Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

François Colmez

Travaux de V. Strassen sur la partition d'une forme linéaire dominée par une fonction sous-linéaire

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A1_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 1, 17 p. 5 et 12 novembre 1964

TRAVAUX DE V. STRASSEN ([3]) SUR LA PARTITION D'UNE FORME LINÉAIRE DOMINÉE PAR UNE FONCTION SOUS-LINÉAIRE

par François COLMEZ

1. Préliminaires. Rappel sur les fonctions sous-linéaires.

Définition. - Soit X un espace vectoriel réel ; on appelle fonction sous-linéaire sur X une application h de X dans $\mathbb{R}$ qui est :
(a) sous-additive : $h(x + y) \leqslant h(x) + h(y)$ (x et $y \in X$) ;
(b) positivement homogène : $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ ($x \in X$ et $\lambda \geqslant 0$).

Remarque. - Si dans cette définition on remplace la condition (b) par :
(b') $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ pour tout λ réel, on obtient une forme linéaire ;
ou par :
(b") $h(\lambda x) = |\lambda|\, h(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), on obtient une semi-norme ;
les semi-normes et les formes linéaires sont donc des fonctions sous-linéaires particulières. Pour les fonctions sous-linéaires comme pour les semi-normes (et avec la même démonstration), on a le théorème de Hahn-Banach :

Soient X un espace vectoriel réel, et h une fonction sous-linéaire sur X ; si ℓ_0 est une forme linéaire définie sur un sous-espace X_0 de X et dominée par h ($\ell_0(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in X_0$), il existe au moins une forme linéaire ℓ définie sur X prolongeant ℓ_0 et dominée par h.

Supposons maintenant que X soit un espace vectoriel (réel) normé ; on peut parler de fonction sous-linéaire continue h. Comme la sous-additionnée de h entraîne la relation

$$|h(x + y) - h(x)| \leqslant \max(h(y)\ ,\ h(-y)) \leqslant \max(|h(y)|\ ,\ |h(-y)|)\ ,$$

la continuité de h est équivalente à sa continuité à l'origine. La condition (b) montre alors que h est continue si, et seulement si, elle est bornée au sens suivant :

$$\sup\{\,|h(x)|\ ;\ \|x\| \leqslant 1\} < +\infty\ .$$

Par analogie avec les formes linéaires, on appellera norme de h le nombre

$$\|h\| = \sup\{\,|h(x)|\ ;\ \|x\| \leqslant 1\}$$

(c'est un abus de langage puisque l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions sous-linéaires continues n'est pas un espace vectoriel).

Pour tout $x \in X$, on a la relation $|h(x)| \leqslant \|h\| . \|x\|$.

Enfin, soient h_1 et h_2 deux fonctions sous-linéaires sur X telles que, pour tout x , $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ (h_1 dominée par h_2) ; si h_2 est continue, h_1 l'est aussi, et on a $\|h_1\| \leqslant \|h_2\|$. A toute fonction sous-linéaire h continue sur X , on peut alors faire correspondre l'ensemble $\varphi(h)$ des formes linéaires dominées par h ; cet ensemble est une partie de X^* (dual topologique de X), non vide (théorème de Hahn-Banach), convexe fortement borné et faiblement compact.

2. Théorème fondamental.

Soient maintenant $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$ un espace de probabilité, X un espace vectoriel réel normé séparable, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions sous-linéaires continues sur X .

Soit $\omega \longrightarrow h_\omega$ une application de Ω dans $\mathcal{H}$ telle que, $\forall\, x \in X$, l'application $\omega \longrightarrow h_\omega(x)$ de Ω dans $\underline{R}$ soit $\mathcal{L}$-mesurable (nous dirons faiblement mesurable). X étant séparable,

$$\|h_\omega\| = \sup\{ |h_\omega(x)| \ ; \ \|x\| \leqslant 1\}$$

peut s'écrire

$$\sup\{h_\omega(x) \ ; \ \|x\| \leqslant 1 \ \text{ et } \ x \in X_0\} \ ,$$

où X_0 est une partie dénombrable de X dense dans X . L'application $\omega \longrightarrow \|h_\omega\|$ de Ω dans $\underline{R}$, qui apparaît comme une borne supérieure dénombrable de fonctions mesurables est encore mesurable. Nous supposerons que

$$\int_\Omega \|h_\omega\| \ \mu(d\omega) < +\infty \ .$$

Il en résulte immédiatement que, pour tout $x \in X$, l'application $\omega \longrightarrow h_\omega(x)$ est μ-intégrable, et la relation

$$h(x) = \int_\Omega h_\omega(x) \ \mu(d\omega)$$

définit une fonction sous-linéaire continue sur X dont la norme $\|h\|$ est majorée par $\int_\Omega \|h_\omega\| \ \mu(d\omega)$.

Avec les notations précédentes, nous pouvons énoncer le théorème de base :

THÉORÈME 1. - y^* étant une forme linéaire continue sur X , les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $y^* \in \varphi(h)$ (y^* dominée par h) ;

(ii) il existe une application $\omega \longrightarrow y^*_\omega$ de ω dans X^* telle que :

$$\forall\, x \in X \begin{cases} \text{(a)} & \omega \to y^*_\omega(x) \ \underline{\text{soit}}\ \underline{\mathcal{L}\text{-mesurable}}\ ; \\ \text{(b)} & y^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x)\ ; \\ \text{(c)} & y^*(x) = \int_\Omega y^*_\omega(x)\ \mu(d\omega)\ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - Il est évident que (ii) $\Longrightarrow$ (i) .

Supposons donc que $y^* \in \varphi(h)$, et appelons L l'espace des applications étagées ξ de Ω dans X (c'est-à-dire ξ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} 1_{\Lambda_i}\, x_i$, où les Λ_i appartiennent à $\mathcal{L}$ et forment une partition finie de Ω) ; la fonction

$$\omega \to h_\omega(\xi(\omega))$$

est alors $\mathcal{L}$-mesurable et μ-intégrable.

Posons

$$H(\xi) = \int_\Omega h_\omega(\xi(\omega))\ \mu(d\omega)\ ;$$

H est une fonction sous-linéaire sur L .

Soit $\tilde{L}$ le sous-espace de L des applications $\tilde{\xi}$ constantes ; sur $\tilde{L}$, définissons la forme linéaire Q par $\tilde{Q}(\tilde{\xi}) = y^*(x)$ (x étant la valeur prise par $\tilde{\xi}$). Comme

$$H(\tilde{\xi}) = \int_\Omega h_\omega(x)\ \mu(d\omega) = h(x)\ ,$$

$\tilde{Q}$ est dominée par H , et, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire Q sur L dominée par H et prolongeant $\tilde{Q}$.

Soient $x \in X$ et $\Lambda \in \mathcal{L}$; la fonction $\omega \to 1_\Lambda(\omega)\, x$ appartient à L ; posons $\mu_x(\Lambda) = Q(x\, 1_\Lambda)$. $\mu_x(\Lambda)$ est une fonction additive définie sur $\mathcal{L}$ et qui vérifie les relations :

$$\mu_x(\Lambda) = Q(x\, 1_\Lambda) \leqslant H(x\, 1_\Lambda) = \int_\Lambda h_\omega(x)\ \mu(d\omega) \leqslant \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leqslant \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega)\ ,$$

$$-\mu_x(\Lambda) = Q(-x\, 1_\Lambda) \leqslant H(-x\, 1_\Lambda) = \int_\Lambda h_\omega(-x)\ \mu(d\omega) \leqslant \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leqslant \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega)\ ;$$

μ_x est donc une mesure bornée complètement continue par rapport à μ . Elle admet une densité $\omega \to q_\omega(x)$ majorée par $h_\omega(x)$ pour μ-presque tout ω .

La linéarité de Q entraîne que, si x et $y \in X$ et a et $b \in \underline{R}$,

$$q_\omega(ax + by) = a\, q_\omega(x) + b\, q_\omega(y) \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } \omega\ .$$

Soit alors X_0 l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments d'une partie dénombrable de X partout dense dans X ; il existe une partie Ω_0 de Ω de mesure-μ nulle telle que, pour tout $\omega \notin \Omega_0$, on ait

$$q_\omega(x) \leqslant h_\omega(x) \qquad \text{et} \qquad q_\omega(ax + by) = a\, q_\omega(x) + b\, q_\omega(y)$$

(x et $y \in X_0$, a et b rationnels) .

Nous allons maintenant définir l'application $\omega \to y^*_\omega$ cherchée, de la manière suivante :

(α) Si $\omega \notin \Omega_0$, y^*_ω sera la forme linéaire continue prolongeant par continuité q_ω de X_0 à X . Nous vérifions que :

(a) $\omega \to y^*_\omega(x)$ est une application $\mathcal{E}$-mesurable de $\Omega - \Omega_0$ dans $\underset{\sim}{R}$: c'est vrai, par construction, si $x \in X_0$; sinon, soit $\{x_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de points de X_0 tendant vers x ; l'application $\omega \to y^*_\omega(x)$ est la limite de la suite d'applications mesurables $\omega \to q_\omega(x_n)$.

(b) $y^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x)$, car c'est vrai si $x \in X_0$, partout dense dans X .

(β) Si $\omega \in \Omega_0$, nous choisirons y^*_ω dans $\varphi(h_\omega)$ de sorte que $\omega \to y^*_\omega(x)$ soit une application $\mathcal{E}$-mesurable de Ω_0 dans $\underset{\sim}{R}$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu complète pour la probabilité μ , ce choix peut être arbitraire ; sinon, ce choix est possible, grâce à la construction de Jacob (cf. plus loin).

L'application $\omega \to y^*_\omega$ ainsi construite vérifie (a) et (b). Pour vérifier (c), il reste à montrer que

$$\int_\Omega y^*_\omega(x)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega q_\omega(x)\ \mu(d\omega) = y^*(x)\ .\ .$$

Pour cela, il suffit de montrer que, si x_n est une suite d'éléments de X_0 tendant vers x , $q_\omega(x_n)$ tend μ-presque partout vers $q_\omega(x)$ (puisque $q_\omega(x_n)$ a pour limite $y^*_\omega(x)$ μ-presque partout).

Soit $\Lambda \in \mathcal{E}$, nous avons

$$|\mu_{x_n}(\Lambda) - \mu_x(\Lambda)| = |\mathcal{Q}[1_\Lambda(x_n - x)]| \leqslant \int_\Lambda |h_\omega(x_n - x)|\ \mu(d\omega)$$
$$\leqslant \|x_n - x\| \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leqslant \|x_n - x\| \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega)\ ,$$

par conséquent

$$\lim_n \sup_{\Lambda\in\mathcal{E}} |\mu_{x_n}(\Lambda) - \mu_x(\Lambda)| = 0\ ,$$

d'où

$$\lim_n \int_\Omega |q_\omega(x_n) - q_\omega(x)|\ \mu(d\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad q_\omega(x) = y^*_\omega(x) \quad \mu\text{-p. p.}\ .$$

<u>Construction de Jacob</u>. - Soit X_0 une partie dénombrable de X partout dense dans X ; pour $x \in X_0$ et pour r rationnel, posons

$$A_{x,r} = \{y^* \ ;\ y^* \in X^* \ \text{ et } \ y^*(x) \leqslant r\}\ ;$$

en faisant varier x dans X_0 , et r dans $\mathbb{Q}$, on obtient une famille dénombrable de parties faiblement fermées de X^* séparante (c'est-à-dire que, si y^*_1 et y^*_2 sont deux formes linéaires continues distinctes, il existe un $A_{x,r}$ contenant

l'une et non l'autre). Ordonnons cette famille en une suite $\{A_n\} = \{A_{x_{\alpha_n}, r_{\beta_n}}\}$.

Considérons maintenant la suite f_n d'applications de Ω_0 dans l'ensemble des parties de X^* , définie par récurrence de la manière suivante :

$$f_1(\omega) = \varphi(h_\omega) \quad ,$$

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega) \cap A_n & \text{si cette intersection est non vide ,} \\ f_n(\omega) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour un ω donné, la suite $f_n(\omega)$ est une suite emboîtée de compacts non vides, dont l'intersection $f(\omega) = \bigcap_n f_n(\omega)$ est non vide ; comme d'autre part la famille A_n est séparante, cette intersection ne peut comporter plus d'un point : $f(\omega)$ contient exactement un point ; soit $g(\omega) = x^*_\omega$ ce point.

L'application $\omega \longrightarrow x^*_\omega$ vérifie évidemment (b). Montrons maintenant que, pour tout x , l'application $\omega \longrightarrow x^*_\omega(x)$ est $\mathcal{E}$-mesurable ; il suffit, comme plus haut, de le montrer pour $x \in X_0$, et il est alors nécessaire et suffisant que, pour tout rationnel r , l'ensemble $\{\omega \; ; \; x^*_\omega(x) \leqslant r\}$ appartienne à $\mathcal{E}$. Nous sommes donc ramenés à montrer que, $\forall\, n$, $g^{-1}(A_n)$ appartient à $\mathcal{E}$. Montrons-le par récurrence.

Pour que $g(\omega)$ appartienne à A_n , il est nécessaire et suffisant que

$$f_n(\omega) \cap A_n \neq \emptyset \quad .$$

<u>Amorçons la récurrence</u> :

<u>Cas $n = 1$</u> . - Si $x^* \in f_1(\omega)$, on a $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant x^*(x_{\alpha_1}) \leqslant h_\omega(x_{\alpha_1})$, et si $x^* \in A_1$, on a $x^*(x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$; pour qu'il existe un x^* appartenant à la fois à $f_1(\omega)$ et à A_1 , il est donc nécessaire que $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$.

Réciproquement, si ω est tel que $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$, il est possible de trouver un nombre a vérifiant à la fois

$$-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant a \leqslant h_\omega(x_{\alpha_1}) \qquad \text{et} \qquad a \leqslant r_{\beta_1} \quad .$$

Soit $\tilde{x}^*$ la forme linéaire définie sur l'espace vectoriel engendré par x_{α_1} , prenant la valeur a en x_{α_1} ; $\tilde{x}^*$ est dominée par h_ω , et, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger à X en une forme linéaire x^* dominée par h_ω ; x^* ainsi définie appartient à la fois à $\varphi(h_\omega) = f_1(\omega)$ et à A_1 .

Conclusion : $g^{-1}(A_1) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}\}$; $g^{-1}(A_1)$ appartient bien à $\mathcal{E}$, puisque h_ω est $\mathcal{E}$-faiblement mesurable.

<u>Cas $n = 2$</u> . - Pour déterminer $g^{-1}(A_2)$, étudions séparément :

$$g^{-1}(A_2) \cap g^{-1}(A_1) \qquad \text{et} \qquad g^{-1}(A_2) \cap (\Omega_0 - g^{-1}(A_1)) \quad .$$

(α) Si $\omega \in g^{-1}(A_1)$ ($\Longleftrightarrow$ $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$), $f_2(\omega) = \varphi(h_\omega) \cap A_1$, et un raisonnement analogue au précédent montre que, pour que l'intersection $f_2(\omega) \cap A_2$ soit non vide, il est nécessaire que la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}$ ait lieu et soit compatible avec $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$; elle est alors suffisante. Autrement dit:

$$g^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}\} \cap \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \quad .$$

(β) Si $\omega \in \Omega_0 - g^{-1}(A_1)$ ($\Longleftrightarrow$ $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}$), $f_2(\omega) = \varphi(h_\omega)$, et pour que $\varphi(h) \cap A_2$ soit non vide, il est nécessaire que la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}$ ait lieu et soit compatible avec la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}$; elle est alors suffisante. Autrement dit :

$$g^{-1}(A_2) \cap (\Omega_0 - g^{-1}(A_1)) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}\} \cap \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \quad ;$$

en réunissant ces deux résultats, on obtient :

$$g^{-1}(A_2) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \in \mathcal{E} \quad .$$

<u>Cas général</u>. - De la même manière, en écrivant

$$g^{-1}(A_n) = \bigcup_{\{B_i\}} (g^{-1}(A_n) \cap B_1 \ldots \cap B_{n-1}) \quad ,$$

où chaque B_i est, soit $g^{-1}(A_i)$, soit $(\Omega_0 - g^{-1}(A_i))$, et où la réunion porte sur tous les choix possibles des B_i , on montre que

$$g^{-1}(A_n) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_n}) \leqslant r_{\beta_n}\} \in \mathcal{E} \quad .$$

<u>Remarque</u>. - On peut se passer de la construction de Jacob, à condition de remplacer dans le théorème 1 la condition (b) par la condition plus faible suivante :

(b') $\qquad x^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x) \qquad$ pour μ-presque tout ω .

En effet, (ii) $\Longrightarrow$ (i) reste vrai, et il suffit de choisir dans la réciproque, x^* constante sur Ω_0 .

Le théorème 1 va maintenant nous servir à démontrer la partie constructive de quelques théorèmes.

3. Théorème de Hardy, Littlewood, Polya, Blackwell, Stein, Scherman, Cartier.

Rappels et notations. - Si $(\Omega , \mathcal{F})$ et $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ sont des espaces mesurables, une probabilité de transition de Ω dans $\mathcal{R}$ est une application P de $\mathcal{B} \times \Omega$ dans $[0 , 1]$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $P(. , \omega)$ est une probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$, et, pour tout $E \in \mathcal{B}$, $P(E , .)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Si μ est une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{F})$, $P\mu$ est la probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ définie par

$$P\mu(E) = \int_\Omega P(E , \omega) \mu(d\omega) \qquad (E \in \mathcal{B}) ,$$

et $P \times \mu$ est la probabilité définie sur $(\Omega \times \mathcal{R} , \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ par

$$P \times \mu(D \times E) = \int_D P(E , \omega) \mu \, d\omega ;$$

la probabilité $P \times \mu$ a pour projections sur Ω et $\mathcal{R}$ respectivement μ et $P\mu$.

Si z est une fonction sur $\mathcal{R}$ $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, la relation

$$z\, P(\omega) = \int_\Omega z(r) \, P(dr , \omega)$$

définit une fonction sur Ω $\mathcal{F}$-mesurable et bornée.

Supposons maintenant que Ω soit une partie convexe compacte métrisable d'un e. v. t. l. c., et $\mathcal{F}$ la tribu borélienne de Ω.

Soit S l'ensemble des fonctions concaves continues sur Ω ; munissons l'ensemble des probabilités sur $(\Omega , \mathcal{F})$ de l'ordre suivant :
$\mu < \nu$ si et seulement si, pour toute fonction $y \in S$, l'inégalité suivante est réalisée :

$$\int_\Omega y \, d\mu \geqslant \int_\Omega y \, d\nu ;$$

cette inégalité se conserve pour les bornes inférieures de fonctions de S qui sont des fonctions concaves semi-continues supérieurement, car μ et ν sont des mesures de Radon > 0.

Enfin, une dilatation P sur Ω est une probabilité de transition de Ω dans Ω telle que, pour toute fonction affine continue z sur Ω,

$$z\, P(\omega) = \int_\Omega P(d\theta , \omega) \, z(\theta) = z(\omega) .$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 2. - Pour que $\mu < \nu$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une dilatation P sur Ω telle que $\nu = P\mu$.

Démonstration.

Condition suffisante (elle ne fait pas intervenir le théorème 1). - Soit $\nu = P\mu$; pour toute fonction x continue sur Ω, on a les égalités suivantes :

$$\int_\Omega x\, d\nu = \int_\Omega x(\omega) \int_\Omega P(d\omega\,,\,\theta)\, \mu(d\theta) = \int_\Omega \mu(d\theta) \int_\Omega x(\omega)\, P(d\omega\,,\,\theta) = \int xP\, d\mu \;.$$

Par conséquent, pour montrer que $\mu \prec \nu$, il suffit de montrer que $yP \leqslant y$, pour toute fonction y concave continue.

Or $y = \inf\{z\;;\; z \geqslant y\,,\; z \text{ affine sur } \Omega\}$, et par suite

$$y\,P(\theta) = \int_\Omega \inf_{z \geqslant y} z(\omega)\, P(d\omega\,,\,\theta) \leqslant \inf_{z \geqslant y} \int_\Omega z(\omega)\, P(d\omega\,,\,\theta) = \inf_{z \geqslant y} z(\theta) = y(\theta) \;,$$

car, P étant une dilatation, $zP = z$.

Condition nécessaire. - Mettons-nous en mesure d'appliquer le théorème 1. Pour cela, soit X l'espace de Banach séparable des fonctions continues sur Ω muni de la norme uniforme. D'après le théoreme de Riesz, à la probabilité ν sur Ω correspond une forme linéaire y^* continue sur X ; soit $\mu \prec \nu$.

Pour $x \in X$ et pour $\omega \in \Omega$, posons

$$h_\omega(x) = \inf\{y(\omega)\;;\; y \in S \text{ et } y \geqslant x\} \;.$$

Pour x fixé, $h_\omega(x)$ est une fonction sur Ω concave et bornée semi-continue supérieurement, et par conséquent $\mathcal{L}$-mesurable.

Pour ω fixé, c'est une fonction sous-linéaire sur X dominée par la fonction sous-linéaire N définie de la manière suivante :

$$N(x) = \sup\{x(\omega)\;;\; \omega \in \Omega\} \;.$$

(En effet, Ω étant compact, $N(x) = x(\omega_0)$ pour un certain ω_0, et la fonction affine $y(\omega) = x(\omega_0)$ vérifie $h_\omega(x) \leqslant y(\omega) \leqslant N(x)$.) Comme N est une fonction sous-linéaire continue de norme $\|N\| = 1$, $\|h_\omega\| \leqslant 1$, et par suite

$$\int_\Omega \|h_\omega\|\, \mu(d\omega) \leqslant 1 \;;$$

enfin, pour x fixé, $x(\omega) \leqslant h_\omega(x)$, donc l'hypothèse $\mu \prec \nu$ entraîne

$$y^*(x) = \int_\Omega x(\omega)\, \nu(d\omega) \leqslant \int_\Omega h_\omega(x)\, \nu(d\omega) \leqslant \int h_\omega(x)\, \mu(d\omega) \;.$$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont réunies ; nous en déduisons l'existence d'une application $\omega \longrightarrow y^*_\omega$ de Ω dans X^* telle que, pour tout $x \in X$,

a) $\omega \longrightarrow y^*_\omega(x)$ soit $\mathcal{L}$-mesurable ,

(b) $$y^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x) \quad (\leqslant Nx) \quad ,$$

(c) $$y^*(x) = \int_\Omega y^*_\omega(x)\, \mu(d\omega) \quad .$$

La relation (b), appliquée à $x \leqslant 0$ ($x^*_\omega(x) \leqslant N(x) \leqslant 0$), montre que y^*_ω est une forme linéaire positive. Soit donc $P(\cdot\, , \omega)$ la mesure positive associée à y^*_ω ; c'est une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{L})$ car, toujours d'après (b), nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} P(\Omega , \omega) = x^*_\omega(1) \leqslant N(1) = 1 \\ \text{et} \\ -P(\Omega , \omega) = x^*_\omega(-1) \leqslant N(-1) = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(\Omega , \omega) = 1 \quad .$$

La relation (a) exprime que, pour $A \in \mathcal{L}$, $\omega \longrightarrow P(A , \omega)$ est mesurable, donc P est une probabilité de transition, et enfin la relation (c) montre que $\nu = P\mu$.

Si maintenant y est une fonction concave continue,

$$y\, P(\omega) = \int_\Omega y(\theta)\, P(d\theta , \omega) = y^*_\omega(y) \leqslant h_\omega(y) = y(\omega) \quad ,$$

et par suite, pour toute fonction affine continue z , concave ainsi que son opposée, nous avons $zP = z$; P est une dilatation.

4. Partition d'une probabilité sur un espace polonais dominée par une fonctionnelle sous-linéaire.

Soit $\mathcal{R}$ un espace polonais (métrisable complet et séparable). Appelons $C(\mathcal{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathcal{R}$ muni de la norme uniforme, et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathcal{R}$.

ν étant une probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$, et h une fonction sous-linéaire sur $C(\mathcal{R})$, nous écrirons

$$\nu \leqslant h \quad \text{si} \quad \forall\, z \in C(\mathcal{R}) \qquad \int_{\mathcal{R}} z\, d\nu \leqslant h(z) \quad .$$

Comme au paragraphe précédent, appelons N la fonction sous-linéaire sur $C(\mathcal{R})$ définie par

$$N(z) = \sup\{z(r) \ , \ r \in \mathcal{R}\} \quad ;$$

N est continue, et $\|N\| = 1$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions sous-linéaires sur $C(\mathcal{R})$ dominées par N ; toute $h \in \mathcal{H}$ est continue et de norme $\|h\| \leqslant 1$.

Soient d'autre part un espace de probabilité $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$, et $\omega \longrightarrow h_\omega$ une application de Ω dans $\mathcal{H}$ $\mathcal{L}$-faiblement mesurable.

Pour tout $z \in C(\mathcal{R})$, l'application $\omega \longrightarrow h_\omega(z)$ étant mesurable bornée est μ-intégrable, et la relation

$$h(z) = \int_\Omega h_\omega(z)\ \mu(d\omega)$$

définit une fonction sous-linéaire appartenant à $\mathcal{K}$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 3. - Etant donnée une probabilité ν sur $(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{B})$, pour qu'il existe une probabilité de transition P de Ω dans $\mathcal{R}$ telle que $\nu = P\mu$ et $P(.\ ,\ \omega) \leqslant h_\omega$ pour μ-presque tout ω , il est nécessaire et suffisant que $\nu \leqslant h$.

Démonstration. - La nécessité est évidente.

Supposons donc $\nu \leqslant h$. Soit $\mathfrak{A}$ une classe de fermés de $\mathcal{R}$, contenant tous les compacts et tous les complémentaires d'une base dénombrable de la topologie de $\mathcal{R}$, stable pour la réunion finie et l'intersection ; et soit X un sous-espace fermé séparable de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ tel que, pour tout $A \in \mathfrak{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel, il existe un élément $x_{A,\varepsilon}$ de X à valeur dans $[0\ ,\ 1]$ prenant la valeur 1 sur A et la valeur 0 sur le complémentaire de A_ε (A_ε étant le voisinage ouvert d'ordre ε de A).

La restriction h^*_ω de h_ω à X est encore faiblement mesurable, et

$$\|h^*_\omega\| \leqslant \|h_\omega\| \leqslant 1 \quad .$$

$\omega \longrightarrow \|h^*_\omega\|$ qui est $\mathcal{L}$-mesurable (puisque X est séparable), est donc μ-intégrable. En appelant y^* la restriction à X de la forme linéaire $z \longrightarrow \int_\mathcal{R} z\ d\nu$, nous avons $y^*(x) \leqslant h^*_\omega(x)$, et toutes les conditions du théorème 1 sont remplies.

Il existe donc une application $\omega \longrightarrow y^*_\omega$ de Ω dans X^* telle que, $\forall\ x \in X$,

(a) $\qquad \omega \longrightarrow y^*_\omega(x)$ soit $\mathcal{L}$-mesurable ,

(b) $\qquad y^*(x) \leqslant h^X_\omega(x)$,

(c) $\qquad \int_\mathcal{R} x\ d\nu = \int_\Omega y^*(x)\ \mu(d\omega)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement $\tilde{y}^*_\omega$ de y^*_ω à $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ vérifiant

$$\tilde{y}^*_\omega(z) \leqslant h_\omega(z) \quad (\leqslant N(z)\ ) \quad .$$

Ces inégalités montrent que $\tilde{y}^*_\omega$ est une forme linéaire positive (car si $z \leqslant 0$, $y^*_\omega(z) \leqslant 0$) et que $\tilde{y}^*_\omega(1) = 1$.

$\mathcal{R}$ étant normal et à base dénombrable, il existe, d'après A. D. ALEKSANDROV [2], une fonction d'ensemble $p(.\ ,\ \omega)$ non négative et additive, définie sur l'algèbre

engendrée par la topologie, et satisfaisant à

$$p(E\ ,\ \omega) = \sup\{p(A\ ,\ \omega)\ ,\ \ A \text{ fermé},\ \ A \subset E\}\ ,$$

$p(.\ ,\ \omega)$ étant liée à $\tilde{y}^*_\omega$ par les relations :

$$\tilde{y}^*_\omega(z) = \int_{\mathcal{R}} z(r)\ p(dr\ ,\ \omega) \qquad \text{pour} \quad z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$$

et

$$p(A\ ,\ \omega) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^*_\omega(x_{A,\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} y^*_\omega(x_{A,\frac{1}{n}}) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathcal{L}\ .$$

Cette dernière relation montre que $p(A\ ,\ .)$ est $\mathcal{L}$-mesurable comme limite dénombrable de fonctions mesurables (pour $A \in \mathcal{L}$).

Pour montrer que $p(.\ ,\ \omega)$ peut être prolongée à la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}$ en une probabilité, que nous noterons $P(.\ ,\ \omega)$, il ne reste plus qu'à montrer sa σ-additivité (sur l'algèbre engendrée par $\mathcal{L}$) puisque nous savons déjà qu'elle est positive et que $p(\mathcal{R}\ ,\ \omega) = y^*_\omega(1) = 1$.

Or, sur un espace polonais $\mathcal{R}$, la σ-additivité d'une fonction d'ensemble γ , positive et bornée, définie sur une algèbre contenant les fermés, est équivalente à l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un compact K , vérifiant $\gamma(K_\varepsilon) > \gamma(\mathcal{R}) - \varepsilon$ [2]. Ici, ν étant une probabilité sur $(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{B})$, il est donc possible de trouver, pour tout $\delta > 0$ et tout entier k , un compact $A^{(k)}$ tel que

$$\nu(A^{(k)}) > 1 - \delta\ 2^{-2k}\ .$$

Comme $A^k \in \mathcal{L}$, on peut écrire :

$$\nu(A^{(k)}) = \int_\Omega p(A^{(k)}\ ,\ \omega)\ \mu(d\omega)\ ,$$

d'où

$$1 - \delta\ 2^{-2k} < \int_{\{p(A^{(k)},\omega)>1-2^{-k}\}} p(A^{(k)}\ ,\ \omega)\ \mu(d\omega) + \int_{\{p(A^k,\omega)\leqslant 1-2^{-k}\}} p(A^k\ ,\ \omega)\ \mu(d\omega)$$

$$\leqslant \mu(\{p(A^k\ ,\ \omega) > 1 - 2^{-k}\}) + (1 - 2^{-k})[1 - \mu(\{p(A^k\ ,\ \omega) > 1 - 2^{-k}\})]\ .$$

Soit

$$1 - \delta\ 2^{-2k} < 2^{-k}\ \mu(\{p(A^k\ ,\ \omega) > 1 - 2^{-k}\}) + 1 - 2^{-k}\ ,$$

et

$$\mu(\Omega - \{p(A^k\ ,\ \omega) > 1 - 2^{-k}\}) < \delta\ 2^{-k}\ .$$

Si bien que l'ensemble $\Omega_0 = \bigcap_k \{p(A^{(k)}\ ,\ \omega) > 1 - 2^{-k}\}$ des ω , pour lesquels $p(.\ ,\ \omega)$ est σ-additive sur $\mathcal{L}$ (donc pour lesquels $P(.\ ,\ \omega)$ est une probabilité), vérifie l'inégalité $\mu(\Omega_0) > 1 - \delta$, et, δ étant arbitraire, Ω_0 est bien

de mesure μ égale à 1 , c'est-à-dire que $P(\cdot\ ,\ \omega)$ est une probabilité sur $(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{B})$ pour μ-presque tout ω .

$P(B\ ,\ \cdot)$, définie sur Ω_0 , est $\mathcal{L}$-mesurable pour $B \in \mathcal{B}$, car comme $p(A\ ,\ \cdot)$ l'était, et que $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{B}$, $P(B\ ,\ \cdot)$ est limite dénombrable de fonction mesurable.

Nous compléterons la définition de P en choisissant pour $P(\cdot\ ,\ \omega)$ une probabilité arbitraire fixe, si $\omega \notin \Omega_0$. P est une probabilité de transition de Ω dans $\mathcal{R}$.

La relation $\nu(E) = \int_\Omega p(E\ ,\ \omega)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega P(E\ ,\ \omega)\ \mu(d\omega)$, valable pour tout élément de $\mathcal{E}$, s'étend à $\mathcal{B}$; autrement dit, $\nu = P\mu$. Enfin, la relation $\tilde{x}^*_\omega(z) \leqslant h_\omega(z)$ peut s'écrire $P(\cdot\ ,\ \omega) \leqslant h_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega_0$, c'est-à-dire pour μ-presque tout ω .

5. Partition d'une probabilité sur un espace polonais dominée par une capacité.

Dans le théorème précédent, il est possible de remplacer la condition $\nu \leqslant h$, qui fait intervenir les fonctions continues bornées sur $\mathcal{R}$, par une condition ne faisant intervenir que des parties de $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ étant toujours un espace polonais). Pour cela, rappelons que si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathcal{R}$, une capacité, normalisée, alternée d'ordre 2 sur $\mathcal{O}$, est une fonction f sur $\mathcal{O}$ à valeur dans $[0\ ,\ 1]$ telle que :

(a) $$f(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad f(\mathcal{R}) = 1 \ ,$$

(b) $$f(u) \leqslant f(v) \quad \text{si} \quad u \subset v \ ,$$

(c) $$f(u \cup v) + f(u \cap v) \leqslant f(u) + f(v) \ .$$

A la capacité f associons la fonction définie sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ par la relation suivante:

$$h(z) = \inf_{r\in\mathcal{R}} \{z(r)\} + \int_0^\infty f(\{r\ ;\ z(r) > \inf_{r\in\mathcal{R}} \{z(r)\} + t\})\ dt \qquad (z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})) \ .$$

Nous allons montrer que h est une fonction sous-linéaire sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ dominée par N , et que, pour toute probabilité ν sur $(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{B})$, les relations

$$\forall\ z \quad \int z\ d\nu \leqslant h(z) \qquad \text{et} \qquad \forall\ u \ \text{ouvert} \quad \nu(u) \leqslant f(u)$$

sont équivalentes.

Soit $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$, posons

$$a = \inf_{r\in\mathcal{R}} \{z(r)\} \qquad \text{et} \qquad b = \sup_{r\in\mathcal{R}} \{z(r)\} \ .$$

La fonction $g_a(t) = f(\{r \; ; \; z(r) > a + t\})$ est décroissante, vaut 1 pour $t = 0$, et 0 pour $t > b - a$; elle est donc intégrable, et

$$\int_0^\infty g_a(t)\, dt = \int_0^{b-a} g_a(t)\, dt \leqslant b - a \quad ;$$

il en résulte que $h(z) \leqslant N(z) = b$.

Soit $\lambda > 0$,

$$h(\lambda z) = \lambda a + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; \lambda z(r) > \lambda a + t\})\, dt$$

$$= \lambda a + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; z(r) > a + \tfrac{t}{\lambda}\})\, dt = \lambda a + \int_0^\infty g_a(\tfrac{t}{\lambda})\, dt$$

$$= \lambda a + \int_0^\infty g_a(u)\, \lambda\, du = \lambda\, h(z) \quad .$$

Pour montrer la sous-additivité de h , remarquons que si $c < a$, on peut écrire

$$h(z) = c + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; z(r) > c + t\})\, dt \quad .$$

Soient alors z_1 et $z_2 \in C(\mathcal{R})$, et c un nombre inférieur à la fois à

$$\inf_{r \in \mathcal{R}} \{z_1(r)\} \qquad \text{et} \qquad \inf_{r \in \mathcal{R}} \{z_2(r)\} \quad .$$

Pour $t > 0$, posons

$$A_t = \{z_1 > c + t\} \; , \qquad B_t = \{z_2 > c + t\} \quad ,$$

$$C_t = \{\inf(z_1 \; , \; z_2) > c + t\} \qquad \text{et} \qquad D_t = \{\sup(z_1 \; , \; z_2) > c + t\} \quad ;$$

nous avons $C_t = A_t \cap B_t$ et $D_t = A_t \cup B_t$, et par suite

$$f(C_t) + f(D_t) \leqslant f(A_t) + f(B_t) \quad ;$$

soit encore

$$c + \int_0^\infty f(C_t)\, dt + c + \int_0^\infty f(D_t) \leqslant c + \int_0^\infty f(A_t)\, dt + c + \int_0^\infty f(B_t)\, dt \quad .$$

c'est-à-dire

$$h(\sup(z_1 \; , \; z_2)) + h(\inf(z_1 \; , \; z_2)) \leqslant h(z_1) + h(z_2) \quad .$$

Or, d'après un théorème de G. CHOQUET ([1], théorème 5.1), cette inégalité et la positive homogénéité de h entraînent que h est sous-additive.

Nous avons bien montré que h est une fonction sous-linéaire sur $C(\mathcal{R})$ dominée par N .

Soit maintenant ν une probabilité sur $(\mathcal{R} \; , \; \mathcal{B})$.

Si $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$, on peut écrire

$$\int z \, d\nu = \inf_{r \in \mathcal{R}} z(r) + \int_0^\infty \nu(\{r \; ; \; z(r) > \inf_{r \in \mathcal{R}} z(r) + t\}) \, dt \quad ;$$

par conséquent, si, pour tout ouvert u , $\nu(u) \leqslant f(u)$, il en résulte immédiatement

$$\int z \, d\nu \leqslant h(z) \quad .$$

Réciproquement, supposons que $\forall z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$, $\int z \, d\nu \leqslant h(z)$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{R}$. $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$, à valeur dans $[0 , 1]$, nulle sur $\complement \mathcal{U}$, et telle que $\nu(\mathcal{U}) \leqslant \int z \, d\nu + \varepsilon$.

Or, $\{r \; ; \; z(r) > t\} \subset u$ pour tout $t > 0$, donc $f(\{r \; ; \; z(r) > t\}) \leqslant f(u)$, et

$$h(z) = \int_0^1 f(\{r \; ; \; z(r) > t\}) \, dt \leqslant f(u) \quad .$$

Nous obtenons $\nu(\mathcal{U}) - \varepsilon \leqslant f(u)$, c'est-à-dire, ε étant arbitraire, $\nu(\mathcal{U}) \leqslant f(u)$.

Soient maintenant $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$ un espace de probabilité, et $\omega \longrightarrow F(. , \omega)$ une application de Ω dans l'ensemble des capacités normalisées alternées d'ordre 2 définies sur $\mathcal{O}$, telle que, $\forall u \in \mathcal{O}$, $F(u , .)$ soit $\mathcal{L}$-mesurable (nous dirons que F est un noyau alterné d'ordre 2 de Ω dans $\mathcal{R}$).

La relation $f(u) = \int_\Omega F(u , \omega) \, \mu(d\omega)$ définit encore une capacité normalisée alternée d'ordre 2 ; soient h_ω la fonction sous-linéaire associée à $F(. , \omega)$, et h celle associée à f , on a évidemment

$$h(z) = \int_\Omega h_\omega(z) \, \mu d\omega \quad .$$

Avec ces nouvelles notations, le théorème 3 peut s'énoncer :

THÉORÈME 4. - <u>Pour qu'une probabilité</u> ν <u>sur</u> $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ <u>vérifie</u> $\nu(u) \leqslant h(u)$ <u>pour tout ouvert</u> u <u>de</u> $\mathcal{R}$, <u>il est nécessaire et suffisant qu'il existe une probabilité de transition</u> P <u>de</u> Ω <u>dans</u> $\mathcal{R}$ <u>telle que</u> $\nu = P\mu$ <u>et que, pour</u> μ-<u>presque tout</u> ω ,

$$P(u , \omega) \leqslant F(u , \omega) \qquad \underline{\text{pour tout ouvert}} \; u \; \underline{\text{de}} \; \mathcal{R} \quad .$$

6. Problème de Fréchet.

Soient deux espaces de probabilité, $(\mathcal{R} , \mathcal{V} , \nu)$ et $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$, et m une mesure positive σ-finie sur le produit $(\mathcal{R} \times \Omega \; ; \; \mathcal{V} \otimes \mathcal{L})$. A quelle condition existe-t-il une probabilité α sur $(\mathcal{R} \times \Omega \; ; \; \mathcal{V} \otimes \mathcal{L})$, majorée par m , et de projections ν et μ sur $\mathcal{R}$ et Ω respectivement ? Le théorème 4 va nous permettre de donner une réponse dans le cas où $\mathcal{R}$ est un espace polonais et $\mathcal{V} = \mathcal{B}$ sa tribu borélienne.

De façon plus précise, nous avons :

THÉORÈME 5. - Pour qu'il existe une probabilité α sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ majorée par m et de projections ν et μ sur $\mathcal{R}$ et Ω respectivement, il est nécessaire et suffisant que, $\forall\, B \in \mathcal{B}$ et $\forall\, D \in \mathcal{L}$, on ait

$$\nu(B) + \mu(D) \leqslant 1 + m(B \times D) \quad .$$

Condition nécessaire. - Elle est évidente : si $\alpha \leqslant m$,

$$\nu(B) + \mu(D) = \alpha(B \times \Omega) + \alpha(\mathcal{R} \times D) = \alpha(B \times D) + \alpha(B \times \complement D) + \alpha(\mathcal{R} \times D)$$

$$\leqslant \alpha(B \times D) + \alpha(\mathcal{R} \times \complement D) + \alpha(\mathcal{R} \times D) \leqslant m(B \times D) + 1 \quad .$$

Condition suffisante. - Pour tout $B \in \mathcal{B}$, soit $M(B\ ,\ .)$ un représentant de l'espérance conditionnelle de B par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{L}$ et la mesure m.

$M(B\ ,\ \omega)$ est une mesure de transition de Ω dans $\mathcal{R}$, et on a

$$m(B \times D) = \int_D M(B\ ,\ \omega)\ m_0\ d\omega \qquad (\ B \in \mathcal{B} \text{ et } D \in \mathcal{L}\ )\ ,$$

où m_0 est la mesure projection de m sur $(\Omega\ ,\ \mathcal{L})$ ($m_0(D) = m(\mathcal{R} \times D)$). Nous pouvons sans restriction remplacer m_0 par sa partie n_0 complètement continue par rapport à μ, et m par n définie ainsi :

$$n(B \times D) = \int_D M(B\ ,\ \omega)\ n_0\ d\omega \quad ;$$

car, pour tout D sur lequel la restriction de m_0 est complètement continue par rapport à μ, $n_0 = m_0$, et l'inégalité $\nu(B) + \mu(D) \leqslant 1 + n(B \times D)$ reste vraie, tandis que, si $\mu(D) = 0$, l'inégalité $\nu(B) \leqslant 1 + n(B \times D)$ est vraie a fortiori.

Posons

$$F(u\ ,\ \omega) = \min\{\frac{dn_0}{d\mu}(\omega)\ M(u\ ,\ \omega)\ ,\ 1\} \qquad (\ u \text{ ouvert de } \mathcal{R} \text{ et } \omega \in \Omega\ )\ ,$$

$\frac{dn_0}{d\mu}$ étant un représentant déterminé de la densité de n_0 par rapport à μ, que nous pouvons choisir partout supérieur à 1 puisque $\mu \leqslant n_0$. $F(u\ ,\ \omega)$ est alors un noyau alterné d'ordre 2.

Pour tout ouvert u de $\mathcal{R}$, nous avons

$$\nu(u) \leqslant 1 - \mu(D) + n(u \times D) \quad ;$$

prenons pour ensemble D l'ensemble où $F(u\ ,\ \omega) = \frac{dn_0}{d\mu}(\omega)\ M(u\ ,\ \omega)$ (c'est-à-dire $\{\omega\ ;\ \frac{dn_0}{d\mu}(\omega)\ M(u\ ,\ \omega) \leqslant 1\}$) ; nous obtenons

$$1 - \mu(D) = \int_{\Omega - D} d\mu \quad ,$$

$$n(u \times D) = \int_D M(u , \omega) \frac{dn_0}{d\mu} (\omega) \mu(d\omega) \quad ,$$

et

$$\nu(u) \leqslant \int_{\Omega - D} d\mu + \int_D M(u , \omega) \frac{dn_0}{d\mu} (\omega) \mu(d\omega) = \int_\Omega F(u , \omega) \mu(d\omega) \quad .$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 4 : il existe une probabilité de transition P de Ω dans $\mathcal{R}$ telle que $P\mu = \nu$ et $P(. , \omega) \leqslant F(. , \omega)$ pour μ-presque tout ω .

Posons $\alpha = P \times \mu$, c'est-à-dire $\alpha(B \times D) = \int_D P(u , \omega) \mu(d\omega)$,

$$\alpha(\mathcal{R} \times D) = \int_D \mu(d\omega) = \mu(D)$$

et

$$\alpha(B \times \Omega) = \int_\Omega P(B , \omega) \mu(d\omega) = \nu(B) \quad .$$

α a bien pour projections μ et ν ; montrons que $\alpha \leqslant n \leqslant m$; pour u ouvert et $D \in \mathcal{L}$, nous avons

$$\alpha(u \times D) = \int_D P(u , \omega) \mu(d\omega) \leqslant \int_D F(u , \omega) \mu d\omega \leqslant \int_D M(u , \omega) n_0 \, d\omega = n(u \times D) \quad .$$

Par approximation, l'inégalité est vraie pour tous les pavés mesurables qui engendrent la σ-algèbre $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$.

7. Existence d'une probabilité (sur le produit d'un espace métrique complet séparable et de l'espace de ses fermés non vides) dont les projections sont données.

Soit $\mathcal{R}$ un espace métrique complet séparable dont la distance est notée d .

Prenons pour Ω l'ensemble des fermés non vides ω de $\mathcal{R}$, et sur Ω introduisons la métrique de Hausdorff

$$\delta(\omega , \omega') = \max\{\sup_{r \in \omega} d(r , \omega') , \sup_{r' \in \omega'} d(r' , \omega)\} \quad .$$

La partie de $\mathcal{R} \times \Omega$: $A = \{(r , \omega) ; r \in \omega\}$ est fermée pour la topologie produit ; c'est une conséquence immédiate de la définition de la topologie de Ω .

Munissons $\mathcal{R}$ et Ω de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$, et soit μ une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{L})$. $\mathcal{O}$ étant l'ensemble des ouverts de $\mathcal{R}$, définissons F sur $\mathcal{O} \times \Omega$ par

$$F(u , \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \cap \omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } u \cap \omega = \emptyset \end{cases} \quad .$$

Pour ω fixé, $F(. , \omega)$ est une capacité normalisée alternée d'ordre 2 .

Pour u fixé, $F(u , .)$ est $\mathcal{L}$-mesurable ; en effet, $\{\omega ; F(u , \omega) = 1\}$ est

l'ensemble des fermés de $\mathcal{R}$ qui rencontrent un ouvert de $\mathcal{R}$; c'est évidemment un ouvert.

Soit alors $f(u) = \int_\Omega F(u , \omega) \mu(d\omega)$: $f(u)$ est une capacité normalisée alternée d'ordre 2 , que l'on peut écrire $f(u) = \mu(\{\omega ; \omega \cap u \neq \emptyset\})$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 6. - Si ν est une probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$, pour que $\nu \leqslant f$ ($\nu(u) \leqslant f(u)$, $\forall u \in \mathcal{O}$), il est nécessaire et suffisant qu'il existe une probabilité α sur $(\mathcal{R} \times \Omega , \mathcal{B} \otimes \mathcal{L})$ de projections ν et μ telle que $\alpha(A) = 1$.

La condition est nécessaire. - Si $\nu \leqslant f$, nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4 : il existe une probabilité de transition P de Ω dans $\mathcal{R}$ telle que $\nu = P\mu$ et $P(u , \omega) \leqslant F(u , \omega)$ (μ-p. p.). En particulier, $P(\mathcal{R} - \omega , \omega) \leqslant F(\mathcal{R} - \omega , \omega) = 0$ μ-p. p., et par suite $P(\omega , \omega) = 1$ μ-p. p. La probabilité $\alpha = P \times \mu$ sur $(\mathcal{R} \times \Omega , \mathcal{B} \otimes \mathcal{L})$ (cf. § 5) a pour projections ν et μ , et nous avons

$$\alpha(A) = \int_\Omega P(\omega , \omega) \mu(d\omega) = 1 \quad .$$

La condition est suffisante. - Cela résulte immédiatement des relations

$$\nu(u) = \alpha(u \times \Omega) = \alpha(u \times \Omega \cap A) \leqslant \alpha(\mathcal{R} \times \{\omega ; u \cap \omega \neq \emptyset\}) = f(u) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.5, 1953-1954, p. 131-295.

[2] PROKHOROV (Ju. V.). - Convergence of Random processes and limit theorems, Theory of Prob. and its Appl., t. 1, 1956, p. 161.

[3] STRASSEN (V.). - The existence of probability measures with given marginals (à paraître).