

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

HAÏM BREZIS

## Points fixes

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 4 (1964-1965), exp. n° 11, p. 1-23

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1964-1965\\_\\_4\\_\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A10_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire CHOQUET,  
Initiation à l'Analyse,  
4e année, 1964/65, n° 11, 23 p.

6, 13 et 20 mai 1965

POINTS FIXES

par Haïm BREZIS

Introduction. - La première partie de cet exposé est consacrée à des théorèmes de points fixes obtenus par EDELSTEIN dans [7] et [8], qui généralisent la méthode des approximations successives pour des applications de type lipschitzien.

Dans la deuxième partie, on démontrera à l'aide du degré topologique (développé par LERAY dans [10]) quelques théorèmes de point fixe et de vecteur propre pour des applications complètement continues.

Enfin, dans la troisième partie, on trouvera des théorèmes de point fixe commun à une famille d'applications.

I. Généralisation de la méthode des approximations successives.

Définitions. - Soient  $E$  un espace métrique, et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ .

On dit que  $f$  est lipschitzienne (resp.  $\epsilon$ -lipschitzienne) de rapport  $k$  si

$$x, y \in E \text{ (resp. } d(x, y) < \epsilon) \implies d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) .$$

On dit que  $f$  est localement lipschitzienne de rapport  $k$  si,  $\forall x \in E$ ,  $\exists V$  voisinage de  $x$  tel que

$$y, z \in V \implies d(f(y), f(z)) \leq kd(y, z) .$$

Si  $k < 1$ ,  $f$  est dite respectivement, contractante,  $\epsilon$ -contractante, localement contractante.

Si  $k = 1$ ,  $f$  est dite respectivement, nonexpansive,  $\epsilon$ -nonexpansive, localement nonexpansive.

On dit que  $f$  est contractive (resp.  $\epsilon$ -contractive) si

$$x \neq y \text{ (resp. } 0 < d(x, y) < \epsilon) \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y) .$$

On dit que  $f$  est localement contractive si  $\forall x \in E$ ,  $\exists V$  voisinage de  $x$  tel que

$$y, z \in V \text{ et } y \neq z \implies d(f(y), f(z)) < d(y, z) .$$

I.1. Applications contractantes.

On utilisera le théorème classique d'approximations successives sous une forme un peu plus générale :

LEMME 1. - Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $E$ . S'il existe une métrique  $\delta$  et  $0 \leq k < 1$ , tels que

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \delta(x, y) \quad \text{et} \quad \delta(f(x), f(y)) \leq k\delta(x, y),$$

alors  $f$  a un point fixe unique  $a$ . De plus,

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) \quad \text{pour tout } x_0 \in E.$$

En effet, si  $x_0$  est un point quelconque de  $E$ , la suite  $x_n = f^n(x_0)$  est de Cauchy pour  $\delta$ , donc aussi pour  $d$ . Comme  $E$  est complet pour  $d$ ,  $x_n$  converge vers  $a$ , et on a  $f(a) = a$  puisque  $f$  est continue.

PROPOSITION 2. - Soit  $E$  un espace métrique complet  $\varepsilon$ -enchaînable (c'est-à-dire qu'on peut joindre deux points de  $E$  par une  $\varepsilon$ -chaîne). Toute application  $f$ ,  $\varepsilon$ -contractante de  $E$  dans  $E$ , a un point fixe unique  $a$ . De plus,

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) \quad \text{pour tout } x_0 \in E.$$

Notons  $C(x, y)$  l'ensemble des  $\varepsilon$ -chaînes joignant  $x$  à  $y$ , et posons

$$\delta(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) ; (x_i) \in C(x, y) \right\}.$$

Il est évident que  $\delta$  est une métrique sur  $E$  et que

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \delta(x, y).$$

Si  $(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , est une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  à  $y$ , on a

$$\forall i \quad d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq kd(x_{i-1}, x_i),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq k \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i).$$

Mais les  $f(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , constituent une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $f(x)$  à  $f(y)$ . Donc,

$$\delta(x, y) \leq k \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i),$$

et comme cette inégalité est vérifiée pour toute  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  à  $y$ , on en déduit que

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k\delta(x, y) .$$

La proposition résulte alors du lemme 1.

PROPOSITION 3. - Soit  $E$  un espace métrique complet, connexe par arcs rectifiables (c'est-à-dire qu'on peut joindre deux points de  $E$  par un arc rectifiable). Toute application  $f$  localement contractante de  $E$  dans  $E$  a un point fixe unique  $a$ . De plus,

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) \quad \text{pour tout } x_0 \in E .$$

Notons  $C(x, y)$  l'ensemble des arcs rectifiables joignant  $x$  à  $y$ , et  $V(L)$  la longueur d'un arc rectifiable  $L$ .

Posons

$$\delta(x, y) = \inf\{V(L) ; L \in C(x, y)\} .$$

Il est évident que  $\delta$  est une métrique sur  $E$  et que

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \delta(x, y) .$$

Montrons que

$$L \in C(x, y) \implies f(L) \in C(f(x), f(y))$$

et que

$$V(f(L)) \leq kV(L) .$$

Supposons  $L$  défini par une application continue  $\varphi$  de  $[0, 1]$  dans  $E$ . Comme  $L$  est compact et  $f$  localement contractante, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $a, b \in L$  et

$$d(a, b) < \varepsilon \implies d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) .$$

Mais,  $\varphi$  étant uniformément continue, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $s, t \in [0, 1]$ , et

$$|s - t| < \alpha \implies d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon \implies d(f\varphi(s), f\varphi(t)) \leq kd(\varphi(s), \varphi(t)) .$$

Ce qui montre que, pour toute partie finie  $\sigma$  de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ , dont le module vérifie  $\mu(\sigma) < \alpha$ , on a

$$\sum_{i=1}^n d(f\varphi(t_{i-1}), f\varphi(t_i)) \leq k \sum_{i=1}^n d(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)) \leq kV(L) .$$

On en déduit que  $f(L)$  est un arc rectifiable joignant  $f(x)$  à  $f(y)$ , et que  $V(f(L)) \leq kV(L)$ . Par suite,

$$\delta(f(x), f(y)) \leq V(f(L)) \leq kV(L) .$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout  $L \in C(x, y)$ , on a

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k\delta(x, y) .$$

La proposition résulte alors du lemme 1.

## I.2. Applications contractives.

Notons  $E(f)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites  $f^n(x)$ , où  $x \in E$ .

On dit que  $a \in E$  est périodique pour  $f$  s'il existe un entier  $p > 0$  tel que  $f^p(a) = a$ .

PROPOSITION 4. - Soient  $E$  un espace métrique, et  $f$  une application contractive de  $E$  dans  $E$ . L'ensemble des points fixes de  $f$  est identique à  $E(f)$  et contient au plus un élément.

COROLLAIRE 5. - Soit  $E$  un espace métrique compact. Toute application contractive  $f$  de  $E$  dans  $E$  a un point fixe unique  $a$ . De plus,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) \quad \text{pour tout } x_0 \in E .$$

PROPOSITION 6. - Soient  $E$  un espace métrique, et  $f$  une application  $\varepsilon$ -contractive de  $E$  dans  $E$ . L'ensemble des points périodiques de  $f$  est identique à  $E(f)$  et discret.

PROPOSITION 7. - Soient  $E$  un espace métrique compact, et  $f$  une application localement contractive de  $E$  dans  $E$ . L'ensemble des points périodiques de  $f$  est non vide, fini, et identique à  $E(f)$ .

Démontrons d'abord le lemme suivant, et puis la proposition 6.

LEMME 8. - Soit  $E$  un espace métrique, et soit  $f$  une application nonexpansive (resp.  $\varepsilon$ -nonexpansive) de  $E$  dans  $E$ . Tout  $a \in E(f)$  est valeur d'adhérence de la suite  $f^n(a)$  et la restriction de  $f$  à l'ensemble  $\{f^n(a); n \geq 0\}$  est une isométrie (resp.  $\varepsilon$ -isométrie).

Comme  $a \in E(f)$ , il existe  $x \in E$ , tel que  $a$  soit valeur d'adhérence de la suite  $f^n(x)$ . Pour tout  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < \varepsilon$ , il existe un entier  $m > 0$  tel que  $d(a, f^m(x)) < \alpha$  et  $\forall N$  entier  $> 0$ ,  $\exists p \geq m + N$  tel que  $d(a, f^p(x)) < \alpha$ .

D'où :

$$d(f^{p-m}(a), f^p(x)) \leq d(a, f^m(x)) < \alpha \quad \text{et} \quad d(a, f^{p-m}(a)) < 2\alpha .$$

Ce qui montre que  $a$  est valeur d'adhérence de la suite  $f^n(a)$ . Soient  $b = f^k(a)$  et  $c = f^l(a)$  deux éléments de la suite  $f^n(a)$ .

D'après ce qui précède,

$$a = \lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(a) .$$

D'où

$$b = \lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(b) \quad \text{et} \quad c = \lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(c) .$$

Si  $f$  est nonexpansive, on a

$$d(f^{n_i}(b), f^{n_i}(c)) \leq d(f(b), f(c)) \leq d(b, c) .$$

En passant à la limite, on en déduit

$$d(f(b), f(c)) = d(b, c) .$$

De même, si  $f$  est  $\varepsilon$ -nonexpansive,

$$d(b, c) < \varepsilon \implies d(f(b), f(c)) = d(b, c) .$$

Démonstration de la proposition 6. - Il résulte du lemme 8 que, si  $a \in E(f)$ ,  $a$  est valeur d'adhérence de la suite  $f^n(a)$ . Donc il existe un entier  $p > 0$  tel que  $d(a, f^p(a)) < \varepsilon$ .

Si  $f^p(a) \neq a$ , on a

$$d(f(a), f^{p+1}(a)) < d(a, f^p(a)) .$$

Comme la restriction de  $f$  à  $\{f^n(a); n \geq 0\}$  est une  $\varepsilon$ -isométrie, on est conduit à une contradiction. D'où  $f^p(a) = a$ .

Enfin, si  $a$  et  $b$  sont des points périodiques distincts de  $f$ , il existe un entier  $p > 0$ , tel que  $f^p(a) = a$  et  $f^p(b) = b$ ; on a donc nécessairement  $d(a, b) \geq \varepsilon$ .

Démonstration de la proposition 4. - Il est évident que  $f$  a au plus un point fixe, et que tout point fixe de  $f$  appartient à  $E(f)$ . Inversement, si  $a \in E(f)$ , il existe, d'après la proposition 6, un entier  $p > 0$  tel que  $f^p(a) = a$ . L'application  $g = f^p$  est aussi contractive et vérifie  $g(a) = a$ ,  $gf(a) = fg(a) = f(a)$ . Comme  $a$  est l'unique point fixe de  $g$ , on a  $f(a) = a$ .

Démonstration du corollaire 5. - Comme  $E$  est compact,  $E(f)$  n'est pas vide, et, d'après la proposition 4,  $f$  a un point fixe unique  $a$ . Pour tout  $x_0 \in E$ ,

la suite  $f^n(x_0)$  admet  $a$  pour seule valeur d'adhérence, et donc converge vers  $a$ .

Démonstration de la proposition 7. - Comme  $E$  est compact et  $f$  localement contractive,  $f$  est  $\varepsilon$ -contractive pour un certain  $\varepsilon > 0$ . La proposition 7 résulte alors simplement de la proposition 6.

### I.3. Applications nonexpansives.

On dit qu'une norme est strictement convexe si

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies \|x\|y = \|y\|x.$$

Soient  $E$  un espace vectoriel, et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ . On note

$$C(x) = c \left( \bigcup_{n \geq 0} f^n(x) \right),$$

et  $L(x)$  l'espace affine engendré par  $C(x)$ .

PROPOSITION 9. - Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme strictement convexe. Soient  $A$  un convexe fermé de  $E$ , et  $f$  une application nonexpansive de  $A$  dans  $A$ . S'il existe  $x \in A(f)$  tel que  $L(x)$  soit de dimension finie,  $f$  a un point fixe.

PROPOSITION 10. - Soit  $E$  un Banach réflexif muni d'une norme strictement convexe. Soient  $A$  un convexe fermé de  $E$ , et  $f$  une application nonexpansive de  $A$  dans  $A$ . S'il existe  $x \in A(f)$  tel que  $C(x)$  soit borné,  $f$  a un point fixe.

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME 11. - Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme strictement convexe. Soient  $A$  un convexe fermé, et  $f$  une application nonexpansive de  $A$  dans  $A$ . Si la restriction de  $f$  à un sous-ensemble  $B$  de  $A$  est une isométrie de  $B$  dans  $B$ , alors  $f$  est une application affine de  $c(B)$  dans  $c(B)$ .

Soient  $x_1, x_2 \in B$ ;  $\lambda, \mu \geq 0$ ,  $\lambda + \mu = 1$ , et  $y = \lambda x_1 + \mu x_2$ . Comme  $f$  est nonexpansive, on a

$$\|f(y) - f(x_1)\| \leq \mu \|x_2 - x_1\| \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(x_2)\| \leq \lambda \|x_2 - x_1\|.$$

D'où

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|f(y) - f(x_1)\| + \|f(y) - f(x_2)\| \leq \|x_2 - x_1\|,$$

ce qui exige :

$$\|f(y) - f(x_1)\| = \mu \|f(x_2) - f(x_1)\| \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(x_2)\| = \lambda \|f(x_2) - f(x_1)\| .$$

La norme étant strictement convexe,

$$f(y) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) .$$

En raisonnant par récurrence, et en passant à la limite, on voit que  $f$  est affine de  $\overline{c(B)}$  dans  $\overline{c(B)}$  .

LEMME 12. - Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Soient  $A$  un convexe de  $E$ ,  $L$  l'espace affine engendré par  $A$ , et  $f$  une application affine de  $A$  dans  $F$ . Pour que  $f$  se prolonge en une application affine continue de  $L$  dans  $F$ , il faut et il suffit que  $f$  soit lipschitzienne.

En particulier, une application affine lipschitzienne de  $A$  dans  $A$  est faiblement continue.

Il est facile de montrer que  $f$  se prolonge algébriquement de façon unique en une application affine  $g$  de  $L$  dans  $F$ . Supposons  $f$  lipschitzienne de rapport  $k$ , et montrons que  $g$  est continue. Soient  $x, y \in L$ ,

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{et} \quad y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 ,$$

avec  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1$ ;  $\alpha_1, \beta_1 \geq 1$ ;  $\alpha_2, \beta_2 \leq 0$ . Posons  $\gamma = \alpha_1 - \beta_2 = \beta_1 - \alpha_2 > 0$  et  $\alpha = \frac{\alpha_1}{\gamma}$ ,  $\beta = \frac{\beta_1}{\gamma}$ .

On a  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ ,

$$x - y = \gamma[\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_2 - (\beta y_1 + (1 - \beta)x_2)]$$

et

$$g(x) - g(y) = \gamma[f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_2) - f(\beta y_1 + (1 - \beta)x_2)] .$$

D'où

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Démonstration de la proposition 9. - Comme  $x \in A(f)$ , il résulte des lemmes 8 et 11 que la restriction de  $f$  à  $\overline{C(x)}$  est une application affine nonexpansive de  $\overline{C(x)}$  dans  $\overline{C(x)}$ . D'après le lemme 12,  $f$  se prolonge en une application  $g$  affine continue de  $L(x)$  dans  $L(x)$ .

Posons

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^i(x) \quad \text{et} \quad h(z) = g(z) - z \quad \forall z \in L(x) .$$

On a :

$$h(t_n) = f(t_n) - t_n = \frac{1}{n}(f^{n+1}(x) - f(x)) .$$

D'après le lemme 8,  $x$  est valeur d'adhérence de la suite  $f^n(x)$  ; on a donc

$$0 \in \overline{h(L(x))} = h(L(x)) .$$

Par suite,  $g$  a un point fixe  $y$  dans  $L(x)$ . L'inégalité  $\|y - f^n(x)\| \leq \|y - x\|$ , vérifiée pour tout  $n$ , montre que  $\overline{C(x)}$  est borné, donc compact. Il existe alors une suite extraite de la suite  $t_n$  qui converge vers un point fixe de  $f$ .

Démonstration de la proposition 10. - Comme  $x \in A(f)$ , la restriction de  $f$  à  $\overline{C(x)}$ , qui est faiblement compact, est affine nonexpansive, donc faiblement continue. Et, d'après le théorème de Hukuhara [11],  $f$  a un point fixe.

## II. Points fixes et vecteurs propres pour des applications complètement continues.

### II.1. Applications et déplacements complètement continus.

Soit  $E$  un espace localement convexe (e. l. c.) séparé.

On dit qu'une application  $f$  d'un espace topologique  $X$  dans  $E$  est complètement continue (c. c.) si  $f$  est continue et  $f(X)$  compact.

Soit  $X \subset E$  ; on dit qu'une application  $F$  de  $X$  dans  $E$  est un déplacement complètement continu (d. c. c.) si l'application  $f$  définie par  $f(x) = x - F(x)$ ,  $x \in X$ , est c. c.

PROPOSITION 13. - Soit  $X \subset E$  fermé, et soit  $F$  un d. c. c. de  $X$  dans  $E$ . Alors  $F(X)$  est fermé ; de plus, si  $K \subset E$  est compact,  $F^{-1}(K)$  est aussi compact.

En effet, si  $y \in \overline{F(X)}$ , on a

$$y = \lim_{\mathcal{U}} F(x_i) = \lim_{\mathcal{U}} x_i - f(x_i) ,$$

où  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille de points de  $X$  et  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $I$ . Comme  $f$  est c. c.,  $f(x_i)$  converge vers  $z$  suivant  $\mathcal{U}$ , et par suite

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = y + z \in X .$$

D'où

$$y = F(y + z) \in F(X) .$$

Si  $K \subset E$  est compact,  $F^{-1}(K)$  est fermé. De plus,  $F^{-1}(K) \subset f(X) + K$ , puisque

$$x \in F^{-1}(K) \implies F(x) = x - f(x) \in K \implies x \in f(X) + K,$$

ce qui montre que  $F^{-1}(K)$  est compact.

PROPOSITION 14 (Théorème d'approximation). - Soient  $X$  un espace topologique, et  $f$  une application c. c. de  $X$  dans  $E$ .

Pour tout voisinage  $V$  de  $0$ , il existe une famille finie  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de points de  $f(X)$  et une application continue  $f_V$  de  $X$  dans  $c(\bigcup_{i=1}^n a_i)$  tels que,  $\forall x \in X$ ,  $f(x) - f_V(x) \in V$ .

En effet, soit  $W$  un voisinage de  $0$ , ouvert, convexe, symétrique, contenu dans  $V$ , et soit  $p$  sa jauge. Si

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n a_i + W,$$

l'application  $f_V$  définie par

$$f_V(x) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^n q_i(x)} \quad \text{où } q_i(x) = \max\{1 - p(f(x) - a_i), 0\}$$

satisfait aux conditions de la proposition.

REMARQUE 15. - Si  $X \subset E$  est symétrique par rapport à  $0$  et si  $f$  est impaire (c'est-à-dire que  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in X$ ), on peut approcher  $f$  par des applications impaires du type précédent. Il suffit de poser  $a_{-i} = -a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et

$$f_V(x) = \frac{\sum_{i=-n}^{+n} q_i(x) a_i}{\sum_{i=-n}^{+n} q_i(x)}.$$

## II.2. Le degré topologique.

Nous énonçons ici les principales propriétés du degré dont on trouvera les démonstrations dans [12].

Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $U^*$  sa frontière, et soit  $F$  un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ . Pour tout  $a \notin F(U^*)$ , on peut définir un entier

relatif  $d(F, U, a)$  appelé degré de  $F$  sur  $U$  au point  $a$  et qui vérifie les propriétés suivantes :

(D<sub>1</sub>) Si  $F$  est l'application identique, on a :

$$d(F, U, a) = 1 \quad \text{pour } a \in U \quad \text{et} \quad d(F, U, a) = 0 \quad \text{pour } a \notin U .$$

(D<sub>2</sub>) Si  $d(F, U, a) \neq 0$ , il existe  $x \in U$  tel que  $F(x) = a$ .

(D<sub>3</sub>) Soit  $h(t, x)$  une application c. c. de  $(0, 1) \times \bar{U}$  dans  $E$ , et soit  $a(t)$  une application continue de  $(0, 1)$  dans  $E$ . On pose  $H_t(x) = \dot{x} - h(t, x)$ . Si  $\forall t \in (0, 1)$ ,  $a(t) \notin H_t(U^*)$ , alors  $d(H_t, U, a(t))$  reste constant quand  $t \in (0, 1)$ .

(D<sub>4</sub>) Soient  $K = \{x \in U ; F(x) = a\}$  et  $U_0$  un ouvert tel que  $K \subset U_0 \subset U$ . Alors

$$d(F, U, a) = d(F, U_0, a) .$$

(D<sub>5</sub>) Soient  $E'$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $F$  un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E'$ ,  $a \in E'$  et  $a \notin F(U^*)$ . On note  $U' = U \cap E'$  et  $F'$  la restriction de  $F$  à  $\bar{U} \cap E'$ . Alors,

$$d(F, U, a) = d(F', U', a) .$$

COROLLAIRE 16. -  $F$  et  $U$  étant fixés, l'application  $a \rightarrow d(F, U, a)$  est constante dans tout ouvert connexe disjoint de  $F(U^*)$ .

C'est une conséquence évidente de (D<sub>3</sub>).

COROLLAIRE 17. - Soient  $F$  et  $G$  deux d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$  et soit  $V$  un voisinage convexe de  $0$  tels que,  $\forall x \in U^*$ ,  $F(x) - G(x) \in V$ , et que  $a + V \cap F(U^*) = \emptyset$ . Alors,

$$d(F, U, a) = d(G, U, a) .$$

En effet, soit  $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$ ;  $h(t, x)$  est une application c. c. de  $(0, 1) \times \bar{U}$  dans  $E$ . On pose

$$H_t(x) = x - h(t, x) = t F(x) + (1 - t) G(x) .$$

Il est évident que,  $\forall t \in (0, 1)$ ,  $a \notin H_t(U^*)$ , et par suite

$$d(F, U, a) = d(G, U, a) .$$

REMARQUE 18. - Il résulte en particulier du corollaire 17 que  $d(F, U, a)$  dépend uniquement des valeurs prises par  $F$  sur  $U^*$  et du point  $a$ .

### II.3. Indice d'un point fixe.

Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $U$  un ouvert de  $E$ , et  $f$  une application c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ . Si  $z \in U$  est un point fixe isolé de  $f$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $z$  contenu dans  $U$  tel que  $\bar{V}$  ne contienne aucun autre point fixe de  $f$ . On pose alors  $i(z) = d(F, V, 0)$ ; et d'après  $(D_4)$ ,  $i(z)$  est indépendant du choix de  $V$  et définit l'indice du point  $z$ .

On dit qu'un point fixe  $z \in U$  de  $f$  est essentiel si,  $\forall V$  voisinage de  $z$ ,  $\exists W$  voisinage de  $0$  dans  $F$  tel que toute application c. c.  $g$  de  $\bar{U}$  dans  $E$  vérifiant  $f(x) - g(x) \in W$ ,  $\forall x \in \bar{U}$ , a un point fixe dans  $V$ .

PROPOSITION 19. - Tout point fixe de  $f$  dans  $U$ , isolé, dont l'indice n'est pas nul, est essentiel.

Si  $V$  est un voisinage de  $z$  contenu dans  $U$  tel que  $\bar{V}$  ne contienne aucun autre point fixe, il existe un voisinage convexe  $W$  de  $0$  tel que  $W \cap F(V^*) = \emptyset$ . Et, pour toute application c. c.  $g$  de  $\bar{U}$  dans  $E$ , telle que  $f(x) - g(x) \in W$ ,  $\forall x \in \bar{U}$ , on a, d'après le corollaire 17,

$$i(z) = d(F, V, 0) = d(G, V, 0) \neq 0.$$

Donc  $g$  a un point fixe dans  $V$ .

### II.4. Quelques théorèmes généraux de points fixes.

Soit  $E$  un e. l. c. séparé.

THÉOREME 20. - Soient  $U$  un ouvert de  $E$ , et  $f$  une application c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ . S'il existe  $a \in U$  tel que,  $\forall x \in U^*$  et  $\forall \alpha > 1$ ,

$$f(x) \neq \alpha x + (1 - \alpha)a,$$

alors  $f$  a un point fixe dans  $\bar{U}$ .

En effet, soit  $h(t, x) = t(f(x) - a)$ ;  $h(t, x)$  est une application c. c. de  $(0, 1) \times \bar{U}$  dans  $E$ . On pose  $H_t(x) = x - h(t, x)$ .

Ou bien,  $\forall t \in (0, 1)$ ,  $a \notin H_t(U^*)$ . Il en résulte, d'après  $(D_1)$  et  $(D_3)$ , que

$$d(H_1, U, a) = d(H_0, U, a) = 1.$$

Donc il existe  $z \in U$  tel que  $H_1(z) = z - f(z) + a = a$ .

Sinon, il existe  $0 \leq t \leq 1$  et  $z \in U^*$  tels que  $a = H_t(z) = z - t(f(z) - a)$ . D'où  $t \neq 0$  et  $f(z) = \frac{z + (1-t)a}{t}$ ; ce qui exige  $t = 1$ .

COROLLAIRE 21. - Soient  $A$  un convexe fermé de  $E$ , et  $f$  une application c. c. de  $A$  dans  $E$  telle que  $f(A^*) \subset A$ . Alors  $f$  a un point fixe dans  $A$ .

En effet, si  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ,  $A^* = A$  et  $f(A) \subset A$ . Comme  $\overline{f(A)}$  est compact, il résulte du théorème de Hukuhara [11] que  $f$  a un point fixe.

Sinon, comme  $A$  est convexe,  $\forall a \in \overset{\circ}{A}$ ,  $\forall x \in A^*$ , et  $\forall \alpha > 1$ ,

$$f(x) \neq \alpha x + (1 - \alpha)a,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 20.

COROLLAIRE 22. - Soient  $U$  un voisinage ouvert de  $0$ , et  $f$  une application c. c. de  $\overline{U}$  dans  $E$ . Si  $f$  n'a pas de point fixe dans  $\overline{U}$ , il existe  $z \in U^*$  et  $\lambda > 1$  tels que  $f(z) = \lambda z$ .

C'est une conséquence évidente du théorème 20.

COROLLAIRE 23. - Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $U$  un voisinage ouvert de  $0$ , et  $f$  une application c. c. de  $\overline{U}$  dans  $E$  telle que,  $\forall x \in U^*$ ,

$$\|f(x) - x\|^2 \geq \|f(x)\|^2 - \|x\|^2.$$

Alors  $f$  a un point fixe dans  $\overline{U}$ .

Il suffit d'appliquer le théorème 20 avec  $a = 0$ . Notons que, dans un espace préhilbertien, cette condition équivaut à,  $\forall x \in U^*$ ,

$$(f(x)|x) \leq (x|x).$$

Remarque. - Une application c. c.  $f$  d'un convexe quelconque  $A$  dans lui-même n'a en général pas de point fixe, comme le montre l'exemple suivant :  $A = ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .

THÉORÈME 24. - Soient  $U$  un voisinage ouvert convexe symétrique de  $0$ , et  $F$  un d. c. c. de  $\overline{U}$  dans  $E$  tel que,  $\forall x \in U^*$  et  $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$F(x) \neq \alpha F(-x).$$

Alors  $d(F, U, 0) \neq 0$ .

En particulier, une application c. c.  $f$  de  $\overline{U}$  dans  $E$  telle que,  $\forall x \in U^*$ ,  $f(-x) = -f(x)$  a un point fixe dans  $\overline{U}$ .

Démontrons d'abord les trois lemmes suivants :

LEMME 25 (BORSUK). - Soient  $E$  un espace de dimension finie, une boule ouverte de centre  $0$ , et  $F$  un d. c. c. de  $\overline{U}$  dans  $E$  tel que  $0 \in F(U^*)$  et que,

$$\forall x \in \bar{U} \quad F(-x) = -F(x) .$$

Alors  $d(F, U, 0) \neq 0$  .

On en trouvera une démonstration dans [9], p. 94.

LEMME 26. - Soient  $E$  un espace de dimension finie,  $U$  un voisinage ouvert, convexe, symétrique de  $0$ , et  $F$  un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$  tel que  $0 \notin F(U^*)$  et que,

$$\forall x \in U^* \quad F(-x) = -F(x) .$$

Alors  $d(F, U, 0) \neq 0$  .

En effet, soient  $f(x) = x - F(x)$  et  $p(x)$  la jauge de  $U$ . On considère l'application  $g$  de  $\bar{U}$  dans  $E$  définie par

$$\begin{cases} g(x) = p(x) f\left(\frac{x}{p(x)}\right) & \text{pour } p(x) \neq 0 , \\ g(x) = 0 & \text{pour } p(x) = 0 . \end{cases}$$

Il est évident que  $G(x) = x - g(x)$  est un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$  qui vérifie de plus :

$$G(x) = 0 \iff x = 0 ;$$

$$\forall x \in \bar{U}, \quad G(-x) = -G(x) , \text{ et, } \forall x \in U^*, \quad G(x) = F(x) .$$

Soit alors  $V$  une boule ouverte de centre  $0$  contenue dans  $U$ . La restriction de  $G$  à  $\bar{V}$  est un d. c. c. de  $\bar{V}$  dans  $E$  qui vérifie  $0 \notin G(V^*)$  et,  $\forall x \in \bar{V}$ ,  $G(-x) = -G(x)$ . Il résulte du lemme 25 que  $d(G, V, 0) \neq 0$ . Or, d'après  $(D_4)$  et la remarque 18, on a

$$d(F, U, 0) = d(G, U, 0) = d(G, V, 0) \neq 0 .$$

LEMME 27. - Conclusion identique à celle du lemme 26, en supposant seulement que  $E$  est un e. l. c. séparé.

Soit  $V$  un voisinage convexe de  $0$  tel que  $V \cap F(U^*) = \emptyset$ . On sait, d'après la remarque 15, qu'il existe un sous-espace  $L$  de  $E$  de dimension finie, et une application c. c.  $f_V$  de  $\bar{U}$  dans  $L$  telle que  $\forall x \in \bar{U}$ ,  $f(x) - f_V(x) \in V$ , et que  $\forall x \in U^*$ ,  $f_V(-x) = -f_V(x)$ .

Il résulte du corollaire 17 que le d. c. c.  $F_V$  associé vérifie

$$d(F, U, 0) = d(F_V, U, 0) .$$

En appliquant  $(D_2)$  et le lemme 26 :

$$d(F_V, U, 0) = d(F_V, U \cap L, 0) \neq 0 .$$

Démonstration du théorème 24. - Pour  $t \in (0, 1)$ , posons

$$H_t(x) = \frac{F(x) - t F(-x)}{1+t} .$$

Il est évident que  $0 \notin H_t(U^*)$  et que  $h(t, x) = x - H_t(x)$  est une application c. c. de  $(0, 1) \times \bar{U}$  dans  $E$ . D'autre part,

$$H_1(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2}$$

satisfait aux conditions du lemme 27.

D'où

$$d(F, U, 0) = d(H_0, U, 0) = d(H_1, U, 0) \neq 0 .$$

II.5. L'invariance du domaine  
et l'alternative de Fredholm dans un e. l. c. séparé.

THÉORÈME 28 (Invariance du domaine). - Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $U$  un ouvert de  $E$ , et  $F$  un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ .

Si  $F$  est injectif,  $F$  est un homéomorphisme de  $\bar{U}$  sur  $F(\bar{U})$ , et de plus  $F(\bar{U})$  est ouvert dans  $E$ .

Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 29. - Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $U$  un voisinage ouvert, convexe, symétrique de  $0$ , et  $F$  un d. c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ .

Si  $F$  est injectif,

$$d(F, U, F(0)) \neq 0 .$$

En effet, pour  $t \in (0, 1)$  et  $x \in \bar{U}$ , on pose

$$H_t(x) = F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(\frac{-tx}{1+t}\right) .$$

Il est évident que  $\forall t \in (0, 1)$ ,  $0 \notin H_t(U^*)$  et que  $h(t, x) = x - H_t(x)$  est une application c. c. de  $(0, 1) \times \bar{U}$  dans  $E$ . D'autre part,  $H_1(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) - F\left(-\frac{x}{2}\right)$  satisfait aux conditions du lemme 27.

D'où

$$d(F, U, F(0)) = d(F(x) - F(0), U, 0) = d(H_1, U, 0) \neq 0 .$$

Démonstration du théorème 28. - On sait, d'après la proposition 13, que  $F$  est une application fermée. Montrons que  $F(U)$  est ouvert. Soient  $a \in U$  et  $b = F(a)$ . Soit  $V$  un voisinage de  $a$ , ouvert, convexe, symétrique par rapport à  $a$ , contenu dans  $U$ . D'après le lemme 29,  $d(F, V, b) \neq 0$ , et comme  $b \notin F(V^*)$ , il

existe un voisinage convexe  $W$  de  $b$  tel que  $W \cap F(V^*) = \emptyset$ . Il résulte du corollaire 16 que  $\forall b' \in W$ ,

$$d(F, V, b') = d(F, V, b) \neq 0,$$

et donc

$$b' \in F(V) \subset F(U).$$

Ce qui montre que  $F(U)$  est ouvert.

THÉORÈME 30 (Alternative de Fredholm). - Soient  $E$  un e. l. c. séparé, et  $F$  une application linéaire injective de  $E$  dans  $E$ . S'il existe un ouvert  $U$  de  $E$  tel que la restriction de  $F$  à  $U$  soit un d. c. c., alors  $F$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $E$ .

Ce théorème est une conséquence évidente du théorème 26.

Application à la détermination de points fixes essentiels :

THÉORÈME 31. - Soit  $E$  un espace vectoriel normé ; soient  $U$  un ouvert de  $E$ , et  $f$  une application c. c. de  $U$  dans  $E$ . Soit  $z$  un point fixe de  $f$ . On suppose que la différentielle  $f'(z)$  existe, et n'admet pas 1 pour valeur propre.

Alors  $z$  est un point fixe isolé, d'indice non nul, donc essentiel.

Il est toujours possible de se ramener au cas où  $z = 0$ . Posons  $\ell = f'(0)$ . On voit facilement que la différentielle d'une application c. c. est un opérateur compact.

Par hypothèse,  $L(x) = x - \ell(x)$  est une application linéaire injective, et sa restriction à tout ouvert borné de  $E$  est un d. c. c. D'après le théorème 30,  $L$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $E$  ; donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que,  $\forall x \in E$ ,  $\varepsilon \|x\| \leq \|x - \ell(x)\|$ . Mais comme  $\ell = f'(0)$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\|x\| \leq \alpha \implies \|f(x) - \ell(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \leq \frac{1}{2} \|x - \ell(x)\|.$$

Soit  $V = \{x \in E ; \|x\| < \alpha\}$ .  $0$  est le seul point fixe de  $f$  dans  $\bar{V}$ , puisque  $x = f(x)$  entraîne  $x = \ell(x)$ , ce qui exige  $x = 0$ . D'après le corollaire 17 et le théorème 24,

$$i(0) = d(F, V, 0) = d(L, V, 0) \neq 0.$$

## II.6. Vecteurs propres.

THÉORÈME 32 (BIRKHOFF et KELLOG). - Soient  $E$  un espace vectoriel norme de dimension infinie,  $U$  une boule ouverte de centre  $0$ , et  $f$  une application c. c.

de  $U^*$  dans  $E$ , telle que  $0 \notin \overline{f(U^*)}$ . Il existe alors  $z \in U^*$  et  $\rho > 0$  tels que  $f(z) = \rho z$ .

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME 33. - Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension infinie, et soit  $S$  une sphère de  $E$ . Soient  $X$  un espace métrique, et  $Y \subset X$  fermé. Toute application continue de  $Y$  dans  $S$  se prolonge en une application continue de  $X$  dans  $S$ .

On en trouvera une démonstration dans [6].

Démonstration du théorème 32. - D'après le lemme 33, il existe une rétraction  $r(x)$  de  $\bar{U}$  dans  $U^*$  (qui prolonge l'application identique sur  $U^*$ ).

Donc  $g(x) = i(r(x))$  est une application c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$  telle que :  $0 \notin g(\bar{U})$ .

Par suite, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\bar{U} \cap \alpha g(\bar{U}) = \emptyset$ . L'application  $h(x) = \alpha g(x)$  est c. c. de  $\bar{U}$  dans  $E$ , et n'a pas de point fixe dans  $\bar{U}$ .

D'après le corollaire 22, il existe  $z \in U^*$  et  $\lambda > 1$  tels que

$$h(z) = \alpha g(z) = \alpha f(z) = \lambda z.$$

Remarque. - Le théorème 32 est inexact dans un espace de dimension finie : il suffit de considérer  $f(x) = -x$ .

THÉORÈME 34. - Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $K$  un compact de  $E$  tel que  $0 \notin c(K)$ , et  $C$  le cône convexe de sommet  $0$ , engendré par  $K$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $C$  tel que  $U \cap C$  soit borné, et soit  $f$  une application continue de  $U^* \cap C$  dans  $E$ . Il existe alors  $z \in U^* \cap C$  et  $\rho > 0$  tels que  $f(z) = \rho z$ .

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la démonstration :

LEMME 35. - Soient  $E$  un e. l. c. séparé, et  $A$  un convexe de  $E$ . Soient  $X$  un espace métrique, et  $Y \subset X$  fermé. Toute application continue de  $Y$  dans  $A$  se prolonge en une application continue de  $X$  dans  $A$ .

On en trouvera une démonstration dans [6].

LEMME 36. - Hypothèses et conclusion identiques à celles du théorème 34, mais en supposant de plus que  $E$  est normé et  $K$  convexe.

En effet,  $U^* \cap C$  est fermé dans  $\bar{U}$ , et donc, d'après le lemme 35,  $f$  se prolonge en une application continue  $g$  de  $\bar{U}$  dans  $K$ . Comme  $U \cap C$  est borné, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\bar{U} \cap C \cap \alpha K = \emptyset$ . L'application  $h(x) = \alpha g(x)$  est c. c. de  $\bar{U}$  dans  $\alpha K$ , et n'a pas de point fixe dans  $\bar{U}$ . D'après le corollaire 22, il existe  $z \in U^*$  et  $\lambda > 1$  tels que  $h(z) = \lambda z$ . Et comme  $g(z) \in K$ ,  $z \in U^* \cap C$  et  $g(z) = f(z)$ .

Démonstration du théorème 34. - Soit  $V$  un voisinage de  $0$ . D'après la proposition 14, il existe  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  et une application continue  $f_V$  de  $U^* \cap C$  dans  $c(\bigcup_{i=1}^n a_i)$  tels que,  $\forall x \in U^* \cap C$ ,  $f(x) - f_V(x) \in V$ . Par hypothèse,  $0 \notin c(\bigcup_{i=1}^n a_i)$ . Soit  $C_V$  le cône convexe engendré par les  $a_i$ .  $C_V$  est contenu dans un sous-espace de dimension finie de  $E$ . Donc la restriction de  $f_V$  à  $U^* \cap C_V$  vérifie les conditions du lemme 36. Il existe alors  $z_V \in U^* \cap C$  et  $\rho_V > 0$  tels que  $f_V(z_V) = \rho_V z_V$ . D'où  $f(z_V) - \rho_V z_V \in V$ . Soit  $W$  un voisinage ouvert convexe symétrique de  $0$ , contenu dans  $U$ , et soit  $p$  sa jauge. Si  $V \subset W$ ,  $p(f(z_V) - \rho_V z_V) < 1$ , d'où l'on déduit

$$\rho_V < \frac{1 + p(f(z_V))}{p(z_V)} .$$

Ce qui montre que  $\rho_V$  reste borné puisque  $p(z_V) \geq 1$ .

Soit alors  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de  $0$ . On a

$$\lim_{\mathcal{U}} f(z_V) = y \in K \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{U}} \rho_V = \rho > 0 .$$

D'où

$$\lim_{\mathcal{U}} z_V = z = \frac{y}{\rho} \in U^* \cap C .$$

Et comme  $f$  est continue,  $f(z) = \rho z$ .

On peut déduire, du théorème 34, le corollaire suivant qui généralise certains théorèmes connus de vecteur propre (en particulier ceux de [9] et [13]).

COROLLAIRE 37. - Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $C$  un cône convexe saillant de sommet  $0$ , et  $K$  un sous-ensemble compact de  $C$  avec  $0 \notin K$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $0$  tel que  $U \cap C$  soit borné, et soit  $f$  une application continue de  $U^* \cap C$  dans  $K$ . Il existe alors  $z \in U^* \cap C$  et  $\rho > 0$  tels que  $f(z) = \rho z$ .

En effet, les hypothèses :  $C$  saillant et  $0 \notin K$ , entraînent que  $0 \notin c(K)$ .

Remarque sur le théorème 34. - Soit  $C'$  le cône (non convexe) engendré par  $K$ . On voit aisément que le théorème 34 tombe en défaut si  $f$  est définie et continue seulement sur  $U^2 \cap C'$ .

### III. Points fixes communs à une famille d'applications.

#### III.1. Points fixes communs à une famille d'applications nonexpansives.

Soient  $E$  un espace vectoriel normé, et  $K$  un convexe compact de  $E$ .

THÉORÈME 38 (BRODSKIJ et MILMAN). - Il existe un point fixe commun à toutes les isométries de  $K$  dans  $K$ .

THÉORÈME 39 (De MAAR). - Soit  $\mathfrak{S}$  une famille d'applications nonexpansives de  $K$  dans  $K$  qui commutent deux à deux. Il existe un point fixe commun à toutes les applications de  $\mathfrak{S}$ .

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME 40. - Soit  $\rho = \text{diam } K$ . Si  $\rho > 0$ , il existe  $u \in K$  tel que

$$\sup_{x \in K} \|x - u\| < \rho.$$

Soient  $x_1, x_2 \in K$  tels que  $\|x_1 - x_2\| = \rho$ . Considérons la famille des parties  $A$  de  $K$  qui contiennent  $x_1, x_2$  et telles que

$$x, y \in A \text{ et } x \neq y \implies \|x - y\| = \rho.$$

Il est évident qu'elle admet un élément maximal  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Posons

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

On vérifie facilement que  $\sup_{x \in K} \|x - u\| < \rho$ .

LEMME 41. - Soient  $F \subset K$  fermé, et  $\mu = \text{diam } F > 0$ . Il existe  $0 < \varepsilon < \mu$  tel que

$$F(\varepsilon) = \bigcap_{x \in F} B(x, \mu - \varepsilon) \cap K \neq \emptyset.$$

où  $B(x, \mu - \varepsilon)$  désigne la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $\mu - \varepsilon$ . De plus,  $F(\varepsilon)$  est un convexe compact et  $F(\varepsilon) \subset K$ ,  $F(\varepsilon) \neq K$ .

En effet, soit  $K_0 = \overline{c(F)}$ . Il est évident que  $\text{diam } K_0 = \text{diam } F = \mu$ . D'après le lemme 40, il existe  $u \in K_0$  tel que

$$\mu' = \sup_{x \in K_0} \|x - u\|$$

vérifie  $\mu' < \mu$ . Posons  $\varepsilon = \mu - \mu' > 0$ . On voit aisément que  $u \in F(\varepsilon)$ . Enfin, il existe  $x, y \in F$  tels que  $\|x - y\| = \mu$ ; d'où  $x, y \notin F(\varepsilon)$ .

Démonstration du théorème 38. - Soit  $\mathfrak{F}$  la famille des isométries de  $K$  dans  $K$ , et soit

$$\mathfrak{A} = \{X \subset K; X \neq \emptyset, \text{ convexe, compact tel que } f(X) \subset X, \forall f \in \mathfrak{F}\}.$$

Il est évident que  $\mathfrak{A}$  est non vide, inductif vers le bas, et, d'après le lemme de Zorn, admet un élément minimal  $X_0$ . Comme  $f$  est une isométrie,  $f(X_0) = X_0$ . Si  $\text{diam } X_0 > 0$ , on applique le lemme 41 à  $K = F = X_0$ , et on vérifie que  $X_0(\varepsilon) \in \mathfrak{A}$ . Ce qui est absurde, puisque  $X_0(\varepsilon) \subset X_0$ ,  $X_0(\varepsilon) \neq X_0$ . Donc  $X_0$  est réduit à un point.

Démonstration du théorème 39. - Soit  $X_0$  un élément minimal de  $\mathfrak{A}$ , et soit

$$\mathfrak{B} = \{Y \subset X_0; Y \neq \emptyset, \text{ compact, et tel que } f(Y) \subset Y, \forall f \in \mathfrak{F}\}.$$

Il est évident que  $\mathfrak{B}$  est non vide, inductif vers le bas, et, d'après le lemme de Zorn, admet un élément minimal  $Y_0$ . Il résulte de la minimalité de  $Y_0$  que :  $f(Y_0) = Y_0$ ,  $\forall f \in \mathfrak{F}$ . Si  $\text{diam } Y_0 > 0$ , on applique le lemme 41 à  $K = X_0$ , et  $F = Y_0$ , et on vérifie que  $Y_0(\varepsilon) \in \mathfrak{A}$ . Ce qui est absurde puisque  $Y_0(\varepsilon) \subset X_0$ ,  $Y_0(\varepsilon) \neq Y_0$ . Donc  $Y_0$  est réduit à un point.

### III.2. Points fixes communs à une famille d'applications affines et moyennes in- variantes.

THÉORÈME 42 (MARKOFF-KAKUTANI). - Soient  $E$  un e. v. t. séparé,  $K$  un convexe compact non vide de  $E$ ,  $\Gamma$  un semi-groupe commutatif d'applications affines continues de  $K$  dans  $K$ . Alors il existe  $x \in K$  tel que  $u(x) = x$ ,  $\forall u \in \Gamma$ .

On trouvera une démonstration dans [2], p. 114.

THÉORÈME 43 (KAKUTANI). - Soient  $E$  un e. l. c. séparé,  $K$  un convexe compact de  $E$ , et  $\Gamma$  un groupe équicontinu d'applications affines de  $K$  dans  $K$ . Alors il existe  $x \in K$  tel que  $u(x) = x$ ,  $\forall u \in \Gamma$ .

Il est intéressant de relier ces résultats à l'existence d'une moyenne invariante, en suivant une méthode développée par DAY [4].

Dans la suite,  $E$  désigne un e. l. c. séparé, et  $K$  un convexe compact de  $E$ .

Soient  $\Gamma$  un espace topologique,  $B$  l'espace des fonctions numériques continues et bornées sur  $\Gamma$ , et  $B'$  son dual topologique, muni de la topologie faible. On désigne par  $M(\Gamma)$  l'ensemble des moyennes sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires  $\mu$  positives sur  $B$  telles que  $\mu(1) = 1$ . Il est évident que  $M(\Gamma)$  est un convexe compact.

PROPOSITION 44. - L'ensemble des moyennes discrètes est partout dense dans  $M(\Gamma)$ .

En effet, soit  $B_0$  l'espace des fonctions numériques bornées sur  $\Gamma$ . Toute moyenne  $\mu \in M(\Gamma)$  se prolonge en une forme linéaire positive sur  $B_0$ , puisque  $B_0 = B + (B_0)_+$ . On vérifie alors que  $\mu$  est limite de moyennes discrètes de la forme  $\sum \mu(X_i) \varepsilon_{x_i}$ , où  $X_i$  est une partition finie de  $\Gamma$  et  $x_i \in X_i$ .

PROPOSITION 45. - Toute application continue  $f$  de  $\Gamma$  dans  $K$  se prolonge de façon unique en une application affine continue  $\hat{f}$  de  $M(\Gamma)$  dans  $K$  telle que  $\hat{f}(\varepsilon_x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \Gamma$ .

On munit  $E$  de la topologie affaiblie  $\sigma(E, E')$ , et on le plonge dans son complété  $E'^*$ . L'application  $\hat{f}$  de  $M(\Gamma)$  dans  $E'^*$  définie par

$$\hat{f}(\mu) \varphi = \mu(\varphi \circ f) \quad \forall \mu \in M(\Gamma), \quad \forall \varphi \in E'$$

est le prolongement cherché.

Soit  $\Gamma$  un semi-groupe topologique (c'est-à-dire que l'application

$$(x, y) \mapsto x.y$$

est continue). Pour tout  $s \in \Gamma$  et  $f \in B$ , soit  ${}_s f$  la fonction  $x \mapsto f(sx)$ . Pour tout  $\mu \in M(\Gamma)$ , l'application  $f \in B \mapsto \mu({}_s f)$  est encore une moyenne que l'on note  ${}_s \mu$ . On dit que  $\mu \in M(\Gamma)$  est invariante à gauche si  ${}_s \mu = \mu$ ,  $\forall s \in \Gamma$ .

Exemples. - Tout semi-groupe topologique commutatif possède une moyenne invariante à gauche (voir [2], p. 115); il en est de même pour tout groupe compact (c'est la mesure de Haar).

PROPOSITION 46. - Soit  $\Gamma$  un semi-groupe topologique d'applications affines continues de  $K$  dans  $K$ . On suppose que  $\Gamma$  admet une moyenne invariante à gauche et qu'il existe  $a \in K$  tel que l'application  $u \in \Gamma \mapsto u(a) \in K$  soit continue. Alors il existe  $x \in K$  tel que  $u(x) = x$ ,  $\forall u \in \Gamma$ .

En effet, l'application  $u \mapsto f(u) = u(a)$  se prolonge, d'après la proposition 45, en une application affine continue  $\hat{f}$  de  $M(\Gamma)$  dans  $K$ . On a alors :

$$\hat{f}(s\mu) = s(\hat{f}(\mu)) \quad \forall s \in \Gamma \quad \text{et} \quad \forall \mu \in M(\Gamma) .$$

Cette relation est évidente lorsque  $\mu$  est une moyenne discrète, et, par continuité, on la vérifie pour toute moyenne. On en déduit que, si  $\mu$  est une moyenne invariante à gauche,  $x = \hat{f}(\mu)$  est un point fixe commun à tous les  $s \in \Gamma$ .

Démonstration du théorème 43. - L'ensemble  $\mathbb{T}$  des applications continues de  $K$  dans  $K$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur  $K$ , constitue un semi-groupe topologique. D'autre part,  $I \subset \Sigma$  est un groupe relativement compact, d'après le théorème d'Ascoli. Il est alors évident que  $\overline{\Gamma}$  est un groupe compact, et, d'après la proposition 46, il existe  $x \in K$  tel que  $u(x) = x$ ,  $\forall u \in \Gamma$ .

Remarque. - Le théorème 43 devient inexact si l'on suppose seulement que  $\Gamma$  est un semi-groupe. Il suffit de considérer  $K = (0, 1)$  et  $\Gamma$  le semi-groupe équi-continu engendré par les applications  $f(x) = \frac{1}{2}x$  et  $g(x) = 1 - x$ . On en déduit, en particulier, qu'il n'existe pas, en général, de mesure invariante sur un semi-groupe compact.

### III.3. Points fixes communs à une famille de fonctions holomorphes.

Soit  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$ .

THÉORÈME 47 (SHIELDS). - Soit  $\mathfrak{S}$  une famille d'applications continues de  $\Delta$  dans  $\Delta$ , holomorphes dans  $\overset{\circ}{\Delta}$  et qui commutent deux à deux. Alors il existe  $z \in \Delta$  tel que  $f(z) = z$ ,  $\forall f \in \mathfrak{S}$ .

Le lemme suivant sera utile dans la démonstration.

LEMME 48 (DENJOY et WOLFF). - Soit  $f$  une fonction holomorphe de  $\overset{\circ}{\Delta}$  dans  $\overset{\circ}{\Delta}$ . Si  $f$  n'est pas homographique, il existe  $\alpha \in \Delta$  tel que,  $\forall z \in \overset{\circ}{\Delta}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = \alpha .$$

On en trouvera une démonstration dans [5], [14] et [15].

Démonstration du théorème 47. - D'après le principe du maximum, on peut toujours se ramener au cas où  $f(\overset{\circ}{\Delta}) \subset \overset{\circ}{\Delta}$ ,  $\forall f \in \mathfrak{S}$ . Si  $f$  n'est pas homographique, on a

$$\forall g \in \mathfrak{S} \quad g(\alpha) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(g(z)) = \alpha .$$

Si  $f$  est homographique, et n'est pas l'application identique, on peut poser :

$$f(z) = \alpha \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{où} \quad |\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad |a| < 1 .$$

Il en résulte que  $f$  a, ou bien un point fixe unique dans  $\Delta$ , qui est alors un point fixe commun à la famille  $\mathcal{S}$ , ou bien deux points fixes dans  $\Delta^*$ . Dans ce dernier cas, on considère la fonction homographique  $p$  qui applique  $\Delta$  sur le  $\frac{1}{2}$  plan  $\text{Im } z \geq 0$ , et les points fixes sur  $0$  et  $\infty$ . On en déduit que

$$g(z) = p \circ f \circ p^{-1}(z) = kz \quad \text{avec } k > 0, \quad k \neq 1.$$

Ce qui montre que les itérées de  $f$  convergent vers l'un des points fixes de  $f$ .

Remarque. - On ne sait pas si deux applications continues de  $[0, 1]$  dans lui-même qui commutent ont en général un point fixe commun. Sur cette question, on pourra consulter [3] et [1].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAXTER (Glen). - On fixed points of the composite of commuting functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 851-855.
- [2] BOURBAKI (Nicolas). - Livre 5 : Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).
- [3] COHEN (Haskell). - On fixed points of commuting functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 293-296.
- [4] DAY (Nahlon M.). - Fixed-point theorems for compact convex sets, Illinois J. of Math., t. 5, 1961, p. 585-590.
- [5] DENJOY (Arnaud). - Sur l'itération des fonctions analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 162, 1926, p. 255-257.
- [6] DUGUNDJI (J.). - An extension of Tietze's theorem, Pacific J. of Math., t. 1, 1951, p. 353-367.
- [7] EDELSTEIN (Michael). - On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London math. Soc., t. 37, 1962, p. 74-79.
- [8] EDELSTEIN (Michael). - On nonexpansive mappings of Banach spaces, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 60, 1964, p. 439-447.
- [9] KRASNOSELSKIJ (M. A.). - Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. - New York, Pergamon Press, 1964 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 45).
- [10] LERAY (Jean). - La théorie des points fixes et ses applications en analyse, Proceedings of the International congress of mathematicians [1950, Cambridge], p. 202-208. - Providence, American mathematical Society, 1952.
- [11] MAYER (Claude). - Points invariants dans les espaces localement convexes, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, t. 4, 1964/65, n° 10, 11 p.
- [12] NAGUMO (Mitio). - A theory of degree of mappings based on infinitesimal analysis ; Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer. J. of Math., t. 73, 1951, p. 485-511.

- [13] SCHAEFFER (H. H.). - On nonlinear positive operators, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 847-860.
- [14] WOLFF (Julius). - Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région et dont les valeurs appartiennent à cette région, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 182, 1926, p. 42-43.
- [15] WOLFF (Julius). - Sur l'itération des fonctions bornées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 182, 1926, p. 200-201.
-