SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

JEAN-PIERRE CARPENTIER

Semi-normes et ensembles convexes dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. n° 7, p. 1-68
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A6_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 7a, 24 p. 28 janvier 1965

SEMI-NORMES ET ENSEMBLES CONVEXES DANS UN ESPACE VECTORIEL SUR UN CORPS VALUÉ ULTRAMÉTRIQUE

par Jean-Pierre CARPENTIER

Première partie

Semi-normes dans un espace vectoriel

Cette première partie développe des résultats sur les semi-normes qui seront appliqués dans la suite à l'étude des convexes au sens de MONNA [6] (*).

Après un premier paragraphe de généralités, on trouvera au paragraphe 2 le théorème d'Ingleton, analogue au théorème de Hahn-Banach. Ce théorème est l'instrument de MONNA pour l'étude de la "séparation" des convexes. La partie essentielle est le paragraphe 3, qui donne un théorème de représentation des semi-normes. Ce théorème est rapproché des théorèmes analogues déjà connus, et il fournira, dans la deuxième partie, des résultats sur la structure des convexes.

I.1. Notations et définitions.

I.1.1. Ecarts ultramétriques. - Soit (E , d) un ensemble muni d'un écart d ; d sera ultramétrique si

$$\forall\ x , y , z \in E \qquad d(x , z) \leqslant \max(d(x , y) , d(y , z)) .$$

On démontre facilement, si d est ultramétrique, que :

- $d(x , y) \neq d(y , z)$ implique $d(x , z) = \max(d(x , y) , d(y , z))$ ("tout triangle est isocèle et, s'il n'est pas équilatéral, la base est le plus court côté") ;
- Tout point d'une boule peut en être pris comme centre ;
- Toute boule, fermée ou ouverte, est à la fois ouverte et fermée pour la topologie ;
- Si deux boules ont une intersection non vide, l'une est incluse dans l'autre.

Une valeur absolue sur un corps K , une semi-norme dans un espace vectoriel sur un corps valué, seront dites ultramétriques si les écarts associés le sont. Ainsi:

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de la troisième partie.

(K, v) est un corps valué ultramétrique si v applique K dans $\mathbb{R}^+$ et que

$$\forall x, y \in K \qquad v(xy) = v(x)\, v(y) \quad \text{et} \quad v(1) = 1 ,$$

$$\forall x, y \in K \qquad v(x+y) \leqslant \max(v(x), v(y)) .$$

Nous noterons le plus souvent $v(x) = |x|$.

Si (E, p) est un espace vectoriel semi-normé ultramétrique, p n'étant pas identiquement nulle, (K, v) est nécessairement ultramétrique. (E, p) est un espace vectoriel semi-normé ultramétrique si p applique E dans $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in E \qquad p(x+y) \leqslant \max(p(x), p(y)) ,$$

$$\forall x \in E , \lambda \in K \qquad p(\lambda x) = v(\lambda)\, p(x) .$$

Il est immédiat que, si $A = \{x \mid x \in K , |x| \leqslant 1\}$, A est un sous-anneau de K : anneau des entiers de K . Si $\mathfrak{I} = \{x \mid x \in K , |x| < 1\}$, $\mathfrak{I}$ est l'idéal propre maximum de A , et le corps $k = A/\mathfrak{I}$ est dit corps résiduel de K . Si $B_1 = \{x \mid x \in E , p(x) \leqslant 1\}$ et $B_0 = \{x \mid x \in E , p(x) < 1\}$, B_1 et B_0 sont des sous-A-modules de E .

I.1.2. - Soit K un corps valué commutatif, non nécessairement ultramétrique, la valeur absolue triviale n'étant pas exclue. Soit

$$A(v) = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \text{ tel que } v^\alpha \text{ soit une valeur absolue}\} .$$

On a immédiatement :

- $1 \in A(v)$;
- $\alpha \in A(v)$ et $0 < \beta \leqslant \alpha \implies \beta \in A(v)$;
- Si $\alpha_n \in A(v)$ et que (α_n) tend vers α non nul, lorsque n tend vers l'infini, on a $\alpha \in A(v)$.

Posons $\varphi_v = \sup A(v)$, pris dans $\overline{\mathbb{R}}$. On voit que :

- ou $A(v) =]0 , +\infty[$, et $\varphi_v = +\infty$: ce cas se produit si et seulement si v est ultramétrique,
- ou $A(v) =]0 , M]$, et $\varphi_v = M$; mais alors $u = v^M$ est une valeur absolue équivalente à v et $\varphi_u = 1$.

D'après un théorème connu, on sait que :

(K, v) où $\varphi_v = 1$ est isomorphe à un sous-corps valué de $\mathbb{C}$, avec la valeur absolue ordinaire.

Soient maintenant (E, p) un espace semi-normé sur (K, v) ,

$$B(p) = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \text{ tel que } \forall x, y \in E : p^\alpha(x+y) \leqslant p^\alpha(x) + p^\alpha(y)\} ,$$

et

$$\psi_p = \sup B(p) \text{ , pris dans } \bar{\mathbb{R}} \text{ .}$$

Comme ci-dessus,
- ou $B(p) =]0 \rightarrow[$, et p est ultrametrique,
- ou $B(p) =]0 , M]$, et $\psi_p = M$.

Si $p \neq 0$, on voit facilement que $\psi_p \leqslant \varphi_v$.

Si ψ_p est fini et vaut M , p^M est une semi-norme dans E sur (K , v^M) , et $\psi_{p^M} = 1$.

I.1.3. La propriété de Hahn-Banach. - Soient (K , v) un corps valué, (E , p) un espace vectoriel semi-normé sur ce corps. On dit que (K , v , E , p) vérifie la propriété de Hahn-Banach si, pour tout sous-espace vectoriel F de E et toute forme linéaire f sur F vérifiant

$$|f(x)| = v(f(x)) \leqslant p(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } F \text{ ,}$$

il existe une forme linéaire $\bar{f}$ sur F prolongeant f , et telle que

$$v(\bar{f}(x)) \leqslant p(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } E \text{ .}$$

Il est faux que, si $k \in \mathbb{R}^+$ et que (K , v , E , p) vérifie Hahn-Banach, il en soit de même de (K , v , E , kp) : on peut construire un contre-exemple avec $\varphi_v = +\infty$ et K complet. Par contre, la propriété est vraie si φ_v est finie et K complet, comme il est facile de le voir (mais ce serait encore faux si K n'était pas complet). D'autre part, si $p = 0$, (K , v , E , p) vérifie la propriété de Hahn-Banach, car alors $f = 0$, et il suffit de prendre $\bar{f} = 0$.

Nous dirons que (K , v , E , p) a la propriété de Hahn-Banach forte si, pour tout k dans $\mathbb{R}^+$, (K , v , E , kp) a la propriété de Hahn-Banach.

PROPOSITION 1. - Si (K , v , E , p) a la propriété de Hahn-Banach forte, on a $\varphi_v \leqslant \psi_p$.

Si, en outre, $p \neq 0$, on a $\psi_p = \varphi_v$.

Les mêmes conclusions sont valables si (K , v , E , p) a seulement la propriété de Hahn-Banach et si $v(K)$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.

Si $v(K)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}^+$, il existe (E , p) espace vectoriel semi-normé sur (K , v) tel que (K , v , E , p) ait la propriété de Hahn-Banach, et $\psi_p < \varphi_v$.

Démonstration. - Soient $\alpha \in A(v)$, x et $y \in E$, et supposons $p(x + y) \neq 0$. Soient F la droite engendrée par $x + y$, et f la forme linéaire sur F vérifiant $f(x + y) = 1$. On a

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{p(x+y)} p(z) \qquad \text{pour} \quad z \in F .$$

Si (K , v , E , p) a la propriété de Hahn-Banach forte, il existe $\bar{f}$, définie sur E, prolongeant f, telle que

$$|\bar{f}(z)| \leqslant \frac{p(z)}{p(x+y)} \qquad \text{pour} \quad z \in E .$$

On en tire $1 = f(x+y) = \bar{f}(x+y) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$, et, puisque $\alpha \in A(v)$,

$$1 \leqslant |\bar{f}(x)|^{\alpha} + |\bar{f}(y)|^{\alpha} \leqslant \frac{p^{\alpha}(x)}{p^{\alpha}(x+y)} + \frac{p^{\alpha}(y)}{p^{\alpha}(x+y)} ,$$

et $p^{\alpha}(x+y) \leqslant p^{\alpha}(x) + p^{\alpha}(y)$, inégalité qui est évidente si $p(x+y) = 0$. Donc,

$$B(p) \supset A(v) \qquad \text{et} \qquad \psi_p \geqslant \varphi_v .$$

Si $p \neq 0$, on sait déjà que $\psi_p \leqslant \varphi_v$, donc on a $\varphi_v = \psi_p$.

Si (K , v , E , p) vérifie Hahn-Banach et $v(K)$ dense, construisons f comme ci-dessus. Soient alors $\lambda \in v(K) - \{0\}$, et $\lambda \leqslant p(x+y)$:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{p(x+y)} p(z) \leqslant \frac{1}{\lambda} p(z) .$$

Posons $g = \lambda f$, on a $|g(z)| \leqslant p(z)$ pour $z \in F$; donc il existe $\bar{g}$, forme linéaire sur E prolongeant g, vérifiant pour $z \in E$: $|\bar{g}(z)| \leqslant p(z)$. Posons $\bar{f} = \frac{1}{\lambda}\bar{g}$: $\bar{f}$ prolonge f et vérifie $|\bar{f}(z)| \leqslant \frac{1}{\lambda} p(z)$ pour tout $z \in E$. Alors on en tire $\lambda^{\alpha} \leqslant p^{\alpha}(x) + p^{\alpha}(y)$, et, λ étant quelconque dans $v(K) - \{0\}$ et vérifiant $\lambda \leqslant p(x+y)$, on a

$$p^{\alpha}(x+y) \leqslant p^{\alpha}(x) + p^{\alpha}(y) ,$$

puisque $v(K)$ est dense dans $\underset{\sim}{R}^+$. On achève de même.

Pour démontrer la dernière partie, construisons un contre-exemple. K étant à valuation discrète avec $v(K) = \{\rho^n \mid n \in Z\} \cup \{0\}$ avec $\rho \leqslant 1$; si $\rho = 1$, la valuation est triviale et, dans $K \times K$, p défini par $p(x_1 , x_2) = \frac{1}{3}(|x_1|+|x_2|)$ vérifie Hahn-Banach, et pourtant $\varphi_v = +\infty$ et $\psi_p = 1$, comme on peut le voir.

Si maintenant $\rho < 1$, K est encore ultramétrique, $\varphi_v = +\infty$, et l'on peut choisir k dans $\underset{\sim}{R}^+ - \{0\}$ pour que $2^{1/k} \rho < 1$. Munissons alors $E = K \times K$ de la semi-norme p définie par $p((x_1 , x_2)) = (|x_1|^k + |x_2|^k)^{1/k}$, et notons q la semi-norme

$$q((x_1 , x_2)) = \max(|x_1| , |x_2|) .$$

On a $q(z) \leqslant p(z) \leqslant 2^{1/k} q(z)$, donc $\mu p(z) < q(z) \leqslant p(z)$ pour $z \neq 0$: $q(z)$ est le plus grand élément de $v(K)$ plus petit que $p(z)$. Soit f une forme linéaire définie sur un sous-espace F de $K \times K$, vérifiant $|f(z)| \leqslant p(z)$ pour z dans F ; on en déduit $|f(z)| \leqslant q(z)$. On verra plus loin que (K , v , E , q) a la propriété de Hahn-Banach, donc il existe $\bar{f}$ prolongeant f à E telle que $|\bar{f}(z)| \leqslant q(z)$ pour z dans E , ce qui entraîne $|\bar{f}(z)| \leqslant p(z)$, donc (K,v,E,p) a la propriété de Hahn-Banach. Pourtant, $\varphi_v = +\infty$ et $\psi_p = k$, comme on peut le calculer.

COROLLAIRE (PROPOSITION 2). - Si (K , v) est ultramétrique, (K , v , E , p) vérifie la propriété de Hahn-Banach forte, entraîne : p est ultramétrique.

Exemples.

- Si (K , v) est ultramétrique, et $v(K)$ dense dans $E = K \times K$,

$$p((x_1 , x_2)) = |x_1| + |x_2|$$

ne vérifie pas Hahn-Banach car $\psi_p = 1$.

- Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $p(x_1 , x_2) = \sqrt[2]{|x_1|} + \sqrt[2]{|x_2|}$ est une semi-norme sur $\mathbb{R}$ munie de v : $v(x) = \sqrt[2]{|x|}$ ($|\;|$ désignant la valeur absolue usuelle) ; comme $\varphi_v = 2$ et $\psi_p = 1$, $(\mathbb{R} , v , E , p)$ ne vérifie pas Hahn-Banach.

I.2. Le théorème d'Ingleton.

Dorénavant, (K , v) est un corps valué ultramétrique : compte tenu de ce qui a été dit, il est facile de voir que, si φ_v est fini, $\psi_p = \varphi_v$, et K complet, la propriété de Hahn-Banach est vraie pour (K , v , E , p) , en se ramenant au cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D'autre part, nous ne considérerons plus que des semi-normes ultramétriques sans le préciser.

DÉFINITION. - (E , p) est dit complet p-sphérique, ou maximalement complet, si toute chaîne de p-boules fermées non vides a une intersection non vide.

(Dans le cas d'un corps (K , v) , cette définition est équivalente à la définition habituelle des corps maximalement complets, voir [3], à partir de quoi on achèvera facilement la démonstration de l'équivalence.)

Remarques.

- Si (E , p) est complet p-sphérique, (E , p) est complet.
- Si E est localement quasi-compact pour la topologie définie par p , E est complet p-sphérique.

- Dans la définition 1, on peut se limiter à des suites décroissantes de boules fermées : si $B_\alpha = B(x_\alpha, \rho_\alpha)$ est une chaîne de boules fermées, soient $\rho = \inf \rho_\alpha$, et α_n une suite telle que α_n tend vers ρ en décroissant, quand n tend vers $+\infty$; alors,

$$\bigcap_n B_{\alpha_n} = \bigcap_\alpha B_\alpha ,$$

car si $\rho_\alpha \geq \rho_{\alpha_n}$, on a $B_\alpha \supset B_{\alpha_n}$.

- On peut aussi supprimer la précision boules fermées dans la définition, ou prendre des boules ouvertes, avec des suites, ou des chaînes.

- Si (E, p) est complet p-sphérique et $k \in \mathbb{R}^+$, (E, kp) est aussi complet kp-sphérique.

LEMME (PROPOSITION 3). - Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) (E, p) est complet p-sphérique.

(2) (E, p) a la propriété de l'intersection binaire pour les boules fermées :

Si une famille de boules B_α vérifie

$$\forall \alpha, \beta \qquad B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset , \quad \text{alors} \bigcap_\alpha B_\alpha \neq \emptyset .$$

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) . Car, si $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de boules fermées telle que $\forall \alpha, \beta \in A$, $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, on a, ou $B_\alpha \subset B_\beta$, ou $B_\beta \subset B_\alpha$, et par suite $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une chaîne et $\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha \neq \emptyset$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Evident.

Nous allons démontrer maintenant une proposition plus générale que le théorème de Hahn-Banach. Pour cela, on dira que : (E, p) vérifie la propriété d'extension si, pour tout (F, q) espace vectoriel semi-normé sur (K, v), pour tout $V \subset F$, et pour f application linéaire de V dans E telle que $p(f(x)) \leq q(x)$ pour x dans V, il existe $\bar{f}$, application linéaire de F dans E prolongeant f, et vérifiant $p(\bar{f}(x)) \leq q(x)$ pour x dans F.

THÉORÈME d'Ingleton (PROPOSITION 4). - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) (E, p) est complet p-sphérique.

(2) (E, p) a la propriété d'extension.

COROLLAIRE (PROPOSITION 5). - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) K est maximalement complet.

(2) Pour tout (E , p) ultramétrique, (K , v , E , p) vérifie la propriété de Hahn-Banach.

Le corollaire n'est qu'une traduction du theorème, dans le cas particulier $(E , p) = (K , v)$. Démontrons le théorème.

(1) $\Longrightarrow$ (2) . Moyennant une application de l'axiome de Zorn, on est ramené à démontrer la propriété quand $F = V + \{x_0\}$, où $x_0 \notin V$ et $\{x_0\}$ est la droite engendrée par x_0 . On va choisir un élément y_0 de E , et l'on posera

$$\bar{f}(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda y_0 , \qquad \text{où } \lambda \in K \text{ et } x \in V .$$

On veut alors :

$$p(f(x) - y_0) \leqslant q(x - x_0) ,$$

en particulier, pour tout $x \in V$.

Soit donc la famille des boules de (E , p) , $(B_x)_{x \in V}$ définie par :

$$B_x = \{y \mid y \in E , \ p(y - f(x)) \leqslant q(x_0 - x)\} .$$

On a :

- Pour tout x : $B_x \neq \emptyset$;
- Si x_1 et x_2 sont dans V : $B_{x_1} \cap B_{x_2} \neq \emptyset$, car

$$p(f(x_1) - f(x_2)) \leqslant q(x_1 - x_2) \leqslant \max(q(x_1 - x_0) , q(x_2 - x_0)) ,$$

donc : ou $x_1 \in B_{x_2}$, ou $x_2 \in B_{x_1}$. D'après le lemme, $\bigcap_{x \in V} B_x \neq \emptyset$, soit $y_0 \in \bigcap_{x \in V} B_x$. Alors, si $\bar{f}(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda y_0$, $\bar{f}$ est linéaire et prolonge f ; de plus, pour $z = x + \lambda x_0$, $p(f(z)) \leqslant q(z)$ si $\lambda = 0$, et, si $\lambda \neq 0$,

$$p\,f(z) = p(f(x) + \lambda y_0) = |\lambda| \ p(f(-\tfrac{x}{\lambda}) - y_0) \leqslant |\lambda| \ q(-\tfrac{x}{\lambda} - x_0) = q(x + \lambda x_0) = q(z) ,$$

ce qui achève la démonstration.

(2) $\Longrightarrow$ (1) . Si, dans (E , p) , il existe une suite de boules fermées $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non vides, dont l'intersection soit vide, on introduit dans $F = E \times K$ une semi-norme qui consiste "à placer" $x_0 = (0 , 1)$ dans $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des centres des boules B_n . (En fait, il suffit de prendre $x_n \in B_n^{-}$.) Posons, pour $z \in F$, $z = x + \lambda x_0$ avec $x \in E$ et $\lambda \in K$,

$$q(z) = \limsup_{n \to \infty} p(x + \lambda x_n) .$$

On a :

$$q(\mu z) = |\mu|\, q(z) \ ;$$

$$q(z_1 + z_2) = \limsup_{n\to\infty} p(x_1+x_2+(\lambda_1+\lambda_2)x_n)$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}(\max(p(x_1+\lambda_1 x_n) \ , \ p(x_2+\lambda_2 x_n)))$$

$$\leqslant \max(\limsup_{n\to\infty}(p(x_1+\lambda_1 x_n)), \limsup_{n\to\infty}(p(x_2+\lambda_2 x_n))) = \max(q(z_1), q(z_n)) \ :$$

q est une semi-norme ;

$p(z) = q(z)$ pour $z \in E$ (identique à $E \times \{0\}$), car $\lambda = 0$ donne :

$$q(z) = \limsup_{n\to\infty} p(x) = p(z) \ .$$

Cependant l'application linéaire de $E \subset F$ dans E , qui est l'identité, ne se prolonge pas à F tout entier en $\bar{f}$, ayant la propriété $p(\bar{f}(z)) \leqslant q(z)$, car si cela était, on aurait

$$p(\bar{f}(x_0) - x_n) = p(\bar{f}(x_0 - x_n)) \leqslant q(x_0 - x_n)$$

$$= \limsup_{m\to\infty} p(- x_n + x_m) \leqslant \sup_{m\geqslant n} p(x_n - x_m) \leqslant \rho_n \quad \text{(rayon de } B_n \text{) ;}$$

par suite, on aurait $\bar{f}(x_0) \in B_n$ et $\bar{f}(x_0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ contrairement à l'hypothèse.

PROPOSITION 6. - Si $N_p = \{|p(x)| \mid x \in E\}$ vérifie : "Toute suite décroissante non stationnaire tend vers 0 ", (E , p) est complet p-sphérique si et seulement si E est complet.

N_p vérifie la condition précédente, en particulier quand 0 , au plus, est point d'accumulation de N_p .

Démonstration. - Quand la condition de la proposition est vérifiée, une suite décroissante de boules fermées est : ou stationnaire, ou de diamètre tendant vers 0 , comme il est immédiat.

Remarques. - La condition de la proposition 6 n'est pas nécessaire ; en particulier, dans un corps, elle est équivalente à "être à valuation discrète", et il existe des corps maximalement complets à valuation dense. De manière générale, la condition ne peut être vérifiée par $\rho \neq 0$ que si (K , v) est à valuation discrète. Alors si $N_v = \{\rho^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, où $0 < \rho < 1$ (en écartant le cas de la valuation triviale), il est facile de voir qu'elle est équivalente à "dans $N_p \cap [\rho , 1)$ toute suite décroissante est stationnaire", donc à " $N_p \cap [\rho , 1)$ est bien ordonné pour l'ordre usuel".

La proposition suivante va nous permettre de construire des exemples d'espaces complets sphériques où la condition n'est pas vérifiée.

PROPOSITION 7. - <u>Soit</u> $(E_i , p_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'espaces vectoriels semi-normés sur</u> (K , v) , <u>indexée par un ensemble</u> I . <u>Soit</u> F <u>le sous-ensemble de</u> $\prod_{i\in I} E_i$ <u>des</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>tels que</u> $\sup_{i\in I} p_i(x_i) < +\infty$, <u>et soit, sur</u> F , <u>la semi-norme</u> : $q(x) = \sup_{i\in I} p_i(x_i)$ <u>si</u> $x = (x_i)_{i\in I}$. <u>Alors,</u>

$\forall\, i$, (E_i , p_i) <u>complet</u> p_i<u>-sphérique</u> $\Longleftrightarrow$ (F , q) <u>complet</u> q-<u>sphérique</u> .

<u>Démonstration</u>. - Soit π_i la projection canonique de F sur E_i . Soit B une boule fermée de F de centre $(x_i)_{i\in I}$ et de rayon ρ . On a

$$\pi_j(B) \subset \{z \mid z \in E_j , \ p_j(x_j - z) \leqslant \rho\} ,$$

car si $y = (y_i)_{i\in I}$ est dans B , $\pi_i(y) = y_i$ et $q(x - y) \leqslant \rho$ entraîne $q(x_i - y_i) \leqslant \rho$ pour tout i . Si z vérifie $p_j(x_j - z) \leqslant \rho$, et si $y = (y_i)_{i\in I}$, où $y_i = x_i$ si $i \neq j$, et $y_j = z$, y vérifie $\pi_j(y) = z$ et $q(y - x) \leqslant \rho$, donc $y \in B$, et $z \in \pi_j(B)$. Par suite,

$$\pi_j(B) = \{z \mid z \in E_j , \ p_j(x_j - z) \leqslant \rho\} .$$

En outre, si $y = (y_i)_{i\in I}$ appartient à $\prod_{i\in I} E_i$ et vérifie $p_i(x_i - y_i) \leqslant \rho$ pour tout i , on a $y_i \in F$, car

$$\sup_{i\in I} p_i(y_i) \leqslant \max(\rho , \sup_{i\in I} p_i(x_i)) < +\infty , \qquad \text{et} \qquad q(y - x) \leqslant \rho ;$$

on en déduit que $B = \prod_{i\in I} \pi_j(B)$. Alors si B^α est une chaîne de boules de F avec $\alpha \in \mathfrak{A}$,

$$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} B^\alpha = \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Big(\prod_{i\in I} (\pi_i(B^\alpha))\Big) = \prod_{i\in I} \Big(\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} \pi_i(B^\alpha)\Big) .$$

Pour i fixe, $(\pi_i(B^\alpha))_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est une chaîne de boules de (E_i , p_i) , donc :
$\forall\, i$, (E_i , p_i) complet p_i-sphérique $\Longrightarrow$ (F , q) complet q-sphérique .

Réciproquement, si (F , q) est complet q-sphérique, soit une chaîne de boules $(C^\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de (E_j , p_j) , de centre z_α et rayon ρ_α ; considérons les boules de F de centre x_α et de rayon ρ_α , définies par $x_\alpha = (x_i^\alpha)_{i\in I}$ où $x_j^\alpha = z$ et $x_i^\alpha = 0$ si $i \neq j$. On a $\pi_j(B^\alpha) = C^\alpha$.

$$B^{\alpha_1} \cap B^{\alpha_2} = \prod_{i \in I} (\pi_i(B^{\alpha_1}) \cap \pi_i(B^{\alpha_2})) \neq \emptyset ,$$

car $C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2} \neq \emptyset$, et, pour $i \neq j$,

$$\pi_i(B^{\alpha_1}) \cap \pi_i(B_{\alpha_2}) \neq 0 .$$

D'après la proposition 3, $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} B^{\alpha} \neq \emptyset$, donc $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \pi_i(B^{\alpha}) = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} C_{\alpha} \neq 0$: (E_i , p_i) est complet p_i-sphérique.

Remarques. - On peut aussi démontrer l'équivalence en passant par la propriété d'extension.

Si $X \subset \underset{\sim}{R}^+$ est donné, soit (E_x , p_x) où $E_x = K$ et $p_x = xv$. Il est immédiat que F_q vérifie $X \subset N_q$, et est complet sphérique si K l'est.

I.3. Théorèmes de représentation des semi-normes.

Le but essentiel de ce paragraphe est de généraliser la proposition 8 ci-dessous, due à MONNA dans le cas séparable, et à FLEISHER dans le cas général ([1], [4] et [5]).

Si (E , p) est un espace normé sur le corps valué (K , v) , et si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de (E , p) , on notera

$$\sum_{i \in I} e_i = \lim_{\Phi} \sum_{i \in J} e_i ,$$

où Φ est l'ensemble ordonné des parties fermées de I et $J \in \Phi$, quand cette limite existe.

Il est immédiat qu'une condition nécessaire pour que $\sum_{i \in I} e_i$ existe est : $p(e_i)$ tend vers 0 suivant le filtre $\mathfrak{F}$ des complémentaires des parties finies de I . Réciproquement, si (E , p) est complet et si $p(e_i)$ tend vers 0 suivant le filtre $\mathfrak{F}$, $\sum_{i \in I} e_i$ existe.

THÉORÈME (PROPOSITION 8). - Si (K , v) est à valuation discrète et complet, si (E , p) est un espace normé tel que N_p ait au plus 0 comme point d'accumulation (en particulier si $N_p = N_v$), il existe dans E une "base orthogonale" $(e_i)_{i \in I}$; tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $\sum_{i \in I} x_i e_i$, où $x_i \in K$, et de plus

$$p(x) = \sup_{i \in I} p(x_i e_i) .$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat maintenant puisque nous obtiendrons comme corollaire de la proposition 10 un résultat un peu plus général, qui peut d'ailleurs aussi se démontrer par une méthode analogue à celle de FLEISHER.

On déduit immédiatement de la proposition 8 le corollaire suivant [10] :

COROLLAIRE (PROPOSITION 9). - *Si* (K , v) *est complet à valuation discrète, si* (E , p) *est un espace normé complet sur* (K , v) *tel que* $Np = N_v$ *, il existe un isomorphisme de* (E , p) *avec l'espace* $C_I(K)$ *des applications d'un ensemble* I *dans* K *tendant vers* 0 *, suivant le filtre des complémentaires des parties finies de* I *, muni de la norme*

$$q(x) = \sup_{i\in I} |x(i)| .$$

Voici maintenant le théorème général :

THÉORÈME (PROPOSITION 10). - *Soit* (K , v) *un corps valué ultramétrique, maximalement complet, dont l'anneau des entiers est* $A = \{x \mid x \in K , |x| \leqslant 1\}$. *Soient* (E , p) *un espace vectoriel semi-normé sur* (K , v) *, et*

$$B_0 = \{x \mid x \in E , p(x) < 1\} \qquad B_1 = \{x \mid x \in E , p(x) \leqslant 1\} .$$

Soit M *un sous-A-module de* E *vérifiant* $B_0 \subset M \subset B_1$.

Alors il existe un ensemble T *de vecteurs de semi-normes non nulles de* E *, et, pour tout* $t \in T$ *, une projection* π_t *de* E *sur la droite engendrée par* t *, vérifiant :*

1° π_t *est une projection orthogonale, c'est-à-dire que, pour tout* x *dans* E , $p(\pi_t(x)) \leqslant p(x)$. *Si* $t \neq t'$ *, alors* $t \in \operatorname{Ker} \pi_{t'}$.

2° *Pour tout* x *dans* E , $p(x) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x))$ *, et*

$$P_x = \{t \mid t \in T , p(x) = p(\pi_t(x))\}$$

est non vide et fini pour $x \neq 0$.

3° $B_1 = \{x \mid x \in E , \forall t \in T , p(\pi_t(x)) \leqslant 1\}$,

$B_0 = \{x \mid x \in E , \forall t \in T , p(\pi_t(x)) < 1\}$,

et il existe une partition de T *en deux ensembles* T_1 *et* T_2 *éventuellement vide telle que*

$$M = \{x \mid x \in E , \forall t \in T_1 , p(\pi_t(x)) \leqslant 1 , \forall t \in T_2 , p(\pi_t(x)) < 1\} .$$

Démonstration. - La première étape consiste à se ramener au cas où (E , p) est un espace normé. Supposons donc le théorème [illegible] quand (F , q) est un espace normé.

Soient (E , p) un espace semi-normé, et $N = \{x \mid x \in E , p(x) = 0\}$. N est un sous-espace vectoriel de E. On sait que $F = E/N$ est un espace vectoriel normé : si φ est l'application canonique de E sur E/N, $q(\varphi(x)) = p(x)$ définit une norme sur F, puisque p est constant sur chaque classe d'équivalence.

Posons $\varphi(B_1) = \overline{B_1}$, $\varphi(B_0) = \overline{B_0}$: ce sont respectivement les boules unités fermées et ouvertes de (F , q). Si $\varphi(M) = \overline{M}$, M est un A-module de F et $\overline{B_0} \subset \overline{M} \subset \overline{B_1}$. Il existe donc dans F une partie $\overline{T}$ et des projections $\pi_{\bar{t}}$ réalisant les conclusions du théorème relativement au module $\overline{M}$.

Prenons alors pour T un ensemble de représentants des éléments de $\overline{T}$. Désignons par ψ_t, pour t dans T, l'application de la droite engendrée par $\bar{t}$ dans F, sur la droite engendrée par t dans E : $\varphi \circ \psi_t$ est injection canonique de la droite engendrée par $\bar{t}$, dans F.

Posons alors $\pi_t = \psi_t \circ \pi_{\bar{t}} \circ \varphi$, et vérifions que les conclusions du théorème sont réalisées :

- $p(t) = q(\varphi(t)) = q(\bar{t}) \neq 0$ pour $t \in T$.
- π_t est une projection, car π_t applique E sur la droite engendrée par t, et $\pi_t(t) = \psi_t \circ \pi_{\bar{t}} \circ \varphi(t) = \psi_t \circ \pi_{\bar{t}}(\bar{t}) = t$.
- $p(\pi_t(x)) = p((\psi_t \circ \pi_{\bar{t}} \circ \varphi)(x)) = q((\pi_{\bar{t}} \circ \varphi)(x)) \leqslant q(\varphi(x)) = p(x)$.
- Si $t \neq t'$, alors $\bar{t} \neq \bar{t}'$, puisque T est une famille de représentants de $\overline{T}$. Alors,

$$\pi_{t'}(t) = \psi_t \circ \pi_{\bar{t}'} \circ \varphi(t) = \psi_t \circ \pi_{\bar{t}'}(\bar{t}) = 0 ,$$

donc $t \in \operatorname{Ker} \pi_{t'}$.

Si alors x est dans E, on a

$$p(x) = q(\varphi(x)) \qquad \text{et} \qquad p(\pi_t(x)) = q(\varphi \circ \pi_t(x)) = q(\pi_{\bar{t}} \circ \varphi(x)) .$$

Par suite, si $q(\varphi(x)) = \sup\limits_{\bar{t}\in\overline{T}} q(\pi_{\bar{t}}(\varphi(x)))$, on a :

$$p(x) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x)) ,$$

et si

$$Q_{\varphi(x)} = \{\bar{t} \mid \bar{t} \in \overline{T} , p(\varphi(x)) = p(\pi_{\bar{t}} \circ \varphi(x))\} ,$$

$Q_{\varphi(x)}$ et P_x sont en bijection. Ce qui achève d'établir le 2°.

Les mêmes relations montrent que, puisque $B_1 = \varphi^{-1}(\overline{B_1})$, $B_0 = \varphi^{-1}(B_0)$, $M = \varphi^{-1}(\overline{M})$ (résultant du fait que B_1, B_0, M sont des sous-groupes contenant le noyau N),

$$B_1 = \{x \mid q(\pi_{\bar t}\, \varphi(x)) \leqslant 1 \text{ pour tout } \bar t \in \bar T\}$$
$$= \{x \mid p(\pi_t(x)) \leqslant 1 \text{ pour tout } t \in T\}$$

et

$$B_0 = \{x \mid q(\pi_{\bar t}\, \varphi(x)) < 1 \ , \ \forall\, \bar t \in \bar T\} = \{x \mid p(\pi_t(x)) < 1 \ , \ \forall\, t \in T\} \ .$$

Enfin si $\bar T$ admet la partition en $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$, soit la partition correspondante de T : T_1 et T_2, on a :

$$M = \{x \mid \forall\, \bar t \in T_1 \ , \ q(\pi_{\bar t}\, \varphi(x)) \leqslant 1 \ , \ \forall\, \bar t \in T_2 \ , \ q(\pi_{\bar t}(\varphi(x))) < 1\}$$
$$= \{x \mid \forall\, t \in T_1 \ , \ p(\pi_t(x)) \leqslant 1 \ , \ \forall\, t \in T_2 \ , \ p(\pi_t(x)) < 1\} \ .$$

Nous pouvons donc supposer maintenant que (E , p) est un espace normé.

Nous dirons qu'une partie X de $E - \{0\}$ a la propriété (π), si :

Pour toute famille $(\lambda_x)_{x \in X}$, $\lambda_x \in K$ **et** $(\lambda_x)_{x \in X}$ tous nuls sauf un nombre fini, on a

$$p(\sum_{x \in X} \lambda_x\, x) = \sup_{x \in X} p(\lambda_x\, x) \ .$$

On a les deux propriétés immédiates suivantes :

(a) Si X a la propriété (π), elle est linéairement indépendante : si $(\lambda_x)_{x \in X}$ est une famille d'éléments de K, tous nuls sauf un nombre fini, et que $\sum_{x \in X} \lambda_x\, x = 0$, alors

$$0 = p(\sum_{x \in X} \lambda_x\, x) = \sup_{x \in X} p(\lambda_x\, x) \ ,$$

donc $p(\lambda_x\, x) = 0$ pour tout x ; p étant une norme et x différent de 0, on a $\lambda_x = 0$ pour tout x.

(b) L'union d'une chaîne de parties de E vérifiant la propriété (π) **vérifie** aussi la propriété (π) : c'est manifeste. Donc l'ensemble des parties vérifiant la propriété (π) est $\cup$-inductif, et, d'après l'axiome de Zorn, il existe, pour toute partie T_1 vérifiant (π), une partie maximale T la contenant. C'est ainsi que nous allons d'abord déterminer T_1, puis T de l'énoncé.

Remarque. - On peut donner une propriété équivalente à la propriété (π), qui exprime une sorte d'orthogonalité (cf. [4] et [5]).

Une partie X de $E - \{0\}$ a la propriété (O), si :

Quels que soient $e_1, \dots, e_n \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, et $e \in X - \{e_1 , \dots , e_n\}$, on a

$$p(e - \sum_{i=1}^{x} \lambda_i\, e_i) \geqslant p(e) \ .$$

En effet, $(\pi) \Longrightarrow (0)$ est évident.

$(0) \Longrightarrow (\pi)$. - Soit une famille $(\lambda_x)_{x\in X}$; si tous les λ_x sont nuls, on a

$$0 = p\left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) = \sup_{x\in X} (\lambda_x x) .$$

Sinon, soit λ_{x_0}, tel que $p(\lambda_{x_0} x_0)$ soit maximum parmi les $p(\lambda_x x)$, qui sont nuls sauf un nombre fini. On voit alors que

$$p\left(x_0 - \sum_{x\in X-\{x_0\}} - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_{x_0}}\right) x\right) \geqslant p(x_0) \qquad \text{d'après } (0) ,$$

donc que

$$p\left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) \geqslant p(\lambda_{x_0} x_0) = \max_{x\in X} p(\lambda_x x) \geqslant p\left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) ,$$

d'où l'égalité qui démontre (π).

On voit que (0), donc (π), entraîne immédiatement que X est topologiquement libre.

LEMME (PROPOSITION 11). - B_1/B_0 <u>est un espace vectoriel sur le corps résiduel</u> k <u>de</u> K. M/B_0 <u>est un sous-espace vectoriel de</u> B_1/B_0. <u>Si</u> σ <u>est l'application canonique de</u> B_1 <u>sur</u> B_1/B_0, <u>un sous-ensemble</u> $X \subset B_1 - B_0$ <u>(différence ensembliste) vérifie</u> (π), <u>si et seulement si</u> $\sigma(X)$ <u>est linéairement indépendante sur</u> k.

Démonstration. - Soient $\mathfrak{J} = \{x \mid x \in K , |x| < 1\}$, $k = A/\mathfrak{J}$. τ désignera l'application canonique de A sur $A/\mathfrak{J}$.

B_1/B_0 est évidemment un groupe. Pour définir le produit, considérons

$$A \times B_1 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\tau} B_1/B_0 ,$$

où $A \times B_1 \to B_1$ est le produit de B_1. L'application obtenue $A \times B_1 \to B_1/B_0$ est nulle sur $\mathfrak{J} \times B_1$ et $A \times B_0$, et par suite se factorise de manière unique : $A \times B_1 \to A/\mathfrak{J} \times B_1/B_0 \to B_1/B_0$. Ce qui définit le produit $k \times B_1/B_0 \to B_1/B_0$, et la vérification des axiomes est immédiate.

Comme $A \times B_1 \to B_1$ applique $A \times M$ dans M, $k \times B_1/B_0 \to B_1/B_0$ applique $A \times M/B_0$ dans M/B_0, et M/B_0 étant manifestement un sous-groupe, est un sous-espace vectoriel.

Soit alors $X \subset B_1 - B_0$ vérifiant (π). Soit $(\bar{\lambda}_x)_{x\in X}$ où $\bar{\lambda}_x \in k$ avec $\bar{\lambda}_x = \tau(\lambda_x)$ tels que $\sum_{x\in X} \bar{\lambda}_x \sigma(x) = 0$. Par suite $p\left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) < 1$, puisque

$$\sigma\left(\sum_{x\in X}\lambda_x\, x\right) = \sum_{x\in X}\bar{\lambda}_x\,\sigma(x) = 0 \,.$$

Or X vérifie (π), donc, pour tout x, $p(\lambda_x x) < 1$, et, comme $x \in B_1 - B_0$, on a $p(x) = 1$, donc $|\lambda_x| < 1$ pour tout x, et $\bar{\lambda}_x = 0$ pour tout x : $\sigma(x)$ est linéairement indépendante.

Réciproquement, supposons $\sigma(x)$ linéairement indépendante (et $X \subset B_1 - B_0$). On a donc $X \subset E - \{0\}$. Soit $(\lambda_x)_{x\in X}$, où $\lambda_x \in K$ et où tous les λ_x sont nuls sauf un nombre fini. Considérons, si tous les λ_x ne sont pas nuls, un λ_{x_0} tel que $|\lambda_{x_0}|$ soit maximum. Alors

$$\sum_{x\in X}\tau\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_{x_0}}\right)\sigma(x) \neq 0 \,,$$

et par suite

$$p\left(\sum_{x\in X}\frac{\lambda_x}{\lambda_{x_0}}\, x\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad p\left(\sum_{x\in X}\lambda_x\, x\right) = |\lambda_{x_0}| = \sup_{x\in X} p(\lambda_x\, x) \,.$$

L'égalité $p\left(\sum_{x\in X}\lambda_x\, x\right) = \sup_{x\in X} p(\lambda_x\, x)$ est d'autre part évidente quand $\lambda_x = 0$ pour tout x, donc X vérifie (π), ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous choisirons pour T_1 une famille de représentants dans M d'une base de $M/B_0 = \sigma(M)$ sur k : T_1 vérifie donc la propriété (π). Soit T maximal parmi les ensembles vérifiant (π) et contenant T_1. Posons $T_2 = T - T_1$, et désignons par F le sous-espace vectoriel de E engendré par T : T est donc une base de F.

Définissons maintenant les projections π_t. Soit d'abord ϖ_t, appliquant F dans la droite engendrée par t, défini par $\varpi_t(t) = t$, $\varpi_t(t') = 0$ si $t' \neq t$; si $x \in F$ s'écrit $x = \sum_{t\in T}\lambda_t\, t$, où $\lambda_t \in K$, avec tous les λ_t nuls sauf une famille finie, on a $\varpi_t(x) = \lambda_t\, t$. Par suite,

$$p(x) = p\left(\sum_{t\in T}\lambda_t\, t\right) = \sup_{t\in T}\,(p(\lambda_t\, t)) \geqslant p(\lambda_t\, t) = p(\varpi_t(x)) \,.$$

On a donc $p(x) \geqslant p(\varpi_t(x))$ pour tout x dans F. K étant supposé complet sphérique, tous les espaces vectoriels de dimension 1 le sont aussi, en particulier la droite engendrée par t. Il s'ensuit qu'il existe une application π_t de E dans la droite engendrée par t, prolongeant ϖ_t, et vérifiant $p(\pi_t(x)) \leqslant p(x)$ pour tout x dans E. Il ne reste plus qu'à vérifier les conclusions du théorème:

1° Nous venons de construire π_t telle que $p(\pi_t(x)) \leqslant p(x)$ pour tout x dans E , $\pi_{t'}(t) = 0$ pour $t' \neq t$, $\pi_t(t) = t$: π_t est une projection ayant les propriétés voulues.

2° Puisque $p(x) \geqslant p(\pi_t(x))$ pour tout t ,

$$p(x) \geqslant \sup_{t \in T} p(\pi_t(x)) .$$

Nous allons montrer qu'il existe t tel que $p(\pi_t(x)) = p(x)$; sinon

$$p(x) > p(\pi_t(x)) \qquad \text{pour tout } t \in T ,$$

et l'inégalité

$$p(x - \sum_{t \in T} \lambda_t t) < p(x)$$

(avec λ_t tous nuls sauf une famille finie) entraînant :

$$p(\pi_t(x - \sum_{t \in T} \lambda_t t)) < p(x) , \qquad \text{donc} \qquad p(\pi_t(x) - \lambda_t t) < p(x) ,$$

on en déduit

$$p(\lambda_t t) \leqslant \max(p(\pi_t(x) - \lambda_t t) , p(\pi_t(x))) < p(x) ,$$

donc

$$p(x) \leqslant \max(p(x - \sum_{t \in T} \lambda_t t) , (\max_{t \in T} p(\lambda_t t))) < p(x)$$

(puisque seul un nombre fini de λ_t est non nul). Donc l'inégalité supposée est absurde, et on a, pour tout $(\lambda_t)_{t \in T}$,

$$p(x - \sum_{t \in T} \lambda_t t) \geqslant p(x) .$$

Montrons que $T \cup \{x\}$ vérifie (π), dès que x vérifie cette inégalité :

$p(x) > 0$, donc $x \neq 0$.

Si $\lambda x + \sum_{t \in T} \lambda_t t$ donné, envisageons deux cas :

- ou $p(\lambda x) \geqslant p(\lambda_t t)$ pour tout t , et alors, si $\lambda = 0$, on a

$$p(\lambda x + \sum_{t \in T} \lambda_t t) = 0 = \sup_{t \in T} p(\lambda_t t) ,$$

et si $\lambda \neq 0$,

$$p(x + \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\lambda} t) \geqslant p(x) \qquad \text{(inégalité ci-dessus)} ,$$

donc

$$\sup(p(\lambda x) , (\sup_{t \in T} p(\lambda_t t))) \leqslant p(\lambda x) \leqslant p(\lambda x + \sum_{t \in T} \lambda_t t) \leqslant \sup(p(\lambda x) , (\sup_{t \in T} p(\lambda_t t)))$$

et l'on a l'égalité,

- ou $p(\lambda x) < \sup_{t\in T} p(\lambda_t t)$, alors $p(\sum_{t\in T} \lambda_t t) = \sup_{t\in T} p(\lambda_t t)$ et

$$p(\lambda x + \sum_{t\in T} \lambda_t t) = \sup(p(\lambda x) , (\sup_{t\in T} p(\lambda_t t)))$$

d'après l'égalité ultramétrique.

$T \cup \{x\}$ est une partie vérifiant (π) : ceci contredit la définition de T comme partie maximale vérifiant (π), donc l'hypothèse, $p(x) > p(\pi_t(x))$ pour tout t , est absurde : il existe $t \in T$ tel que $p(x) = p(\pi_t(x))$, et par suite

$$p(x) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x)) .$$

Montrons que seul un nombre fini de t réalise $p(\pi_t(x)) = p(x)$ quand $x \neq 0$. Sinon, pour tout $(\lambda_t)_{t\in T}$, tous nuls sauf un nombre fini, on aurait :

$$p(x - \sum_{t\in T} \lambda_t t) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x) - \lambda_t t) ,$$

et il y aurait toujours des λ_t nuls correspondant à des t tels que

$$p(\pi_t(x)) = p(x) ;$$

il s'ensuivrait que $p(x - \sum_{t\in T} \lambda_t t) \geqslant p(x)$, et donc, comme ci-dessus, que $T \cup \{x\}$ vérifierait (π) ; donc il n'existe qu'un nombre fini de $t \in T$ tels que

$$p(\pi_t(x)) = p(x) .$$

3° $B_1 = \{x \mid x \in E , p(\pi_t(x)) \leqslant 1 , \forall t \in T\}$ résulte de

$$p(x) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x))$$

simplement ; la même relation entraîne :

$$B_0 \subset \{x \mid x \in E , \forall t \in T , p(\pi_t(x)) < 1\} ,$$

tandis que si $\forall t \in T$, $p(\pi_t(x)) < 1$, on a $p(x) < 1$, puisque $p(x)$ est égal à l'un des $p(\pi_t(x))$.

Enfin montrons que

$$M = \{x \mid x \in E , \forall t \in T_1 , p(\pi_t(x)) \leqslant 1 , \forall t \in T_2 , p(\pi_t(x)) < 1\} .$$

Si $x \in M$, on a évidemment $p(\pi_t(x)) \leqslant 1$ pour tout $t \in T$; dans M/B_0 , on a

$$\sigma(X) = \sum_{t\in T_1} \overline{\lambda}_t \sigma(t) , \qquad \text{donc} \qquad p(x - \sum_{t\in T_1} \lambda_t t) < 1$$

(avec toujours $(\lambda_t)_{t\in T_1}$ tous nuls sauf un nombre fini), et comme

$$\pi_t(x) = \pi_t(x - \sum_{t\in T_1} \lambda_t\, t) \qquad \text{quand } t \in T_2 ,$$

on a $p(\pi_t(x)) < 1$ pour $t \in T_2$.

Soit maintenant $x \in E$ tel que $p(\pi_t(x)) \leqslant 1$ pour $t \in T_1$ et $p(\pi_t(x)) < 1$ pour $t \in T_2$; il n'existe qu'un nombre fini de $t \in T_1$ tels que $p(\pi_t(x)) = 1$, car $p(x) \leqslant 1$: soient $t_1 , \ldots , t_n$ ces éléments de T_1. Alors

$$p(x - \sum_{i=1}^{n} \pi_{t_i}(x)) < 1$$

puisque, pour tout $t \neq t_i$,

$$p(\pi_t(x - \sum_{i=1}^{n} \pi_{t_i}(x))) = p(x) < 1 ,$$

et que, pour $t = t_i$,

$$p(\pi_{t_i}(x - \sum_{i=1}^{n} \pi_{t_i}(x))) = 0 .$$

Si $y = x - \sum_{i=1}^{n} \pi_{t_i}(x)$, on a $y \in B_0 \subset M$, et comme $\pi_{t_i}(x) = \lambda_i\, t_i$ avec $|\lambda_i| = 1$ puisque $p(t_i) = 1$, $t_i \in M$ entraîne $x \in M$, ce qui achève la démonstration.

Nous allons en déduire le corollaire suivant (d'autres corollaires seront donnés, dans la deuxième partie, en utilisant un module M).

COROLLAIRE (PROPOSITION 12). - Soient (K , v) un corps valué complet, à valuation discrète, et (E , p) un espace vectoriel normé sur (K , v) tel que toute suite strictement décroissante de N_p tende vers 0 ; alors il existe dans E une base orthogonale, c'est-à-dire une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs telle que tout $x \in E$ s'écrive de manière unique $x = \sum_{i\in I} x_i\, e_i$ (somme au sens de la topologie de p) où $x_i \in K$, avec en outre $p(x) = \sup_{i\in I} p(x_i\, e_i)$. De plus, E est complet si et seulement si : " $\sum_{i\in I} x_i\, e_i$ existe" est équivalent à " $p(x_i\, e_i)$ tend vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I ".

Démonstration. - Nous allons reprendre partiellement la démonstration de la proposition 10. Ayant choisi T, nous allons choisir la famille des projections π_t de E sur les droites engendrées par $t \in T$ de la manière suivante : soit F l'espace vectoriel fermé engendré par T, d'après la proposition 6, F est complet p-sphérique. Soit alors φ une "projection orthogonale" de E sur F :

$\varphi(x) = x$ si $x \in F$, et $p(\varphi(x)) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$. Définissant ϖ_t comme précédemment, on pose : $\pi_t = \varpi_t \circ \varphi$: π_t est une projection de E sur la droite engendrée par t, prolongeant ϖ_t et vérifiant $p(\pi_t(x)) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$. Ce qui a été dit précédemment reste vrai, et il en résulte que

$$\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \forall\, t \in T\,,\ \pi_t(x) = 0 \Longrightarrow p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\,;$$

φ est injective, donc $F = E$ et T est total.

Le corollaire résulte alors du lemme suivant :

LEMME (PROPOSITION 13). - Soit (E, p) un espace vectoriel normé sur (K, v) corps valué complet et ultramétrique. Si T est un système total, vérifiant (π) de E, T est une base orthogonale. Réciproquement, une base orthogonale est un système total vérifiant (π). De plus pour que E, admettant une base orthogonale, soit complet, il faut et il suffit que " $p(\lambda_t\, t)$ tend vers 0 suivant le filtre de Fréchet de T " entraîne " $\sum_{t\in T} \lambda_t\, t$ existe".

Démonstration. - Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par T. T étant libre, on peut définir dans F la projection ϖ_t par $\varpi_t(t') = \delta_t^{t'}\, t$, $\delta_t^{t'}$ étant le symbole de Kronecker. On a, pour $x \in F$, $x = \sum_{t\in T} \varpi_t(x)$, somme où tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, et T vérifiant (π),

$$p(x) = \sup_{t\in T} p(\varpi_t(x))\,, \qquad \text{donc} \qquad p(\varpi_t(x)) \leqslant p(x)\,.$$

D'autre part, K étant complet et $F = E$, on peut prolonger par continuité ϖ_t en π_t définie sur E. On a encore par continuité $p(\pi_t(x)) \leqslant p(x)$ pour $x \in E$. Montrons que pour $x \in E$, on a $x = \sum_{t\in T} \pi_t(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixe, il existe $y \in F$ tel que $p(x - y) \leqslant \varepsilon$. Soit T_0 l'ensemble des t de T tels que $\varpi_t(y) \neq 0$. Pour t dans T,

$$p(\pi_t(x - y)) \leqslant p(x - y) \leqslant \varepsilon\,, \qquad \text{donc} \qquad p(\pi_t(x) - \pi_t(y)) \leqslant \varepsilon\,.$$

Il en résulte que :

(1) $$p(\pi_t(x)) \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad t \notin T_0$$

et que, pour $t \in T_0$, $p(\pi_t(x) - \pi_t(y)) \leqslant \varepsilon$, donc

(2) $$p\Big(x - \sum_{t\in T_0} \pi_t(x)\Big) \leqslant \max\Big(p(x - y)\,,\ \max_{t\in T_0} p(\pi_t(y) - \pi_t(x))\Big) \leqslant \varepsilon\,.$$

(1) et (2) entraînent que, si $T' \supset T_0$, T' fini,

$$p(x - \sum_{t\in T'} \pi_t(x)) \leqslant \varepsilon , \qquad \text{donc que} \qquad x = \sum_{t\in T} \pi_t(x) .$$

La représentation de x est unique, car si $x = \sum_{t\in T} \lambda_t t$, $\pi_t(x) = \lambda_t t$. Enfin,

$$p(x) \geqslant \sup_{t\in T} p(\pi_t(x)) ,$$

mais, si $p(x) = 0$, on a l'égalité, tandis que si $p(x) \neq 0$, il existe T' fini, $T' \subset T$ tel que $p(x - \sum_{t\in T'} \pi_t(x)) < p(x)$, donc

$$p(x) = p(\sum_{t\in T'} \pi_t(x)) = \sup_{t\in T'} p(\pi_t(x)) \leqslant \sup_{t\in T} p(\pi_t(x)) ,$$

et l'on a encore l'égalité.

Il est évident qu'une base orthogonale est un système total vérifiant (π). (Cependant, un système maximal vérifiant (π) n'est pas nécessairement total : voir proposition 16.)

On sait déjà que, si E est complet, " $p(\lambda_t t)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$ " entraîne " $\sum_{t\in T} \lambda_t t$ existe". Supposons que " $p(\lambda_t t)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$ " entraîne " $\sum_{t\in T} \lambda_t t$ existe", et soit x^n une suite de Cauchy de E . Il est immédiat que $\pi_t(x^n)$, à t fixé, est une suite de Cauchy qui converge dans Kt , qui est complet comme K , vers un vecteur $x_t t$.

Soient $t > 0$ fixé, et N tel que $n , m \geqslant N$ entraîne $p(x^n - x^m) \leqslant \varepsilon$. On a, pour tout $t \in T$: $p(\pi_t(x^n) - \pi_t(x^m)) \leqslant \varepsilon$. Fixons n , soit T' fini, tel que $t \notin T'$ entraîne $p(\pi_t(x^n)) \leqslant \varepsilon$ (c'est possible, puisque $\sum_{t\in T} \pi_t(x^n)$ existe) ; on voit que $t \notin T'$ entraîne aussi $p(\pi_t(x^m)) \leqslant \varepsilon$ pour $m \geqslant N$, donc $p(x_t t) \leqslant \varepsilon$. Ceci démontre que $p(x_t t)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$, donc que $\sum_{t\in T} x_t t$ existe. De plus,

$$p(x^{(n)} - \sum_{t\in T} x_t t) = \sup_{t\in T} p(\pi_t(x^n) - x_t t) \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqslant N .$$

La proposition 12 est démontrée, aux notations près, avec la famille T comme base "orthogonale".

Remarques. - On peut évidemment énoncer une proposition analogue pour E semi-normé, mais tout revient à appliquer la proposition ci-dessus à E/N où $N = \{x \mid x \in E , p(x) = 0\}$, et à identifier E à $E/N \times N$ où E/N est normé, N muni de la semi-norme nulle, et le produit de la semi-norme "sup" . Cette remarque est valable pour d'autres propositions du paragraphe, et nous ne la ferons pas toujours.

La condition, portant sur N_p , est équivalente, quand (K , v) n'est pas à valuation triviale, à : $N_p \cap [\rho , 1)$ est bien ordonné. Les propositions 8 et 9 sont des conséquences immédiates de la proposition 12. Les conditions données ne sont pas nécessaires ; nous allons établir l'existence de bases orthogonales dans d'autres cas (voir cependant les remarques à la fin du paragraphe). Les propositions 14 et 15 sont dues à MONNA ([4] , [5]), mais nous avons remplacé dans 15 l'hypothèse "séparable" par "admet un système total dénombrable" qui est seule utile, et n'est équivalente à la première que si K est séparable.

PROPOSITION 14. - Soient (K , v) maximalement complet, (E , p) un espace normé sur (K , v) de dimension finie ; alors il existe une base de E :

$$\{e_1 , \dots , e_n\}$$

telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, **avec** $\lambda_i \in K$, on ait

$$p(x) = \sup_{i=1,..,n} p(\lambda_i e_i) .$$

Il en résulte que (E , p) est complet p-sphérique.

Démonstration. - On prend pour $e_1 , e_2 , \dots , e_n$ le système T de la proposition 10, qui, étant libre, est fini. Pour tout $x \in E$, $t \in T$:

$$\pi_t(x - \sum_{t\in T} \pi_t(x)) = 0 ,$$

donc $p(x - \sum_{t\in T} \pi_t(x)) = 0$, et l'on a $x = \sum_{t\in T} \pi_t(x)$, ce qui démontre que T engendre E . La suite, sauf la dernière assertion, résulte de la proposition 13. La dernière assertion résulte, elle, de la proposition 7, avec $E_i = Ke_i$. (On pourra en déduire ce dernier résultat pour une semi-norme. On peut aussi voir directement que, si K est maximalement complet, et E de dimension finie, toute suite emboitée de A modules non vide de E , a une intersection non vide : on raisonne par récurrence sur la dimension de E , et on projette sur un hyperplan.)

Remarque. - Si (E , p) est seulement semi-normé, en appliquant le résultat à F supplémentaire de N dans E , on trouve une base $e_1 , \dots , e_j$ de F et une base $e_{j+1} , \dots , e_n$ de N telles que $x \in E$ s'écrive $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et

$$p(x) = \sup_{i=1,..,n} p(\lambda_i e_i) = \sup_{i=1,..,j} p(\lambda_i e_i) .$$

Le résultat suivant est une généralisation :

PROPOSITION 15. - *Si* (K , v) *est maximalement complet, et si* (E , p) *est un espace vectoriel normé sur* (K , v) *admettant un système total dénombrable, alors il existe une famille de vecteurs de* E , $(e_i)_{i \in N}$, *telle que tout* x *de* E *s'écrive* $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, *de manière unique, avec* $p(x) = \sup_{i \in N} p(x_i e_i)$. *En outre, on a la même condition nécessaire et suffisante pour que* E *soit complet qu'à la proposition* 12.

Démonstration. - Puisque E admet un système total dénombrable, on a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où E_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , avec $E_{n+1} \supset E_n$. Nous allons construire T_n , base orthogonale de E_n , de manière que $T_{n+1} \supset T_n$. Soit donc T_1 , base orthogonale de E_1 . Supposons construite T_i , pour $i = 1 , \dots , n-1$, T_i base de E_i , avec $T_i \subset T_{i+1}$ pour $i = 1 , \dots , n-2$. Alors T_{n-1} est un ensemble vérifiant (π) de E_n ; revenant à la démonstration de la proposition 10, on peut prendre pour T_n un ensemble maximal vérifiant (π) et contenant T_{n-1} : T_n est par suite une base orthogonale. L'existence de la suite des T_n est donc démontrée par récurrence. Soit $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$; T est un ensemble vérifiant (π), puisque cette propriété est $\cup$-inductive. T est un système total dans E , et par suite un système vérifiant (π) maximal. On peut alors appliquer les résultats des propositions 10 et 13, ce qui démontre le théorème.

Exemple. - Ω_p , étant la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, est séparable, donc admet une base orthogonale sur $\mathbb{Q}_p$. On ne peut cependant lui appliquer la proposition 12.

Remarque. - Nous allons voir, qu'en quelque sorte, les résultats obtenus aux propositions 6 et 12 sont les meilleurs possible, et, en même temps, qu'il n'existe pas toujours, même si (K , v) est à valuation discrète, de base orthogonale.

Pour cela, remarquons d'abord que si $S \subset \mathbb{R}^+$ est donné, vérifiant $N_v S \subset S$, il existe des espaces vectoriels normés (E , p) tels que $N_p = S$.

Pour tout $s \in S - \{0\}$, on définit (E_s , p_s) comme étant K muni de la norme $p_s = sv$; on considère dans $\prod_{s \in S-\{0\}} E_s$ le sous-ensemble F des $(x_s)_{s \in S-\{0\}}$ pour lequel $p_s(x_s)$ tend vers 0 suivant le filtre de Fréchet de $S - \{0\}$. Pour $x = (x_s)_{s \in S-\{0\}} \in F$, on pose

$$q(x) = \sup_{s \in S-\{0\}} p_s(x_s) .$$

Il est évident que $q(x) \in S$ et que $S = N_q$.

PROPOSITION 16. - K étant maximalement complet, on a l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) Dans S, toute suite strictement décroissante tend vers 0 ;

(2) Tout (E, p) complet, tel que $N_p = S$, est complet p-sphérique ;

(3) Tout (E, p), tel que $N_p = S$ admet une base orthogonale.

(1) $\Longrightarrow$ (2) est la proposition 6.

(1) $\Longrightarrow$ (3) est la proposition 12.

Pour achever, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME (PROPOSITION 17). - Si (E, p) est un espace normé, admettant une base orthogonale, et telle que $S = N_p$ ne vérifie pas la condition (1) ci-dessus, E n'est pas complet p-sphérique.

Démonstration. - Soit $(e_i)_{i\in I}$ la base orthogonale. Comme

$$S = N_p = \{p(\lambda e_i) \mid \lambda \in K , \ i \in I\} ,$$

on peut supposer, (1) n'étant pas vérifiée, que $I \supset \underset{\sim}{N}$ et que $(p(e_i))_{i\in \underset{\sim}{N}}$ décroît strictement sans tendre vers 0, en remplaçant s'il le faut les e_i par des vecteurs colinéaires.

Posons $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, ..., $f_n = \sum_{i=1}^{n} e_i = f_{n-1} + e_n$, et soit B_n la boule fermée de centre f_n et de rayon $\rho(e_{n+1})$. Il est évident que $f_m \in B_n$ pour $m \geqslant n$ et que la suite des boules B_n est emboîtée. Supposons $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, x s'écrira

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i + \sum_{i\in I-\underset{\sim}{N}} \lambda_i e_i .$$

De $p(f_n - x) \leqslant p(e_{n+1})$, on déduit, par projection sur Ke_k, pour $k \leqslant n$,

$$p(\lambda_k e_k - e_k) \leqslant p(e_{n+1}) < p(e_k) ,$$

donc

$$p(\lambda_k e_k) = p(e_k) ,$$

égalité qui est vraie pour tout k, n étant arbitraire. On voit que $p(\lambda_i e_i)$ ne tend pas vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I, ce qui est absurde, et montre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$: E n'est pas complet p-sphérique.

Revenons à la démonstration de la proposition 16 :

non (1) $\Longrightarrow$ non (2), puisque l'espace construit ci-dessus tel que $N_q = S$

admet manifestement une base orthogonale formée des images de $1 \in E_s$, par l'application canonique de E_s dans $\prod_{s\in S-\{0\}} E_0$.

Pour montrer que non (1) $\Longrightarrow$ non (3) , il suffit de construire (E , p) tel que $\dot{N}_p = S$ et que E soit complet p-sphérique ; d'après le lemme, E n'admettra pas de base orthogonale. (Ce problème est lié à celui de la recherche d'un sur-espace vectoriel complet sphérique d'un espace donné. Ce dernier peut être traîté par des méthodes analogues à celles utilisées par KAPLANSKY pour les corps, mais qui n'ont pas été développées à ma connaissance et qu'il serait trop long d'exposer ici. Il suffirait alors d'appliquer les résultats obtenus à (F , q) construit ci-dessus.)

Soit E le sous-ensemble de $\prod_{s\in S-\{0\}} E_s$ des $(x_s)_{s\in S-\{0\}}$ tels que

$$\sup_{s\in S-\{0\}} p_s(x_s) < +\infty ,$$

normé par $p(x) = \sup_{s\in S-\{0\}} p_s(x_s)$. On a $F \subset E$ et $p(x) = q(x)$ pour $x \in F$. Si $X = \{x \mid x \in E , p(x) \in S\}$, on a $F \subset X \subset E$. Soient alors H un espace vectoriel maximal, vérifiant $F \subset H \subset X$, et r la restriction de p à H ; on a $S = \dot{N}_q \subset \dot{N}_r \subset S$, donc $S = \dot{N}_r$. Montrons que (H , r) est complet r-sphérique, ce qui achèvera la démonstration. Supposons le contraire, soit une suite de boules fermées emboîtées B_n de H , telle que $\cap B_n = \emptyset$. B_n étant de centre x_n et de rayon r_n , soit

$$\tilde{B}_n = \{x \mid x \in E , p(x - x_n) \leqslant r_n\} .$$

On a $B_n = H \cap \tilde{B}_n$ et, comme d'après la proposition 7, (E , p) est complet p-sphérique, il existe $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$. Pour tout y dans H , $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n + y = \emptyset$; donc il existe n tel que $0 \notin B_n + y$. Par suite, on a aussi $0 \notin \tilde{B}_n + y$, et p est constant sur $\tilde{B}_n + y$, ce qui entraîne

$$p(x_0 + y) = p(x_0 + x^{(n)}) \in S .$$

On en déduit que, pour tout λ dans K et y dans H , $p(\lambda x_0 + y) \in S$ et que $H \subset H + Kx_0 \subset X$, $H + Kx_0 \neq H$, ce qui est absurde, H étant maximal.

Remarquons enfin que la condition (1), donc les autres, ne peut être vérifiée que quand K est à valuation discrète, pour un S tel que $N_v S \subset S$. De la proposition 17 et de l'exemple suivant la proposition 15, on tire que $\hat{\Omega}_p$ (complétion de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$) n'est pas maximalement complet.

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 7b, 33 p. 11 février 1965

SEMI-NORMES ET ENSEMBLES CONVEXES DANS UN ESPACE VECTORIEL SUR UN CORPS VALUÉ ULTRAMÉTRIQUE

par Jean-Pierre CARPENTIER

Deuxième partie

Ensembles convexes dans un espace vectoriel

Cette deuxième partie est consacrée aux propriétés algébriques des convexes. La notion de convexe dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique a été introduite par MONNA [6] (*). Notre but est d'exposer, de généraliser, parfois de rectifier les résultats donnés par MONNA, et d'en apporter quelques autres.

Nous donnons dans le § II.1 une définition équivalente à celle de MONNA. Nous étudions, dans le § II.2, le problème des jauges des convexes, et les résultats obtenus sont appliqués, dans le § II.3, à l'étude de la structure des convexes. Dans le § II.4 sont définies les notions d'enveloppe convexe, de segment, de séparation de deux points par un hyperplan, tandis que le § II.5 donne des théorèmes algébriques de séparation des convexes. Une troisième partie abordera l'étude des convexes dans un espace vectoriel topologique.

Notations. - Ce sont celles de la première partie :

- (K, v) désigne un corps valué ultramétrique.
- $A = \{x \mid x \in K , v(x) \leq 1\}$ est son anneau des entiers.
- $\mathfrak{I} = \{x \mid x \in K , v(x) < 1\}$ est l'idéal propre maximum de A, et $k = A/\mathfrak{I}$ est le corps résiduel de K ; l'indice de K est $\operatorname{card} k$.
- E, F désignent des espaces vectoriels sur K.

II.1 Définitions des convexes.

Nous nous limitons dans ce qui suit à définir et à étudier les convexes dans un espace vectoriel sur K. On définirait et étudierait sans peine les convexes dans un espace affine, mais ce serait alourdir inutilement l'exposé puisque ces convexes sont ceux de l'espace vectoriel obtenu en choisissant une origine arbitraire dans l'espace affine.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de la troisième partie.
De plus, les références aux propositions 1 à 17 renvoient à la première partie.

DÉFINITION. - $C \subset E$ est convexe si, pour tout entier n et $x_1\ x_2 \dots x_n \in C$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in A$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$.

Exemples.

Toute sous-variété affine est convexe.

Toute boule d'une semi-norme ultramétrique est convexe : si

$$B_1 = \{x \mid p(x-a) < r\} \qquad \text{et} \qquad B_2 = \{x \mid p(x-a) \leqslant r\}$$

pour $x_1, \dots, x_n \in B_1$ (resp. B_2) et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$$p(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - a) = p(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a)) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| p(x_i - a) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p(x_i - a) ,$$

donc

$$p(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - a) < 1 \quad (\text{resp.} \leqslant 1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B_1 \quad (\text{resp. } B_2) .$$

En particulier, si f est une forme linéaire sur E, l'ensemble des éléments x de E, vérifiant $|f(x)| < r$ (resp. $|f(x)| \leqslant r$), est convexe.

PROPOSITION 18.

(a) L'intersection d'une famille de convexes est convexe.

(b) La réunion d'une famille filtrante croissante de convexes est convexe.

La démonstration est évidente.

Soient E et F des espaces vectoriels sur K, et f une application affine de E dans F.

PROPOSITION 19.

(a) Si $C_1 \subset E$ est convexe, $f(C_1)$ est convexe.

(b) Si $C_2 \subset F$ est convexe, $f^{-1}(C_2)$ est convexe.

Démonstration.

(a) Soient $y_1, \dots, y_n \in f(C_1)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Il existe $x_1, \dots, x_n \in C_1$ tels que $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$; alors,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) .$$

C_1 étant convexe et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C_1$, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in f(C_1)$; $f(C_1)$ est convexe.

(b) Si $x_1 , \ldots , x_n \in f^{-1}(C_2)$, $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n \in A$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in f^{-1}(C_2) \; ; \qquad \text{en effet} \quad f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

qui est élément de C_2 , puisque $f(x_i) \in C_2$ pour tout i , et que C_2 est convexe.

COROLLAIRE (PROPOSITION 20). - <u>Si</u> $C \subset E$ <u>est convexe,</u> $x \in C$, $\alpha \in K$, <u>alors</u> $C + x$ <u>et</u> αC <u>sont convexes.</u>

On applique le (a) de la proposition précédente à une translation ou à une homothétie.

PROPOSITION 21.

(a) <u>Si</u> C_i <u>est convexe dans l'espace vectoriel</u> E_i , <u>alors</u> $\prod_{i \in I} C_i$ <u>est convexe dans</u> $\prod_{i \in I} E_i$.

(b) <u>Si</u> C_1 <u>et</u> C_2 <u>sont convexes dans</u> E , $C_1 + C_2$ <u>est convexe dans</u> E .

<u>Démonstration.</u>

(a) En effet $\prod_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} pr_i^{-1}(C_i)$, et on applique les propositions 18 et 19.

(b) $C_1 + C_2$ est l'image de $C_1 \times C_2$ par l'application de $E \times E$ dans E : $(x , y) \longrightarrow x + y$. On applique (a) et la proposition 19.

PROPOSITION 22. - <u>Si</u> $C \subset E$ <u>et</u> $0 \in C$, C <u>est convexe si et seulement si c'est un sous-A-module de</u> E .

<u>Démonstration.</u> - Si C est convexe et si $x_1 , x_2 \in C$ et $\lambda_1 , \lambda_2 \in A$, on a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2).0 ,$$

donc élément de C , puisque $1 - \lambda_1 - \lambda_2 \in A$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) = 1$.

Si C est un sous-A-module de E , pour $x_1 , \ldots , x_n \in C$ et $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n \in A$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est élément de C , donc C est a fortiori convexe.

COROLLAIRE 1 (PROPOSITION 23). - Si C est convexe non vide, il existe un sous-A-module de E unique, M, dont il est le translaté.

Démonstration. - Soit un x dans C ; $C - x = M$ est un convexe contenant 0, donc un sous-A-module, et $C = x + M$. Si alors $C = x' + M'$, on a $x + M = x' + M'$, donc $x - x' + M = M'$, $x - x' + 0 \in M'$, et $M = M' - x + x' = M'$.

Remarques. - La translation convenant n'est pas unique : toutes celles définies par un x dans C conviennent.

On voit que les convexes se présentent comme des sortes de "sous-espaces affines" sur l'anneau A.

COROLLAIRE 2 (PROPOSITION 24). - Pour que $C \subset E$ soit convexe, il faut et il suffit que, pour tout x_1, x_2, x_3 éléments de C, et λ_1, λ_2, λ_3 éléments de A avec $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$, on ait $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i$ élément de C.

Cette proposition précise la définition. (Voir aussi II.4.)

Démonstration. - En effet, si C est convexe, il a cette propriété.

Réciproquement, soient $x_0 \in C \neq \emptyset$ et $M = C - x_0$. M est un sous-A-module de E, car si y_1, $y_2 \in M$ et λ_1, $\lambda_2 \in A$, on a $y_1 = x_1 - x_0$, $y_2 = x_2 - x_0$, où x_1 x_2 est élément de C et

$$z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 ;$$

par suite, z est élément de C, et $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ appartient à $C - x_0 = M$.

Remarque. - A. F. MONNA [6] donne comme définition d'un convexe de E, la propriété exprimée par le corollaire 1 de la proposition 22. Cependant, l'intérêt de celle que nous avons donnée est d'être la traduction immédiate d'une définition valable tant dans le cas archimédien que dans le cas ultramétrique.

Si K est un corps valué et si $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$ ($\infty \geqslant \alpha > 0$), posons, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$:

$$N_\alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^\alpha} \qquad \text{si } \alpha < +\infty ,$$

$$N_\alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sup|\lambda_i| \qquad \text{si } \alpha = +\infty .$$

Si E est un espace vectoriel sur (K, v), et $\alpha = \varphi_v$ (voir 1ère partie, I.1.1), $C \subset E$ est convexe, si : Pour tout n, $x_1, \ldots, x_n \in C$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $N_\alpha(\{\lambda_i\}) \leqslant 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C .$$

C'est en effet manifestement notre définition dans le cas ultramétrique. D'autre part, il est manifeste que cette notion ne dépend que de la topologie de K : elle ne change pas si on remplace la valeur absolue v sur K par une valeur absolue équivalente v^α ; or si $K \subset \underset{\sim}{C}$, $\sum \lambda_i = 1$ et $\sum |\lambda_i| = 1$, les λ_i sont réels et positifs, ce qui ramène sans difficulté à la définition connue.

Remarquons enfin que, si K est un corps discret, $A = K$, et les convexes sont seulement les variétés affines.

La proposition suivante décrit les convexes de K comme espace vectoriel sur K, et par suite ceux des espaces vectoriels de dimension 1 dont nous verrons l'importance au II.4.

PROPOSITION 25. - Une partie de K est convexe si, et seulement si, c'est une boule ouverte ou fermée, ou $\emptyset$, ou K.

Les boules ouvertes ou fermées, K, $\emptyset$, sont convexes d'après la remarque suivant la définition des convexes.

Si C est un convexe contenant 0, C est un A-module, donc $C = A.C = \bigcup_{x \in C} xA$ qui est une boule (ouverte ou fermée) comme union de boules concentriques, sauf si c'est K entier. Enfin, si C est différent de $\emptyset$, il est translaté d'un tel convexe ; c'est : ou une boule, ou K.

II.2 Liaison entre semi-normes et convexes : Jauges des convexes.

Voir [6].

DÉFINITION. - Si B est contenu dans E, B est absorbant si, pour tout x de E, il existe M tel que, pour tout λ vérifiant $|\lambda| \geqslant M$, on ait $x \in \lambda A$.

PROPOSITION 26. - Si C est convexe, C absorbant est équivalent à C contient 0 et engendre E.

On a vu précédemment que les boules ouvertes ou fermées des semi-normes ultramétriques étaient convexes. Les résultats qui suivent vont donner des réciproques de cette proposition. Remarquons que les boules ouvertes ou fermées de rayon non nul sont absorbantes.

THÉORÈME (PROPOSITION 27). - Pour tout convexe C contenant 0 et absorbant, il existe au moins une semi-norme ultramétrique p telle que :

$$\text{(J)} \qquad \{x \mid p(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid p(x) \leqslant 1\} ,$$

et l'ensemble des semi-normes vérifiant (J) possède un élément maximum et un élément minimum (pour l'ordre déduit de celui de $\underset{\sim}{R}$). Toutes les semi-normes vérifiant (J) sont équivalentes.

DÉFINITION. - C étant un convexe absorbant, on appelle jauge de C toute semi-norme ultramétrique vérifiant (J). (En particulier, il y aura une jauge maximum et une jauge minimum d'après le théorème, pour un convexe absorbant donné.)

Remarque. - Pour étudier un convexe quelconque, on se ramènera au cas où C est absorbant, en opérant d'abord une translation pour obtenir $0 \in C$, puis en considérant C comme partie de l'espace vectoriel qu'il engendre.

Démonstration. - Soit donc une semi-norme p vérifiant (J).

Puisque $C \subset \{x \mid p(x) \leqslant 1\}$, si $\frac{x}{\lambda} \in C$, on a $p(\frac{x}{\lambda}) \leqslant 1$, donc $p(x) \leqslant |\lambda|$. Par suite : $p(x) \leqslant \inf\{|\lambda| \mid x \in \lambda C\}$.

Puisque $C \supset \{x \mid p(x) < 1\}$, si $\frac{x}{\lambda} \notin C$, on a $\frac{p(x)}{|\lambda|} > 1$ et donc $p(x) \geqslant \sup\{|\lambda| \mid x \notin \lambda C\}$.

Le théorème sera démontré quand on aura vu que

$$p_1(x) = \inf\{|\lambda| \mid x \in \lambda C\} \quad \text{et} \quad p_2(x) = \sup\{|\lambda| \mid x \notin \lambda C\}$$

sont des semi-normes qui vérifient (J).

Remarquons alors que si la valuation de K est dense, on a $p_1(x) = p_2(x)$, tandis que si K est à valuation discrète à valeurs sur le groupe multiplicatif engendré par ρ $(0 < \rho < 1)$ [l'application de K^* dans ce groupe étant surjective], on a $p_2(x) = \rho p_1(x)$. Ces deux résultats s'obtiennent en remarquant que $\{|\lambda| \mid x \in \lambda C\}$ et $\{|\lambda| \mid x \notin \lambda C\}$ définissent une "coupure" sur l'ensemble des valeurs prises par $|\lambda|$ pour $\lambda \in K$ (cf. proposition 22). Il suffit donc toujours de vérifier que p_1 est une semi-norme. Or,

$$\begin{aligned} p_1(\mu x) &= \inf\{|\lambda| \mid \mu x \in \lambda C\} \\ &= \inf\{|\lambda| \mid x \in \lambda/\mu\, C\} = \inf\{|\nu\mu| \mid x \in \nu C\} \\ &= |\mu|\, p_1(x) \quad , \end{aligned}$$

et si x et y sont donnés avec $p_1(x) \geqslant p_1(y)$ par exemple pour $\lambda \in K$ tel que $x \in \lambda C$ et $y \in \lambda C$, on a $x + y \in \lambda C$, donc :

$$p_1(x + y) \leqslant \inf\{|\lambda| \mid x \in \lambda C \ , \ y \in \lambda C\} .$$

Alors si K est à valuation discrète, pour λ tel que $|\lambda| = p_1(x) \geqslant p_1(y)$, on a $x \in \lambda C$ et $y \in \lambda C$, donc

$$p_1(x + y) \leqslant |\lambda| = \max(p_1(x) , p_1(y)) .$$

Si K est à valuation dense, pour tout λ tel que $|\lambda| > p_1(x)$, on a $|\lambda| > p_1(y)$, et facilement alors $x \in \lambda C$, $y \in \lambda C$, donc

$$p_1(x + y) \leqslant |\lambda| .$$

Comme la valuation est dense, à la limite on obtient :

$$p_1(x + y) \leqslant \max(p_1(x) , p_1(y)) .$$

Enfin,

$$C \subset \{x \mid p_1(x) \leqslant 1\}$$

car $x \in C$ entraîne $p_1(x) \leqslant |1| = 1$.

$$\{x \mid p_1(x) < 1\} \subset C$$

car si $p_1(x) < 1$, on a un λ tel que $|\lambda| < 1$ et $x \in \lambda C$, donc aussi a fortiori $x \in C$.

De même,

$$C \subset \{x \mid p_2(x) \leqslant 1\}$$

car si $x \in C$, on a $\sup\{|\lambda| \mid x \notin \lambda C\} \geqslant 1$.

$$C \supset \{x \mid p_2(x) < 1\}$$

car si $\sup\{|\lambda| \mid x \notin \lambda C\} < 1$, c'est que $x \in 1.C = C$. Enfin p_1 et p_2 , donc toutes les jauges, sont équivalentes.

Le théorème est donc démontré. En outre :

COROLLAIRE 1 (PROPOSITION 28). - Si K est à valuation dense, un convexe absorbant possède une jauge unique.

COROLLAIRE 2 (PROPOSITION 29). - Si K est à valuation discrète, pour tout convexe absorbant C , on a

$$C = \{x \mid p_1(x) \leqslant 1\} \quad \text{où } p_1 \text{ est la jauge maximum de } C ,$$

$$C = \{x \mid p_2(x) < 1\} \quad \text{où } p_2 \text{ est la jauge minimum de } C ,$$

et $p_2 = \rho p_1$. En outre il existe des jauges p , telles que

$$C = \{x \mid p(x) \leqslant 1\} = \{x \mid p(x) < 1\} .$$

Démonstration. - Puisque $p_2 = \rho p_1$, on a

$$\{x \mid p_1(x) \leqslant 1\} = \{x \mid p_2(x) < 1\}$$

facilement, compte tenu des relations (J) pour p_1 et p_2 , on obtient les égalités du corollaire. Si enfin $\rho < k < 1$, et $p = kp_1$, on a immédiatement

$$p(x) \leqslant 1 \quad \text{équivalent à} \quad p_1(x) \leqslant 1$$

et

$$p(x) < 1 \quad \text{équivalent à} \quad \rho p_1(x) < 1 \; .$$

Remarque. - Dans le cas d'une valuation discrète, toutes les fonctions kp_1 avec $k \in (\rho , 1)$ sont des jauges. Ce ne sont pas les seules en général. Il existe des jauges différentes de p_1 et p_2 , p , vérifiant $N_p = N_v$: ainsi dans $K \times K$, si $C = \{(\lambda , \mu) \mid |\lambda| \leqslant 1 , |\mu| \leqslant 1\}$, $p(\lambda , \mu) = \sup(|\lambda| , \rho|\mu|)$ est une jauge de C , différente de p_1 et p_2 et telle que $N_p = N_v$. (On peut voir qu'il en est ainsi pour tous les convexes non vides ne contenant pas d'hyperplan.) On peut voir que, dans le cas où C ne contient pas d'espace de codimension finie, il existe des jauges p , telles que N_p ait d'autres points d'accumulation que 0 .

Si p est une semi-norme et si C est la boule unité fermée de p , la jauge maximum p_1 de C est une sorte de régularisée de p , équivalente à p ; p et p_1 sont des jauges de C .

Si $N_p = N_v$, p est la jauge maximum de sa boule unité fermée, et aussi la jauge minimum de sa boule unité ouverte.

On a utilisé dans la démonstration la partition de K en deux ensembles : $\{\lambda \mid \lambda \in K , x \in \lambda C\}$, $\{\lambda \mid \lambda \in K , x \notin \lambda C\}$. Le second de ces ensembles est une boule de centre 0 : c'est en effet un A-module de K de manière immédiate. Il en résulte que $\{|\lambda| \mid \lambda \in K , x \in \lambda C\}$ et $\{|\lambda| \mid \lambda \in K , x \notin \lambda C\}$ sont disjoints (le premier "saturé" supérieurement, le second inférieurement, dans l'ensemble des valeurs absolues de K , d'où la coupure dont on a parlé).

Pour préciser davantage la relation (J) quand K est à valuation dense, nous allons devoir faire intervenir la structure de $\{\lambda \mid \lambda \in K , x \in \lambda C\}$ avec plus de précision.

DÉFINITIONS.

Un convexe de K est dit m-ouvert si c'est vide, K ou une boule ouverte (c'est-à-dire $\{x \mid |x - x_0| < r\}$ pour $x_0 \in K$ et $r \in \underline{R}^+$ convenables).

Un convexe de K est dit m-fermé si c'est vide, K ou une boule fermée (c'est-à-dire $\{x \mid |x - x_0| \leqslant r\}$ pour $x_0 \in K$ et $r \in \underline{R}^+$ convenables).

Il est alors évident que les m-ouverts (respectivement les m-fermés) sont transformés en m-ouverts (resp. m-fermés) par les bijections affines de K. Ce qui permet de définir les m-ouverts ou les m-fermés d'une droite à l'aide d'un paramétrage affine par transport de structure : le résultat obtenu ne dépend pas du paramétrage. Alors :

DÉFINITIONS.

<u>Un convexe de E est dit m-ouvert</u> (resp. m-fermé) <u>autour d'un point si son intersection avec toute droite passant par ce point est m-ouverte</u> (resp. m-fermée) <u>dans cette droite.</u>

<u>Un convexe de E est dit m-ouvert</u> (resp. m-fermé) <u>si son intersection avec toute droite est m-ouverte</u> (resp. m-fermée) <u>sur cette droite.</u>

<u>Remarques.</u> - Un convexe, même différent de $\emptyset$ et E, peut être à la fois m-ouvert et m-fermé. Ainsi dans K, $\{x \mid |x - x_0| < r\}$ est m-ouvert et m-fermé si $r \notin N_V$. En effet on a alors :

$$\{x \mid |x - x_0| < r\} = \{x \mid |x - x_0| \leqslant r\} \quad .$$

Dans E, de dimension supérieure ou égale à deux, un convexe peut n'être ni m-ouvert, ni m-fermé. Il en est ainsi, quand la valuation de K est dense, de

$$\{(x_1 , x_2) \mid (x_1 , x_2) \in K \times K , |x_1| \leqslant 1 , |x_2| < 1\} \quad .$$

PROPOSITION 30. - <u>Un convexe de E, m-ouvert</u> (resp. m-fermé) <u>autour d'un point, est m-ouvert</u> (resp. m-fermé). <u>Par suite, les propriétés</u> "m-ouvert" (resp. " m-fermé") <u>et</u> " m-ouvert autour d'un point" (resp. " m-fermé autour d'un point") <u>sont équivalentes.</u>

<u>Démonstration.</u> - Supposons que C soit m-ouvert (resp. m-fermé) autour de 0. Soit D une droite quelconque : ou $D \cap C = \emptyset$ qui est m-ouvert (resp. m-fermé), ou $D \cap C \neq \emptyset$. Soit alors $x_0 \in D \cap C$; $(D \cap C) - x_0$ sera m-ouvert (resp. m-fermé) dans $D - x_0$ si, et seulement si, $D \cap C$ est m-ouvert (resp. m-fermé) dans D. Or $(D \cap C) - x_0 = (D - x_0) \cap (C - x_0) = (D - x_0) \cap C$, car $x_0 \in C$; C étant m-ouvert (resp. m-fermé) autour de 0, $(D - x_0) \cap C$ est m-ouvert (resp. m-fermé) sur $D - x_0$. Ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 31. - <u>Un convexe m-ouvert, contenant 0, est absorbant.</u>

<u>Démonstration.</u> - Pour tout x dans E, $\{\lambda \mid \lambda x \in C\}$ est une boule ouverte contenant 0, donc s'écrit : $\{\lambda \mid |\lambda| < r\}$ pour un $r \in \mathbb{R}^+$.

Alors, pour $\mu \in K$, avec $|\mu| > \frac{1}{r}$, on a $x \in \mu C$.

PROPOSITION 32. - <u>Si</u> K <u>est à valuation discrète, tout convexe est</u> <u>m-fermé</u> ; <u>tout convexe absorbant est</u> <u>m-ouvert</u>.

<u>Démonstration</u>. - En effet, toute boule de K est une boule fermée, donc tout convexe est m-fermé. Toute boule de K non réduite à un point est m-ouverte. Si C est absorbant, $\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\}$ est non réduit à $\{0\}$, donc est m-ouvert dans K. C est m-ouvert autour de 0, donc m-ouvert.

<u>Remarque</u>. - Les résultats qui suivent sont par suite triviaux pour K à valuation discrète.

THÉORÈME (PROPOSITION 33).

(a) <u>Pour toute semi-norme, les boules ouvertes sont</u> <u>m-ouvertes</u>.

(b) <u>Si un convexe</u> <u>m-ouvert contient</u> 0, <u>il existe une semi-norme</u> p <u>telle que ce convexe soit</u> $\{x \mid p(x) < 1\}$.

<u>Démonstration</u>.

(a) Il suffit de montrer que toute boule ouverte de centre 0 est m-ouverte autour de 0. Or, si $B = \{x \mid p(x) < r\}$ où $r \in \underset{\sim}{R}^+$, pour x donné,

$$\{\lambda \mid \lambda \in K, \lambda x \in B\} = \{\lambda \mid \lambda \in K, p(\lambda x) < 1\} = \{\lambda \mid \lambda \in K, |\lambda| p(x) < 1\} .$$

Si $p(x) = 0$, cet ensemble est K ; si $p(x) \neq 0$, c'est $\{\lambda \mid \lambda \in K, |\lambda| < 1/p(x)\}$, et c'est donc une boule ouverte de K : B est m-ouvert.

(b) Reprenons la démonstration de la proposition 27. Nous allons montrer que, si C est m-ouvert et contient 0, $C = \{x \mid p_2(x) < 1\}$. Ce résultat est déjà connu si K est à valuation discrète. Si K est à valuation dense, nous utiliserons une caractérisation des m-ouverts.

LEMME (PROPOSITION 34).

(a) C <u>convexe absorbant est</u> <u>m-ouvert si, et seulement si, pour tout</u> x <u>dans</u> C, <u>il existe</u> $\varepsilon(x)$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}^{*+}$ <u>tel que, pour</u> $\lambda \in K$ <u>avec</u> $|\lambda| < 1 + \varepsilon(x)$, <u>on ait</u> $\lambda x \in C$.

(b) <u>En particulier si</u> K <u>est à valuation dense</u>, C <u>convexe absorbant est</u> <u>m-ouvert si, et seulement si, pour tout</u> x <u>dans</u> C, <u>il existe</u> λ <u>dans</u> K <u>tel que</u> $|\lambda| > 1$ <u>et que</u> λx <u>soit dans</u> C.

A l'aide de ce lemme, on voit que, si $x \in C$ et $p_2(x) = 1$, il existerait $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ et $\lambda x \in C$ avec $p(\lambda x) = |\lambda| > 1$, ce qui est absurde et, compte tenu de (J), démontre le théorème.

Démontrons maintenant le lemme.

(a) Si C est convexe absorbant et m-ouvert pour tout $x \in C$,

$$\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\}$$

est une boule ouverte de rayon $r(x) > 1$; il suffit de poser $\varepsilon(x) = r(x) - 1$.

Réciproquement, si C est convexe absorbant et vérifie la propriété ci-dessus, C est m-ouvert. Pour $x \in E$, $\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\}$ est une boule non réduite à un point, donc ouverte si la valuation est discrète (à moins que ce ne soit K). Si la valuation est dense et que cet ensemble est $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant r\}$ où $r \in \underset{\sim}{R}^+$, l'existence de $\mu \in K$ tel que $|\mu| = r$ est absurde : alors $\mu x \in C$, et il existe $\varepsilon(\mu x) > 0$ tel que, pour $|\lambda| < 1 + \varepsilon(\mu x)$, $\lambda\mu x$ soit dans C. Soit alors, la valuation étant dense, λ tel que $|\lambda| \in \left]1 , 1 + \varepsilon(\mu(x))\right[$; $\lambda\mu x$ est dans C et $|\lambda\mu| > r$, ce qui est absurde. Donc, $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant r\} = \{\lambda \mid |\lambda| < r\}$.

Si $\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\} = \{\lambda \mid |\lambda| < r\}$ où $r \in \underset{\sim}{R}^+$, il n'y a rien à démontrer.

(b) On applique (a), en remarquant qu'il existe effectivement $\lambda \in K$, $|\lambda| \in \left]1 , 1 + \varepsilon(x)\right[$ pour obtenir :

C convexe absorbant m-ouvert $\Longrightarrow \forall x \in C , \exists \lambda \in K , |\lambda| > 1$ et $\lambda x \in C$.

Et si, pour tout x dans C, il existe $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ et $\lambda x \in C$, on pose $\varepsilon(x) = |\lambda| - 1$, et, pour $|\mu| < 1 + \varepsilon(x) = |\lambda|$, on a $\mu x = \frac{\mu}{\lambda} \lambda x \in C$. Il suffit d'appliquer (a).

THÉORÈME (PROPOSITION 35). - C'est l'analogue du théorème précédent.

(a) Pour toute semi-norme, les boules fermées sont m-fermées.

(b) Si un convexe absorbant C est m-fermé, il existe une semi-norme p telle que $C = \{x \mid p(x) \leqslant 1\}$.

Démonstration.

(a) Il suffit de montrer qu'une boule de centre 0 est m-fermée autour de 0. Or, si $x \in E$,

$$\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\} = \{\lambda \mid \lambda \in K , p(\lambda x) \leqslant 1\} .$$

Si $p(x) = 0$, cet ensemble est K ; si $p(x)$ est non nul, c'est l'ensemble : $\{\lambda \mid \lambda \in K , |\lambda| \leqslant 1/p(x)\}$; c'est donc toujours un m-fermé.

(b) Nous allons montrer que $C = \{x \mid p_1(x) \leqslant 1\}$, résultat déjà connu si K est à valuation discrète. Supposons que K soit à valuation dense, et soit $x \in E$ tel que $p_1(x) = 1$. Alors $B = \{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda x \in C\}$ est m-fermé, donc est un disque fermé. De plus il contient le disque ouvert unité, puisque $|\lambda| < 1$ entraîne $p(\lambda x) < 1$, donc $\lambda x \in C$; B peut donc être considéré de centre 0, et son rayon est supérieur ou égal à tout $|\lambda|$, pour $|\lambda| < 1$; la valuation étant dense, il est supérieur ou égal à 1 ; donc $|\lambda| \leqslant 1$ entraîne $\lambda x \in C$. En particulier x est dans C, et, compte tenu de (J), le théorème est démontré.

Achevons ce paragraphe avec quelques propriétés des m-ouverts et m-fermés.

PROPOSITION 36. - Si $f : E \longrightarrow F$ est une application affine, et si C, contenu dans F, est m-ouvert (resp. m-fermé), $f^{-1}(C)$ est m-ouvert (resp. m-fermé).

Démonstration. - Si C est une boule ouverte (resp. fermée) pour la semi-norme p sur F, $f^{-1}(C)$ est une boule ouverte (resp. fermée) pour la semi-norme sur E : $p \circ f$.

PROPOSITION 37. - Si $f : E \longrightarrow F$ est une application affine, et si C contenu dans E est un convexe m-ouvert, $f(C)$ est un convexe m-ouvert dans $f(E)$. Ainsi, si C est un convexe m-ouvert, $C + x$, où $x \in E$, λx, où $\lambda \in K - \{0\}$, sont des convexes m-ouverts.

Démonstration. - La proposition précédente permet de conclure que $C + x$, λC $(\lambda \neq 0)$ sont m-ouverts quand C l'est. On peut alors supposer que $0 \in C$, donc que C est absorbant dans E, et par suite $f(C)$ absorbant dans $f(E)$. Si K est à valuation discrète, $f(C)$ est m-ouvert. Si K est à valuation dense, appliquons le lemme (proposition 33) : pour $y \in f(C)$, soit $x \in C$ tel que $y = f(x)$. Il existe $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$, $\lambda x \in C$, donc $\lambda f(x) = \lambda y \in f(C)$. C est m-ouvert.

PROPOSITION 38. - Si C_1 et C_2 sont deux convexes m-ouverts de E, $C_1 + C_2$ est un convexe m-ouvert de E. Si C_i est un convexe m-ouvert de E_i, et I fini : $\prod_{i \in I} C_i$ est un convexe m-ouvert de $\prod_{i \in I} E_i$.

Démonstration. - Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de démontrer la seconde assertion. Si on suppose $0 \in C_i$, et C_i boule unité ouverte de p_i, $\prod_{i \in I} C_i$ est la boule unité ouverte de $\sup_{i \in I} p_i = p$ semi-norme sur $\prod_{i \in I} E_i$.

Nous ferons encore les remarques suivantes : Si C est un convexe m-fermé, $C + x$, λC, sont des convexes m-fermés, mais l'analogue des propositions 37 et 38, pour les m-fermés, est faux. Il est facile de voir que $f(C)$ est m-fermé si, et seulement si, $C + \operatorname{Ker} f$ est m-fermé. Si f est injectif, $f(C)$ est m-fermé : un sous-espace vectoriel est m-fermé. La somme de deux convexes m-fermés n'est pas en général m-fermée, on a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 39. - <u>Quand K est maximalement complet, si C_1 et C_2 sont des convexes m-fermés, C_1 étant contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, $C_1 + C_2$ est un convexe m-fermé.</u>

Supposons $0 \in C_1$, $0 \in C_2$; on remarque d'abord que C_1 est alors la somme directe d'un sous-espace vectoriel et d'un module de type fini (voir II.3), ce qui ramène à démontrer la propriété quand C_1 est une droite, ou un module monogène. Dans les deux cas, soient $z \in C_1 + C_2$ et une suite de $\lambda_n \in K$, $|\lambda_n|$ croissant et $\lambda_n z \in C_1 + C_2$. On va montrer que si $|\lambda_n| \to |\lambda|$, on a aussi $\lambda z \in C_1 + C_2$, ce qui montrera que $\{\lambda \mid \lambda \in K , \lambda z \in C_1 + C_2\}$ est : ou K , ou une boule fermée. Posons

$$C_1^n = \{x \mid x \in C_1 , \exists y \in C_2 , x + y = \lambda_n z\} = C_1 \cap (C_2 + \lambda_n z) :$$

c'est une boule fermée de C_1 , ainsi que $D^n = \frac{C_1^n}{\lambda_n}$. De plus $D_{n+1} \subset D_n$, car si $x \in D_{n+1}$, il existe y tel que : $y \in C_2$, $\lambda_{n+1} x \in C_1$, $\lambda_{n+1} z = y + \lambda_{n+1} x$; alors $\lambda_n z = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} y + \lambda_n x$ et $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} y \in C_2$, $\lambda_n x \in C_1$, donc $x \in D_n$. Il en résulte, K étant maximalement complet et l'espace engendré par C_1 de dimension 1 , que $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Si $|\lambda_n| \to |\lambda|$, C_1 étant m-fermé et $\lambda_n x_0 \in C_1$, on a $\lambda x_0 \in C_1$. Soit alors $y_n \in C_2$ tel que $z_n = \lambda_n x_0 + y_n$, on a

$$y_n = \lambda_n(z - x_0) \quad \text{et} \quad \lambda_n(z - x_0) \in C_2 \qquad \text{pour tout } n ;$$

C_2 étant m-fermé, $\lambda(z - x_0) \in C_2$ aussi et $\lambda z = \lambda x_0 + \lambda(z - x_0) \in C_1 + C_2$.

Il résulte de cette proposition que, si Ker f est de dimension finie et K maximalement complet, l'image d'un m-fermé par f est m-fermée. Par contre, si Ker f n'est pas complet sphérique pour la jauge de C , supposé absorbant, ceci n'est plus vrai. Nous allons en donner un exemple.

Reprenons le (2) ==> (1) de la proposition 4 du I.2. Soit r le "inf" des rayons des B_n ; si f est l'application canonique de F sur $F/E = G$, et C la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans F , elle ne rencontre pas $x_0 + E$, donc $f(x_0) \notin f(C)$. Pourtant, pour tout $\lambda < 1$, $\lambda x_0 + E \cap C \neq \emptyset$ et $\lambda f(x_0) \in f(C)$: $f(C)$ n'est pas fermé.

PROPOSITION 40. - <u>Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes, tous m-fermés, alors $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un convexe m-fermé. Il existe donc un plus petit convexe m-fermé</u>

contenant une partie donnée. Si C est un convexe absorbant, on voit que le plus petit convexe m-fermé contenant C est $\{x \mid p_1(x) \leqslant 1\}$.

De manière analogue, l'union d'une famille filtrante de convexes m-ouverts est m-ouverte (appliquer la proposition 33). Le plus grand convexe m-ouvert, contenu dans un convexe absorbant et contenant C, est $\{x \mid p_2(x) < 1\}$ (il est non seulement maximal à avoir la propriété, mais maximum).

II.3. Structure des convexes dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique maximalement complet.

Soient K un corps valué ultramétrique maximalement complet et E un espace vectoriel sur K. Soient C un convexe de E contenant 0, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par C. D'après la proposition 26, C est absorbant dans F, et d'après la proposition 27, il existe dans F une semi-norme p telle que

$$\{x \mid x \in F , p(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid x \in F , p(x) \leqslant 1\} .$$

C étant un A-module, on peut alors appliquer la proposition 10.

Il existe une famille de projections sur les droites engendrées par les vecteurs d'un sous-ensemble T, de $E - p^{-1}(0)$, telle que :

1° $\pi_t(t') = 0$ pour $t \neq t'$, t et $t' \in T$;

2° T admet une partition en deux ensembles T_1 et T_2, éventuellement vides, telle que

$$C = \{x \mid x \in F ; \forall t \in T_1 , p(\pi_t(x)) \leqslant 1 ; \forall t \in T_2 , p(\pi_t(x)) < 1\} ,$$

ce que l'on peut encore exprimer en disant :

$$C = \{x \mid x \in F ; \forall t \in T , \pi_t(x) \in C\} .$$

En effet si $x \in C$, pour tout $t \in T$, on a $p(\pi_{t'}(\pi_t(x))) = 0 < 1$ quand $t \neq t'$, et $p(\pi_t \circ \pi_t(x)) \leqslant 1$ si $t \in T_1$, $p(\pi_t \circ \pi_t(x)) < 1$ si $t \in T_2$. Dans les deux cas, on voit que $\pi_t(x) \in C$. Inversement, si $\pi_t(x) \in C$ pour tout $t \in T$, on a, pour $t \in T_1$, $p(\pi_t(\pi_t(x))) = p(\pi_t x) \leqslant 1$ et, pour $t \in T_2$, $p(\pi_t(\pi_t(x))) = p(\pi_t(x)) < 1$, ce qui entraîne $x \in C$.

Introduisons un supplémentaire G de F dans E, et une base U de G. Soient φ la projection de E sur F parallèlement à G, et ψ la projection de E sur G parallèlement à F. Soit π_u la projection de G sur la droite engendrée par u parallèlement au sous-espace engendré par $U - \{u\}$. Enfin, soient i_t et i_u, pour $t \in T$ et $u \in U$, les injections canoniques des droites engendrées par $t \in T$ et $u \in U$, dans E. Posons :

$$\bar{\pi}_t = i_t \circ \pi_t \circ \varphi \qquad \text{pour } t \in T \ ,$$

$$\bar{\pi}_u = i_u \circ \pi_u \circ \psi \qquad \text{pour } u \in U \ .$$

On peut alors écrire, avec $V = T \cup U$, puisque $x \in F$ équivaut à $\bar{\pi}_u(x) = 0$ pour tout $u \in U$,

$$C = \{x \mid x \in E \ , \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x) \in C\} \ ,$$

et l'on a

$$\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_{v'} = 0 \qquad \text{si } v \neq v' \ ,$$

comme il est immédiat, et

$$\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_v = \bar{\pi}_v \ .$$

On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME (PROPOSITION 41) [K <u>est maximalement complet dans tous les énoncés de ce paragraphe</u>]. - <u>Si</u> C <u>est un ensemble convexe de</u> E, <u>contenant</u> 0, <u>il existe un sous-ensemble</u> V <u>de</u> $E - \{0\}$ <u>et une famille d'applications de</u> E <u>dans</u> E : $(\bar{\pi}_v)_{v\in V}$ <u>telle que</u>

1° $\operatorname{Im} \bar{\pi}_v$ <u>soit la droite engendrée par</u> v,

2° $\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_{v'} = 0$ <u>si</u> $v \neq v'$, <u>et</u> $\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_v = \bar{\pi}_v$,

3° $C = \{x \mid x \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x) \in C\}$.

On voit que $C = \{x \mid x \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x) \in \bar{\pi}_v(C)\}$ puisqu'il résulte en particulier du théorème que $\bar{\pi}_v(C) = C \cap \bar{\pi}_v(E) = C \cap Kv$. Si alors C' est un convexe quelconque de E, non vide, soit C un convexe contenant 0 et translaté de C' : $C' = C + x_0$. On a

$$\begin{aligned} C' = C + x_0 &= \{x + x_0 \mid x \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x) \in \bar{\pi}_v(C)\} \\ &= \{x + x_0 \mid x + x_0 \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x + x_0) \in \bar{\pi}_v(C + x_0)\} \\ &= \{y \mid y \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(y) \in \bar{\pi}_v(C')\} \ . \end{aligned}$$

On a donc le corollaire suivant, le même résultat étant évident pour $C' = \emptyset$.

COROLLAIRE 1 (PROPOSITION 42). - <u>Si</u> C <u>est un ensemble convexe de</u> E, <u>il existe un sous-ensemble</u> V <u>de</u> $E - \{0\}$ <u>et une famille d'applications de</u> E <u>dans</u> E : $(\bar{\pi}_v)_{v\in V}$ <u>telle que</u>

1° $\operatorname{Im} \bar{\pi}_v$ <u>soit la droite engendrée par</u> v,

2° $\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_{v'} = 0$ <u>si</u> $v \neq v'$, <u>et</u> $\bar{\pi}_v \circ \bar{\pi}_v = \bar{\pi}_v$,

3° $C = \{x \mid x \in E \ ; \ \forall\, v \in V : \bar{\pi}_v(x) \in \bar{\pi}_v(C)\} = \bigcap_{v\in V} \bar{\pi}_v^{-1} \circ \bar{\pi}_v(C)$.

COROLLAIRE 2 (PROPOSITION 43). - Si C est un ensemble convexe de E, il existe un sous-ensemble linéairement indépendant de E^* : Φ, et des convexes de K : $(C_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$, tels que

$$C = \{x \mid x \in E , \forall \varphi \in \Phi , \varphi(x) \in C_\varphi\} = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \varphi^{-1}(C_\varphi) \;.$$

En outre, C est m-ouvert si, et seulement si, tous les C_φ sont m-ouverts ; C est m-fermé si, et seulement si, tous les C_φ sont m-fermés.

La première partie est une dévaluation du corollaire 1 : on associe à chaque $\overline{\pi}_v$ une application linéaire de E dans K, φ_v, définie par $\overline{\pi}_v(x) = \varphi_v(x).v$. On pose $C_{\varphi_v} = \varphi_v(C)$, et la vérification de la première partie est évidente.

Les deux remarques finales peuvent s'énoncer dans la situation du corollaire 1 ; nous utiliserons le passage de l'une à l'autre sans le rappeler.

On a $C_\varphi = \varphi(C)$, donc on sait déjà que :
- Si C est m-ouvert, C_φ est m-ouvert, pour tout $\varphi \in \Phi$ (proposition 37).
- Si C_φ est m-fermé, $\varphi^{-1}(C_\varphi)$ est m-fermé (proposition 36).
- Si $(C_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ est m-fermé, $C = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \varphi^{-1}(C_\varphi)$ est m-fermé (proposition 40).

Il reste à vérifier :
- Si C est m-fermé, $\varphi(C)$ est m-fermé ; ce qu'il suffit de voir quand $0 \in C$, et est vrai alors puisque $\overline{\pi}_v(C) = C \cap \overline{\pi}_v(E)$ (proposition 40).
- Si, pour tout $\varphi \in \Phi$, C_φ est m-ouvert dans K, C est m-ouvert dans E.

Le cas de la valuation discrète étant trivial, supposons la valuation dense. On peut se ramener au cas $0 \in C$. Alors C_φ m-ouvert entraîne $C_\varphi \neq \{0\}$, donc $G = \{0\}$ et $F = E$: C est absorbant. Soit p sa jauge ; si $x \in C$, soit v_0 un $v \in V$ tel que $p(\overline{\pi}_{v_0}(x))$ soit maximum (voir proposition 10). Tous les $(C_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ étant m-ouverts dans $\overline{\pi}_v(E)$, $\overline{\pi}_v(C)$ est m-ouvert de jauge p dans $\overline{\pi}_v(E)$ (puisqu'égal à $C \cap \overline{\pi}_v(E)$).

On a donc $p(\overline{\pi}_{v_0}(x)) < 1$, donc

$$p(x) = \sup_{v\in V} p(\overline{\pi}_v(x)) = p(\overline{\pi}_{v_0}(x)) < 1 \;.$$

C est une boule ouverte.

En explicitant les C_φ, on peut énoncer le corollaire 2 de la façon suivante (on écarte les φ correspondants aux C_φ égaux à K sans inconvénients) :

COROLLAIRE 2' (PROPOSITION 43'). - Soit C un ensemble convexe de E ; il existe un sous-ensemble linéairement indépendant Φ de E^*, une partition de Φ en deux ensembles Φ_1 et Φ_2 éventuellement vides, une famille $(r_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ d'éléments de R^+ et une famille $(a_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ d'éléments de K, tels que :

$$C = \{x \mid x \in E \,,\ \forall \varphi \in \Phi_1 : |\varphi(x) - a_\varphi| \leqslant r_\varphi \,,\ \forall \varphi \in \Phi_2 : |\varphi(x) - a_\varphi| < r_\varphi\}.$$

Si C est m-ouvert, on peut assurer : $\Phi_1 = \emptyset$, $\Phi_2 = \Phi$.
Si C est m-fermé, on peut assurer : $\Phi_1 = \Phi$, $\Phi_2 = \emptyset$.

Comme conséquence de ces propositions, on voit que, pour qu'une partie X soit contenue dans C, il faut et il suffit que $f(X)$ soit contenue dans $f(C)$ pour tout f ; il suffit en fait de faire la vérification pour une certaine famille de f dont le cardinal n'excède pas la dimension de E et qui ne dépend que de C..

Nous allons regarder le cas où E est de dimension finie.

PROPOSITION 44. - Si E est de dimension finie, et C convexe dans E, il existe d'une part une base de E, $(x_i)_{i\in I}$, et une partition de cette base en quatre ensembles éventuellement vides, I_1, I_2, I_3, I_4, d'autre part, pour $i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$, des éléments α_i de K, pour $i \in I_1 \cup I_2$, des réels strictement positifs tels que :

$$C = \{x \mid x \in E \,,\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

$$\text{avec } \forall i \in I_1 : |\lambda_i - \alpha_i| \leqslant r_i \,,\ \forall i \in I_2 : |\lambda_i - \alpha_i| < r_i \,,\ \forall i \in I_3 : \lambda_i = \alpha_i\}$$

Démonstration. - C'est une conséquence de la proposition 41, puisque dans cette proposition, et d'après la proposition 14, V est une base. Il ne reste plus qu'à séparer les cas, suivant que $\overline{\pi}_V$ est :
- Kv : (I_4),
- réduit à un point : (I_3),
- une boule ouverte : (I_2),
- une boule fermée de rayon non nul : (I_1).

Nous terminons par deux propositions qui sont les traductions des propositions 8 et 15.

PROPOSITION 45. - Pour tout espace vectoriel E sur un corps K à valuation discrète, et pour tout convexe C de E, contenant 0, il existe :

1° Deux espaces vectoriels N et L,

2° Un ensemble I et un sous-espace vectoriel M de l'espace des fonctions de I dans K tendant vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I , M contenant les fonctions à support fini.

3° Un isomorphisme de F sur $N \times L \times M$ qui amène C sur $N \times \{0\} \times B$, où B est le sous-ensemble de M des fonctions partout inférieures ou égales à 1 en valeur absolue.

PROPOSITION 46. - Pour tout espace vectoriel à base dénombrable E sur un corps maximalement complet K , et pour tout convexe C de E contenant 0 , il existe:

1° Deux espaces vectoriels N et L .

2° Une partition de $\mathbb{N}$ en deux ensembles éventuellement vides, I_1 et I_2 , et une suite de nombres réels, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in [\alpha , 1]$, où $0 < \alpha < 1$.

3° M désignant l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang, un isomorphisme de E sur $N \times L \times M$ qui amène C sur $N \times \{0\} \times B$, où B est le sous-ensemble de M vérifiant $|\lambda_n| \leqslant \alpha_n$ pour $n \in I_1$, $|\lambda_n| < \alpha_n$ pour $n \in I_2$.

Remarque. - On pourrait énoncer des propositions analogues dans le cas général, en faisant intervenir des espaces de fonctions bornées.

Démonstrations. - Soient F l'espace vectoriel engendré par C , et L un supplémentaire de F dans E . Soient p la jauge maximum de C dans F et $N = \{x \mid x \in F , p(x) = 0\}$ (sous-espace vectoriel maximum contenu dans C). Soit M un supplémentaire de N dans F : M est normé par p .

Si on suppose maintenant la valuation discrète, on a $N_p = N_v$ et on peut trouver, d'après la proposition 6, une "base orthonormale" de M : $(e_i)_{i\in I}$, avec $p(e_i) = 1$. Si on associe à $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$, on identifie M à un espace de fonctions et l'on vérifie immédiatement que $C \cap M$ a pour image les fonctions partout $\leqslant 1$. La proposition 45 est démontrée.

Supposons maintenant que E soit de dimension dénombrable. Ecrivons $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, où $E_n \subset E_{n+1}$ et E_n de dimension finie. Nous construisons alors par récurrence une base B_n de E_n et une partition de cette base en deux ensembles éventuellement vides, B_n^1 et B_n^2 , tels que :

- $B_{n+1}^1 \supset B_n^1$; $B_{n+1}^2 \supset B_n^2$;
- $\forall e \in B_n^1$: $p(e) = 1$; $\forall e \in B_n^2$: $1 \leqslant p(e) \leqslant \frac{1}{\alpha}$.

Si $C_n = E_n \cap C$,

$$C_n = \{x \mid x \in E_n , x = \sum_{e\in B_n} \lambda_e e , \forall e \in B_n^1 : |\lambda_e| \leqslant 1 , \forall e \in B_n^2 : |\lambda_e| p(e) < 1\} .$$

L'existence de B_1 résulte facilement de la proposition 44. Si B_n^1 et B_n^2 sont construits, définissons B_{n+1}^1 comme une partie maximale ayant les propriétés :

- $B_{n+1}^1 \supset B_n^1$,
- $\forall\, e \in B_{n+1}^1$: $p(e) = 1$ et $e \in C$,
- B_{n+1}^1 a la propriété (π) (voir I.3).

On définit alors B_{n+1} comme une partie maximale vérifiant :

- $B_{n+1} \supset B_n \cup B_{n+1}^1$, $\forall\, e \in B_{n+1}$: $1 \leqslant p(e) \leqslant 1/\alpha$,
- B_{n+1} a la propriété (π).

D'après la démonstration de la proposition 14, B_{n+1} est une base "orthogonale" de E_{n+1}. Si $B_{n+1}^2 = \complement_{B_{n+1}} B_{n+1}^1$, on a $B_{n+1}^2 \supset B_n^2$, puisque $B_{n+1}^1 \cap B_n^2 = \emptyset$ (sinon on aurait $e \in B_{n+1}^2 \cap B_n^2$, donc $e \in C_n$, et pourtant $e = \sum_{f \in B_n} \lambda_f f$ avec $e \in B_n^2$ et $|\lambda_e| = 1$).

Enfin il est évident que $x = \sum_{e \in B_{n+1}} \lambda_e e$ est dans C_{n+1} quand $|\lambda_e| \leqslant 1$ pour $e \in B_{n+1}^1$, et $|\lambda_e| p(e) < 1$ pour $e \in B_{n+1}^2$. Réciproquement, si D est la boule unité ouverte de p, d'après la proposition 11, B_{n+1}^1 a pour image par π une base de C/D sur k ; donc, tout $x \in C$, s'écrit $x = y + \sum_{e \in B_n^1} \mu_e e$ avec $p(y) < 1$, ce qui démontre la proposition puisque B_n^1 est une base orthogonale. On pose alors $\alpha_e = \frac{1}{p(e)}$ et comme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$; le théorème est démontré en indexant par $\underset{\sim}{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, I_1 étant l'ensemble des indices de $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^1$, I_2 l'ensemble des indices de $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^2$.

Remarques. - On peut de ce qui précède déduire des propriétés algébriques des sous-A-modules de E, espace vectoriel sur le corps maximalement complet K. Ainsi, si M est un sous-A-module de type fini, il engendre un espace de type fini : D'après la proposition 44, il est isomorphe à un produit $A^\alpha \times M' \times K^\beta$ où α, β, sont des entiers positifs ou nuls et M' est un produit de sous-A-modules non m-fermés de K ou $\{0\}$ (les sous-A-modules m-fermés de K sont isomorphes à K, à A, ou à $\{0\}$). Un tel module est donc un quotient de $\dot{M}$, donc est de type fini. Comme il est évident que les sous-modules de type fini de K sont m-fermés, c'est que $M' = \{0\}$. Quand la valuation n'est pas triviale, K n'est pas de type fini, donc $\beta = 0$, et M est isomorphe à A^α : c'est un module m-fermé ne contenant pas de droites ; on voit en outre qu'il est libre. Par contre, si C est un convexe absorbant dans E, et que E est complet pour la jauge de C,

C n'est pas libre si E n'est pas de dimension finie (regarder la base de C, et écrire que E est complet pour aboutir à une impossibilité).

II.4 Enveloppes convexes-segment. Partition définie par un hyperplan.

DÉFINITION. - Si B est contenu dans E, on appelle enveloppe convexe de B, le plus petit convexe $c(B)$ contenant B.

Cet ensemble existe, car E est un convexe contenant B et, d'après la proposition 18, $c(B)$ est l'intersection des convexes contenant B. En outre :

PROPOSITION 47. - L'enveloppe convexe de B est l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $x_1, \dots, x_n$ sont dans B, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans A, vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (ou l'ensemble des $\sum_{x\in B} \lambda_x x$, où $\lambda_x = 0$ sauf pour un nombre fini de x, et $\sum_{x\in B} \lambda_x = 1$).

En particulier, si x et y sont des éléments de E, on appelle segment xy, l'ensemble $c(\{x, y\})$, et :

$$c(\{x, y\}) = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in A \text{ et } \lambda + \mu = 1\} .$$

Il est immédiat que, dans K, $c(\{x, y\})$ est la boule fermée de centre x et de rayon $|x - y|$. Si C est convexe et si x et y sont éléments de C, C contient le segment xy. On peut se demander si, réciproquement, une partie C, qui contient le segment xy dès qu'elle contient x et y, est convexe. Cette propriété est équivalente à la suivante, nommée "faiblement convexe" par MONNA [9]:

(F C) $\quad x, y \in C \; ; \; \lambda, \mu \in A$ avec $\lambda + \mu = 1 \implies \lambda x + \mu y \in C$.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 48.

(a) Si C est convexe, il vérifie (F C).

(b) Si E est de dimension 1, C vérifiant (F C) est nécessairement convexe.

(c) Si l'indice de K est supérieur ou égal à 3, (F C) implique la convexité.

(d) Si E est de dimension supérieure ou égale à 2, et K d'indice 2, il existe des parties de E non convexes et vérifiant (F C).

Démonstration.

(a) est évident.

(b) Si C vérifie (F C) et est non vide, soit $x_0 \in C$. Alors $M = C - x_0$ contient 0 et, pour λ élément de A et $y \in M$, avec $y = x - x_0$ où $x \in C$,

$$\lambda y = \lambda(x - x_0) = [\lambda x + (1-\lambda)x_0] - x_0 \quad \text{et} \quad \lambda y \in M$$

puisque $\lambda x + (1-\lambda)x_0$ est élément de C. Donc $AM \subset M$, $AM = M = \bigcup_{x \in M} xA$, et M est une boule et C est convexe.

(c) Si C non vide vérifie (F C), soit $M = C - x_0$ où $x_0 \in C$. Alors $0 \in M$, et M vérifie (F C), car si $y_1 = x_1 - x_0$ et $y_2 = x_2 - x_0$ sont éléments de C avec λ et $\mu \in A$, $\lambda + \mu = 1$:

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2) - x_0 \in M .$$

Nous montrons que M est sous-A-module de E. Soient $x, y \in M$; $\lambda, \mu \in A$, on va montrer que $\lambda x + \mu y$ est dans M. Or $x \in M$, $y \in M$, $\alpha \in A$, $\beta \in A$ entraîne :

$$\alpha x = \alpha x + (1-\alpha)0 \in M ,$$

$$\beta y = \beta y + (1-\beta)0 \in M ,$$

et alors pour $\gamma \in A$, $\gamma\alpha x + (1-\gamma)\beta y$ est dans M. Il suffit de choisir α, β, γ, pour que $\lambda = \gamma\alpha$ et $\mu = (1-\gamma)\beta$. Si l'indice de K est supérieur ou égal à 3, γ, tel que $|\gamma| = |1-\gamma| = 1$, existe et alors $\alpha = \frac{\lambda}{\gamma}$, $\beta = \frac{\mu}{1-\gamma}$ vérifie bien $|\alpha| \leqslant 1$ et $|\beta| \leqslant 1$.

(d) Puisque E est de dimension 2 au moins, soient e_1 et e_2 des éléments linéairement indépendants de E. Soit

$$C = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \mid \lambda, \mu \in A ; \ \min |\lambda|, |\mu| < 1\} .$$

C vérifie (F C) : si $\lambda e_1 + \mu e_2$, $\lambda' e_1 + \mu' e_2$ sont dans C et α dans A :

$$x = \alpha(\lambda e_1 + \mu e_2) + (1-\alpha)(\lambda' e_1 + \mu' e_2)$$

$$= (\alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda')e_1 + ((1-\alpha)\mu' + \alpha\mu)e_2 ,$$

et un seul des nombres $|\alpha|$, $|1-\alpha|$ d'une part, $|\lambda|$, $|\mu|$ d'autre part, $|\lambda'|$, $|\mu'|$ enfin pouvant être égal à 1, un seul des nombres $|\alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda'|$ et $|\alpha\mu + (1-\alpha)\mu'|$ au plus vaut 1. Donc x est dans C. Mais C n'est pas convexe car il contient 0, e_1, e_2, mais n'est pas un module puisque $e_1 + e_2$ n'est pas dans C.

<u>Remarque</u>. - Il n'y a pas de théorème "d'associativité" des barycentres à coefficients dans A. Ainsi un résultat, tel que, si $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont convexes et si $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$,

$$c(H) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid x_i \in H_i \ ; \ \lambda_i \in A \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

est faux.

PROPOSITION 49. -- Soient E et F des espaces vectoriels sur K, et f une application affine de E dans F.

(a) Si $B_1 \subset E$, on a : $f(c(B_1)) = c(f(B_1))$.

(b) Si $B_2 \subset F$, on a : $f^{-1}(c(B_2)) = c(f^{-1}(B_2))$ quand f est surjective.

Démonstration.

(a) $c(f(B_1)) \subset f(c(B_1))$ évidemment (cf. proposition 19). Mais un élément y de $f(c(B_1))$ s'écrit $y = f(x)$ où $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, avec $x_i \in B_1$, $\lambda_i \in A$, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, donc :

$$y = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{et} \qquad y \in c(f(B_1)) .$$

(b) $c(f^{-1}(B_2)) \subset f^{-1}(c(B_2))$ évidemment (cf. proposition 19). Mais si x est élément de $f^{-1}(c(B_2))$, on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, où $\lambda_i \in K$, $y_i \in B_2$, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Si $y_i = f(x_i)$, où x_i est élément de E,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \qquad \text{et donc} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \xi$$

où ξ vérifie $f(\xi) = f(0)$. Alors,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i + \xi) \qquad \text{et} \qquad f(x_i + \xi) = f(x_i) = y_i .$$

Donc, x est élément de $c(f^{-1}(B_2))$.

Soit H un hyperplan affine de E, d'équation $f(x) = \alpha$, où f est une forme linéaire non identiquement nulle, et où α est élément de K. Nous allons définir des parties de E analogues aux demi-espaces des espaces vectoriels réels.

DÉFINITIONS. - Si x et y sont éléments de E, x et y sont séparés par H si le segment xy rencontre H. Dans le cas contraire, x et y sont dits d'un même côté de H.

En particulier, si x et y sont dans K, et si α est un élément de K (jouant le rôle d'hyperplan affine dans K), x et y sont séparés par α, si

α est élément du segment xy , c'est-à-dire : α dans la boule fermée de centre .. et de rayon $|x - y|$. Par suite, dire que α sépare x et y , c'est dire que

$$|x - y| \geqslant |x - \alpha|$$

(ce qui est équivalent à $|x - y| \geqslant |y - \alpha|$). Il s'ensuit que x et y sont d'un même côté de α si, et seulement si, $|x - y| < |x - \alpha|$.

Revenant au cas général, on a la proposition :

PROPOSITION 50. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) H , d'équation $f(x) = \alpha$, sépare x et y , éléments de E ,

(2) α sépare $f(x)$ et $f(y)$,

(3) $|f(x) - \alpha| \leqslant |f(x) - f(y)|$.

On a également la proposition :

PROPOSITION 51. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1') x et y sont d'un même côté de H $(c(\{x , y\}) \cap H = \emptyset)$,

(2') $f(x)$ et $f(y)$ sont d'un même côté de α $(c(\{f(x) , f(y)\}) \not\ni \alpha)$,

(3') $|f(x) - f(y)| < |f(x) - \alpha|$.

De ce qui a été dit résulte que (2) est équivalent à (3), (2') à (3').

(1') implique (2'), car

$$f(c(\{x , y\})) = c(\{f(x) , f(y)\})$$

et que $\alpha \notin f(c(\{x , y\}))$.

(2') implique (1'), car

$$c(\{x , y\}) \subset f^{-1}(c(\{f(x) , f(y)\}))$$

et que $H \cap f^{-1}(c\{f(x) , f(y)\}) = \emptyset$ résulte de $\alpha \notin c(\{f(x) , f(y)\})$.

Donc, (1') est équivalent à (2'), et leurs négations (1) et (2) sont équivalentes. Les propositions sont donc démontrées.

Fixant alors x_0 dans E , cherchons les points x de E tels que x et x_0 soient d'un même côté de H .

On voit que la condition nécessaire et suffisante sur x est

$$|f(x_0) - f(x)| < |f(x_0) - \alpha| ,$$

c'est-à-dire $f(x) \in B(f(x_0) , |f(x_0) - \alpha|)$ boule ouverte de centre $f(x_0)$ et de rayon $|f(x_0) - \alpha|$. Or deux boules de K , $B_{y_1} = B(y_1 , |y_1 - \alpha|)$ et $B_{y_2} = B(y_2 , |y_2 - \alpha|)$ sont disjointes ou confondues : si z est élément de $B(y_1 , |y_1 - \alpha|) \cap B(y_2 , |y_2 - \alpha|)$, on a :

$$|y_1 - \alpha| = |z - \alpha| \quad \text{puisque} \quad |z - y_1| < |y_1 - \alpha| ,$$

et donc

$$B(y_1 , |y_1 - \alpha|) = B(z , |z - \alpha|) ,$$

et, de même,

$$B(y_2 , |y_2 - \alpha|) = B(z , |z - \alpha|) .$$

Ce qui établit le fait que les boules $B(y , |y - \alpha|)$, et $\{\alpha\}$ forment une partition de K . (On regarde les sous-ensembles de $\mathcal{P}(K)$ et non la famille des B_y .) Si l'on envisage alors l'image réciproque par f de cette partition (sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ formé des $f^{-1}(B_y)$ et de $f^{-1}(\{\alpha\})$), c'est une partition de E dont l'une des classes est H . Enfin, x et x_0 sont d'un même côté de H si, et seulement si, x est dans la classe de la partition qui contient x_0 . Il en résulte que "être d'un même côté" est une relation d'équivalence, car c'est la relation "être dans une même classe" pour une certaine partition de E .

DÉFINITION. - Les classes de la partition autre que H sont les côtés de H .

Ceci est cohérent avec la terminologie "être d'un même côté".

Remarque. - Le cardinal de l'ensemble des côtés ne dépend que de K , comme il résulte facilement de ce qui précède : c'est le cardinal de l'ensemble des côtés de K par rapport à $\{0\}$. Ce cardinal ne peut être fini que si K est à valuation triviale et fini.

DÉFINITION. - Si X et Y sont des parties de H :

- X est d'un seul côté de H si X est contenue dans un côté de H .
- X et Y sont séparées par H s'il existe deux côtés différents de H qui les contiennent.

PROPOSITION 52.

(a) Les côtés de H sont les convexes maximaux disjoints de H .

(b) Les côtés sont m-ouverts.

(c) Tout convexe ne rencontrant pas H est d'un seul côté de H .

(d) Si X est d'un seul côté de H , $c(X)$ aussi.

(a) et (b). Les côtés sont convexes m-ouverts, car images réciproques de boules ouvertes par une application linéaire. Si C est un côté de H, et $y \notin C$, $x \in C$, $c(\{x , y\}) \cap H$ est non vide, donc C est un convexe maximal ne rencontrant pas H. Un convexe maximal disjoint de H est un côté de H : résulte de (c).

(c). Si C est un convexe ne rencontrant pas H et non vide, soit x_0 dans C. Pour tout x de C, $c(\{x_0 , x\}) \cap H$ est vide, car contenu dans $C \cap H$. Donc x est dans le côté de x_0 par rapport à H, et C est d'un seul côté de H.

(d) est immédiat, puisque les côtés sont convexes.

Remarque. - On a même mieux puisque le côté de H contenant x_0 et le convexe maximum disjoint de H et contenant x_0.

Séparer des parties revient à séparer leurs enveloppes convexes. Dans la suite, nous étudions la séparation des convexes.

II.5 Séparation des ensembles convexes. - Voir [9].

PROPOSITION 53. - Soient K un corps valué maximalement complet, E un espace vectoriel sur K, C un convexe de E, et a un point de E en dehors de C. Alors il existe un hyperplan affine de E, contenant a et disjoint de C. C est donc intersection des classes d'équivalence par rapport aux hyperplans de E, qui le contiennent.

Démonstration. - L'énoncé est conséquence immédiate de la proposition 42 puisque $a \notin C$ et

$$C = \{y \mid y \in E ; \forall v \in V : \overline{\pi}_V(y) \in \overline{\pi}_V(C)\}$$

entraîne

$$\text{il existe } v \in V : \overline{\pi}_V(a) \notin \overline{\pi}_V(C) .$$

Alors $H = \overline{\pi}^{-1}(\overline{\pi}_V(a))$ est un hyperplan, contenant a et disjoint de C.

THÉORÈME (PROPOSITION 54). - Si K est maximalement complet, si C_1 et C_2 sont des convexes disjoints dans un espace vectoriel sur K, E, si k, corps des restes de K, n'est pas $\mathbb{Z}/(2)$, il existe un hyperplan affine de E, H, qui sépare C_1 et C_2.

Démonstration. - H sera défini par une équation : $f(x) = \alpha$, où $f \in E^*$ et $\alpha \in K$. On procède en deux temps :

1° Trouver f pour que $f(C_1)$ et $f(C_2)$ soient disjoints ;

2° Choisir α pour qu'il sépare, dans K, $f(C_1)$ et $f(C_2)$.

1° Puisque C_1 et C_2 sont convexes, $C_1 - C_2 = C$ est convexe. C_1 et C_2 étant disjoints, on a $0 \notin C$. Soit donc H_1 un hyperplan de E, contenant 0 et disjoint de C d'après la proposition 53 :

$$H_1 = \{x \mid f(x) = 0\} \quad \text{où } f \in E^*, \ f \neq 0 .$$

On voit que $0 = f(0) \notin f(C)$, donc $0 \notin f(C_1) - f(C_2)$ et $f(C_1) \cap f(C_2) = \emptyset$.

2° $f(C_1)$ et $f(C_2)$ sont des boules de K. Soient $\alpha_1 \in f(C_1)$, $\alpha_2 \in f(C_2)$, et $r = |\alpha_1 - \alpha_2|$. Notons B la boule fermée de centre α_1 et de rayon r, B_i la boule ouverte de centre α_i et de rayon r. On a les inclusions :

$$B \supset B_i \ ; \qquad B_i \supset f(C_i) .$$

Si $k \neq \mathbb{Z}/(2)$, on a $B \neq B_1 \cup B_2$; soit $\alpha \in B$, $\alpha \notin B_1 \cup B_2$,

$$|\alpha - \alpha_1| = |\alpha - \alpha_2| = |\alpha_1 - \alpha_2| ,$$

donc α sépare α_1 et α_2 ; $\alpha \notin B_i$, donc α sépare B_1 et B_2, donc $f(C_1)$ et $f(C_2)$.

D'après la proposition 50, $H = f^{-1}(\alpha)$ sépare C_1 et C_2.

PROPOSITION 55. - Si K est un corps valué non trivial maximalement complet, C un convexe d'un espace vectoriel E sur K, $x_0 \in E$, $x_0 \notin C$, il existe un hyperplan de E, F, qui sépare strictement C et x_0.

Démonstration. - Il existe H_0 tel que $H_0 \cap C = \emptyset$ et $x_0 \in H_0$. Soit $f(x) = \alpha$, où $f \in E^*$, l'équation de H_0. Soit, dans K, r la distance de α à $f(C)$; il existe, dans la boule ouverte de centre α et de rayon r, un point β autre que α, tel que $F = f^{-1}(\beta)$ sépare strictement C et x_0.

PROPOSITION 56. - K étant maximalement complet, soient E un espace vectoriel sur K, C un convexe de E, V une sous-variété affine de E disjointe de C : alors il existe un hyperplan affine H, contenant V, et disjoint de C.

Démonstration. - On commence comme pour la proposition 54, et ayant obtenu $f \in E^*$ telle que $f(V) \cap f(C) = \emptyset$, on voit que $f(V) \neq K$ entraîne $f(V) = \{\alpha\}$, donc que $H = f^{-1}(\alpha)$ est un hyperplan qui convient.

Remarques. - Si C est un convexe m-ouvert, la proposition exprime que la jauge de C étant p, (K, v, E, p) a la propriété de Hahn-Banach. Si on suppose que K n'est pas maximalement complet, la proposition 53 et, a fortiori, les propositions 54, 55, 56 sont fausses ; il suffit de reprendre le contre-exemple de la proposition 4 : avec les notations d'alors, il n'existe pas de droite de F

passant par $(1\ ,\ 0)$ et ne rencontrant pas la boule unité ouverte de F . On peut tout juste donner un résultat extrêmement partiel, quand K n'est pas maximalement complet : la proposition 35 reste vraie si F a une base dénombrable, et que C est m-fermé. Il est une conséquence facile du résultat suivant :

Soient $(E\ ,\ p)$ un espace vectoriel semi-normé sur le corps valué K , L un sous-espace vectoriel de codimension dénombrable de E (il suffit même qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F , tel que $G + L$ soit dense dans E , G étant de dimension dénombrable), ε un nombre réel positif non nul ; alors il existe une projection de F sur L , π , telle que

$$p(\pi(x)) \leqslant p(x)(1 + \varepsilon) \quad .$$

(On démontre d'abord ce résultat dans le cas de la codimension 1 [même méthode que dans [4] pour dim F finie], puis on raisonne par récurrence en choisissant une suite de $\varepsilon_i > 0$, tels que $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_i) \leqslant 1 + \varepsilon$, et en réalisant une suite d'extension du premier type.)

Si C est alors m-fermé et $x_0 \notin C$, le cas où x_0 n'est pas dans l'espace engendré par C étant trivial, on peut supposer C absorbant de jauge p . On a alors $p(x_0) > 1$, et l'on pose :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(p(x_0) - 1) \ ,$$

L la droite engendrée par x_0 : on a $x_0 \notin \pi(C)$, et par suite $H = \pi^{-1}(x_0)$ convient.

Nous allons maintenant étudier le problème de la séparation de plusieurs convexes, ce qui a un sens puisqu'un hyperplan a une infinité de côtés en général. Cependant il n'y a pas d'espoir de séparer trois convexes quelconques, disjoints deux à deux: dans $K \times K$,

$$C_1 = \{(x\ ,\ 1) \mid x \in K\}\ , \qquad C_2 = \{(x\ ,\ y) \mid x\ ,\ y \in K\ ,\ |x| < 1\ ,\ |y| < 1\}$$

$$C_3 = \{(x\ ,\ y) \mid x\ ,\ y \in K\ ,\ |x - 1| < 1\ ,\ |y| < 1\}$$

ne peuvent être séparés par aucune droite. On a déjà rencontré une limitation pour la séparation de deux convexes : $\operatorname{card} k > 2$. Ici encore, on ne pourra pas toujours séparer n convexes quelconques de K , disjoints deux à deux, si

$$i = \operatorname{card} k \leqslant n \quad ,$$

puisque l'on ne peut évidemment séparer i classes de A-modules $\mathfrak{J}$.

Nous allons utiliser le lemme algébrique suivant :

LEMME (PROPOSITION 57). - Soient V un espace vectoriel sur un corps k , et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $K - \{0\}$. Faisons l'une des hypothèses suivantes :

1° card $I <$ card k ,

2° card I fini et card $I \leqslant$ card k ,

3° $(x_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante.

Alors il existe $f \in V^*$ telle que $f(x_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$

Démonstration. - Comme on peut toujours prolonger une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel, on peut supposer que $(x_i)_{i\in I}$ engendre V . Soit alors $J \subset I$ tel que $(x_j)_{j\in J}$ soit une base de V ; on a $V = \bigoplus_{j\in J} Kx_j$, et si à $f \in V^*$ on associe $(f(x_j))_{j\in J}$, on établit un isomorphisme entre V^* et $\prod_{j\in J} K_j$, où K_j est un exemplaire de K . Si $x_i = \sum_{j\in J} \lambda_i^j x_j$, on doit montrer qu'il existe $(\mu_j)_{j\in J}$ dans $\prod_{j\in J} K_j$, tel que, pour tout i , $\sum_{j\in J} \lambda_i^j \mu_j \neq 0$.

Dans l'hypothèse du 3°, c'est évident, car $I = J$ et $\mu_j = 1$, pour tout j , par exemple, convient.

Supposons maintenant card I infini et card $I <$ card k . Alors $(\lambda_i^j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille de puissance card I , donc le sous-corps de k , k' , qu'elle engendre, est de puissance au plus card I . Alors k est un espace vectoriel sur k' , dont $(\alpha_k)_{k\in H}$ est une base. Si on avait card $H \leqslant$ card I , on en déduirait card $k \leqslant$ card I , donc card $H >$ card I , et on peut indexer une famille $(\beta_j)_{j\in J}$ d'éléments de k indépendante sur k' . Alors $x_i \neq 0$ entraîne λ_i^j à i fixé non tous nuls, donc $\sum_{j\in J} \lambda_i^j \beta_j \neq 0$.

Supposons maintenant card I fini et card $I \leqslant$ card k , et raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace engendré par les x_i . Le résultat étant évident quand cette dimension est 1 , supposons-la vraie quand elle est $n - 1$. Soit alors V' l'espace engendré par $(x_i)_{i\in I}$, et soit H un hyperplan de V' contenant au moins un x_i : x_{i_0} . Soit $y_0 \in V'$, $y_0 \notin H$; considérons $y_0 + H$ et la famille $(z_i)_{i\in I'}$ des vecteurs de $y_0 + H$ colinéaires aux vecteurs x_i non dans H (I' est strictement contenu dans I : par exemple $i_0 \notin I'$). Comme card $I' <$ card $I \leqslant$ card H , soit $y_1 \in y_0 + H$, $y_1 \neq z_i$ pour tout i de I' . Projetons E sur H , parallèlement à y_1 , par π ; on a $\pi(x_i) \neq 0$ pour tout i . Il existe donc, H étant de dimension $n - 1$, $g \in H^*$ tel que $g(\pi(x_i)) \neq 0$ pour tout i , donc $f = g \circ \pi$ est un élément de E^* qui vérifie $f(x_i) \neq 0$ pour tout i .

Si maintenant E est un espace vectoriel sur le corps maximalement complet K, si C est un convexe absorbant de E contenant 0 de jauge minimum p, dont la boule unité fermée est B, on sait que B/C est muni d'une structure d'espace vectoriel sur k. Soient $x_1, \ldots, x_n$, avec $n \leqslant \text{ind } K = \text{card } k$, n éléments de B non dans C. Si ρ est l'application canonique de B sur B/C, et si $\bar{x}_i = \rho(x_i) \neq 0$, notons F l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$ et $\bar{F} = \rho(B \cap F)$ le sous-espace vectoriel de B/C qui est engendré par $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Il existe sur $\bar{F}$ une forme k-linéaire $\bar{f}$ telle que $\bar{f}(\bar{x}_i) \neq 0$ pour tout i, car $n \leqslant \text{card } k$. Or si ρ applique B sur B/C, si B_0 est la boule unité ouverte de p, σ appliquant B sur B/B_0, et π appliquant B/B_0 sur $B/B_0 \,/\, C/B_0 \simeq B/C$, on a

$$\pi \circ \sigma = \rho \ .$$

Notons $\bar{f}_1 = \bar{f} \circ \pi$: c'est une forme linéaire sur B/B_0. Or, si $(\bar{e}_k)_{k=1,\ldots,p}$ est une base de B/B_0 sur k, et si $(e_k)_{k=1,\ldots,p}$ vérifie $\sigma(e_k) = \bar{e}_k$: e_k est une base orthogonale de F. Si $N = \{x \mid x \in F, \ p(x) = 0\}$ et si $e_{k+1}, \ldots, e_{k+h}$ est une base de N, on définit une forme linéaire f_1 sur F par $f_1(e_j) = 0$ pour $j = k+1, \ldots k+h$, $f_1(e_j) = \alpha_j$ pour $j = 1, \ldots, k$ où $\alpha_j \in K$ tel que $\tau(\alpha_j) = \bar{f}_1(\bar{e}_j)$ ($\tau : A \to A/\mathfrak{F} = k$). On voit que f_1 est bien définie et que $\tau \circ f_1 = \bar{f}_1 \circ \sigma$, car c'est vrai sur la base (e_j). Il en résulte que

$$\tau \circ f_1 = \bar{f} \circ \pi \circ \sigma = \bar{f} \circ \rho \ ,$$

et que $\bar{f}(\bar{x}_i) \neq 0$ entraîne $f_1(x_i) \notin A$ alors que $\tau \circ f_1(C) = 0$, donc $f_1(C) \subset A$. On a démontré $f_1(x_i) \notin C$. f_1 n'est défini que sur F ; pour le prolonger à tout E, nous allons introduire une projection Φ de E sur F telle que $\Phi(C) \subset C$. C'est un raffinement de la proposition 41.

Si on reprend la base $(e_j)_{j=1,\ldots,h+k}$, les vecteurs $e_1, \ldots, e_h$ formant un système vérifiant la propriété (π) peuvent être incorporés dans un système T. Soient $\pi_1 = \pi_{e_1}, \ldots, \pi_h = \pi_{e_h}$, et $\pi_{h+1}, \ldots, \pi_h$, des projections quelconques de E sur $e_{k+1}, \ldots, e_k$. Alors,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{h+k} \pi_i(x)$$

est une projection de E sur F, et puisque $\pi_i(x) \in C$ pour tout $i = 1, \ldots, h+k$ et tout x dans C, $\Phi(x) \in C$ pour tout x dans C.

Posons alors $f = f_1 \circ \Phi$, on a $f(x_j) \notin C$ pour $j = 1, \ldots, n$. Nous avons obtenu la proposition suivante :

PROPOSITION 58. - Si E est un espace vectoriel sur le corps maximalement complet K, et si C est un convexe de E absorbant et contenant 0, de jauge p et de boule unité fermée B, pour toute famille $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de B non dans C telle que $n \leqslant \operatorname{ind} K$, il existe une forme linéaire sur E, f, telle que $\forall i \in I$, $f(x_i) \notin f(C)$.

Ce théorème nous permettra d'obtenir dans K des images disjointes deux à deux de convexes disjoints deux à deux. Étudions maintenant la séparation de plusieurs convexes de K.

Nous dirons qu'un système de points $(\alpha_i)_{i\in I}$ de K satisfait à la condition du quadrilatère, si tout quadrilatère $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}$ a deux côtés adjacents égaux.

Comme la valeur absolue est ultramétrique, tout quadrilatère a deux côtés égaux; on peut même supposer que ce sont les plus longs. D'autre part, si α sépare x_1, x_2, x_3, x_4, le quadrilatère $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ a deux côtés adjacents égaux.

Nous dirons qu'une famille de convexes de K, $(C_i)_{i\in I}$, vérifie la condition du quadrilatère si, pour tout i_1, i_2, i_3, i_4, avec $\alpha_{i_1} \in C_{i_1}$, $\alpha_{i_2} \in C_{i_2}$, $\alpha_{i_3} \in C_{i_3}$, $\alpha_{i_4} \in C_{i_4}$, le quadrilatère $\alpha_{i_1}\, \alpha_{i_2}\, \alpha_{i_3}\, \alpha_{i_4}$ a deux côtés adjacents égaux. On voit facilement que cette propriété ne dépend pas des α_{i_1}, α_{i_2}, α_{i_3}, α_{i_4} choisis.

PROPOSITION 59. - Si $C_1, \dots, C_n$ sont n convexes de K deux à deux disjoints, où $n \leqslant \operatorname{ind} K$, vérifiant la condition du quadrilatère, il existe α qui sépare deux à deux $C_1, \dots, C_n$.

En particulier, si $\operatorname{ind} K \geqslant 3$, il existe α qui sépare trois convexes C_1, C_2, C_3 deux à deux.

Démonstration. - Si C_i est de centre x_i et de rayon ρ_i, montrons que les boules fermées B_{ij} de centre x_i et de rayon $|x_i - x_j|$ ont une intersection non vide.

En effet, $B_{ij} \cap B_{k\ell} = \emptyset$ serait en contradiction avec la propriété du quadrilatère, puisque $|x_i - x_j|$ et $|x_k - x_\ell|$ seraient tous deux plus petits que $|x_i - x_k|$ et $|x_j - x_\ell|$; par suite les boules B_{ij} sont emboîtées, et, étant en nombre fini, ont une intersection non vide. Leur intersection est une boule $B = B_{i_0 j_0}$. On a $B \cap C_i \neq B$, car $B_{i_0 j_0} \cap C_i = B$ entraînerait x_{i_0}, x_{j_0} tous deux dans C_i, ce qui est impossible. Par suite, $B \cap C_i$ est une partie propre de B

et, dans la subdivision de B en $\operatorname{ind} K$ boules ouvertes de même rayon que B, chaque $C_i \cap B$ est contenu dans un ensemble de la partition, il y a $n < \operatorname{ind} K$ C_i, donc il reste des points de B qui ne sont dans aucun des C_i. Soit α un tel point : α sépare les C_i deux à deux.

Les propositions 58 et 59 permettent de résoudre des problèmes de séparation assez particuliers.

PROPOSITION 60. - *Si E est un espace vectoriel sur un corps valué maximalement complet (K, v), soit C un convexe absorbant contenant 0 de E, de jauge p, de boule unité fermée B. Si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont n convexes translatés de C disjoints deux à deux et contenus dans B avec $\frac{n(n-1)}{2} < \operatorname{ind} K$, il existe un hyperplan qui sépare $C_1, \ldots, C_n$ deux à deux (il suffira de $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant \operatorname{ind} K$, si $n \geqslant 4$).*

Démonstration. - Si $C_i = x_i + C$, posons $y_{ij} = x_i - x_j$. Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ y_{ij} avec $i \neq j$; or $y_{ij} \notin C$ est équivalent à $C_i \cap C_j = \emptyset$. Il existe une forme linéaire sur E, f, telle que $f(y_{ij}) \notin f(C)$ pour tout i et j, $i \neq j$. On en déduit $f(C_i) \cap f(C_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, puis, comme $n < \operatorname{ind} K$, l'existence de α dans K qui sépare deux à deux les $f(C_i)$, car on voit que les quadrilatères ont tous leurs côtés égaux. Alors $f^{-1}(\alpha)$ sépare deux à deux les C_i.

Nous allons maintenant supposer K à valuation discrète pour obtenir des résultats plus généraux. Nous écartons le cas de la valuation triviale qui est sans difficultés. Revenons à la situation de la proposition 58, C est la boule unité ouverte de p. Si $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ est une base de B/C sur k, et si $\bar{e}_i = \rho(e_i)$, $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E [1 et 10], ce qui permet, pour toute forme k-linéaire de B/C, $\bar{f}$, de trouver f telle que $\bar{f} \circ \sigma = \tau \circ f$. On obtient alors, en traduisant la proposition 57, des résultats plus généraux. Remarquons enfin que si $x \in E$, $x \notin C$, pour assurer $f(x) \notin C$, il suffit d'assurer $f(y) \notin C$ où $y = \frac{x}{\lambda}$ avec $|\lambda| = p(x)$: ceci va nous permettre d'écarter la restriction $x \in B$. On obtient alors facilement les résultats suivants.

PROPOSITION 61. - *Soient E un espace vectoriel sur le corps value à valuation discrète K, et C un convexe absorbant non vide. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, vérifiant l'une des hypothèses suivantes :*

1° $\operatorname{card} I < \operatorname{card} K$,

2° $\operatorname{card} I$ *fini et* $\operatorname{card} I \leqslant \operatorname{card} k$,

3° $(x_i)_{i\in I}$ *possède la propriété* (π).

Alors il existe $f \in E^*$ *telle que* $f(x_i) \notin C$ *pour tout* $i \in I$.

PROPOSITION 62. - Soit E un espace vectoriel sur le corps à valuation discrète (K , v). On suppose ind $K \geqslant 4$. Soit p une semi-norme vérifiant $N_p = N_v$. Alors, si B_1, B_2, B_3 sont trois boules de p deux à deux disjointes, il existe un hyperplan H de E qui sépare B_1, B_2, B_3 deux à deux.

Démonstration. - On peut supposer par exemple que B_1, B_2, B_3 sont des boules ouvertes de p, en écartant d'abord le cas où certaines seraient de rayon nul. Si B est alors la boule unité ouverte de p, on a $B_i = x_i + \lambda_i B$ pour $i = 1, 2, 3$ avec $\lambda_i \neq 0$.

$B_i - B_j = (x_i - x_j) + \mu_{ij} B \quad (i \neq j)$ où $\mu_{ij} = \lambda_i$ si $|\lambda_i| \geqslant |\lambda_j|$ ou inversement.

Pour une forme linéaire f, $f(0) \notin f(B_i - B_j)$ est équivalent à $f(\frac{x_i - x_j}{\mu_{ij}}) \notin f(B)$.

Soit $y_{ij} = \frac{x_i - x_j}{\mu_{ij}}$, puisque $B_i \cap B_j = \emptyset$, on a $y_{ij} \notin B$ $(i \neq j)$ et il existe une forme linéaire f telle que $f(y_{ij}) \notin f(B)$ pour tout i, j, $i \neq j$, car il n'y a que trois éléments y_{ij}, $i \neq j$. Alors $f(\frac{x_i - x_j}{\mu_{ij}}) \notin f(B)$ entraîne $f(B_i) \cap f(B_j) = \emptyset$ et, en appliquant la proposition 60, il existe α qui sépare deux à deux $(f(B_i))_{i=1,2,3}$. Alors, $H = f^{-1}(\alpha)$ sépare deux à deux B_1, B_2, et B_3.

Alors, si B_3 est de rayon nul, B_3 est une variété affine ; mais séparer B_3 de B_1 ou de B_2 revient à séparer un point $x_3 \in B_3$ de B_1 ou B_2. On cherche d'abord f telle que $f(B_1) \cap f(B_2) = \emptyset$, $f(x_3) \notin f(B_1)$ et $f(x_3) \notin f(B_2)$, et l'on achève de même.

Si B_2 et B_3 sont de rayon nul, soient $x_2 \in B_2$ et $x_3 \in B_3$. On cherche d'abord f telle que $f(x_2) \notin f(B_1)$, $f(x_3) \notin f(B_1)$, et $f(x_2) \neq f(x_3)$, ce qui est assuré par $f(x_1 - x_2) \notin f(B)$, et l'on achève de même par la proposition 60.

Si B_1, B_2, B_3 sont de rayon nul, il n'y a pas de difficultés.

Remarque. - La proposition 62 serait fausse pour trois convexes ne provenant pas de la même semi-norme. (Voir le contre-exemple déjà donné avant la proposition 57.)

En particulier, on peut séparer par un hyperplan tous points distincts.

Pour généraliser plus, on est amené à introduire la condition du quadrilatère dans E relativement à la jauge de p. Les définitions se transposent immédiatement à partir de celles données dans K. Il faudra en outre choisir f afin qu'elle conserve la condition du quadrilatère. Pour cela si la famille de boules de p (vérifiant $N_p = N_v$), B_i est donnée, nous supposons d'abord que toutes ces boules sont des boules ouvertes, les autres cas se traitant de manière analogue et sans difficultés.

Alors si B_i est de centre x_i et de rayon r_i , soit B_{ij} la boule ouverte de centre x_i et de rayon $p(x_i - x_j)$. Si par exemple $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ vérifie la condition du quadrilatère avec $p(x_1 - x_2) = p(x_1 - x_4)$, on a $x_2 \notin B_{1,2}$, $x_4 \notin B_{1,4}$, et $B_{1,4} = B_{1,2}$. Si on choisit f de manière que $f(x_2) \notin f(B_{1,2})$, $f(x_4) \notin f(B_{1,2})$, on voit que, puisque x_2 et x_4 sont dans $\xi^{-1} B_{1,2}$ où ξ est un générateur de $\mathfrak{J}$, $f(x_2)$ et $f(x_4)$ sont dans $\xi^{-1} f(B_{1,2})$, donc que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_4)| \quad .$$

Ainsi, pour que chaque quadrilatère ait une image ayant deux côtés égaux, nous sommes amenés à séparer deux points d'une boule de p . Comme il est facile de voir que, par permutation des sommets, la condition du quadrilatère est conservée, on doit envisager a priori C_n^4 conditions, dont au plus C_n^2 sont distinctes, puisque ces conditions sont de la forme $f(x_j) \notin f(B_{ij})$, $i \neq j$, qui est équivalente à $f(x_i) \notin f(B_{ji})$. On doit ensuite assurer $f(B_i) \cap f(B_j) = \emptyset$, ce qui sera encore réalisé dès que $f(x_j) \notin f(B_{ij})$ puisque $B_{ij} \supset B_i$ $(i \neq j)$.

On a à introduire C_n^2 conditions $f(x_j) \notin f(B_{ij})$. f existera si $C_n^2 \leqslant \text{ind } K$, et α , séparant les $f(B_i)$, existera si $n < \text{ind } K$. D'où :

PROPOSITION 63. - Soient E un espace vectoriel sur le corps valué à valuation discrète non triviale $(K\ ,.v)$, et p une semi-norme sur E vérifiant $N_p = N_v$. Soient $B_1 , \ldots , B_n$ n boules de E avec $n < \text{ind } K$ et $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant \text{ind } K$, les $(B_i)_{i=1,..,n}$ étant deux à deux disjointes, il existe un hyperplan de E , H , qui sépare deux à deux les $(B_i)_{i=1,..,n}$.

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 7c, 11 p. 11 février 1965

SEMI-NORMES ET ENSEMBLES CONVEXES DANS UN ESPACE VECTORIEL SUR UN CORPS VALUÉ ULTRAMÉTRIQUE

par Jean-Pierre CARPENTIER

Troisième partie

Ensembles convexes dans un espace vectoriel topologique

Dans cette troisième partie, nous exposerons quelques résultats obtenus sur les convexes dans un espace vectoriel topologique sur un corps valué ultramétrique. Cette étude a été commencée par MONNA [8] (*), mais le théorème essentiel, sur la structure des convexes compacts dans un espace vectoriel "localement convexe", est nouveau.

III.1. Propriétés générales liant les convexes et la topologie.

(K, v) est un corps valué ultramétrique, E un espace vectoriel topologique sur ce corps.

PROPOSITION 64.

- Si C est convexe, $\overline{C}$ est convexe.
- Si C est convexe, $\mathring{C} = \emptyset$ ou $\mathring{C} = C$, et $\mathring{C}$ est donc convexe.
- Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, C est à la fois ouvert et fermé.

Démonstration.

- Si C est un A-module, l'adhérence d'un sous-A-module est un sous-A-module.
- Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in C$, et C est un voisinage de x_0 ; il en résulte que C est un voisinage de tout x dans C, car $C = C - x_0 + x$. Comme si $y \notin C$, on a $C \cap y + C = \emptyset$, $\complement C$ est ouvert et C est aussi fermé.

Remarque. - Si $\mathring{C} \neq 0$, on a donc $\overline{\mathring{C}} = \mathring{\overline{C}} = C$.

On définit l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble M comme l'intersection des ensembles convexes fermés contenant M. Elle est égale à $\overline{c(M)}$ ou encore à $\overline{c(\overline{M})}$.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du présent exposé, et les références aux propositions 1 à 63 se rapportent aux première et deuxième parties.

Remarquons aussi que l'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est ouverte : si M est ouvert non vide, $c(M)$ est convexe, et $\overset{\circ}{\overline{c(M)}} \supset \overset{\circ}{M} = M \neq \emptyset$, donc $c(M)$ ouvert.

PROPOSITION 65. - *Soit H un hyperplan de E défini par $H = \{x \mid x \in E , f(x) = \alpha\}$ où f est une forme linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f *est continue,*

(2) H *est fermé,*

(3) $\complement H$ *a un point intérieur,*

(4) *Un côté de H a un point intérieur,*

(5) *Tout côté de H est ouvert (sauf H),*

(6) *Tout côté de H est fermé,*

(7) *Un côté de H est fermé.*

Démonstration.

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) est connu.

(5) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) est trivial.

(1) $\Longrightarrow$ (5) , car les côtés de H autres que H sont des images réciproques par f de boules ouvertes de K .

(1) $\Longrightarrow$ (6) pour la même raison (car les boules ouvertes de K sont aussi fermées).

(6) $\Longrightarrow$ (7) est trivial.

(7) $\Longrightarrow$ (1) : si le côté fermé est H , il n'y a rien à démontrer. Si le côté fermé est $f^{-1}(B)$ où $B = \{x \mid x \in K , |x - \beta| < |\alpha - \beta|\}$ avec $\beta \in K$, choisissons $a \in H$ et b tel que $f(b) = \beta$. L'ensemble $\lambda(f^{-1}(B) - b) + a$ est fermé pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, et contient H . Cet ensemble s'écrit encore :

$$\{x \mid x \in K , |x - \alpha| < |\lambda||\alpha - \beta|\} ,$$

donc H est l'intersection de ces ensembles quand α varie, H est donc fermé.

III.2. Espaces vectoriels localement convexes sur un corps valué ultramétrique.

DÉFINITION. - *Un espace vectoriel topologique E sur le corps valué ultramétrique K est dit localement convexe s'il existe dans E un système fondamental de voisinages de 0 convexes.*

Il revient au même de dire que la topologie de E est définie par un système de semi-normes, d'après le § II.2.

On a des propriétés analogues à celles des espaces vectoriels localement convexes sur $\underset{\sim}{R}$, ainsi :

PROPOSITION 66. - Si K est maximalement complet, E un espace vectoriel localement convexe sur K , et F un sous-espace vectoriel de E , si f est une forme linéaire continue définie sur F , il existe un prolongement linéaire et continu de f à tout E .

III.3. Séparation des convexes dans un espace vectoriel topologique.

Nous allons ici compléter les résultats du § II.5 par des conditions permettant d'affirmer l'existence d'hyperplans fermés séparant deux convexes. Ici encore l'étude est analogue à celle faite dans les espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{R}$.

PROPOSITION 67. - On suppose K maximalement complet. Soient E un espace vectoriel topologique sur K , C_1 , C_2 des convexes de E , F un sous-espace vectoriel fermé de E .

1° Si $F \cap C_1 = \emptyset$ et C_1 ouvert, il existe un hyperplan fermé de E : H tel que $H \cap C_1 = \emptyset$ et $H \supset F$.

2° Si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, C_1 ouvert, et $k \not\subset Z/(2)$, il existe un hyperplan fermé de E , H séparant C_1 et C_2 .

Démonstration. - On pourrait multiplier les transcriptions de ce type des théorèmes du § II.5, elles résultent toutes du fait que C_1 ouvert entraîne H fermé, d'après la proposition 65, un des côtés de H ayant un point intérieur.

COROLLAIRE (PROPOSITION 68). - Si A est un convexe ayant un point intérieur :
- $E \subset A \iff f(E) \subset f(A)$ pour toute forme linéaire continue sur E .
- A est intersection des côtés d'hyperplans fermés qui le contiennent.

Démonstration immédiate.

Maintenant, nous supposons de plus que E est localement convexe séparé. Soit C un convexe compact de E . L'existence de convexes compacts, non réduits à un point, entraîne que K est à valuation discrete : en envisageant les complétés, on se ramène au cas où K est complet, et alors on voit que K est localement compact, donc à valuation discrète.

PROPOSITION 69. - On suppose K maximalement complet. Soient E localement convexe séparé, C_1 un convexe compact de E , C_2 un convexe fermé de E , a un élément de E .

1° Si $a \notin C_2$, il existe un hyperplan fermé de E , H , tel que $a \in H$ et $H \cap C_2 = \emptyset$.

2° Si $k \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, il existe un hyperplan fermé de E , H , qui sépare C_1 et C_2 .

Démonstration.

1° Puisque $a \notin C_2$, il existe un voisinage convexe de 0 , C , tel que $C_2 \cap (a + C) = \emptyset$, donc aussi $a \notin C + C_2$. $C + C_2$ est ouvert, car il contient C qui a un point intérieur, et l'on peut appliquer la proposition 67.

2° C_1 étant compact et C_2 fermé, il existe un voisinage convexe de 0 , C , tel que $(C_1 + C) \cap (C + C_2) = \emptyset$; comme $C_1 + C$ et $C_2 + C$ sont des convexes ouverts, on peut appliquer la proposition 67.

COROLLAIRE (PROPOSITION 70). - Si E est localement convexe, tout convexe fermé est intersection des côtés d'hyperplans fermés qui le contiennent.

COROLLAIRE (PROPOSITION 71). - Si E est localement convexe, toute variété linéaire fermée est intersection des hyperplans fermés qui la contiennent.

Ce sont des conséquences faciles de la première partie de la proposition.

III.4. Structure des convexes compacts dans un espace vectoriel topologique.

PROPOSITION 72. - Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur le corps valué complet à valuation discrète K . Soit C un convexe borné de E , contenant 0 . Alors il existe une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , qui est libre et telle que tout x de C s'écrive : $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, avec $x_i \in A$ et $(x_i)_{i \in I}$, tend vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I .

Démonstration. - Introduisons la jauge maximum de C , p , pour laquelle $C = \{x \mid x \in E , p(x) \leqslant 1\}$, ce qui est possible si on se ramène au cas où C engendre E . C étant borné, la topologie définie par p est plus fine que la topologie donnée sur E . Il en résulte d'abord que p est une norme, à laquelle nous pouvons appliquer la proposition 8 : il existe une famille d'éléments de E : $(e_i)_{i \in I}$ vérifiant :

- $p(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$,
- pour tout x dans E , il existe une famille $(x_i)_{i \in I}$, unique, d'éléments de K , tendant vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I , et telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ au sens de la norme, avec $p(x) = \sup_{i \in I} (x_i)$.

Il en résulte que, si $x \in C$, on a $|x_i| \leqslant 1$ pour tout i , et que, la topologie donnée étant moins fine, $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, a fortiori, pour cette topologie, ce qui achève la démonstration.

Remarque. - On aurait un théorème du même type en valuation maximalement complète et dimension dénombrable.

THÉORÈME (PROPOSITION 73). - Soient K un corps à valuation discrète complet, E un espace vectoriel topologique séparé sur ce corps, et C un convexe compact contenant 0 de E . Alors, il existe un isomorphisme-homéomorphisme de C sur un produit A^I muni de la structure algébrique et de la topologie produit (A est l'anneau des entiers de K).

Remarque. - La conclusion du théorème entraîne : il existe une famille topologiquement libre d'éléments de E , $(e_i)_{i \in I}$, telle que :

- tout x dans C s'écrit de manière unique $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, $x_i \in A$, où la somme est prise au sens de la topologie de E ,
- pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in A$, $\sum_{i \in I} x_i e_i = x$ existe dans E et $x \in C$.

En effet, A^I a cette propriété. Posons $e_j = (\delta_{ij})_{i \in I}$ avec δ_{ij} symbole de Kronecker : $(e_i)_{i \in I}$ est topologiquement libre. D'autre part, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de A , $\sum_{i \in I} x_i e_i$ existe et c'est $(x_i)_{i \in I}$ comme il résulte de la définition des structures de A^I . Ce dernier fait entraîne que $x = (x_i)_{i \in I}$ s'écrit $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$.

Démonstration. - Ecartant le cas où C serait réduit à 0 , nous pouvons supposer K localement compact, ce qui est équivalent à K à valuation discrète et k fini. Nous supposerons en outre que C engendre E , donc que C est absorbant.

On notera E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E . Si $f \in E'$, on notera : $\mathrm{Ker}_C f = \mathrm{Ker}\, f \cap C$. Rappelons que $\mathfrak{J} = \{\alpha \mid \alpha \in K, |\alpha| < 1\}$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble X de E' a la propriété P si :

$$P_1 : \forall f \in X , \qquad f(C) = A ,$$

$$P_2 : \forall f \in X , \qquad f^{-1}(\mathfrak{J}) \not\supset \bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \mathrm{Ker}_C\, g .$$

Montrons que la propriété P est $\cup$-inductive.

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de sous-ensembles de E' vérifiant P. Il faut montrer que $Y = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X$ vérifie P ; or il est évident que Y vérifie P_1 ; supposons qu'il ne vérifie pas P_2. Soit donc $f_0 \in Y$ tel que

$$f_0^{-1}(\mathfrak{J}) \supset \bigcap_{\substack{g \in Y \\ g \neq f_0}} \mathrm{Ker}_C\, g \quad ;$$

$f_0^{-1}(\mathfrak{J})$ est ouvert et $\mathrm{Ker}_C\, g$ est fermé, C étant compact, il existe

$$g_1 \,,\, \cdots \,,\, g_n \in Y - \{y_0\} \qquad \text{tel que} \qquad f_0^{-1}(Y) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}_C\, g_i \quad .$$

Alors si X est un ensemble de la chaîne $\mathcal{C}$ contenant $g_1 , \cdots , g_n$ et f_0, on a

$$f_0^{-1}(Y) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}_C\, g_i \supset \bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f_0}} \mathrm{Ker}_C\, g \quad ,$$

ce qui contredit le fait que X a la propriété P_2. Donc Y vérifie P_2. D'après l'axiome de Zorn, il existe un ensemble X, ayant la propriété P, maximal. Montrons qu'alors X vérifie

$$\bigcap_{g \in X} \mathrm{Ker}_C\, g = \{0\} \quad .$$

Sinon on pourrait trouver x_0 non nul dans $\bigcap_{g \in X} \mathrm{Ker}_C\, g$; soit la forme linéaire f_0 définie sur la droite D engendrée par x_0 par $f_0(x_0) = 1$. C étant compact absorbant, $f_0(D \cap C) = \alpha A$ avec $\alpha \in K^*$, posons $y_0 = \alpha x_0$, $\tilde{f}_0 = \frac{1}{\alpha} f_0$, on a : $\tilde{f}_0(y_0) = 1$. Soit ξ un élément engendrant l'idéal $\mathfrak{J}$ de A ($\xi = 0$, si la valuation est triviale) ; on a $y_0 \notin \xi B$ et ξB compact, donc il existe un hyperplan fermé H tel que $H \cap \xi B = \emptyset$ et $y_0 \in H$ (proposition 69). Si g_0 est la forme linéaire continue, permettant de définir H par $H = \{x \mid x \in E,\ g_0(x) = 1\}$, on a

$$g_0(y_0) = 1 \;, \qquad 1 \notin g_0(\xi B) \quad ,$$

donc, par suite,

$$g_0(\xi B) \subset \xi A \qquad \text{et} \qquad g_0(B) \subset A$$

(qui est évident si $\xi = 0$, puisque $K = A$). Comme $1 = g_0(y_0) \in g_0(B)$, on a $g_0(B) = A$.

Montrons que $X \cup \{g_0\}$ a la propriété P. Il a déjà la propriété P_1. Vérifions P_2 :

$$g_0^{-1}(\mathfrak{J}) \not\supset \bigcap_{\substack{g \in X \cup \{g_0\} \\ g \neq g_0}} \mathrm{Ker}_C\, g \qquad \text{car} \quad y_0 \in \bigcap_{g \in X} \mathrm{Ker}_C\, g \quad \text{et} \quad y_0 \notin g_0^{-1}(\mathfrak{J})$$

($x_0 \in \bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker} g$ entraîne $y_0 \in \bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker} g$, et $y_0 \in C$ entraîne $y_0 \in \bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker}_C g$)

$$f^{-1}(\mathfrak{J}) \not\supset \bigcap_{\substack{g \in X \cup \{g_0\} \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C g = (\operatorname{Ker}_C g_0) \cap \Big(\bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C f \Big) \qquad \text{quand } f \in X \ .$$

En effet, il existe $y \in \bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C f$ et $y \notin f^{-1}(\mathfrak{J})$, puisque $f_0^{-1}(\mathfrak{J}) \not\supset \bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker}_C f$. Si $g_0(y) = \alpha \in A$, posons $y' = y - \alpha y_0$; on a $g_0(y') = 0$ et $g(y') = 0$ pour tout g dans X , donc $y' \in \operatorname{Ker}_C g_0 \cap \big(\bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C f \big)$. Cependant $y_0 \in f^{-1}(\mathfrak{J})$ et $y \notin f^{-1}(\mathfrak{J})$ entraînant $y' \notin f^{-1}(\mathfrak{J})$, ce qui démontre P_2.

En résume, $\bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker}_C g \neq \{0\}$ est incompatible avec X maximale, et l'on a : $\bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker}_C g = \{0\}$.

Alors, soit l'application φ de C dans A^X muni de la structure algébrique et de la topologie produit, définie par

$$\varphi(x) = (g(x))_{g \in X} \ .$$

φ est linéaire et continue ; elle est injective, car $\bigcap_{g \in X} \operatorname{Ker}_C g = \{0\}$: φ est un isomorphisme de C sur un sous-espace compact de A^X . Montrons que ce sous-espace est A^X lui-même. Remarquons d'abord que si $f \in X$,

$$\bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C g \not\subset f^{-1}(\complement A) \qquad \text{d'après } P_2 \ ,$$

donc il existe x tel que

$$f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad x \in \bigcap_{\substack{g \in X \\ g \neq f}} \operatorname{Ker}_C g \ .$$

Alors $\varphi(x) = (a_g)_{g \in X}$, où $a_g = 0$ si $g \neq f$, $a_g = 1$ si $g = f$. En utilisant un symbole de Kronecker $a_g = \delta_g^f$, si on note e_f le vecteur de A^X: $e_f = (\delta_g^f)_{g \in X}$, on a $e_f \in \varphi(C)$ pour tout $f \in X$; or le sous-espace vectoriel fermé engendré par $(e_f)_{f \in X}$ est A^X puisque $x = (a_g)_{g \in X}$ s'écrit $x = \sum_{g \in X} a_g e_g$, la somme étant prise au sens de la topologie produit. Par suite, $\varphi(C) = A^X$ et φ est un isomorphisme, X étant compact.

<u>Remarque</u>. - Si K est un corps fini à valuation discrète, alors le théorème nous donne le résultat : Un espace vectoriel topologique localement convexe, compact sur K , est isomorphe à un produit K^I . Ce dernier résultat est une conséquence d'un résultat plus fort (voir BOURBAKI, Algèbre commutative, chapitre 3,

exercice 20) : Un espace vectoriel linéairement compact sur un corps K est isomorphe à un produit K^I. Est-il possible de généraliser le théorème 73 lui-même de manière à ce qu'il englobe ce dernier énoncé ?

Nous allons achever en étudiant plus précisément les convexes compacts d'un espace normé.

Remarquons d'abord qu'un convexe compact engendre un espace admettant un système total dénombrable ; il suffit de montrer que l'espace affine engendré est de dimension dénombrable, et l'on peut alors supposer $0 \in C$. Soit F l'espace engendré par C. Nous pouvons utiliser la proposition 73 (mais ce n'est pas indispensable) : C est absorbant dans F et isomorphe à A^I. Soient $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ la base topologique canonique de A^I, et $(e_i)_{i\in I}$ la famille image dans C : $p(e_i)$ tend vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I. Comme $p(e_i) > 0$, on voit que I est dénombrable, et, $(e_i)_{i\in I}$ étant total dans F, le résultat est établi.

Soit d'autre part E l'espace des fonctions d'un ensemble I dans K tendant vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I, muni de la norme de la convergence uniforme. Supposons K localement compact. Alors on peut voir facilement que, si α est une application de I dans $\mathbb{R}^+$ tendant vers 0 suivant le filtre de Fréchet de I,

$$C = \{x \mid x \in E ,\ \forall\, i \in I ,\ |x(i)| \leqslant \alpha(i)\}$$

est un convexe compact de E, isomorphe à $A^{\mathbb{N}}$ (C est en effet un produit d'espace compact).

Nous allons démontrer la réciproque : si C est un convexe compact contenant 0 de E, il existe une base orthonormale de E dans laquelle on puisse l'exprimer comme ci-dessus.

PROPOSITION 74. - Soit (E , p) un espace vectoriel normé sur un corps complet à valuation discrète avec $N_p = N_v$, et soit C un convexe compact absorbant dans E, contenant 0. Alors,

- ou bien : (a) E est de dimension finie, et il existe une base $e_1 , \dots , e_n$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in K$, $p(x) = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$, et qu'il existe $\alpha_1 , \dots , \alpha_n \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $C = \{x \mid x \in E ,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i ,\ |\lambda_i| \leqslant \alpha_i\}$,

- ou bien : (b) E admet un système total dénombrable : il existe dans E une base orthonormale $f_1 , f_2 , \dots , f_n$ pour p, et une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs, tendant vers 0, tels que :

$$C = \{x \mid x \in E , \ x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i , \ \forall i \in \underline{N} , \ |\lambda_i| \leqslant \alpha_i\} .$$

Par suite E est isomorphe à l'ensemble des suites d'éléments de K, $(\lambda_i)_{i\in N}$, telles qu'il existe $M \in \underline{R}^+$ vérifiant $|\lambda_i| \leqslant M\alpha_i$ pour tout i, muni de la norme $q(x) = \sup_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$.

On peut en rapprocher la proposition suivante :

PROPOSITION 75. - Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps complet à valuation discrète K, muni de deux semi-normes p_1 et p_2 vérifiant $N_{p_1} = N_{p_2} = N_v$, il existe une base orthogonale pour p_1 et p_2 dans E, c'est-à-dire une base $e_1 , \ldots , e_n$ de E telle que, si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$,

$$p_1(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \, p_1(e_i) , \qquad p_2(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \, p_2(e_i) .$$

Démonstration. - Démontrons d'abord la proposition 75.

Montrons que nous pouvons supposer que p_1 est une norme. Sinon, soient $p_1^{-1}(0) = N_1$, et π_1 une projection de E sur N_1 vérifiant $p_2(\pi_1(x)) \leqslant p_2(x)$ (qui existe, $(N_1 , p_2/N_1)$ étant complet sphérique). Posons $E_1 = \pi_1^{-1}(0)$, p_1/E_1 est une norme. S'il existe une base de E_1 orthogonale pour p_1 et p_2, $e_1 , \ldots , e_j$, et si $e_{j+1} , \ldots , e_n$ est une base de N_1 orthogonale pour p_2, il est immédiat que $e_1 , \ldots , e_n$ est une base de E orthogonale pour p_1 et que, puisque $p_2(x) = \sup(p_2(\pi_1(x)) , p_2(x - \pi_1(x)))$, elle est aussi orthogonale pour p_2 .

Supposons maintenant que p_1 soit une norme, de boule unité B_1 : p_1 est plus fine que p_2. La proposition est évidente si la dimension de E est 1. Raisonnons par récurrence. Soient $b_1 = \sup_{x\in B_1} p_2(x) < +\infty$, et $e_1 \in B_1$ tel que $p_2(e_1) = b_1$. Soit ϖ une projection de E sur Ke_1 telle que $p_2(\varpi(x)) \leqslant p_2(x)$. Si B_2 est $\{x \mid x \in E , \ p_2(x) \leqslant b_1\}$, on a $B_2 \supset B_1$, donc $\varpi(B_1) \subset \varpi(B_2) \subset B_2$. Comme par construction, $Ke_1 \cap B_1 = Ke_1 \cap B_2$, on a $\varpi(B_1) \subset B_1$, et par suite $p_1(\varpi(x)) \leqslant p_1(x)$ pour tout x dans E . Alors, si $E_1 = \operatorname{Ker} \varpi$, E_1 est de dimension $n - 1$, et il existe une base de E_1 , $x_2 , \ldots , x_{n-1}$, orthogonale. Les relations obtenues entraînent :

$$p_1(x) = \sup(p_1(\varpi(x)) , p_1(x - \varpi(x))) ,$$

$$p_2(x) = \sup(p_2(\varpi(x)) , p_2(x - \varpi(x))) ,$$

et on en déduit que $e_1 , \ldots , e_n$ est une base orthogonale pour p_1 et p_2 .

Démontrons la proposition 74.

Le (a) est un cas particulier de la proposition 75 en faisant intervenir la jauge p_1 de C, et en posant $p_2 = p$.

Démontrons le (b). Nous noterons p_1 la jauge de C, B la boule unité de (E, p). Comme ci-dessus, soit $b_1 = \sup_{x\in C} p(x)$: b_1 est fini, et il existe $e_1 \in C$ tel que $p(e_1) = b_1$. Comme ci-dessus, on construit la projection ϖ_1 de E sur Ke_1 telle que

$$p_1(\varpi(x)) \leqslant p_1(x) \qquad \text{et} \qquad p(\varpi(x)) \leqslant p(x) \quad .$$

Posons $E_1 = \varpi_1^{-1}(0)$, et recommençons la même opération : $b_2 = \sup_{x\in C\cap E_1} p(x)$, $x_2 \in C \cap E_2$ tel que $p(e_2) = b_2$, et on construit ϖ_2 projection de E_1 sur K_{e_2} vérifiant

$$p(\varpi_2(x)) \leqslant p(x) \ , \quad p_1(\varpi_2(x)) \leqslant p_1(x) \quad .$$

On répète ainsi l'opération, et l'on construit une suite $e_1, \dots, e_n$ dont on voit facilement qu'elle vérifie la propriété (π) pour p_1 et pour p en utilisant les inégalités $p(\varpi_j(x)) \leqslant p(x)$, $p_1(\varpi_j(x)) \leqslant p_1(x)$. On a

$$p(e_i) \to 0 \qquad \text{quand } i \to \infty \ ,$$

car sinon il existerait une sous-suite $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ telle que $p(e_{i_k}) \geqslant \alpha > 0$, α fixe, et la suite des e_{i_k} ne pourrait avoir de valeurs d'adhérence puisque $p(e_{i_k} - e_{i_h}) \geqslant \alpha$ pour tout k et h : C ne serait pas compact. Montrons que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est total dans (E, p). Soient i_k l'identité de E_k, avec $E_0 = E$, et $\varphi_k = i_k - \varpi_{k+1}$, puis $\Phi_k = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_0$. Notons enfin

$$\pi_k = \varpi_k \circ \varpi_{k-1} \circ \dots \circ \varpi_1 \quad .$$

On voit que $\Phi_k(C) \subset C$, donc que $p(x - \sum_{j=1}^{k} \pi_j(x)) \leqslant p(e_{k+1})$, donc que : $x = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j(x)$: $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est total dans (E, p). Enfin, si $x \in C$, $\pi_j(x) \in C$ pour tout j, donc $p(\pi_j(x)) \leqslant p(e_j)$, et, si $x \in E$ vérifie $p(\pi_j(x)) \leqslant p(e_j)$ pour tout i, $\pi_j(x) \in C$ pour tout i, donc

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_j(x) \in C \quad .$$

Posons :

$$\lambda_i \in K \ , \quad |\lambda_i| = p(e_i) \ , \quad f_i = \frac{e_i}{\lambda_i} \ , \quad |\lambda_i| = \alpha_i \quad ,$$

le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FLEISCHER (Isidore). - Sur les espaces normés non-archimédiens, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, t. 57, 1954, p. 165-168.

[2] INGLETON (A. W.). - The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 48, 1952, p. 41-45.

[3] KAPLANSKY (Irving). - Maximal fields with valuation, Duke math. J., t. 9, 1942, p. 303-321.

[4] MONNA (A. F.). - Sur les espaces linéaires normés, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, t. 49, 1946, p. 1045-1062.

[5] MONNA (A. F.). - Sur les espaces normés non-archimédiens, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, I et II : t. 59, 1956, p. 475-489 ; III et IV : t. 60, 1957, p. 459-476.
[Cf. les références données dans ces articles.]

[6] MONNA (A. F.). - Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur un corps valué, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, t. 61, 1958, p. 528-539.

[7] MONNA (A. F.). - Espaces localement convexes sur un corps valué, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, t. 62, 1959, p. 391-405.

[8] MONNA (A. F.). - Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué, Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, t. 65, 1962, p. 351-367.

[9] MONNA (A. F.). - Séparation d'ensembles convexes dans un espace linéaire topologique sur un corps valué, I., Koninkl. Nederl. Akad. Wetens., Proceedings, Series A, t. 67, 1964, p. 399-421.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).