to+\infty} P^* U_n^* f - U_n^* f| = |\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} P^{*n} f - f| \leq \frac{2\|f\|_1}{n} .$$

Considérons la mesure $\nu = U^* 1.m$, on a

$$\nu(B) = \int_B U^* 1(x)\, dm(x) = \int_B \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^{*k} 1(x)\, dm(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} mP^k(B)$$

car la limite a lieu dans $L^1(m)$.

La mesure ν est P-invariante, elle est absolument continue par rapport à m. Par hypothèse, m est supposée absolument continue par rapport à ν, la mesure ν est donc une mesure finie, équivalente à m, et invariante par P.

5.3 Montrons que (4.1) $\Longrightarrow$ (4.3). - Si (4.3) est non vraie, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que l'on ait

$$m(B) > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} mU_n(B) = 0 \qquad (\text{où } U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k),$$

il existe donc une suite n_i telle que

$$mP^{n_i}(B) = \int_X P^{n_i}(x , B)\, dm(x) \longrightarrow 0 .$$

Il existe donc une sous-suite (n_j) telle que les fonctions

$$P^{n_j}(x , B) \longrightarrow 0 \quad \text{m-presque partout.}$$

Si ν est la mesure finie, invariante par P, et équivalente à m, qui est supposée exister, les fonctions $P^{n_j}(x , B) \longrightarrow 0$ ν-presque partout, et on a

$$\nu(B) = \int_X P^{n_j}(x , B)\, d\nu(x) \longrightarrow 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse $m(B) > 0$.

5.4 Montrons que (4.3) $\Longrightarrow$ (4.2). - Considérons le sous-ensemble $K = \{\chi_B , B \in \mathcal{B}\}$ de $L^1(m)$, le sous-espace vectoriel fermé engendré par K est $L^1(m)$. De plus, les opérateurs U_n^* sont uniformément bornés, l'ensemble

$\{U_n^* \chi_B \ , \quad n \in \underset{\sim}{N}\}$ est borné dans $L^1(m)$, et on a

$$\left\| \frac{P^{*n} \chi_B}{n} \right\|_1 \leq \frac{1}{n} \ .$$

Pour montrer que le théorème ergodique moyen est vrai dans $L^1(m)$, il suffit donc de prouver que la σ-additivité des mesures $U_n^* \chi_B . m$ est uniforme pour $n \in \underset{\sim}{N}$, et ceci pour tout B fixé dans $\mathcal{B}$. Et si ν est défini comme en (4.2), la relation (4.3) assure la relation :

$$m(B) > 0 \implies \nu(B) > 0 \ .$$

On a

$$\int_E U_n^* \chi_B(x) \ dm(x) = \int_X \chi_E(x) \ U_n^* \chi_B(x) \ dm(x) = \int_X \chi_B(x) \ U^n \chi_E(x) \ dm(x)$$

$$\leq \int_X U^n \chi_E(x) \ dm(x) = mU^n(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} mP^k(E) \ .$$

Pour montrer la σ-additivité uniforme des mesures $U_n^* \chi_B$, il suffit donc de montrer que la famille des mesures $\{mP^n \ , \ n \in \underset{\sim}{N}\}$ est équi-uniformément absolument continue par rapport à m (c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $m(B) < \delta \implies mP^n(B) < \delta \ , \ \forall n$).

Pour cela, on montrera d'abord que m est uniformément absolument continue par rapport à la fonction d'ensemble $m\underline{U} = \liminf_{n\to+\infty} mU_n$, et on déduira l'équi-uniforme absolue continuité de la famille mP^n. On utilisera le lemme suivant, qui sera démontré plus loin.

LEMME 5.4.1. - <u>Si</u> f <u>est une fonction de</u> $L_+^\infty(m)$, <u>telle que</u> $\underline{U}f = \liminf_{n\to+\infty} U_n f$ <u>soit invariante par</u> P, <u>il existe une suite</u> g_N <u>de fonctions de</u> $L_+^\infty(m)$ <u>telle que</u> :

(i) $0 \leq g_N \leq f$, $g_N(x) \nearrow f(x)$ m-<u>presque sûrement</u>.

(ii) <u>Pour tout</u> N, <u>on a</u>

$$\overline{U}g_N(x) = \limsup_{n\to+\infty} U_n \, g_N(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} U_n \, f(x) = \underline{U}f(x) \quad m\text{-}\underline{\text{presque sûrement}}.$$

LEMME 5.4.2. - (4.3) $\implies$ m <u>est uniformément absolument continue par rapport à la fonction d'ensemble</u> $m\underline{U}$.

Soit $B \in \mathcal{B}$; la fonction $g = \liminf_{n\to+\infty} U_n \chi_B$ vérifie $Pg \leq g$ m-presque sûrement, et on a l'égalité presque sûre.

En effet, s'il existe $\varepsilon > 0$, et $E \in \mathcal{B}$, de mesure $m(E) > 0$, pour lesquels on a $g - Pg > \varepsilon$ sur E, on obtient

$$\sum_0^{n-1} mP^k(E) \leq \sum_0^{n-1} \int_X (g - Pg)\ P^{*k}\ 1(x)\ dm(x) = \int_X \sum_0^{n-1} P^k(g - Pg)\ dm$$

$$= \int_X (g - P^n g)\ dm < 2\|g\|_1 < +\infty$$

(car $Pg \leq g$ presque sûrement $\Longrightarrow P^n g \leq g$ presque sûrement), mais (4.3) entraîne alors $m(E) = 0$.

Pour tout $B \in \mathcal{B}$, la fonction $g = \liminf_{n\to+\infty} U_n \chi_B$ est P-invariante.

La fonction d'ensemble $m\overline{U} = \limsup_{n\to+\infty} mU_n$ est sous-additive, la condition (4.3) est donc équivalente à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 ,\quad \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ m(A) > \frac{\varepsilon}{2} \implies \limsup_{n\to+\infty} mU_n(A) > \delta .$$

Soit $B \in \mathcal{B}$, vérifiant $m(B) > \varepsilon$, d'après le lemme 5.4.1, il existe une suite $g_N \nearrow f(x)$ presque sûrement, et vérifiant 5.4.1(ii). Posons pour tout N

$$B_N = \{x \mid x \in B ,\ \chi_B - g_N < \frac{1}{2}\} ;$$

il existe N tel que l'on ait

$$m(B_N) > \frac{1}{2} m(B) > \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a alors

$$\frac{1}{2} \limsup_{n\to+\infty} U_n \chi_{B_N} \leq \limsup_{n\to+\infty} U_n g_N \leq \liminf_{n\to+\infty} U_n \chi_B$$

et, d'après le lemme de Fatou,

$$\frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2} \limsup mU_n(B_N) \leq \liminf_{n\to+\infty} mU_n(B) .$$

Ce qui **démontre** le lemme 5.4.2.

LEMME 5.4.3. - <u>Si m est uniformément absolument continue par rapport à $m\overline{U}$, la famille $\{mP^n ,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équi-uniformément absolument continue par rapport à m.</u>

Si ce lemme était faux, il existerait $\varepsilon > 0$ et une suite B_i d'ensembles tels que $m(B_i) \searrow 0$ et $\sup_n mP^n(B_i) > 4\varepsilon$, $\forall i$. On peut toujours supposer la suite B_i décroissante (en supposant $m(B_i) < \frac{1}{2^i}$ et en considérant les $C_k = \bigcup_{i\geq k} B_i$).

Il existe $\delta > 0$ tel que

$$m(B) > \varepsilon \implies \liminf_{n\to+\infty} mU_n(B) > \delta .$$

Soit $\delta_1 = \frac{\varepsilon\delta}{1 - \varepsilon}$.

D'après le lemme 5.2 du chapitre sur les mesures invariantes par une application T, il existe i_0 tel que

$$i > i_0 \implies \liminf_{n\to+\infty} mU_n(B_{i_0} \setminus B_i) < \delta_1 .$$

De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $mP^{n_0}(B_{i_0}) \geqslant 4\varepsilon$, et $i_1 > i_0$ tel que

$$mP^{n_0}(B_{i_1}) < \varepsilon .$$

Soit $E = B_{i_0} \setminus B_{i_1}$. On a

$$\liminf_{n\to+\infty} mU_n(E) < \delta_1 \quad \text{et} \quad mP^{n_0}(E) > 3\varepsilon .$$

Soit $\hat{E} = \{x \mid P^{n_0}(x , E) > \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\}$, nous allons montrer que l'on a

$$m(\hat{E}) > \varepsilon \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} mU_n(\hat{E}) < \delta ,$$

ce qui contredira les hypothèses.

On a les inégalités

$$3\varepsilon < mP^{n_0}(E) = \int_{\hat{E}} P^{n_0}(x , E)\, dm(x) + \int_{X\setminus\hat{E}} P^{n_0}(x , E)\, dm(x) \leqslant m(\hat{E}) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} m(X \setminus \hat{E})$$

ce qui donne $m(\hat{E}) > \varepsilon$ (si $\varepsilon < \frac{1}{2}$), et

$$P^{n_0+1}(x , E) = \int_{\hat{E}} P^{n_0}(y , E)\, P(x , dy) + \int_{X\setminus\hat{E}} P^{n_0}(y , E)\, P(x , dy) > \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} P(x , \hat{E})$$

d'où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} mP^{k+1}(\hat{E}) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \int P(x , \hat{E})\, mP^k(dx) < \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int P^{n_0+1}(x , E)\, mP^k(dx)$$

$$= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} mP^{k+n_0+1}(E) ,$$

ce qui, avec un argument analogue à celui du lemme 5.4 démontré pour les applications T , donne :

$$\liminf_{n\to+\infty} mU_n(\hat{E}) \leqslant \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \liminf_{n\to+\infty} mU_n(E) < \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\, \delta_1 = \delta .$$

6. Démonstration du lemme 5.4.1.

LEMME 6.1. - *Soit* $f \in L^{\infty}(m)$, *et, pour tout entier* $N \geq 0$, *soit*

$$A_N = \left\{x \; ; \; \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{0}^{n-1} P^k f(x) > 0\right\} ,$$

il existe alors des fonctions h *et* Φ *de* $L^{\infty}(m)$ *telles que*

(i) $h^- \leq f^-$,

(ii) $\Phi \geq 0$ *et* $h = f + P\Phi - \Phi$,

(iii) $h^-(x) = 0$ *presque partout sur* A_N .

On définit par récurrence les fonctions h_i et Φ_i , pour tout entier i , par

$$h_0 = f ,$$

$$\cdots$$

$$h_i = Ph^+_{i-1} - h_{i-1} ,$$

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{i-1} h^+_k .$$

Par récurrence, on vérifie que les fonctions h_k et Φ_k sont dans $L^{\infty}(m)$, satisfont à (i), (ii), et que $h^+_k \geq P^k f$ m-presque partout pour tout k . On a donc

$$A_N \subset \bigcup_{k=0}^{N} \{h^+_k(x) > 0\} \quad \text{m-presque sûrement,}$$

mais $h^+_k(x) > 0 \implies h^-_j(x) = 0 , \; \forall \, j \geq k$.

Il existe donc $k \leq N$, tel que h_k et Φ_k vérifient (i), (ii), (iii).

LEMME 6.2. - *Soit* $f \in L^{\infty}(m)$, *et pour tout* N *entier positif, posons*

$$A_N = \left\{x \mid \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) > 0\right\} .$$

On a alors

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_N} f(y) \, P^k(x , dy) \geq 0 \quad \text{m-presque partout.}$$

On considère les fonctions h et Φ construites dans le lemme 6.1.

Les ensembles $A_N \cap \{h^- > 0\}$ et $(X \setminus A_N) \cap \{f^+ > 0\}$ sont de m mesure nulle, ils sont donc de $P^k(x , .)$ mesure nulle, $\forall \, k \geq 0$, sauf pour $x \in N$, où N est un ensemble de m mesure nulle. On a alors, $\forall\ k \geqslant 0$ et $\forall\ x \notin N$,

$$-\int_{X\setminus A_N} f^-(y)\ P^k(x,dy) \leqslant -\int_{X\setminus A_N} h^-(y)\ P^k(x,dy) \leqslant -\int_X h^-(y)\ P^k(x,dy) \leqslant \int_X h(y)\ P^k(x,dy)$$

$$= \int_X [f(y) + P\Phi(y) - \Phi(y)]\ P^k(x,dy)\ .$$

Ce qui donne

$$\int_{A_N} f(y)\ P^k(x\ ,\ dy) + \int_X (P\Phi(y) - \Phi(y))\ P^k(x\ ,\ dy) \geqslant 0\ ,\quad \forall\ k \geqslant 0 \text{ et } \forall\ x \notin N\ .$$

Ce qui, compte tenu de ce que l'on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X (P\Phi(y) - \Phi(y))\ P^k(x\ ,\ dy) = 0 \quad m\text{-presque partout}$$

entraîne

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_N} f(y)\ P^k(x\ ,\ dy) \geqslant 0 \quad m\text{-presque partout.}$$

LEMME 6.3. - Soit $f \in L^\infty(m)$, $f \geqslant 0$, supposons qu'il existe une fonction $p \in L^\infty(m)$ invariante par P , et telle que

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) < p(x) \quad m\text{-presque sûrement,}$$

il existe alors une suite de fonctions $f_N \in L_+^\infty(m)$, telles que

(i) $0 \leqslant f_N \leqslant f$, $f_N(x) \nearrow f(x)$ m-presque sûrement,

(ii) Pour tout N ,

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f_N(x) \leqslant p(x) \quad m\text{-presque sûrement.}$$

On considère, pour tout entier N positif, les ensembles

$$A_N = \left\{x \mid \min_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) < p(x)\right\}\ .$$

A_N est une suite croissante d'ensembles qui tendent m-presque sûrement vers X .

Soient les fonctions

$$f_N = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_N \\ p(x) & \text{si } x \notin A_N \end{cases}$$

elles vérifient (i).

On a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(p - f_N)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{A_N} (p(y) - f(y))\, P^k(x , dy) .$$

Soit
$$\hat{A}_N = \left\{x \mid \max_{1\leq n\leq N} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(p - f)(x) > 0\right\} .$$

A_N et $\hat{A}_N$ diffèrent d'un ensemble de m mesure nulle, donc de $P^k(x , .)$ mesure nulle, sauf pour $x \in N$, ensemble de m mesure nulle, et en appliquant le lemme 6.2 à la fonction $p - f$, on obtient le lemme 6.3.

6.4 Démonstration du lemme 5.4.1. - Dans les conditions du lemme 5.4.1, considérons $P_j(x) = \underline{U}f(x) + \frac{1}{j}$, et associons à P_j une suite f_N^j comme dans le lemme 6.3.

Pour tout j , il existe un entier N_j tel que
$$m\{x \mid f(x) - f_{N_j}^j(x) > \frac{1}{j}\} < \frac{1}{2^j} ,$$

et si l'on pose
$$g_N = \inf_{j\geq N} f_{N_j}^j ,$$

les fonctions g_N satisfont aux conclusions du lemme 5.4.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAJIAN (A. B.) and KAKUTANI (S.). - Weakly wandering sets and invariant measures, Trans. Amer. math. Soc., t. 110, 1964, p. 136-151.

[2] HAJIAN (A. B.) and ITO (Y.). - Errata of "Hajian (A. B.) : Measurable transformations and Markov operators, Thesis Yale University, New Haven, 1957" (à paraître).

[3] ITO (Yuji). - Invariant measures for Markov processes, Trans. Amer. math. Soc., t. 110, 1964, p. 152-184.