Catherine Doléans

Convergence des martingales et dérivation des fonctions d'ensembles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A3_0>

(Math. Semin.,)

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 4, 17 p.   10 décembre 1964

CONVERGENCE DES MARTINGALES ET DÉRIVATION DES FONCTIONS D'ENSEMBLES

par Catherine DOLÉANS

Le but de cet exposé est de présenter de façon autonome quelques-uns des résultats sur la convergence des martingales établis, au moyen des méthodes de dérivation des fonctions d'ensemble, par KRICKEBERG et PAUC dans leur récent article [2]. Après avoir défini les martingales, considérées ici comme des familles de fonctions (n° 1.1), on montrera que toute martingale de variation semi-bornée est la différence de deux martingales positives (n° 1.3). On énoncera ensuite la condition (V) de Vitali (n° 2.1), et on établira le théorème de convergence (n° 2.2) ; puis on montrera que la condition de Vitali est satisfaite dans le cas de l'ensemble ordonné filtrant des partitions d'un cube de $\underline{R}^n$ (n° 3.1 et 3.2). On appliquera enfin ces résultats, en en déduisant le théorème classique de convergence des martingales à ensemble d'indice dénombrable (n° 4.1), ainsi que le théorème de Lebesgue sur la dérivation des fonctions absolument continues (n° 4.3).

1. Espace ordonné des martingales.

1.1 Définition.

(a) Soient :

- Θ un ensemble filtrant croissant pour la relation $\ll$,
- $(E , \mathcal{B} , \mu)$ un espace mesuré,
- $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{B}$ telle que : $\rho \ll \theta \implies \mathcal{B}_\rho \subset \mathcal{B}_\theta$,
- $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une famille de fonctions définies sur E à valeur numérique finie ou non, possédant pour tout θ les propriétés :

(i) f_θ est $\mathcal{B}_\theta$-mesurable.
(ii) $\int_E f_\theta^+ \, d\mu$ ou $\int_E f_\theta^- \, d\mu$ est fini.

$(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est alors un processus intégrable adapté (ou prémartingale de base $\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$).

(b) Si l'on a, de plus,

$$\theta \ll \rho \implies f_\theta = E(f_\rho/\mathcal{B}_\theta) \text{ presque sûrement (p. s.)}$$

(autrement dit, f_θ est égal à l'espérance conditionnelle de f_ρ pour $\mathcal{B}_\theta$, c'est-à-dire pour tout $A \in \mathcal{B}_\theta$, $\int_A f_\theta \, d\mu = \int_A f_\rho \, d\mu$), $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est alors une martingale.

Si l'on a

$$\theta \ll \rho \implies f_\theta \leqslant E(f_\rho/\mathcal{B}_\theta) \text{ p. s. (respectivement } \geqslant) ,$$

$(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une sous-martingale (resp. surmartingale).

1.2 Ordre sur l'espace des martingales.

Une prémartingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est dite de variation bornée (resp. semi-bornée vers le haut, vers le bas) si Θ admet un sous-ensemble terminal Δ tel que l'ensemble des nombres $\int_A f_\theta \, d\mu$, $\theta \in \Delta$, $A \in \mathcal{B}_\theta$, soit borné (resp. supérieurement, inférieurement).

En particulier, si une prémartingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ vérifie la propriété

$$\sup_{\theta\in\Theta} \int_E |f_\theta| d\mu < +\infty ,$$

elle est de variation bornée.

La relation " $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta} \leqslant (g_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ si et seulement si $f_\theta \leqslant g_\theta$ pour tout $\theta \in \Theta$ " définit une relation d'ordre dans l'espace des prémartingales de base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$.

1.3 LEMME de décomposition. - Toute martingale de variation semi-bornée est la différence de deux martingales positives.

1.4 Démonstration du lemme 1.3.

(a) Rappels.

(i) Si φ est une fonction d'ensemble σ-additive définie sur une tribu $\mathcal{B}$ et à valeur numérique finie ou non, φ est dite de variation bornée (resp. semi-bornée vers le haut ou vers le bas) si l'ensemble des nombres $\varphi(A)$, où $A \in \mathcal{B}$, est borné (resp. borné supérieurement, inférieurement).

(ii) Dans l'espace des fonctions σ-additives définies sur une tribu $\mathcal{B}$, la relation " $\varphi \leqslant \psi$ si et seulement si $\varphi(A) \leqslant \psi(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ " définit une structure d'ordre.

(iii) Si $\mathcal{R}$ est une famille filtrante croissante de fonctions d'ensemble σ-additives définies sur une tribu $\mathcal{B}$, et si $\mathcal{R}$ contient une fonction de variation semi-bornée vers le bas, la fonction d'ensemble

$$\psi(A) = \sup_{\varphi\in\mathcal{R}} \varphi(A)$$

définit une fonction σ-additive sur $\mathcal{B}$, qui est la borne supérieure de $\mathcal{R}$ dans l'espace des fonctions σ-additives sur $\mathcal{B}$.

(b) LEMME. - Pour toute sous-martingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de variation bornée, il existe une martingale majorant $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et de variation semi-bornée vers le haut.

Soit $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une sous-martingale de variation bornée, posons

$$\varphi_\theta(A) = \int_A f_\theta \, d\mu \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}_\theta ,$$

on définit ainsi une fonction d'ensemble φ_θ σ-additive sur $\mathcal{B}_\theta$. De plus, il existe un ensemble terminal Δ de Θ et un nombre M tels que

$$\left|\int_A f_\theta \, d\mu\right| \leqslant M \qquad \text{pour tout } \theta \in \Delta \text{ et tout } A \in \mathcal{B}_\theta .$$

Ceci entraîne que les nombres $\int_E f_\theta^+ \, d\mu$ pour $\theta \in \Delta$ sont bornés par M ; Δ étant terminal, et $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ étant une sous-martingale, on a

$$\int_E f_\theta^+ \, d\mu \leqslant M \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta .$$

Considérons les fonctions d'ensemble ψ_θ définies par $\psi_\theta(A) = \sup\limits_{\theta<<\rho} \varphi_\rho(A)$; la famille $\mathcal{R}$ formée des fonctions $(\varphi_\rho)_{\rho\gg\theta}$ est filtrante croissante, la sous-martingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ étant de variation bornée, il existe au moins dans $\mathcal{R}$ une fonction φ_ρ de variation semi-bornée vers le bas sur $\mathcal{B}_\theta$, ψ_θ est donc une fonction σ-additive sur $\mathcal{B}_\theta$.

De plus, $\mu(A) = 0$ entraîne $\varphi_\rho(A) = 0$ pour tout ρ , donc $\psi_\theta(A) = 0$ pour tout θ ; il existe donc une fonction g_θ , $\mathcal{B}_\theta$-mesurable, telle que

$$\psi_\theta(A) = \int_A g_\theta \, d\mu \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}_\theta .$$

Pour tout $\theta << \rho$ et tout $A \in \mathcal{B}_\theta$, on a

(1) $$\varphi_\theta(A) = \int_A f_\theta \, d\mu \leqslant \psi_\theta(A) = \int_A g_\theta \, d\mu = \psi_\rho(A) = \int_A g_\rho \, d\mu .$$

On peut donc, en modifiant au besoin g_θ sur un ensemble de mesure nulle, supposer $g_\theta \geqslant f_\theta$. De plus, les inégalités

$$\int_E f_\theta^+ \, d\mu \leqslant M \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta$$

entraînent

$$\int_E g_\theta^+ \, d\mu \leqslant M \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta ,$$

ce qui avec (1) montre que $(g_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une martingale majorant la sous-martingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, cette martingale est même semi-bornée vers le haut, et, pour tout θ , g_θ est presque partout $< +\infty$.

(c) Démonstration du lemme de décomposition. - Soit $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une martingale de variation semi-bornée, on la supposera semi-bornée vers le haut (sinon, il suffit de considérer la martingale $(- f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$). $(f^+_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est alors une sous-martingale positive, bornée, et, d'après le lemme 1, il existe une martingale $(g_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ supérieure à $(f^+_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et telle que, pour tout $\theta \in \Theta$, g_θ soit presque partout finie. Définissons les fonctions h_θ et k_θ par

$$\begin{cases} h_\theta(x) = g_\theta(x) - f_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) < +\infty \\ k_\theta(x) = g_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_\theta(x) = f^-_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) = +\infty \\ k_\theta(x) = f^+_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) = +\infty \end{cases} .$$

$(h_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et $(k_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ sont des martingales positives, et $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est la différence de ses deux martingales positives (c'est-à-dire

$$f_\theta(x) = k_\theta(x) - h_\theta(x)$$

en tout point $x \in E$).

2. Condition de Vitali et théorème de convergence des martingales semi-bornées.

2.1 Condition de Vitali.

DÉFINITION. - Pour tout sous-ensemble M de E , on appelle recouvrement fin de M une famille $(K_\theta)_{\theta\in\Theta}$ telle que $K_\theta \in \mathcal{B}_\theta$ pour tout θ , et $M \subset \bigcup_{\theta\gg\rho} K_\theta$ pour tout $\rho \in \Theta$.

Soit $\mathcal{B}_\omega$ la tribu engendrée par la réunion des tribus $\mathcal{B}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Dans la suite, on considérera la mesure μ comme définie seulement sur $\mathcal{B}_\omega$, et on désignera par μ^* la mesure extérieure associée, c'est-à-dire

$$\mu^*(M) = \inf_{\substack{B\supset M \\ B\in\mathcal{B}_\omega}} \mu(B) .$$

Condition de Vitali :

(V) Pour tout sous-ensemble M de E de μ^* mesure finie, tout recouvrement fin $(K_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de M , et tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie d'indices

$\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_p$ et des sous-ensembles $L_{\theta_1} , \dots , L_{\theta_p}$ disjoints tels que :

(i) $L_{\theta_i} \in \mathcal{B}_{\theta_i}$,

$L_{\theta_i} \subset K_{\theta_i}$, $i = 1 , \dots , p$;

(ii) $\mu^*(M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} L_{\theta_i}) < \varepsilon$.

2.2 Théorème de convergence des martingales semi-bornées.

Si μ est une mesure σ-finie, et si la base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ vérifie la condition de Vitali (V), pour toute martingale semi-bornée $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, les fonctions f_θ convergent presque sûrement selon le filtre des sections de l'ensemble filtrant croissant Θ .

2.3 Démonstration du théorème.

1° D'après le lemme 1.3, on peut se limiter au cas où les fonctions f_θ sont positives. La mesure μ étant σ-finie, on peut aussi se limiter au cas où $\mu(E)$ est finie.

2° Soit donc $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une martingale positive ; supposons que les fonctions f_θ ne convergent pas presque sûrement selon le filtre des sections de Θ . On a alors

$$\mu^*(\{\liminf f_\theta < \limsup f_\theta\}) \neq 0 ,$$

et il existe deux nombres α et $\beta > 0$ tels que $\alpha < \beta$ et que l'ensemble $B = \{\liminf f_\theta < \alpha < \beta < \limsup f_\theta\}$ ait une mesure extérieure $\mu^*(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut maintenant trouver un ensemble $R \in \mathcal{B}_\omega$ tel que $R \supset B$ et $\mu(R) = \mu^*(B)$, puis un ensemble $R_1 \in \bigcup_{\theta\in\Theta} \mathcal{B}_\theta$ tel que $\mu(R_1 \cup R \setminus R_1 \cap R) < \varepsilon\mu^*(B)$. Il existe donc un $\rho \in \Theta$ pour lequel on a $R_1 \in \mathcal{B}_\rho$.

(a) Considérons la famille $(M_\theta)_{\theta\in\Theta}$ définie par

$$M_\theta = R_1 \cap \{f_\theta < \alpha\} \qquad \text{si } \theta \gg \rho ,$$

$$M_\theta = \emptyset \qquad \text{pour les autres } \theta \in \Theta .$$

Cette famille forme un recouvrement fin de $B \cap R_1$; d'après la condition (V) de 2.1, il existe donc des ensembles $N_{\theta_1} , \dots , N_{\theta_2}$ disjoints tels que

$$N_{\theta_i} \in \mathcal{B}_{\theta_i} , \qquad N_{\theta_i} \subset M_{\theta_i}$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N) < \varepsilon\mu^*(B)$$

(où N désigne la réunion des N_{θ_i} , $i = 1 , \dots , r$). On a $N \subset R_1$, donc

(2) $$\mu(N) \leqslant \mu(R_1) \leqslant \varepsilon\mu^*(B) + \mu(R) \leqslant (1 + \varepsilon)\mu^*(B) ,$$

et d'autre part, on a

$$\mu(N) \geqslant \mu^*(B \cap N) \geqslant \mu^*(B \cap R_1) - \varepsilon\mu^*(B)$$

car

$$\mu^*(B \cap R_1) \leqslant \mu^*(B \cap N) + \mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N) ,$$

donc

$$\mu(N) \geqslant \mu^*(R \cap R_1) - \varepsilon\mu^*(B) \geqslant \mu(R \cup R_1) - 2\varepsilon\mu^*(B) ,$$

et par suite

$$\mu(N) \geqslant \mu^*(B)(1 - 2\varepsilon) .$$

(b) En considérant la famille $(K_\theta)_{\theta\in\Theta}$ définie par

$$K_\theta = R_1 \cap \{f_\theta > \beta\} \qquad \text{si } \theta \gg \theta_i \quad \text{pour } i = 1 , \dots , r ,$$
$$K_\theta = \emptyset \qquad \text{pour les autres } \theta \in \Theta ,$$

on construit de même des ensembles L_{η_j} , $j = 1 , \dots , p$ disjoints, tels que

$$L_{\eta_j} \in \mathcal{B}_{\eta_j} , \quad L_{\eta_j} \subset K_{\eta_j} \quad \text{pour } j = 1 , \dots , p ,$$

$$\eta_j \gg \theta_i \quad \text{pour tout } j = 1 , \dots , p \quad \text{et tout } i = 1 , \dots , r ,$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap L) < \varepsilon\mu^*(B) \qquad (\text{où } L = \bigcup_{j=1}^{p} L_{\eta_j}) .$$

On en déduit de même l'inégalité

$$\mu(L) \geqslant (1 - 2\varepsilon)\ \mu^*(B) .$$

(c) On a alors

$$\mu(N \cap L) \geqslant \mu(N) + \mu(L) - \mu(N \cup L) \geqslant (2 - 4\varepsilon)\ \mu^*(B) - \mu(R_1) ,$$

donc

(3) $$\mu(N \cap L) \geqslant (1 - 5\varepsilon)\ \mu^*(B) .$$

Soit η un indice de Θ majorant $\theta_1, \ldots, \theta_r, \eta_1, \ldots, \eta_p$; on a, d'après l'inégalité (2),

$$\alpha(1+\varepsilon)\,\mu^*(B) \geqslant \alpha\mu(N) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \int_{N_{\theta_i}} f_{\theta_i}\, d\mu = \int_{N} f_\eta\, d\mu .$$

En effet, les relations $\theta_i \ll \eta$ et $N_{\theta_i} \in \mathcal{B}_{\theta_i}$ entraînent

$$\int_{N_{\theta_i}} f_{\theta_i}\, d\mu = \int_{N_{\theta_i}} f_\eta\, d\mu \qquad i = 1, \ldots, r .$$

Les relations $\eta_j \gg \theta_i$, pour tout $i = 1, \ldots, r$ et tout $j = 1, \ldots, p$, entraînent en outre que N appartient à $\mathcal{B}_{\eta_j}$ pour tout $j = 1, \ldots, p$, et donc

$$\int_N f_\eta\, d\mu \geqslant \int_{N\cap L} f_\eta\, d\mu = \sum_{j=1}^{p} \int_{N\cap L_{\eta_j}} f_\eta\, d\mu = \sum_{j=1}^{p} \int_{N\cap L_{\eta_j}} f_{\eta_j}\, d\mu \geqslant \beta\mu(N\cap L) ;$$

en se servant de l'inégalité (3), on en déduit

$$\alpha(1+\varepsilon)\,\mu^*(B) \geqslant \beta(1-5\varepsilon)\,\mu^*(B) .$$

ε avait été pris positif arbitraire ; pour ε assez petit, cette inégalité n'est pas vérifiée, car on a

$$\alpha < \beta \qquad \text{et} \qquad \mu^*(B) \neq 0 ,$$

l'hypothèse $\mu^*(\{\liminf f_\theta < \limsup f_\theta\}) > 0$ est donc absurde ; d'où le théorème 2.2.

2.4 THÉORÈME. - Supposons la mesure μ σ-finie, et la condition de Vitali (V) vérifiée par la base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Soient $\mathcal{B}_\omega$ la tribu engendrée par la tribu $\mathcal{B}_\theta$, $\theta \in \Theta$, et f une fonction $\mathcal{B}_\omega$-mesurable et intégrable. Alors les fonctions $f_\theta = E(f/\mathcal{B}_\theta)$ convergent presque sûrement vers f.

$(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une martingale de variation bornée. En effet, les propriétés des espérances conditionnelles donnent :

$$|f_\theta| \leqslant E(|f|/\mathcal{B}_\theta) ,$$

et donc

$$\sup_{\theta\in\Theta} \int_E |f_\theta|\, d\mu \leqslant \int_E |f|\, d\mu < +\infty .$$

Il existe donc une fonction $h(x)$ et un ensemble $A \in \mathcal{B}_\omega$ de μ-mesure nulle, tels que, pour tout $x \notin A$, $f_\theta(x) \to h(x)$ suivant le filtre des sections de Θ.

Si h n'est pas presque sûrement égale à f , il existe deux nombres a et b pour lesquels l'un des deux ensembles

$$C = \{h < a < b < f\} \qquad \text{ou} \qquad C' = \{f < a < b < h\}$$

soit de μ^*-mesure non nulle. Supposons tout d'abord $\mu^*(C) > 0$. On peut, en ôtant les points de A , trouver un ensemble B tel que

$$B \cap A = \emptyset \, , \quad B \subset \{h < a < b < f\} \quad \text{et} \quad \mu^*(B) > 0 \, .$$

La fonction f est $\mathcal{B}_\omega$-mesurable ; il existe donc un ensemble $R \in \mathcal{B}_\omega$, tel que $R \subset \{b < f\}$ et $\mu^*(B) = \mu(R)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $R_1 \in \mathcal{B}_\rho$ pour un certain $\rho \in \Theta$, vérifiant la relation

$$\mu(R \cup R_1 \setminus R \cap R_1) < \varepsilon\mu^*(B) \, .$$

Si nous posons

$$M_\theta = R_1 \cap \{f_\theta < a\} \qquad \text{si } \theta >> \rho \, ,$$
$$M_\theta = \emptyset \qquad \text{pour les autres } \theta \in \Theta \, ,$$

$(M_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est un recouvrement fin de $B \cap R_1$, et on peut, comme au 2.3 (a), trouver des $N_{\theta_1}, \ldots, N_{\theta_r}$ disjoints pour lesquels on a

$$N_{\theta_i} \in \mathcal{B}_{\theta_i} \, , \quad N_{\theta_i} \subset M_{\theta_i} \qquad i = 1 , \ldots , r \, ,$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N) < \varepsilon\mu^*(B) \qquad (\text{où } N = \bigcup_{i=1}^{r} N_{\theta_i}) \, ,$$

et on en déduit, comme au 2.3 (a), les inégalités

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(1 - 2\varepsilon)\, \mu^*(B) \leqslant \mu(N) \leqslant (1 + \varepsilon)\, \mu^*(B) \, , \\ &(1 - 2\varepsilon)\, \mu^*(B) \leqslant \mu(R \cap N) \leqslant (1 + \varepsilon)\, \mu^*(B) \, . \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_N f \, d\mu = \sum_{i=1}^{r} \int_{N_{\theta_i}} f \, d\mu \leqslant a\mu(N) \leqslant a\mu^*(B)\, (1 + \varepsilon) \, ,$$

et

$$\int_N f \, d\mu = \int_{N\cap R} f \, d\mu + \int_{N\setminus R} f \, d\mu \geqslant b\, \mu(N \cap R) + \int_{N\setminus R} f \, d\mu \, ,$$

donc

$$\int_N f \, d\mu \geqslant b(1 - 2\varepsilon)\, \mu^*(B) + \int_{N\setminus R} f \, d\mu \, ,$$

ce qui entraîne l'inégalité

(5) $$\int_{N\setminus R} f\,d\mu + b(1-2\varepsilon)\,\mu^*(B) \leqslant a\,\mu^*(B)\,(1+\varepsilon)\ ;$$

mais on a $\mu(N\setminus R) \leqslant \mu(R_1 \setminus R) \leqslant \varepsilon\,\mu^*(B)$, et f étant intégrable, on a

$$\left|\int_{N\setminus R} f\,d\mu\right| \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad \text{avec } \eta(\varepsilon) \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0\ ;$$

quand on passe à la limite dans (5), on arrive donc à une contradiction avec les hypothèses $a < b$, $\mu^*(B) > 0$. On démontrerait de même qu'il n'existe pas de couple (a , b) tel que $\mu^*(\{f < a < b < h\}) > 0$. D'où le résultat.

2.5 THÉORÈME. - Soient $(E , \mathcal{B} , \mu)$ un espace mesuré (où la mesure μ est σ-finie), Θ un ensemble filtrant croissant, $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une base vérifiant la condition de Vitali (V). Si $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une martingale, et si les fonctions f_θ sont uniformément intégrables, alors les fonctions f_θ convergent presque sûrement suivant le filtre des sections de Θ vers une fonction f qui est $\mathcal{B}_\omega$-mesurable, et telle que

$$f_\theta = E(f/\mathcal{B}_\theta) \quad \text{p. s.}\ .$$

(a) Les fonctions f_θ sont uniformément intégrables si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $H \in \mathcal{B}$ et un nombre $a > 0$ tels que

(i) $\mu(H) < +\infty$;

(ii) $\int_{\complement H} |f_\theta|\,d\mu < \varepsilon$ pour tout $\theta \in \Theta$;

(iii) $\int_{\{|f_\theta|>a\}\cap H} |f_\theta|\,d\mu < \varepsilon$ pour tout $\theta \in \Theta$.

(b) Si ε , H , et a sont choisis comme dans 2.5 (a), on a, pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\int_A |f_\theta|\,d\mu \leqslant \int_{\complement H} |f_\theta|\,d\mu + \int_{H\cap\{|f_\theta|<a\}\cap A} |f_\theta|\,d\mu + \int_{H\cap\{|f_\theta|>a\}\cap A} |f_\theta|\,d\mu\ ,$$

ce qui donne, pour $A = E$,

(6) $$\int_E |f_\theta|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon + a\mu(H) = M < +\infty \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta\ ,$$

et, pour tout $A \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$, on a

$$\int_A |f_\theta|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon + a\mu(A) \leqslant 3\varepsilon\ .$$

En conclusion, si les fonctions $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ sont uniformément intégrables, la martingale $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est à variation bornée, et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que

$$\mu(A) \leqslant \eta \implies \int_A |f_\theta|\,d\mu \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta\ .$$

(c) Montrons maintenant que $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est un filtre de Cauchy dans $L^1(E, \mathcal{B}_\omega, \mu)$. ($\mathcal{B}_\omega$ désigne la tribu engendrée par la réunion des tribus $\mathcal{B}_\theta$, $\theta \in \Theta$.) En effet :

(i) Les fonctions f_θ sont intégrables pour tout $\theta \in \Theta$, d'après (6).

(ii) Si l'image du filtre des sections de Θ ne fait pas de $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ un filtre de Cauchy dans $L^1(E, \mathcal{B}_\omega, \mu)$, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et une suite θ_n croissante d'indices de Θ tels que

$$\int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_{n-1}}| \, d\mu > \varepsilon \qquad \text{pour tout } n .$$

La martingale $(f_{\theta_n}, \mathcal{B}_{\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de variation bornée, et les f_{θ_n} convergent donc presque sûrement vers une fonction g qui est $\mathcal{B}_\omega$-mesurable. Mais puisque les fonctions (f_{θ_n}) sont uniformément intégrables, il existe :

(i) $H \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(H) < +\infty$ et $\int_{\complement H} |f_{\theta_n}| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$, $\forall n$;

(ii) $\eta > 0$ tel que $\mu(A) < \eta$ entraîne $\int_A |f_{\theta_n}| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$, $\forall n$.

D'autre part, d'après le théorème d'Egorov, il existe $K \subset H$ tel que

(iii) $\mu(H \setminus K) < \eta$ et les fonctions f_{θ_n} tendent uniformément vers g sur K.

On a alors

$$\int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| \, d\mu \leq \int_{\complement H}(|f_{\theta_n}| + |f_{\theta_m}|) \, d\mu + \int_{H\setminus K}(|f_{\theta_n}| + |f_{\theta_m}|) \, d\mu + \int_K |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| \, d\mu$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_K |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| \, d\mu .$$

Si N est choisi tel que, pour n et $m > N$, $|f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| < \frac{\varepsilon}{3\mu(K)}$ sur K, on a

$$\int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| \, d\mu < \varepsilon \qquad \text{pour } n, m > N ,$$

ce qui est en contradiction avec la construction des f_{θ_n}. $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est donc un filtre de Cauchy dans $L^1(E, \mathcal{B}_\omega, \mu)$, et il existe $f \in L^1(E, \mathcal{B}_\omega, \mu)$ tel que $\int_E |f_\theta - f| \, d\mu \to 0$ suivant le filtre des sections de Θ. f est $\mathcal{B}_\omega$-mesurable, et on a, pour tout $A \in \mathcal{B}_\theta$, $\int_A f_\theta \, d\mu = \int_A f \, d\mu$. On a donc $f_\theta = E(f/\mathcal{B}_\theta)$ presque sûrement, ce qui, d'après le théorème 2.4, montre que les f_θ tendent vers f presque sûrement. D'où le théorème 2.5.

3. Condition de Vitali dans le cas des partitions finies d'un cube de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Définition de la base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on appellera pavé un ensemble $P = \prod_{k=1}^{n} (a_k , b_k)$ où (a_k , b_k) est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le pavé P sera dit ouvert (resp. fermé, semi-ouvert à droite, semi-ouvert à gauche) si tous les intervalles (a_k , b_k) sont ouverts (resp. fermés, semi-ouverts à droite, semi-ouverts à gauche). On appellera cube de $\mathbb{R}^n$ un pavé dont tous les côtés ont même longueur.

Soient E un cube fermé de $\mathbb{R}^n$, μ la mesure de Lebesgue sur E, Θ l'ensemble des partitions finies de E en pavés P semi-ouverts à droite (éventuellement fermés pour obtenir un recouvrement de E) tels que l'on ait, si K désigne le plus petit cube contenant K, l'inégalité

$$\mu(P) > k\mu(K) ,$$

où k est un nombre fixé tel que $0 < k < \frac{1}{2}$ (cette condition est toujours vérifiée si l'on se place dans $\mathbb{R}$). Θ est un ensemble filtrant croissant pour la relation de finesse en partition. Si α est un nombre fixé compris strictement entre 0 et 1, et si nous désignons par $G(P)$, pour tout pavé P, la réunion des pavés P' tels que

$$P \cap P' = \emptyset \qquad \text{et} \qquad k\mu(K') \leqslant \mu(P') \leqslant \alpha\mu(P)$$

(où K' est le plus petit cube contenant P'), il existe un nombre γ dépendant de α et de k, mais indépendant du pavé P, tel que $\mu(G(P)) \leqslant \gamma\mu(P)$.

Pour tout $\theta \in \Theta$, soit $\mathcal{B}_\theta$ la tribu sur E engendrée par la partition θ.

3.2 THÉORÈME. - La base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ vérifie la condition de Vitali (V).

(a) Soient M un sous-ensemble de E, et $(K_\theta)_{\theta\in\Theta}$ un recouvrement fin de M ; chaque K_θ est alors union finie d'éléments de la partition θ :

$$K_\theta = \bigcup_{u\in J_\theta} I_{\theta,u}$$

(les $I_{\theta,u}$ sont supposés tous non vides).

Dans $\mathfrak{J} = \{(\theta , u) \mid \theta \in \Theta , u \in J_\theta\}$, considérons la relation

$$(\theta , u) < (\rho , u) \quad \text{si et seulement si} \quad \theta \leqslant \rho .$$

On a alors, pour tout $(\theta , u) \in \mathfrak{J}$,

$$M \subset \bigcup_{(\theta,u)<(\rho,\nu)} I_{\rho,\nu} .$$

(b) Désignons par $(I_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ la famille $(I_{\theta,u})$, $\theta \in \Theta$, $u \in J_\theta$; on a alors le lemme suivant.

LEMME. - <u>Il existe une sous-famille</u> $(I_j)_{j\in\mathcal{J}}$ <u>de la famille</u> $(I_i)_{i\in\mathfrak{I}}$, <u>telle que les</u> I_j <u>soient deux à deux disjoints, et qu'à tout</u> $i \in \mathfrak{I}$ <u>on puisse associer un</u> $j \in \mathcal{J}$ <u>pour lesquels on a</u>

(i) $I_i \cap I_j \neq \emptyset$,

(ii) $\mu(I_i) < \alpha\mu(I_j)$ <u>(où</u> α <u>est fixé et</u> $0 < \alpha < 1$).

<u>Démonstration du lemme</u>. - Soit Ω_0 le plus petit ensemble bien ordonné, non dénombrable, 1 étant son plus petit élément,

$$\mathfrak{a}_1 = \{I_i \mid i \in \mathfrak{I}\} \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = \sup_{\mathfrak{a}_1} \mu(I_i) \ ;$$

il existe donc un pavé $I_{i_1} \in \mathfrak{a}_1$ pour lequel on a $\mu(I_{i_1}) \geqslant \frac{\mu_1}{\alpha}$.

Soit $\beta \in \Omega_0$; supposons construit, pour tout $\gamma < \beta$, un $I_{i_\gamma} \in \mathfrak{a}_1$ tel que

- les I_{i_γ} pour $\gamma < \beta$ soient deux à deux disjoints,
- si $\mathfrak{a}_\gamma = \{I_i \mid I_i \cap I_{i_{\gamma'}} = \emptyset$ pour tout $\gamma' < \gamma\}$

et si on désigne par μ_γ le $\sup_{\mathfrak{a}_\gamma} \mu(I_i)$, on ait

$$\mu(I_{i_\gamma}) \geqslant \alpha\mu_\gamma \ .$$

Posons alors

$$\mathfrak{a}_\beta = \{I_i \mid I_i \cap I_{i_\gamma} = \emptyset \text{ pour tout } \gamma < \beta\} \qquad \text{et} \qquad \mu_\beta = \sup_{\mathfrak{a}_\beta} \mu(I_i) \ .$$

Si $\mathfrak{a}_\beta$ est non vide (c'est-à-dire si $\mu_\beta > 0$), prenons un $I_{i_\beta} \in \mathfrak{a}_\beta$ pour lequel on a $\mu(I_{i_\beta}) \geqslant \alpha\mu_\beta$. Sinon on prendra $I_{i_\beta} = \emptyset$. On construit ainsi une application décroissante

$$\beta \longrightarrow \mu_\beta \quad \text{de } \Omega_0 \text{ dans } \underset{\sim}{R}^+ \ ;$$

il existe donc un $\beta_0 \in \Omega_0$ tel que

$$\beta \geqslant \beta_0 \implies \mu_\beta = \mu_{\beta_0} = a \ .$$

Ce nombre a ne peut être strictement positif, car on aurait alors construit une infinité d'ensembles deux à deux disjoints de mesure $\geqslant a$, contenus dans le cube E de mesure finie. $\mathfrak{a}_{\beta_0}$ est donc vide. Il existe donc, pour tout $i \in \mathfrak{I}$, un

$\beta \in \Omega_0$ pour lequel on a $I_i \cap I_{i_\beta} \neq \emptyset$; Ω_0 étant bien ordonné, on peut considérer β_1 le plus petit de ces éléments β. On a

$$I_i \cap I_{i_{\beta_1}} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I_i \cap I_{i_\gamma} = \emptyset \qquad \text{pour tout } \gamma < \beta \ ;$$

et par suite, $I_i \in \mathfrak{A}_{\beta_1}$, et donc $\mu(I_i) \leqslant \alpha\mu(I_{i_{\beta_1}})$. Le lemme est ainsi démontré, en prenant pour famille $(I_j)_{j\in\mathfrak{J}}$ la famille $(I_{i_\beta})_{\beta\in\Omega_0}$.

(c) Démontrons maintenant le théorème 3.2.

L'ensemble $\{I_j \ ; \ j \in \mathfrak{J} \ , \ I_j \neq \emptyset\}$ est dénombrable ; rangeons ses éléments en une suite $(L_{\theta_n})_{n\in\underline{N}}$, et posons pour chaque p

$$M'_p = M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} L_{\theta_i} \ .$$

On avait, pour tout couple (θ , u),

$$M \subset \bigcup_{(\theta,u)<(\rho,\nu)} I_{\rho,\nu} \ ;$$

tout point x de M (en particulier de M_p) est donc contenu dans un pavé $I_k \in \mathfrak{A}_1$ appartenant à une partition θ dont la finesse est arbitrairement grande. Il existe donc, pour tout point x de M_p, un pavé I_k contenant x et disjoint des L_{θ_i}, $i = 1 , \ldots , p$. On a, pour un certain $n \in \underline{N}$ $(n > p)$, les relations

$$I_k \cap L_{\theta_n} \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mu(I_k) \leqslant \alpha\mu(L_{\theta_n}) \ .$$

Soit $H(L_{\theta_n})$ la réunion des I_i, tels que $i \in \mathfrak{J}$, $I_i \cap L_{\theta_n} \neq \emptyset$, et $\mu(I_i) \leqslant \alpha\mu(L_{\theta_n})$. On a donc montré que M'_p est contenu dans la réunion $\bigcup_{n>p} H(L_{\theta_n})$. Mais les $H(L_{\theta_n})$ sont contenus dans les $G(L_{\theta_n})$, considérés en 3.1. Il existe donc une constante γ dépendant seulement de α et de k, telle que :

$$\mu(H(L_{\theta_n})) \leqslant \mu(L_{\theta_n}) \ .$$

On a donc

$$\mu^*(M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} L_{\theta_i}) \leqslant \sum_{n>p} \mu(H(L_{\theta_n})) \leqslant \gamma \sum_{n>p} \mu(L_{\theta_n}) \to 0$$

lorsque $p \to \infty$, puisque $\sum \mu(L_{\theta_n})$ converge.

On peut, d'après leur construction même, regrouper les L_{θ_i} de façon à obtenir, une suite L'_{n_j} d'éléments deux à deux disjoints, et pour laquelle on a

$$L'_{\eta_j} \subset K_{\eta_j} \qquad \text{et} \qquad L'_{\eta_j} \in \mathcal{B}_{\eta_j} .$$

La condition de Vitali (V) est donc vérifiée par la base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$.

4. Applications.

4.1 Cas dénombrable.

Si Θ est dénombrable, la base $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Vitali (V) :

En effet, si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement fin de M , M étant un ensemble de μ-mesure extérieure finie, soit $R \in \mathcal{B}_\infty$ ($\mathcal{B}_\infty$ désigne la tribu sur E engendrée par les tribus $\mathcal{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$), tel que $R \supset M$ et $\mu^*(M) = \mu(R) < +\infty$. $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi un recouvrement fin de R ; posons

$$L_n = K_n \setminus \bigcup_{p<n} K_p ,$$

L_n appartient à $\mathcal{B}_n$, et les L_n forment un recouvrement disjoint de R ; $\mu(R)$ étant finie, on a

$$\mu^*(M \setminus \bigcup_{n\leq p} L_n) \leq \mu(R \setminus \bigcup_{n\leq p} L_n) \to 0 \qquad \text{quand } p \to +\infty .$$

Par suite :

Toute martingale $(f_n , \mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, relative à une base croissante dénombrable de tribus $\mathcal{B}_n$ est presque sûrement convergente si elle est de variation semi-bornée ; ceci a lieu en particulier si

$$\sup_n \int |f_n| \, d\mu < +\infty .$$

4.2 COROLLAIRE de 3.2. - Toute martingale de variation semi-bornée, ayant pour base la base $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ considérée en 3.1, est presque sûrement convergente.

4.3 THÉORÈME de dérivation de Lebesgue. - Soit f une fonction intégrable sur $[0 , 1]$ pour la mesure de Lebesgue μ ; si l'on pose $g(x) = \int_0^x f \, d\mu$, cette fonction g est presque partout dérivable et sa dérivée est presque partout égale à f .

L'ensemble Θ des partitions de $E = [0 , 1]$, considéré en 3.1, est ici exactement l'ensemble de toutes les partitions finies θ de $[0 , 1]$ en intervalles

$$[a_0 , a_1[\ , \ [a_1 , a_2[\ , \ \ldots \ , \ [a_{n-2} , a_{n-1}[\ ; \ \ldots \ , \ [a_{n-1} , a_n] \ ,$$

où l'on a

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1 \ .$$

On notera $\theta = (a_i)$ une telle partition. L'ensemble Θ ordonné par la relation de finesse en partition est filtrant croissant ; soient, pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathcal{B}_\theta$ la tribu engendrée par θ , et $f_\theta = E(f/\mathcal{B}_\theta)$. $(f_\theta , \mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une martingale. D'après les théorèmes 3.2 et 2.4, il existe un sous-ensemble N de $[0 , 1]$ de mesure nulle, tel que, pour tout $x \notin N$, les nombres $f_\theta(x)$ convergent vers la fonction $f(x)$.

Soit x fixé, $x \notin N$; si I élément de la partition finie θ de $[0 , 1]$ contient x , on a

$$f_\theta(x) = \frac{\int_I f \, d\mu}{\mu(I)} \ ,$$

et par conséquent

$$f(x) = \lim \frac{\int_I f \, d\mu}{\mu(I)}$$

(limite prise selon le filtre des sections de Θ , avec $x \in I$, $I \in \theta$).

Pour toute partition $\theta = (a_0 = 0 , a_1 , \ldots , a_n = 1)$ de $[0 , 1]$, il en existe une plus fine $\theta' = (b_0 = 0 , \ldots , b_m = 1)$ pour laquelle un des b_i est égal à x . L'ensemble Θ' des partitions finies de $[0 , 1]$, $\theta = (a_i)$, pour lesquelles un des a_i est égal à x , est filtrant croissant et

$$f(x) = \lim \frac{\int_I f \, d\mu}{\mu(I)}$$

(limite prise selon le filtre des sections de Θ' avec $x \in I$, $I \in \theta$, $\theta \in \Theta'$), c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \ .$$

Ceci est vrai pour tout point $x \notin N$. On démontre de la même manière, en considérant cette fois-ci les partitions finies de $[0 , 1]$ en intervalles semi-ouverts à gauche, que, sauf sur un ensemble N' de mesure nulle, on a

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \frac{g(x-k)-g(x)}{k} = f(x) \ .$$

La fonction $g(x)$ est donc dérivable en tout point $x \notin N \cup N'$ (ensemble de mesure nulle) et de dérivée presque partout égale à $f(x)$.

5. Appendice ([1]).

Soient μ la mesure de Lebesgue sur $\underset{\sim}{R}$, F une fonction d'ensemble absolument continue par rapport à μ . Dans la théorie classique, on démontre que F est dérivable par rapport à μ de la manière suivante :

Pour tout x de $\underset{\sim}{R}$, on note $q(x\ ,\ a)$ l'intervalle de centre x et de côté a , et l'on considère les nombres

$$\varphi(x\ ,\ a) = \frac{F(q)}{\mu(q)}$$

et les quantités

$$\overline{D}_F(x) = \limsup_{a\to 0} \varphi(x\ ;\ a)$$

$$\underline{D}_F(x) = \liminf_{a\to 0} \varphi(x\ ;\ a) \ ,$$

appelées dérivées symétriques supérieures (resp. inférieures).

1° Soit (b_n) une suite dense dans l'intervalle $[0\ ,\ a_0]$, et soit, pour toute $a > 0$, la quantité

$$\psi(x\ ;\ a) = \sup_{b_n \leqslant a} \varphi(x\ ;\ b_n) \ .$$

On démontre que, F étant absolument continue par rapport à la mesure μ , on a

$$\overline{D}_F(x) = \lim_{k\to+\infty} \psi(x\ ;\ a_k) \ ,$$

où a_k est une suite tendant vers 0 . Ce qui montre que $\overline{D}_F(x)$ est une fonction mesurable. Un raisonnement analogue montre que $\underline{D}_F(x)$ est une fonction mesurable

2° On démontre ensuite que, si en tout point d'un ensemble e de mesure finie on a

$$\alpha \leqslant \overline{D}_F(x) \qquad (\text{resp. } \overline{D}_F(x) \leqslant \beta\ ) \ ,$$

on a aussi la relation

$$\alpha\mu(e) \leqslant F(e) \qquad (\text{resp. } F(e) \leqslant \beta\mu(e)\ )$$

(ceci restant valable en remplaçant $\overline{D}_F(x)$ par $\underline{D}_F(x)$).

3° On montre alors que l'on a les égalités

$$F(e) = \int_e \overline{D}_F(x)\ d\mu = \int_e \underline{D}_F(x)\ d\mu$$

pour tout ensemble e de μ-mesure finie. Les deux fonctions $\overline{D}_F$ et $\underline{D}_F$ sont donc presque partout égales.

4° Enfin on considère les ensembles $\sigma(x\ ;\ a)$ contenus dans $q(x\ ;\ a)$ pour lesquels on a

$$\frac{\mu(\sigma(x\ ;\ a))}{\mu(q(x\ ;\ a))} \geqslant \theta(x) > 0\ ,$$

et l'on pose

$$\overline{\Delta}_F(x) = \sup_{\text{suites } \sigma_n(x\ ;\ a)} \left(\limsup_{a\to 0} \frac{F(\sigma_n(x\ ;\ a))}{\mu(\sigma_n(x\ ;\ a))}\right)$$

et

$$\underline{\Delta}_F(x) = \inf_{\text{suites } \sigma_n(x\ ;\ a)} \left(\liminf_{a\to 0} \frac{F(\sigma_n(x\ ;\ a))}{\mu(\sigma_n(x\ ;\ a))}\right) .$$

On montre alors que ses fonctions sont équivalentes à $\overline{D}_F$ et $\underline{D}_F$ et vérifient donc, pour tout ensemble e de μ-mesure finie,

$$F(e) = \int_e \overline{\Delta}_F\ d\mu = \int_e \underline{\Delta}_F\ d\mu\ .$$

Le théorème de Lebesgue s'en déduit alors facilement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARATHÉODORY (Constantin). - Vorlesungen über reelle Funktionen. - Leipzig, B. G. Teubner, 1918.

[2] KRICKEBERG (K.) et PAUC (C.). - Martingales et dérivation, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 455-543.