Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Luc Verley

Fonctionnelles analytiques sur les variétés de Stein

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 6, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A5_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 6, 17 p. 7, 14 et 21 janvier 1965

FONCTIONNELLES ANALYTIQUES SUR LES VARIÉTÉS DE STEIN

par Jean-Luc VERLEY

(d'après A. MARTINEAU [3])

Nous nous proposons ici de donner une introduction à la théorie des porteurs et des supports des fonctionnelles analytiques, d'après le chapitre 1 de [3]. Nous nous bornerons, dans ce qui suit, à considérer le cas des porteurs ouverts ou compacts, ce qui simplifie les définitions et quelques démonstrations, en diminuant très peu les résultats (qui sont presque exclusivement relatifs à ces deux cas).

1. Espaces de fonctions holomorphes et fonctionnelles analytiques.

V étant une variété analytique dénombrable à l'infini, et Ω un ouvert $\subset V$, nous désignerons par $H(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est un espace métrisable complet (sous-espace fermé de $\mathcal{C}_c(\Omega, \underset{\sim}{C})$) qui possède la propriété de Montel ([1]) (les parties bornées sont identiques aux parties relativement compactes) ; par suite, c'est un espace séparable (métrisable complet et de Montel ; cf. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, chap. 4).

Avant d'aborder le cas des compacts, rappelons deux théorèmes sur les EVT pour la démonstration desquels nous renvoyons à [2]. Soit

$$E_i \xrightarrow{u_i} E_{i+1} , \qquad u_i \text{ linéaire continue },$$

une suite transitive d'EVT localement convexes, et soit

$$E = \varinjlim E_i$$

([1]) $B \subset H(\Omega)$ borné $\Longleftrightarrow$ les fonctions de B sont équibornées sur tout compact $K \subset \Omega$. On en déduit que les dérivées partielles premières sont encore équibornées sur tout compact. Il en résulte alors, par le théorème des accroissements finis, que, pour tout compact $K \subset \Omega$, l'ensemble B_K des restrictions à K des fonctions de B est équicontinu, donc compact pour la topologie de la convergence uniforme dans K (ASCOLI). Ainsi, pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini (A_i) de B tel que, si f et g appartiennent au même ensemble A_i on ait $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$, $\forall x \in K$; B est ainsi précompact, donc relativement compact, car $H(\Omega)$ est complet.

muni de la topologie d'EVT localement convexe la plus fine rendant continues les applications canoniques de E_i dans E .

EVT 1 ([2], Corollaire 2, p. 313). - Si les u_i sont des applications compactes et E un espace séparé, E est un espace tonnelé, bornologique et de Montel.

EVT 2 ([2], Corollaire 2, p. 270). - Supposons les E_i métrisables complets. Si E est quasi-complet (i. e. les parties fermées bornées sont complètes), les parties bornées de E proviennent de parties bornées des espaces E_i .

Pour tout compact $K \subset V$, nous désignerons par $H(K)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K , muni de la topologie limite inductive des $H(\Omega)$, Ω ouvert $\supset K$. Si l'on désigne par U_n un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de K tels que $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$, on a encore

$$H(K) = \lim_{\rightarrow} H(U_n) .$$

Il résulte alors de EVT 1 que $H_K(V)$ est un espace tonnelé, bornologique, qui possède la propriété de Montel (donc, en particulier, qui est complet). D'autre part, d'après EVT 2, une partie $B \subset H(K)$ est bornée si et seulement s'il existe un ouvert $\Omega \supset K$ sur lequel les fonctions de B sont toutes "définies" (abus de langage) et équibornées sur tout compact de Ω .

DÉFINITION 1. - On appelle fonctionnelle analytique, tout élément du dual $H'(V)$. Si A est un ouvert ou un compact de V , on appelle fonctionnelle analytique locale sur A , tout élément de $H'(A)$.

DÉFINITION 2. - Soit A une partie ouverte ou compacte de V . $T \in H'(V)$ est dite portable par A si T est prolongeable en une fonctionnelle analytique locale définie sur A . Alors on dit aussi que A est un porteur de T .

T sera dite faiblement portable par un compact K si elle est portable par tout voisinage ouvert de K .

Remarquons que si T est portable par K , elle est faiblement portable par K .

PROPOSITION 1. - T *est portable par un ouvert* Ω *si et seulement s'il existe une mesure* μ *à support compact contenu dans* Ω *et telle que*

$$\langle T , \varphi \rangle = \int_V \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in H(V) .$$

On dira alors que T est représentable par la mesure μ . La suffisance est claire, et la nécessité résulte du théorème de Hahn-Banach ($H(V)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_c(V)$).

COROLLAIRE. - <u>Toute fonctionnelle analytique est faiblement portable par un compact de</u> V .

DÉFINITION 3. - Un compact $K \subset V$ sera dit posséder <u>la propriété de Runge</u> si l'on a une des conditions équivalentes suivantes :

(R) Pour toute partie bornée B de $H(K)$, il existe un voisinage ouvert Ω_B de K sur lequel toute fonction de B est définie et limite dans $H(\Omega_B)$ d'éléments de $H(V)$.

(R') Soit Ω un ouvert quelconque $\supset K$. Pour toute partie bornée B de $H(\Omega)$, il existe un ouvert Ω_B , $K \subset \Omega_B \subset \Omega$, tel que toute fonction de B soit limite dans $H(\Omega_B)$ de fonctions de $H(V)$.

L'équivalence de (R) et (R') résulte de la caractérisation, donnée ci-dessus, des parties bornées de $H(K)$.

Classiquement, on dira de même qu'un ouvert ω possède la propriété de Runge, si $H(V)$ est dense dans $H(\omega)$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> K <u>un compact possèdant la propriété de Runge.</u> $T \in H'(V)$ <u>est portable par</u> K <u>si et seulement si</u> T <u>est faiblement portable par</u> K , <u>i. e. si pour tout voisinage ouvert</u> Ω <u>de</u> K , T <u>est représentable par une mesure</u> μ_Ω <u>à support dans</u> Ω .

Montrons que si T est faiblement portable par K , on peut prolonger T à $H(K)$.

Si $\varphi \in H(K)$, il existe un voisinage ouvert Ω de K et une suite φ_n de fonctions de V telles que

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \quad \text{dans} \quad H(\Omega) \ .$$

Désignant par μ_Ω une mesure à support compact contenue dans Ω et qui représente T , non définissons $\overline{T}$ en posant

$$\langle \overline{T} , \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, d\mu_\Omega = \lim_{n\to\infty} \langle T , \varphi_n \rangle \ .$$

Montrons que $\overline{T}$ ainsi définie est indépendante du choix de l'ouvert Ω et de la mesure μ_Ω . Si Ω' est un autre ouvert dans lequel φ est limite de fonctions $\psi_n \in H(V)$, on voit, comme ci-dessus, que $\lim_{n\to\infty} \langle T , \psi_n \rangle$ existe. Les deux suites φ_n et ψ_n tendent vers φ dans $H(\Omega \cap \Omega')$ et par suite, si $\mu_{\Omega\cap\Omega'}$ à support compact dans $\Omega \cap \Omega'$ représente φ , on a

$$\int_{\Omega\cap\Omega'} \varphi \, d\mu_{\Omega\cap\Omega'} = \lim_{n\to\infty} \langle T , \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T , \psi_n \rangle \ .$$

La linéarité étant claire, montrons que le prolongement $\overline{T}$ ainsi construit est continu, i. e., par définition de la topologie de $H(K)$, la restriction de $\overline{T}$ à chaque voisinage ouvert Ω de K est continue. Si $\varphi_n \to \varphi_0$ dans $H(\Omega)$,

$$B = \{\varphi\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\varphi_n\}\right)$$

est une partie bornée de $H(\Omega)$, donc il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ tel que B appartienne à l'adhérence de $H(V)$ dans $H(\Omega')$.

Si $\mu_{\Omega'}$ représente T dans Ω', on a, puisque $\varphi_n \to \varphi_0$,

$$\overline{T}(\varphi) = \int \varphi \, d\mu_{\Omega'} = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu_{\Omega'} = \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) .$$

2. Rappels sur les variétés de Stein.

Rappelons tout d'abord que si V est une variété analytique complexe et K un compact de V, on désigne par enveloppe $H(V)$-convexe, et on note $\widetilde{K}$, l'ensemble des points $y \in V$ tels que

$$|\Phi(y)| \leqslant \sup_{x\in K} |\Phi(x)| \quad \text{pour tout} \quad \Phi \in H(V) .$$

Un compact tel que $K = \widetilde{K}$ sera dit $H(V)$-convexe.

Une variété analytique complexe dénombrable à l'infini est dite de Stein si

(S_1) Les fonctions de $H(V)$ séparent les points de V ;

(S_2) Tout point de V admet un système de coordonnées locales formé d'éléments de $H(V)$;

(S_3) Pour tout compact K, $\widetilde{K}$ est compact.

Rappelons que les variétés de Stein constituent exactement (en un sens que l'on peut préciser), le domaine d'application des théorèmes A et B de Cartan (Voir [4]).

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau cohérent sur V (de faisceau structural $\mathcal{O}$).

THÉORÈME A. - Pour tout $x \in V$, les sections globales ($\in \Gamma(V, \mathfrak{F})$) engendrent le module $\mathfrak{F}_x$ comme $\mathcal{O}_x$-module.

THÉORÈME B. - Les groupes de cohomologie d'ordre $q \geqslant 1$ de V à valeurs dans $\mathfrak{F}$ sont nuls

$$H^q(V, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geqslant 1 .$$

Rappelons qu'un sous-ensemble W d'une variété V est appelé <u>ensemble analytique</u>

s'il est fermé et défini <u>localement</u> comme ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions analytiques ; l'exemple le plus simple est celui d'une sous-variété fermée W régulièrement plongée (i. e. il existe en chaque point de W un système de coordonnées locales de V telles que W soit défini localement en annulant certaines de ces coordonnées). On montre que le faisceau $\mathfrak{J}_W$ des germes de fonctions holomorphes nulles sur W est un faisceau cohérent d'idéaux ; le faisceau quotient $\mathcal{O}/\mathfrak{J}_W$ est par définition le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur W (si W est une sous-variété fermée, on retrouve bien ainsi le faisceau des fonctions holomorphes sur W).

Les théorèmes A et B appliqués à cette situation donnent alors les deux résultats suivants, qui seront d'un usage constant par la suite :

COROLLAIRE du théorème A. - On peut trouver une famille (f_α) d'éléments de $H(V)$, nuls sur W , et telle que W soit l'ensemble des zéros communs aux f_α .

(On applique le théorème A au faisceau $\mathfrak{J}_W$.)

COROLLAIRE du théorème B. - Toute fonction holomorphe sur W est la restriction à W d'une fonction holomorphe dans V tout entier.

(On applique le théorème de la suite exacte d'homologie à la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{J}_W \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{J}_W \to 0 ,$$

d'où la suite exacte,

$$H(V) = \Gamma(V , \mathcal{O}) \to \Gamma(V , \mathcal{O}/\mathfrak{J}_W) \to H^1(V , \mathfrak{J}_W) .$$

$H^1(V , \mathfrak{J}_W) = 0$ d'après le théorème B, et par suite, l'application de restriction de V à W est surjective.)

PROPOSITION 1. - <u>Tout compact $H(V)$-convexe d'une variété de Stein admet un système fondamental de voisinages ouverts ω régulièrement plongeables comme sous-variétés fermées d'un polydisque ouvert d'un espace numérique.</u>

Cela signifie qu'il existe une application holomorphe $f = (f_1 , \dots , f_{N_\omega})$ de ω dans le polydisque $P = \{(z_1 , \dots , z_{N_\omega}) , |z_i| < 1\}$ telle que

a. Les f_i séparent les points de ω (f injective) ;

b. Pour chaque point $x \in \omega$, le système $f_1 , \dots , f_N$ contient un système de coordonnées locales au voisinage de x (f est de rang maximum en chaque point) ;

c. $f' : \omega \to P$ est <u>propre</u> ;

d. $f(\omega)$ est fermé dans P .

Soit donc U un voisinage ouvert relativement compact d'un compact $H(V)$-convexe K , et soit W la frontière de U . A chaque point $x \in W$, on peut associer une fonction $f_x \in H(V)$ telle que

$$f_x(x) > \sup_{y \in K} |f_x(y)|$$

(K est $H(V)$-convexe).

Utilisant la compacité de W , on peut donc trouver un nombre fini d'éléments $f_1 , \dots , f_k \in H(V)$ tel que

$$|f_i(y)| < 1 \quad \text{pour} \quad y \in K \quad \text{et} \quad \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} |f_i(x)| > 1 \quad \text{pour} \quad x \in W .$$

Soit $\omega = \{z \in U \ ; \ |f_i(z)| < 1 \ , \ \forall \ i\}$. ω est un ouvert de U qui contient K . Quel que soit $r \in \left]0 , 1\right[$,

$$U_r = \{z \in U \ , \ |f_i(z)| < r\}$$

ne rencontre pas la frontière de ω , et par suite est un compact de ω ; ainsi l'application de ω dans le polydisque $|\zeta_i| \leqslant 1$ est propre. Pour plonger ω comme sous-variété régulière d'un polydisque, il suffit alors de rajouter aux f_i un nombre fini de fonctions de $H(V)$ qui séparent les points de $\overline{U}$, et contiennent en chaque point un système de coordonnées locales (utiliser la compacité de $\overline{U}$). On peut supposer que les nouvelles fonctions ainsi rajoutées sont bornées par $1/2$ sur $\overline{U}$ et la fermeture de $f(\omega)$ résulte alors du fait que $f(\omega) = P \cap f(\overline{U})$.

COROLLAIRE 1. - Tout voisinage d'un compact $H(V)$-convexe d'une variété de Stein contient un voisinage ouvert ω de ce compact tel que $H(V)$ soit dense dans $H(\omega)$ En particulier, tout compact $H(V)$-convexe possède la propriété de Runge.

Soit ω plongeable comme ci-dessus dans un polydisque P de $\underset{\sim}{C}^N$. Toute fonction holomorphe sur $f(\omega)$ est la restriction à $f(\omega)$ d'une fonction holomorphe dans P , et par suite toute fonction holomorphe dans ω est limite uniforme sur tout compact de polynômes par rapport aux fonctions $f_1 , \dots , f_N \in H(V)$.

COROLLAIRE 2. - Soit $y \in \hat{K} \subset V$. La composante connexe de y dans $\hat{K}$ rencontre K .

En effet, supposons qu'il existe deux ouverts disjoints ω_1 et ω_2 , tels que

$$\omega_1 \cup \omega_2 \supset \widetilde{K} \quad \text{et} \quad \omega_1 \cap K = \emptyset .$$

Quitte à restreindre $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, on peut supposer que $H(V)$ est dense dans $H(\omega)$ La fonction, égale à 0 dans ω_2 et à 1 dans ω_1 , est alors approchable uniformément sur tout compact de ω par des fonctions de $H(V)$, et il existe $f \in H(V)$ telle que

$$|f(y) - 1| < \frac{1}{2} , \quad |f(z)| < \frac{1}{2} \text{ pour tout } z \in K ,$$

en contradiction avec le fait que $y \in \tilde{K}$.

COROLLAIRE 3. - Tout compact $H(V)$-convexe admet un système fondamental de voisinages qui possèdent la propriété suivante :

$$K \text{ compact } \subset \omega \implies \tilde{K} \subset \omega .$$

Reprenant les notations de la démonstration de la proposition 1, on remarque d'abord que si $K \subset \omega$, alors $\tilde{K} \subset U$ car $\tilde{K} \cap W = \emptyset$ et toute partie connexe, qui rencontre U et $\complement U$, rencontre sa frontière (utiliser le corollaire 2). Il résulte alors facilement de la définition de ω que l'on a, en fait, $\tilde{K} \subset \omega$.

En liaison avec ce qui précède, nous introduirons la définition suivante :

Un ouvert $\omega \subset V$ sera dit H(V)-convexe si, pour tout compact $K \subset \omega$, on a $\tilde{K} \subset \omega$. Il résulte alors du corollaire 1 ci-dessus que $H(V)$ est dense dans $H(\omega)$; par suite, l'enveloppe $H(V)$-convexe de K coïncide avec son enveloppe $H(\omega)$-convexe et ω est donc une variété de Stein (les axiome S_1 et S_2 sont trivialement vérifiés).

PROPOSITION 2.

$$\tilde{\omega} = \bigcup_{\substack{K \subset \omega \\ \text{compact}}} \tilde{K}$$

est un ouvert et c'est le plus petit ouvert $H(V)$-convexe contenant ω .

LEMME. - Si K_1 et K_2 sont deux compacts d'une variété de Stein V , tels que $K_1 \subset \mathring{K}_2$, on a

$$\tilde{K}_1 \subset \mathring{\tilde{K}}_2 .$$

Si $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset \underset{\sim}{C}^n$, soit $\|z\|$ une norme sur $\underset{\sim}{C}^n$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|z\| < \varepsilon$ entraîne $K_1 + z \subset K_2$; $\tilde{K}_1 \subset \mathring{\tilde{K}}_2$ résulte alors du fait que

$$\widetilde{K_1 + z} = \tilde{K}_1 + z \subset \tilde{K}_2 \quad \text{pour tout } z \text{ tel que } \|z\| < \varepsilon .$$

La démonstration dans le cas général sera obtenue en plongeant, au moyen de la proposition 1, un voisinage ω du compact K_2 comme sous-variété fermée du polydisque P d'un espace $\underset{\sim}{C}^n$. On se ramène ainsi à la situation suivante : ω est une sous-variété régulière du polydisque $P \subset \underset{\sim}{C}^n$, K_1 et K_2 sont des compacts de ω, et $\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$ sont les enveloppes $H(\omega)$-convexes de K_1 et K_2 (car $H(V)$ est dense dans $H(\omega)$).

Remarquons que $\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$ sont aussi les enveloppes $H(P)$-convexes (d'après les corollaires des théorèmes A et B, ω est l'ensemble des zéros d'une famille de fonctions holomorphes dans P et toute fonction holomorphe dans ω est restriction à ω d'une fonction holomorphe dans P), et même $H(\underset{\sim}{C}^n)$-convexes (car $H(\underset{\sim}{C}^n)$ est dense dans $H(P)$) de K_1 et K_2.

Considérant la métrique hermitienne de $\underset{\sim}{C}^n$, il existe un ouvert $\Omega \supset \omega$ tel que, par chaque point $x \in \Omega$, il passe un sous-espace normal et un seul à ω, orthogonal à l'espace tangent en $\pi(x) \in \omega$ et supplémentaire de cet espace, l'application $x \rightsquigarrow \pi(x)$ étant analytique ("champ de normales"). $\widetilde{K}_2$ étant $H(\underset{\sim}{C}^n)$-convexe, soit U un voisinage ouvert $H(\underset{\sim}{C}^n)$-convexe de $\widetilde{K}_2$ contenu dans Ω (corollaire 3 de la proposition 1), et soit L un voisinage compact de K_1 contenu dans U et tel que $\pi(L) = K_2$. Je dis que

$$\widetilde{L} \cap \omega = \widetilde{K}_2 \ ;$$

en effet, $H(\underset{\sim}{C}^n)$ étant dense dans $H(U)$, il suffit de prendre la $H(U)$-enveloppe de L ; si $x \in U \cap \omega$ et $x \notin \widetilde{K}_2$, il existe $\varphi \in H(\omega)$ telle que

$$|\varphi(x)| > \sup_{y \in K_2} |\varphi(y)| ,$$

mais alors pour $\psi = \varphi.\pi \in H(U)$, on a

$$|\psi(x)| > \sup_{y \in L} |\psi(y)|$$

et par suite $x \notin \widetilde{L}$. Le lemme 1 ayant été démontré dans $\underset{\sim}{C}^n$, on a donc $\widetilde{K}_1 \subset \overset{\circ}{\widetilde{L}}$, et par suite $\widetilde{K}_2 = \widetilde{L} \cap \omega$ est un voisinage de $\widetilde{K}_1$ dans ω.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 2. Soit K_n une suite fondamentale de compacts de ω, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. On a alors

$$\widetilde{\omega} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{K}_n ,$$

d'où, d'après le lemme qui précède,

$$\widetilde{\omega} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{\widetilde{K}}_n ,$$

et par suite ω est ouvert et les compacts $\widetilde{K}_n$ forment une suite fondamentale de compacts de $\widetilde{\omega}$, car $\widetilde{K}_n \subset \overset{\circ}{\widetilde{K}}_{n+1}$.

Si H est un compact de ω, on a donc $H \subset \tilde{K}_{n_0}$ pour un n_0, d'où $\tilde{H} \subset \tilde{K}_{n_0} \subset \tilde{\omega}$, et $\tilde{\omega}$ est $H(V)$-convexe. Il est clair que c'est le plus petit ouvert $H(V)$-convexe contenant ω.

COROLLAIRE. - L'application de restriction identifie $H(\tilde{\omega})$ à un sous-espace fermé de $H(\omega)$ (c'est l'adhérence de $H(V)$ dans $H(\omega)$).

Il résulte facilement du corollaire 2 de la proposition 1 que chaque composante connexe de $\tilde{\omega}$ rencontre ω, et par suite l'application de restriction de $H(\tilde{\omega})$ à $H(\omega)$ est injective.

Montrons que $H(\tilde{\omega})$ est fermé dans $H(\omega)$. Soit f_m une suite d'éléments de $H(\tilde{\omega})$ qui converge vers φ dans $H(\omega)$. On a

$$\sup_{x \in \tilde{K}_n} |f_m(x) - f_p(x)| = \sup_{y \in K_n} |f_m(x) - f_p(x)| \qquad \forall\, m, p, n .$$

La suite f_m converge donc uniformément sur tout compact de $\tilde{\omega}$ vers un élément φ_0 qui prolonge bien entendu φ. La description précise de l'image de $H(\tilde{\omega})$ dans $H(\omega)$ résulte alors du fait que $H(V)$ est dense dans $H(\tilde{\omega})$.

3. Fonctionnelles analytiques sur les variétés de Stein.

Dans tout ce paragraphe, V désigne une variété de Stein.

THÉORÈME 1. - Soit $T \in H'(V)$. T est portable par un compact K, $H(V)$-convexe, si et seulement si T est faiblement portable par K.

Conséquence immédiate du théorème 1 du § 1 et du corollaire 1 de la proposition 1 du § 2.

THÉORÈME 2. - $T \in H'(V)$ est portable par un ouvert ω si et seulement si T est portable par $\tilde{\omega}$.

Si T est portable par $\tilde{\omega}$, soit $\overline{T}$ le prolongement de T à $H(\tilde{\omega})$, identifié à un sous-espace fermé de $H(\omega)$ (§ 2, corollaire de la proposition 2). $\overline{T}$ se prolonge à $H(\omega)$, d'après le théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 3. - Soit K compact $\subset H(V)$. $T \in H'(V)$ est faiblement portable par K si et seulement si T est portable par $\tilde{K}$.

D'après le corollaire 3 de la proposition 1 du § 2, $\tilde{K}$ admet un système fondamental de voisinages ouverts ω tels que $\omega = \tilde{\omega}$. Un tel ouvert est aussi voisinage de $K \subset \tilde{K}$ et par suite, si on suppose T faiblement portable par K, T est faiblement portable par $\tilde{K}$, donc portable par $\tilde{K}$ d'après le théorème 1.

Remarque. - On ne sait pas si toute fonctionnelle portable par $\tilde{K}$ est portable par K . MARTINEAU donne des conditions exhaustives sur K pour qu'il en soit ainsi, et nous renvoyons à [3].

Définition. - Soit K un compact $\subset V$. Nous appellerons frontière distinguée de K , et noterons δK le plus petit compact de K tel que toute fonction $\varphi \in H(V)$ atteigne le maximum de son module sur K dans δK (c'est la frontière de Silov de K relativement à l'algèbre des restrictions à K des fonctions de $H(V)$).

K sera dit compact distingué si $K = \delta K$.

THÉORÈME 4. - Si $T \in H'(V)$ est faiblement portable par un compact K , elle est faiblement portable par δK .

Cela résulte du fait que $\tilde{K} = \widetilde{\delta K}$ (immédiat d'après la définition de δK) et du théorème 1 appliqué à δK .

Ainsi, si T est faiblement portable par K , pour tout voisinage ouvert Ω de δK , T est représentable par une mesure à support compact contenu dans Ω .

THÉORÈME 5. - Toute fonctionnelle analytique portable par l'intérieur d'un compact K est représentable par une mesure de support inclus dans δK . (Ici V n'est pas nécessairement de Stein.)

Désignons par F le sous-espace de $\mathcal{C}(K)$ formé des fonctions holomorphes dans $\mathring{K}$ et continues sur K . Il est clair que c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$. Par hypothèse, T se prolonge à $H(\mathring{K})$ et par suite à F ; nous continuerons à noter T ce prolongement.

F s'identifie à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\delta K)$; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe alors une mesure μ définie sur δK qui prolonge T . L'image de cette mesure par l'injection $\delta K \to V$ est une mesure à support compact qui représente T .

4. Notion de support d'une fonctionnelle analytique.

Soit $\mathcal{K}$ une famille de compacts de V telle que si K_α est une sous-famille totalement ordonnée par inclusion, on ait

$$\bigcap_\alpha K_\alpha \in \mathcal{K} .$$

Nous dirons par définition qu'un compact $K \in \mathcal{K}$ est un $\mathcal{K}$-support (resp. un $\mathcal{K}$-support faible) de $T \in H'(V)$ si T est portable (resp. faiblement portable) par K, et si K est minimal dans la famille des éléments de $\mathcal{K}$ qui portent (resp. qui portent faiblement) T.

THÉORÈME 1 (existence des supports faibles). - Si T est faiblement portable par un élément de $\mathcal{K}$, alors T admet au moins un $\mathcal{K}$-support faible.

Montrons que l'ensemble des porteurs faibles de T qui appartiennent à $\mathcal{K}$ forment un ensemble inductif (pour l'ordre opposé à l'inclusion). Le théorème en résultera, en appliquant le théorème de Zorn.

Soit

$$K = \bigcap_\alpha K_\alpha ,$$

(K_α) étant une famille totalement ordonnée, et montrons que T est faiblement portable par K. Soit W un voisinage ouvert de K ; il existe un indice α_0 tel que $K_{\alpha_0} \subset W$, d'où la conclusion. (En effet, sinon $\forall \alpha$, les $L_\alpha = K_\alpha \cap \complement W$ formeraient une base de filtre sur un des L_α, soit L_{α_1} ; on en déduirait que $\bigcap_\alpha L_\alpha \neq \emptyset$, ce qui est absurde car $\bigcap_\alpha L_\alpha \subset K$.)

Exemples de familles $\mathcal{K}$:

(1) Famille de tous les compacts.

(2) Famille de tous les compacts qui possèdent la propriété de Runge.

En effet, soit (K_α) une famille totalement ordonnée de compacts possédant la propriété de Runge, et considérons $K = \bigcap_\alpha K_\alpha$. Soit B une partie bornée de $H(W)$, où W est un ouvert contenant K. On voit comme ci-dessus qu'il existe α_0 tel que $K_{\alpha_0} \subset W$. Ainsi il existe un ouvert U, $K \subset K_{\alpha_0} \subset U \subset W$, tel que toute fonction de B soit limite dans $H(U)$ de fonctions de $H(V)$ (condition R').

(3) V de Stein, et $\mathcal{K}$ est la famille de tous les compacts $H(V)$-convexe.

Si $K = \bigcap_\alpha K_\alpha$, où chaque K_α est $H(V)$-convexe, si $y \notin K$, $\exists\, \alpha_0$ tel que $y \notin K_{\alpha_0}$, donc $\exists\, f \in H(V)$ tel que

$$|f(y)| > \sup_{x \in K_{\alpha_0}} |f(x)| \geqslant \sup_{z \in K} |f(z)| ,$$

et par suite, K est $H(V)$-convexe.

Un tel support sera dit support $H(V)$-convexe.

(4) Dans $\mathbb{C}^n$, muni d'une norme ρ, on peut considérer la famille de toutes les ρ-boules fermées de centre x_0.

Dans ce qui suit, nous supposerons de nouveau que V est une variété de Stein. Il n'y a pas en général unicité du support d'une fonctionnelle analytique, néanmoins les fonctionnelles admettant plusieurs supports $H(V)$-convexes sont relativement exceptionnelles en un sens que l'on va préciser.

Rappelons tout d'abord que, pour K compact, $H(K)$ est un espace tonnelé qui admet une suite fondamentale dénombrable de parties bornées ; par suite, l'espace $H'(K)$ des fonctionnelles analytiques portables par K, muni de la topologie de dual fort de $H(K)$ est un espace métrisable complet ([2], corollaire 4, p. 304). Nous pouvons énoncer le théorème annoncé :

THÉORÈME 2. - *Dans l'espace métrisable complet des fonctionnelles analytiques portables par un compact $H(V)$-convexe K, les fonctionnelles analytiques qui admettent K pour unique support $H(V)$-convexe forment un résiduel.*

LEMME 1. - *Soit K un compact et soit $x_0 \notin K$. Alors on a*

$$\widetilde{K \cup \{x_0\}} = \widetilde{K} \cup \{x_0\} .$$

Il suffit de montrer que $\widetilde{K} \cup \{x_0\}$ est $H(V)$-convexe. Soit $y \notin \widetilde{K} \cup \{x_0\}$. D'après l'axiome (S_1) des variétés de Stein, il existe $\Phi \in H(V)$ telle que $\Phi(x_0) = 0$ et $\Phi(y) = 1$; d'autre part, $\widetilde{K}$ étant $H(V)$-convexe, il existe $\Psi \in H(V)$ telle que

$$|\Psi(y)| > M \sup_{z\in K} |\Psi(z)| \text{ , avec } M = \sup_{y\in K} |\Phi(y)| .$$

On a alors

$$|\Phi(y)\ \Psi(y)| > \sup_{z\in \widetilde{K}\cup\{x_0\}} |\Phi(z)\ \Psi(z)| .$$

LEMME 2. - *Soit $x_0 \in V$. Tout porteur $H(V)$-convexe de la fonctionnelle analytique $\Phi \rightsquigarrow \Phi(x_0)$ contient x_0. En particulier, $\{x_0\}$ est le seul support $H(V)$-convexe de cette fonctionnelle.*

Supposons que $K \not\ni x_0$ est un porteur $H(V)$-convexe de la fonctionnelle $\Phi \rightsquigarrow \Phi(x_0)$. D'après le lemme 1 et le corollaire 1 de la proposition 1 du § 2, il existe un ouvert $H(V)$-convexe

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2 \text{ , } \omega_1 \cap \omega_2 = 0 \text{ , } \omega_1 \supset K \text{ et } \omega_2 \supset K \text{ ,}$$

qui possède la propriété de Runge ; par suite, la fonction $f \in H(\omega)$, égale à 0 dans ω_1 et à 1 dans ω_2, est limite dans $H(\omega)$ d'une suite de fonctions f_n de $H(V)$. Si μ_{ω_1} est une mesure à support compact contenu dans ω_1 et qui représente T, on a alors

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_{\omega_1} = 0 ,$$

d'où contradiction.

LEMME 3. - Soit K un compact $H(V)$-convexe. Il existe une famille dénombrable Φ de compacts $H(V)$-convexe ne contenant pas K et tels que tout compact $H(V)$-convexe ne contenant pas K soit inclus dans un des compacts de Φ .

Soit x_n une suite dénombrable dense de points de V (V dénombrable à l'infini) et soit, pour chaque n , ω_n^m un système fondamental dénombrable de voisinages compacts de x_n . Nous désignerons par Ψ la famille dénombrable des enveloppes $H(V)$-convexes des réunions finies de compacts ω_n^m et par Φ la sous-famille de ceux qui ne contiennent pas K . Montrons que la famille Φ ainsi construite convient.

Soit L un compact $H(V)$-convexe ne contenant pas K , et soit $x_0 \in K$, $x_0 \notin L$; nous désignerons par L_C un voisinage compact $H(V)$-convexe de L ne contenant pas x_0 . Les ω_i^j contenus dans L_0 forment un recouvrement de L . Si $\omega_{i_0}^{j_0} , \omega_{i_1}^{j_1} , \dots , \omega_{i_n}^{j_n}$ est un recouvrement de L par un nombre fini de tels voisinages, $\widehat{\bigcup_{k=0}^{n} \omega_{i_n}^{j_n}}$ est un élément de Φ qui contient L .

Démonstration du théorème 2. - Soit K le compact $H(V)$-convexe de l'énoncé et soit L un compact $H(V)$-convexe ne contenant pas K . Les applications de $H'(K)$ et $H'(L)$ dans $H'(V)$ sont injectives (car K et L possèdent la propriété de Runge), et par suite, nous pouvons identifier $H'(K)$ et $H'(L)$ à des sous-espaces de $H'(V)$. Considérons l'injection

$$H'(K) \cap H'(L) \to H'(K) ;$$

cette application est continue quand on munit $H'(K)$ de sa topologie de dual fort de $H(K)$, et $H'(K) \cap H'(L)$ de la topologie de borne supérieure des topologies de dual fort de $H(K)$ et $H(L)$. Ces espaces étant métrisables et complets, il résulte alors du théorème classique de Banach que cette application est, ou bien surjective (ce qui est exclu par le lemme 2, en considérant pour $x_0 \in K$ et $x_0 \notin L$ la fonctionnelle $\varphi \rightsquigarrow \varphi(x_0)$ qui est portable par K , mais pas par L), ou bien a une image maigre. On en déduit alors, en utilisant le lemme 2, que l'ensemble des fonctionnelles analytiques portables par K et qui ne sont portables que par les compacts $H(V)$-convexes contenant K (i. e. qui admettent K pour unique support $H(V)$-convexe) est un résiduel de $H'(K)$.

5. Théorèmes d'intersection.

Introduisons tout d'abord quelques notations. K_1 et K_2 étant deux compacts (ou deux ouverts) non disjoints d'une variété V, nous désignerons par ∂ l'application linéaire de $H(K_1) \times H(K_2)$ dans $H(K_1 \cap K_2)$ définie par

$$\partial(\varphi_1 , \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

(avec un abus de langage) ; remarquons que

$$\operatorname{Ker} \partial \simeq H(K) \qquad (\text{où } K = K_1 \cap K_2),$$

car si des fonctions φ_1 et φ_2, définies respectivement dans un voisinage de K_1 et un voisinage de K_2, coïncident sur un voisinage de $K_1 \cap K_2$, elles se recollent en une fonction holomorphe dans un voisinage de $K_1 \cup K_2$.

THÉORÈME 1. - Si $K = K_1 \cup K_2$ possède la propriété de Runge, et si ∂ est une application surjective, alors toute fonctionnelle analytique portable par K_1 et par K_2 est portable par $K_1 \cap K_2$.

Soit $T \in H'(V)$ portable par K_1 (resp. K_2) et soit T_1 (resp. T_2) un prolongement de T à $H(K_1)$ (resp. $H(K_2)$).

Pour $\varphi \in H(K_1 \cap K_2)$, on posera

$$\langle \overline{T} , \varphi\rangle = \langle T_1 , \varphi_1\rangle - \langle T_2 , \varphi_2\rangle , \text{ avec } \partial(\varphi_1 , \varphi_2) = \varphi .$$

Montrons que $\overline{T}$ est bien définie, i. e. est indépendante du choix de (φ_1 , φ_2) dans $\partial^{-1}(\varphi)$. En effet, deux tels éléments diffèrent par un élément de $\operatorname{Ker} \partial$, i. e. par un élément de la forme (φ_1 , φ_2), où φ_1 (resp. φ_2) est la restriction à K_1 (resp. K_2) d'une fonction φ holomorphe dans un voisinage de $K = K_1 \cup K_2$; par hypothèse, φ est limite dans un voisinage (éventuellement plus petit) de K d'une suite $\varphi^{(n)}$ de fonctions holomorphes dans V. On a alors

$$\begin{aligned}\langle T_1 , \varphi_1\rangle - \langle T_2 , \varphi_2\rangle &= \lim_{n\to\infty} (\langle T_1 , \varphi_1^{(n)}\rangle - \langle T_2 , \varphi_2^{(n)}\rangle) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\langle T , \varphi^{(n)}\rangle - \langle T , \varphi^{(n)}\rangle) = 0 ,\end{aligned}$$

puisque T_1 et T_2 sont des prolongements de T.

La continuité de $\overline{T}$ résulte du fait que ∂ est un homomorphisme (voir par exemple [2], théorème 2, p. 271, qui dit que toute application linéaire continue surjective d'un espace $\mathcal{LS}$ ([2]) dans un autre est un homomorphisme).

THÉORÈME 1'. - Soit V une variété de Stein. Si $T \in H'(V)$ est portable par deux compacts (ou ouverts) non disjoints K_1 et K_2 tels que $K = K_1 \cup K_2$ soit $H(V)$-convexe, alors T est portable par $K_1 \cap K_2$.

D'après le théorème 1 et le corollaire 1 de la proposition 1 du § 2, il suffit de montrer que ∂ est surjective ; ce résultat est connu sous le nom de lemme de Cartan. Rappelons la démonstration de ce résultat.

Soit $\mathfrak{a}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans un voisinage de $K_1 \cup K_2$ (resp. holomorphes dans $K_1 \cup K_2$ et K_1 et K_2 sont ouverts). On a une suite exacte (voir [1], p. 219) :

$$0 \to E_2^{0,1} \to H^1(K_1 \cup K_2 ; \mathfrak{a}) \to E_2^{1,0} \to 0$$

où $E_2^{1,0}$ est le quotient de $H^0(K_1 \cap K_2 ; \mathfrak{a})$ par le sous-groupe formé des classes de cohomologie qui sont différence de deux classes induites par des classes de cohomologie de K_1 et K_2. Mais, d'après le théorème B,

$$H^1(K_1 \cup K_2 ; \mathfrak{a}) = 0 ,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 2. - Soit V une variété de Stein et soit W un sous-ensemble analytique de V. Si une fonctionnelle analytique T portable par tout voisinage ouvert de W est portable par un compact $H(V)$-convexe K, alors T est portable par $K \cap W$.

COROLLAIRE. - Si T est portable par tout voisinage de W, alors T est portable par un compact $H(V)$-convexe de W.

Nous aurons besoin de deux lemmes, qui utilisent les notations du théorème 2.

LEMME 1. - Quel que soit le compact $L \subset W$,

$$\widehat{K \cup L} = K \cup L' ,$$

où L' est un compact de W.

([2]) Un espace $\mathcal{LS}$ est une limite inductive d'une suite transitive d'espaces métrisables complets (ce qui est le cas, d'après le § 1, pour les espaces $H(K)$ pour K ouvert ou compact).

Soit $x \notin K \cup W$. D'après le § 2, corollaire du théorème A, il existe $\varphi \in H(V)$, nulle sur W et telle que $\varphi(x) = 1$. Posons alors

$$M = \sup_{z \in K} |\varphi(z)|$$

et soit $\psi \in H(V)$ telle que

$$\psi(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{z \in K} |\psi(z)| < \frac{1}{M}$$

(K est par hypothèse $H(V)$-convexe). La fonction produit $\varphi.\psi$ est égale à 1 au point x, et de module inférieur à 1 sur $K \cup W$, donc sur $K \cup L$; par suite, $x \notin \widetilde{K \cup L}$ et

$$\widetilde{K \cup L} = K \cup ((\widetilde{K \cup L}) \cap W) ,$$

d'où le lemme 1 puisque $\widetilde{K \cup L}$ est compact.

LEMME 2. - $K \cup W$ <u>admet un système fondamental de voisinages ouverts</u> $H(V)$-<u>convexes</u>.

Soit $\emptyset \subset L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset \dots$ une suite fondamentale de compacts de W et soit ω un ouvert quelconque contenant $K \cup W$. On peut, au moyen du lemme 1, construire par récurrence une suite de compacts $K = N_0, N_1, \dots,$

a. $N_h \supset L_h \cup K$

b. N_h est $H(V)$-convexe

c. N_h est un voisinage de N_{h-1}.

(Supposons ces compacts construits pour $h \leqslant k - 1$, et soit $M_k = L_k \cup N_{k-1}$; d'après le lemme 1, $\widetilde{M}_k \subset \omega$, et on prendra, pour N_k, un voisinage compact $H(V)$-convexe de $\widetilde{M}_k$ contenu dans ω.)

Soit alors

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathring{N}_k$$

un ouvert contenant $K \cup W$ et contenu dans ω. Si maintenant H est un compact de Ω, $\exists\, k_0$ tel que $H \subset N_{k_0}$, d'où

$$\widetilde{H} \subset N_{k_0} \subset \Omega$$

et par suite Ω est $H(V)$-convexe.

<u>Démonstration du théorème 2</u>. - On va montrer que T est portable par tout voisinage ouvert de $K \cap W$. D'après le théorème 1 du § 3, T sera alors portable par

$K \cap W$, puisque $K \cap W$ est $H(V)$-convexe.

Soit ω un voisinage quelconque de $K \cap W$; soient ω_1 voisinage ouvert de W et ω_2 voisinage ouvert de W tels que $\omega_1 \cap \omega_2 \subset \omega$. $\omega_1 \cup \omega_2$ est un voisinage de $K \cup W$, donc, d'après le lemme 2, il contient un voisinage $H(V)$-convexe de $K \cup W$, soit ω_3 . T est alors portable par $\omega_2 \cap \omega_3$ et par $\omega_1 \cap \omega_3$, dont la réunion ω_3 est $H(V)$-convexe. D'après le théorème 1', T est alors portable par $\omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \subset \omega$, donc a fortiori par ω .

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques, 2a ediçao. - São Paulo, Sociedade de Matemática de São Paulo, 1958.

[3] MARTINEAU (André). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. math., Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[4] Séminaire CARTAN, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, École Normale Supérieure (multigraphié).