Michel Hacque

Étude des E-structures. III. Applications aux structures classiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A8_0>

ÉTUDE DES E-STRUCTURES
III. APPLICATIONS AUX STRUCTURES CLASSIQUES

par Michel HACQUE

9. Applications aux structures topologiques et aux structures uniformes.

Structures pré-uniformes associées à une structure topologique. - Pour une structure topologique (S_t), une partie X est quasi-compacte si tout recouvrement ouvert de X contient un recouvrement ouvert fini de X.

PROPOSITION 9.1. - Pour toute structure topologique (S_t), la E-relation δ_3 caractérisée par la condition :

$Y \overline{\delta}_3 X$ est équivalent à : $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ et l'un au moins des fermés $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ est quasi-compact ;

détermine une structure de proximité faible (S_{ρ_3}) dite pseudo-minimale.

Il est immédiat que la relation δ_3 vérifie les conditions 1, 3 et 4 du lemme 4.3. La condition 2 de ce lemme est vérifiée du fait que tout sous-ensemble fermé d'un ensemble quasi-compact est quasi-compact et que la réunion de deux ensembles quasi-compacts est un ensemble quasi-compact. Le lemme 4.3 et la définition 4.1 montrent que la E-relation δ_3 est associée à une E-application ρ_3 symétrique semi-parfaite qui détermine une structure de proximité faible (S_{ρ_3}).

PROPOSITION 9.2. - Si une structure de proximité (S_p) est compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t), pour tout ensemble X quasi-compact : $p(X) = t(X)$.

Soit (S_p) une structure de proximité compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t). Pour tout ensemble X, la relation $p \subset t$ implique $p(X) \subset t(X)$. Réciproquement, la condition $Y \in t(X)$ signifie $Y \in t(x)$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $Y \in p(x)$ pour tout $x \in X$. L'idempotence de la E-application p implique l'existence d'une famille $\{Z_x\}_{x \in X}$ vérifiant les relations $Y \in p(Z_x)$ et $Z_x \in p(x)$. Les relations $Z_x \in p(x)$ équivalentes aux relations $Z_x \in t(x)$ montrent que les intérieurs des parties Z_x constituent un recouvrement ouvert de X. Si l'ensemble X est quasi-compact, il existe un nombre fini de points x_i tels que les ensembles Z_{x_i} constituent un recouvrement fini de l'ensemble X. D'après la proposition 3.3, les relations $Y \in p(Z_{x_i})$ impliquent la relation $Y \in p[\bigcup_i Z_{x_i}]$ et, d'après la relation $X \subset \bigcup_i Z_{x_i}$, il en résulte la relation $Y \in p(X)$. Ainsi lorsque X est quasi-compact, la relation $Y \in t(X)$ implique $Y \in p(X)$. Il en résulte la relation $t(X) \subset p(X)$ qui entraîne alors l'égalité $p(X) = t(X)$ pour tout ensemble X quasi-compact.

PROPOSITION 9.3. - Étant donnée une structure topologique uniformisable (S_t), soient (S_{ρ_1}), (S_{ρ_2}), (S_{ρ_3}) les structures de proximité faible universelle, canonique, pseudo-minimale associées et $(S_{p'})$ la structure de proximité universelle associée. Ces structures et toute structure de proximité (S_p), compatible avec la structure topologique (S_t), vérifient les relations :

$$(S_{\rho_3}) \subset (S_p) \subset (S_{p'}) \subset (S_{\rho_2}) \subset (S_{\rho_1}) \subset (S_t) \quad .$$

Le théorème 8.2 implique $(S_p) \subset (S_{p'})$. D'après le lemme 8.1, deux parties normalement séparées ont des adhérences normalement séparées, donc en particulier disjointes, il en résulte la relation $(S_{p'}) \subset (S_{\rho_2})$. Le théorème 8.1 implique $(S_{\rho_2}) \subset (S_{\rho_1}) \subset (S_t)$.

La relation $Y \overline{\delta}_3 X$ implique $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ et que l'un au moins des fermés $\overline{Y}$ et $\overline{X}$, par exemple $\overline{X}$, est quasi-compact. La relation $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ implique $\complement\overline{Y} \in t(\overline{X})$ et $\complement Y \in t(\overline{X})$. D'après la proposition 9.2, l'ensemble $\overline{X}$ étant quasi-compact, il en résulte la relation $t(\overline{X}) = p(\overline{X})$ qui implique $\complement Y \in p(\overline{X})$, ce qui entraîne que les parties Y et X sont p-éloignées. Ainsi la relation $Y \overline{\delta}_3 X$ implique que les parties Y et X sont p-éloignées. Il en résulte la relation $(S_{\rho_3}) \subset (S_p)$ pour toute structure de proximité (S_p) compatible avec (S_t).

DÉFINITION 9.1. - Pour toute structure topologique (S_t), la structure faiblement uniforme canonique $(S_2^!)$ est la structure faiblement uniforme de type fini associée à la structure de proximité faible canonique (S_{ρ_2}) et la structure faiblement uniforme d'Alexandroff $(S_3^!)$ est la structure faiblement uniforme de type fini associé à la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}).

Pour toute structure topologique (S_t), la structure uniforme de Čech $(S_*^!)$ est la structure uniforme totalement bornée associée à la structure de proximité universelle $(S_{p'})$.

LEMME 9.1. - <u>Soit</u> $W = \bigcup_{i\in I} [U_i \times U_i]$ <u>le pré-entourage d'un recouvrement fini</u> $\{U_i\}_{i\in I}$ <u>de</u> E. <u>Soit</u> $\mathcal{J}$ <u>l'ensemble des partitions binaires</u> (J_1, J_2) <u>de</u> I. <u>Soit</u> $V_{(J_1,J_2)} = [U_{J_1} \times U_{J_1}] \cup [U_{J_2} \times U_{J_2}]$ <u>le pré-entourage du recouvrement binaire d'éléments</u> $U_{J_1} = \bigcup_{i\in J_1} U_i$ <u>et</u> $U_{J_2} = \bigcup_{i\in J_2} U_i$. <u>Si</u> $V' = \bigcap_{(J_1,J_2)\in\mathcal{J}} V_{(J_1,J_2)}$ <u>alors</u> : $W = V'$.

<u>Soit</u> $(U_{j,1}, U_{j,2})_{j\in J}$ <u>une famille finie de recouvrements binaires de</u> E. <u>Soit</u> $V_j = [U_{j,1} \times U_{j,1}] \cup [U_{j,2} \times U_{j,2}]$ <u>le pré-entourage du recouvrement binaire</u> $(U_{j,1}, U_{j,2})$ <u>de</u> E. <u>Soit</u> $\mathfrak{I}$ <u>l'ensemble fini des parties</u> I <u>de</u> J. <u>Si</u> $U'_I = \bigcap_{j\in I} U_{j,1}$ <u>et</u> $U''_I = \bigcap_{j\notin I} U_{j,2}$, <u>les parties</u> $U_I = U'_I \cap U''_I$ <u>constituent un recouvrement de</u> E. <u>Si</u> $V = \bigcap_{j\in J} V_j$ <u>et si</u> $W' = \bigcup_{I\in\mathfrak{I}} [U_I \times U_I]$ <u>est le pré-entourage du recouvrement fini</u> $\{U_I\}_{I\in\mathfrak{I}}$ <u>de</u> E, <u>alors</u> : $V = W'$.

Pour tout élément $(J_1, J_2) \in \mathcal{J}$, la condition $U_i \subset U_{J_1}$ ou $U_i \subset U_{J_2}$ implique $[U_i \times U_i] \subset V_{(J_1,J_2)}$. Il en résulte les relations $[U_i \times U_i] \subset V'$ qui impliquent $W \subset V'$. Si $(x, y) \notin W$, soit J_1 l'ensemble des indices i tels que $x \in U_i$ et soit J_2 l'ensemble des indices i tels que $x \notin U_i$. La condition $(x, y) \notin W$ implique $y \notin U_i$ pour $i \in J_1$. Il en résulte les relations $x \in U_{J_1}$, $x \notin U_{J_2}$, $y \notin U_{J_1}$ qui entraînent aussi $y \in U_{J_2}$. Ces conditions entraînent $(x, y) \notin V_{(J_1,J_2)}$ qui implique $(x, y) \notin V'$. Il en résulte donc $V' \subset W$ qui entraîne alors l'égalité $W = V'$.

Étant donné un point x de E, si I est l'ensemble des indices j tels que $x \in U_{j,1}$, il en résulte $x \in U_{j,2}$ pour $j \notin I$. Ces conditions entraînent $x \in U'_I$ et $x \in U''_I$ qui impliquent $x \in U_I$. Les parties U_I constituent donc un recouvrement de E. Pour tout élément $I \in \mathfrak{I}$, la condition $U_I \subset U_{j,1}$ ou $U_I \subset U_{j,2}$ implique $[U_I \times U_I] \subset V_j$. Il en résulte les relations $[U_I \times U_I] \subset V$ qui impliquent $W' \subset V$. La condition $(x, y) \in V$ implique $(x, y) \in V_j$ pour tout $j \in J$. Il existe donc des $\varepsilon(j)$ $(= 1$ ou $2)$, tels que $x \in U_{j,\varepsilon(j)}$ et $y \in U_{j,\varepsilon(j)}$. Si I est l'ensemble des indices j tels que $\varepsilon(j) = 1$ il en résulte les relations : $x \in U'_I$, $x \in U''_I$, $y \in U'_I$, $y \in U''_I$. Ces conditions entraînent $x \in U_I$ et $y \in U_I$, c'est-à-dire $(x, y) \in [U_I \times U_I]$ qui implique $(x, y) \in W'$. Il en résulte donc $V \subset W'$ qui entraîne alors l'égalité $V = W'$.

PROPOSITION 9.4. - *Pour toute structure topologique* (S_t) , *les filtres* $\mathcal{V}_2$ *et* $\mathcal{V}_3$ *des entourages faibles de la structure faiblement uniforme canonique* (S'_2) *et de la structure faiblement uniforme d'Alexandroff* (S'_3) *admettent les caractérisations suivantes :*

1. *Le filtre* $\mathcal{V}_2$ *admet pour base les pré-entourages* $W = \bigcup_{i\in I} [U_i \times U_i]$ *des recouvrements ouverts finis* $\{U_i\}_{i\in I}$ *de* E . *La structure faiblement uniforme canonique est donc la structure pré-uniforme "des recouvrements ouverts finis".*

2. *Le filtre* $\mathcal{V}_3$ *admet pour base les pré-entourages* $W = \bigcup_{i\in I} [U_i \times U_i]$ *des recouvrements ouverts finis* $\{U_i\}_{i\in I}$ *de* E *tels que l'un au moins des ouverts* U_i *admette un complémentaire quasi-compact.*

D'après le théorème 7.2, le filtre $\mathcal{V}_2$ admet une base constituée par les intersections finies d'éléments V_α constitués des pré-entourages des recouvrements ouverts binaires de E . Le lemme 9.1 appliqué à des recouvrements ouverts de E montre alors que le filtre $\mathcal{V}_2$ admet une base constituée par les pré-entourages des recouvrements ouverts finis de E .

D'après le théorème 7.2, le filtre $\mathcal{V}_3$ admet une base constituée par les intersections finies d'éléments V_α constitués des pré-entourages des recouvrements ouverts binaires de E tels que l'un au moins des ouverts admette un complémentaire quasi-compact. Avec les notations du lemme 9.1, soit $V = \bigcap_{j\in J} V_j$ une intersection finie de pré-entourages V_j associés aux recouvrements ouverts binaires $(U_{j,1} , U_{j,2})$ tels que l'un au moins des ouverts $U_{j,1}$ et $U_{j,2}$ admette un complémentaire quasi-compact. Il est toujours possible de supposer par exemple que c'est l'ouvert $U_{j,1}$. Alors, pour $I_0 = J$, $U''_{I_0} = E$ et $U_{I_0} = U'_{I_0} = \bigcap_{j\in J} U_{j,1}$ est un ouvert dont le complémentaire est quasi-compact. La relation $V = W' = \bigcup_{I\in\mathcal{J}} [U_I \times U_I]$ montre alors que V est le pré-entourage d'un recouvrement ouvert fini de E tel que l'un des ouverts U_I admette un complémentaire quasi-compact. Réciproquement soit $W = \bigcup_{i\in I} [U_i \times U_i]$ le pré-entourage d'un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}_{i\in I}$ de E tel que l'un des ouverts au moins, soit U_{i_0} , admette un complémentaire quasi-compact. Puisque tout sous-ensemble fermé d'un ensemble quasi-compact est quasi-compact, pour tout élément $(J_1 , J_2) \in \mathcal{J}$, $i_0 \in J_1$ ou $i_0 \in J_2$ et l'un au moins des deux ouverts U_{J_1} et U_{J_2} admet un complémentaire quasi-compact. La relation

$W = V' = \bigcap_{(J_1, J_2) \in \mathcal{J}} V_{(J_1, J_2)}$ montre alors que W est une intersection finie de pré-entourages $V_{(J_1, J_2)}$ associés aux recouvrements ouverts binaires (U_{J_1}, U_{J_2}) tels que l'un au moins des ouverts U_{J_1} et U_{J_2} admette un complémentaire quasi-compact. Ainsi le filtre $\mathcal{V}_3$ admet donc une base constituée par les pré-entourages des recouvrements ouverts finis de E tels que l'un au moins des ouverts admette un complémentaire quasi-compact.

PROPOSITION 9.5. - Toute structure uniforme totalement bornée (S') compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t) est plus fine que la structure faiblement uniforme d'Alexandroff (S_3') associée à (S_t) et moins fine que la structure faiblement uniforme canonique (S_2') associée à (S_t).

Ce résultat découle de la proposition 9.3 et des corollaires 7.2 et 7.4.

Remarque. - Pour toute structure simple (S_ρ) engendrée par au moins une structure uniforme, soit $\mathcal{U}(\rho)$ l'ensemble des structures uniformes compatibles avec (S_ρ). Il est facile de vérifier que l'ensemble ordonné $\mathcal{U}(\rho)$ est inductif. D'après le théorème de Zorn, l'ensemble $\mathcal{U}(\rho)$ admet donc au moins un élément maximal. Puisque l'ensemble $\mathcal{U}(\rho)$ est convexe dans l'ensemble des structures uniformes, pour que $\mathcal{U}(\rho)$ admette un élément maximum, il faut et il suffit que la borne supérieure de deux éléments de $\mathcal{U}(\rho)$ soit un élément de $\mathcal{U}(\rho)$. Cette condition est sûrement réalisée si (S_ρ) est une structure ponctuelle. Ce résultat montre que l'ensemble $\mathcal{U}(t)$ des structures uniformes compatibles avec une structure topologique uniformisable (S_t) admet un élément maximum (S^*) appelé la structure uniforme universelle associée à (S_t). De même, l'ensemble $\mathcal{U}(p)$ des structures uniformes compatibles avec une structure de proximité (S_p) admet au moins un élément maximal, mais en général, il n'est pas possible d'affirmer que $\mathcal{U}(p)$ admet un élément maximum. Néanmoins, pour la structure de proximité universelle $(S_{p'})$ associée à une structure topologique uniformisable (S_t), l'ensemble $\mathcal{U}(p')$ des structures uniformes compatibles avec $(S_{p'})$ coïncide avec la classe d'équivalence $\sigma_p^{-1}[(S_{p'})]$ et il en résulte qu'il admet pour élément minimum la structure uniforme de Čech (S_*') et pour élément maximum la structure uniforme universelle (S^*) associée à (S_t). En particulier, toute structure uniforme (S) compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t) est moins fine que la structure uniforme universelle (S^*) associée à (S_t) et plus fine que la structure faiblement uniforme d'Alexandroff (S_3') associée à (S_t).

Structures topologiques quasi-normales et normales. - Une structure topologique (S_t) est quasi-normale si deux ensembles fermés disjoints quelconques admettent des voisinages disjoints. Une structure topologique est normale si elle est quasi-normale et séparée.

THÉORÈME 9.1. - Pour qu'une structure topologique (S_t) (resp. séparée) soit quasi-normale (resp. normale), il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. La structure de proximité universelle $(S_{p'})$ coïncide avec la structure de proximité faible canonique (S_{ρ_2}).
2. La structure de proximité faible canonique (S_{ρ_2}) est une structure de proximité.
3. La structure uniforme de Čech (S'_*) coïncide avec la structure faiblement uniforme canonique (S'_2) c'est-à-dire la structure pré-uniforme des recouvrements ouverts finis.
4. La structure faiblement uniforme canonique (S'_2) ou structure pré-uniforme des recouvrements ouverts finis est une structure uniforme.
5. Deux ensembles fermés disjoints quelconques sont normalement séparés.

La relation $(S_{p'}) \subset (S_{\rho_2}) \subset (S_t)$ et le théorème 8.3 montrent que l'égalité $(S_{p'}) = (S_{\rho_2})$ est équivalente à la condition : (S_{ρ_2}) est une structure de proximité. Il en résulte l'équivalence des conditions 1 et 2. D'après la définition 9.1, le corollaire 7.2 implique l'équivalence des conditions 1 et 3. Le théorème 7.4 implique l'équivalence des conditions 2 et 4. D'après la relation $(S_{p'}) \subset (S_{\rho_2})$ la condition 1 est équivalente à la relation $(S_{\rho_2}) \subset (S_{p'})$ c'est-à-dire à la condition 5. Ainsi, les cinq conditions sont équivalentes. D'après la définition de la structure (S_{ρ_2}), dans cette structure les voisinages d'une partie X sont les voisinages de $\overline{X}$ dans (S_t). D'après la condition 5 du lemme 4.3, la condition 2 est équivalente à la condition qui définit les structures topologiques quasi-normales. Le cas d'une structure topologique séparée découle de ce qui précède.

Remarque. - Compte tenu du théorème 8.2, la condition 5 du théorème 9.1 exprime le premier théorème d'Urysohn.

COROLLAIRE 9.1. - <u>Pour qu'une structure topologique (S_t) quasi-normale soit uniformisable, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement proximisable.</u>

<u>En particulier toute structure topologique normale est uniformisable.</u>

D'après le théorème 8.3, pour que (S_t) soit uniformisable, il faut et il suffit que $(S_{p'})$ soit compatible avec (S_t). D'après la relation $(S_{p'}) = (S_{\rho_2})$, il faut et il suffit que (S_{ρ_2}) soit compatible avec (S_t) c'est-à-dire que (S_t) soit faiblement proximisable d'après le théorème 8.1. La seconde partie résulte de la première et du fait qu'une structure topologique séparée est faiblement proximisable d'après le théorème 8.1 puisque la relation $y \in \{\overline{x}\}$ qui se réduit à l'égalité est bien symétrique.

<u>Remarque</u>. - La condition $(S_{p'}) = (S_{\rho_1})$ caractérise les structures topologiques (S_t) dans lesquelles la condition $\overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$ entraîne la séparation normale des ensembles Y et X. Ces structures topologiques sont en particulier complètement normales.

<u>Structures topologiques localement quasi-compactes et localement compactes.</u> - Une structure topologique (S_t) est localement quasi-compacte si tout point admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts. Une structure topologique (S_t) est quasi-régulière si tout point admet un système fondamental de voisinages fermés.

PROPOSITION 9.6. - <u>Pour qu'une structure topologique (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) associée soit compatible avec (S_t).</u>

Si la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) est compatible avec (S_t), cette structure topologique est faiblement proximisable. Réciproquement, si (S_t) est faiblement proximisable, la symétrie de la relation binaire $y \in \{\overline{x}\}$ entraîne que l'ensemble des ouverts contenant x est identique à l'ensemble des ouverts contenant $\{\overline{x}\}$. Il en résulte la relation $t(x) = t(\{\overline{x}\})$ et que, pour tout point x de E, l'ensemble $\{\overline{x}\}$ est quasi-compact. Pour tout point x de E, $\rho_3(x)$ est constitué par les parties Z telles que $Y = \complement Z$ vérifie $\overline{Y} \cap \{\overline{x}\} = \emptyset$ puisque $\{\overline{x}\}$ est quasi-compact. Il en résulte les relations $\rho_3(x) = t(\{\overline{x}\}) = t(x)$ qui montrent que (S_{ρ_3}) est compatible avec (S_t).

LEMME 9.2. - Pour toute structure topologique quasi-régulière (S_t) localement quasi-compacte, la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) est une structure de proximité.

Toute structure topologique faiblement proximisable (S_t) telle que la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) soit une structure de proximité est localement quasi-compacte.

En particulier, pour qu'une structure topologique uniformisable (S_t) soit localement quasi-compacte, il faut et il suffit que la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) associée soit une structure de proximité.

Si (S_t) est une structure topologique quasi-régulière localement quasi-compacte, tout point x de E admet un système fondamental de voisinages fermés quasi-compacts. Il en résulte que tout ensemble quasi-compact admet un système fondamental de voisinages fermés quasi-compacts. La relation $Y \bar{\delta}_3 X$ implique $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$, l'un des ensembles fermés $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ étant quasi-compact. D'après la symétrie, il est possible de supposer que $\overline{X}$ est quasi-compact. D'après ce qui précède, le voisinage $\complement\overline{Y}$ de $\overline{X}$ contient un voisinage fermé quasi-compact W de $\overline{X}$. En posant $U = \complement W$ et $V = \mathring{W}$, les relations $\overline{Y} \cap \overline{W} = \overline{Y} \cap W = \emptyset$ et $\overline{\complement V} \cap \overline{X} = \complement V \cap \overline{X} = \emptyset$, dans lesquelles $W = \overline{W}$ et $\overline{X}$ sont quasi-compacts, entraînent les relations $Y \bar{\delta}_3 W$ et $\complement V \bar{\delta}_3 X$ qui montrent que U et V sont des ρ_3-voisinages disjoints de Y et X. D'après la condition 5 du lemme 4.3, (S_{ρ_3}) est donc une structure de proximité.

Soit (S_t) une structure topologique faiblement proximisable telle que la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) associée soit une structure de proximité. Puisque d'après la proposition 9.6 (S_{ρ_3}) est compatible avec (S_t), la structure topologique (S_t) est proximisable, donc uniformisable, et par suite quasi-régulière. Si (S_t) est quasi-compacte, tout ensemble fermé est quasi-compact et par suite tout point x de E admet un système fondamental de voisinages fermés qui est aussi un système fondamental de voisinages quasi-compacts. Dans ce cas, il en résulte bien que la structure topologique (S_t) est localement quasi-compacte. Dans le cas contraire (S_t) n'est pas quasi-compacte. Tout point x de E admet alors un voisinage ouvert $V(x)$ dont le complémentaire est un fermé non quasi-compact. En effet si cette propriété n'est pas satisfaite il existe un point x_0 de E tel que tout voisinage ouvert de x_0 admette un complémentaire quasi-compact. Pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de E, il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x_0 \in U_{i_0}$. La famille des ouverts U_i avec $i \neq i_0$ constitue un recouvrement ouvert du complémentaire de U_{i_0} qui est quasi-compact, il existe alors un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}_{i\in I'}$ de cet ensemble et si $J = I' \cup \{i_0\}$ la famille $\{U_i\}_{i\in J}$ constitue un recouvrement ouvert fini de E extrait du recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$. Cette conclusion est absurde puisque par hypothèse (S_t) n'est pas quasi-compacte. Pour tout point x de E, puisque $t(x) = t(\{\overline{x}\})$ et que $\{\overline{x}\}$ est quasi-compact, en posant $Y = \complement V(x)$ la relation $\overline{Y} \cap \{\overline{x}\} = Y \cap \{\overline{x}\} = \emptyset$ entraîne $Y \,\overline{\delta}_3\, x$. Puisque (S_{ρ_3}) est une structure de proximité, d'après la condition 5 du lemme 4.3 les éléments Y et x ρ_3-éloignés admettent des ρ_3-voisinages disjoints. Il existe donc des ensembles fermés U et Z vérifiant $Y \,\overline{\delta}_3\, U$, $Z \,\overline{\delta}_3\, x$ et $U \cup Z = E$. L'ensemble $W = \complement Z$ est un voisinage ouvert de x vérifiant $U \supset W$. La relation $Y \,\overline{\delta}_3\, U$ implique $\overline{Y} \cap \overline{U} = Y \cap U = \emptyset$ et que l'un des fermés Y et U est quasi-compact. Puisque Y n'est pas quasi-compact, U est quasi-compact. Ainsi tout point x de E admet donc un voisinage U fermé, quasi-compact. Puisque (S_t) est quasi-réguliere, tout point x de E admet donc un système fondamental de voisinages quasi-compacts. La structure topologique (S_t) est donc localement quasi-compacte.

Une structure topologique uniformisable (S_t) étant quasi-régulière et faiblement proximisable, la dernière partie du lemme résulte des deux premières.

LEMME 9.3. - <u>Si</u> (S_p) <u>est une structure de proximité compatible avec une structure topologique uniformisable</u> (S_t) <u>et strictement plus fine que la structure de proximité faible pseudo-minimale</u> (S_{ρ_3}) <u>associée à</u> (S_t), <u>alors il existe une structure de proximité</u> (S_{p_1}) <u>compatible avec</u> (S_t) <u>et strictement moins fine que</u> (S_p).

Puisque (S_p) est strictement plus fine que (S_{ρ_3}), il existe deux ensembles fermés Y_0 et X_0 p-éloignés qui ne sont pas ρ_3-éloignés. La première condition implique $\overline{Y}_0 \cap \overline{X}_0 = \emptyset$ et la seconde condition implique que les deux ensembles fermés Y_0 et X_0 disjoints ne sont pas quasi-compacts. Il existe donc deux filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ sans points adhérents et respectivement portés par les fermés disjoints Y_0 et X_0. Soit $\mathcal{Z}$ le filtre intersection des filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$. En posant $\mathcal{Z}' = \bigcup_{Z\in\mathcal{Z}} p(Z)$, il est immédiat que $\mathcal{Z}'$ constitue un filtre. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties de E dont les complémentaires sont des éléments de

$\mathcal{Z}'$ et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties de E qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire la grille associée au filtre $\mathcal{Z}'$. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ constituent une partition de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Soit p_1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ caractérisée par les conditions suivantes :

1. Si $X \in \mathcal{F}$, $p_1(X) = p(X)$.

2. Si $X \in \mathcal{G}$, $p_1(X) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} p(X \cup Z)$.

Tout d'abord il est immédiat que p_1 est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}$. La condition $\emptyset \in \mathcal{F}$ entraîne $p_1(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$ qui montre que p_1 vérifie l'axiome (E_1). Il est immédiat que p_1 vérifie $p_1 \subset \rho_0$, c'est-à-dire l'axiome (E_2). Si $X \subset Y$, la condition $Y \in \mathcal{F}$ entraîne $X \in \mathcal{F}$ qui implique $p_1(X) \supset p_1(Y)$ et la condition $Y \in \mathcal{G}$ entraîne $X \subset Y \cup Z$ et $X \cup Z \subset Y \cup Z$ pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, ce qui implique aussi $p_1(X) \supset p_1(Y)$. L'application p_1 vérifie donc l'axiome (E_3). Ainsi l'application p_1 est une E-application qui détermine une structure simple (S_{p_1}).

Soient δ_{p_1} et δ_p les relations de proximité associées aux structures (S_{p_1}) et (S_p). Soient Y et X deux parties de E vérifiant $Y \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ qui implique $Y \,\bar{\delta}_p\, X$. Si $X \in \mathcal{G}$, il existe un élément $Z \in \mathcal{Z}$ vérifiant $Y \,\bar{\delta}_p\, (X \cup Z)$ qui entraîne $Y \in \mathcal{F}$. Ainsi, la condition $Y \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ implique $Y \,\bar{\delta}_p\, X$ et l'un au moins des éléments Y et X appartient à $\mathcal{F}$. Reciproquement, soient Y et X deux éléments vérifiant $Y \,\bar{\delta}_p\, X$, l'un au moins appartenant à $\mathcal{F}$. Si $X \in \mathcal{F}$, la condition $Y \,\bar{\delta}_p\, X$ implique $Y \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$. Si $X \notin \mathcal{F}$, alors $Y \in \mathcal{F}$, et il existe un élément $Z \in \mathcal{Z}$ tel que $Y \,\bar{\delta}_p\, Z$; les relations $Y \,\bar{\delta}_p\, X$ et $Y \,\bar{\delta}_p\, Z$ entraînent $Y \,\bar{\delta}_p\, (X \cup Z)$ qui implique $Y \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$. La condition $Y \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ est équivalente à la condition : $Y \,\bar{\delta}_p\, X$ et l'un au moins des éléments Y et X appartient à $\mathcal{F}$. Il en résulte donc que la structure (S_{p_1}) est symétrique.

Soient Y_1 et Y_2 deux éléments vérifiant $Y_1 \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ et $Y_2 \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$. Si $X \in \mathcal{F}$, ces relations impliquent $(Y_1 \cup Y_2) \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$. Si $X \notin \mathcal{F}$, les éléments Y_1 et Y_2 appartiennent à $\mathcal{F}$ ainsi que $Y_1 \cup Y_2$, il en résulte alors $(Y_1 \cup Y_2) \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$. Puisque les conditions $Y_1 \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ et $Y_2 \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$ impliquent $(Y_1 \cup Y_2) \,\bar{\delta}_{p_1}\, X$, la structure simple (S_{p_1}) est $\cap$-semi-parfaite. Compte tenu de la symétrie, la structure simple (S_{p_1}) est donc semi-parfaite.

Soient Y et X deux éléments vérifiant $Y \bar{\delta}_{p_1} X$, c'est-à-dire $Y \bar{\delta}_p X$ avec par exemple $X \in \mathfrak{F}$. Cette dernière condition signifie qu'il existe un élément $Z \in \mathfrak{Z}$ vérifiant $Z \bar{\delta}_p X$. Il existe donc un p-voisinage V' de X p-éloigné de Z, c'est-à-dire appartenant à $\mathfrak{F}$. La condition $Y \bar{\delta}_p X$ implique l'existence d'un p-voisinage V'' de X p-éloigné de Y. L'élément $V = V' \cap V''$ est un p-voisinage de X, appartenant à $\mathfrak{F}$ et p-éloigné de Y. Les relations $Y \bar{\delta}_p V$ et $V \in p(X)$ avec $V \in \mathfrak{F}$ et $X \in \mathfrak{F}$ entraînent $Y \bar{\delta}_{p_1} V$ et $U \bar{\delta}_{p_1} X$ en posant $U = \complement V$. Il en résulte que les éléments Y et X p_1-éloignés admettent des p_1-voisinages disjoints U et V. La structure simple symétrique semi-parfaite (S_{p_1}) est donc idempotente. La structure simple (S_{p_1}) est donc une structure de proximité.

Puisque les filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ sont sans points adhérents dans (S_t), pour tout point x de E, il existe un élément $Y \in \mathcal{Y}$ et un élément $X \in \mathcal{X}$ disjoints d'un voisinage de x dans (S_t) qui est aussi un voisinage de x dans (S_p) qui est compatible avec (S_t). Il en résulte que le point x est p-éloigné de l'élément $Z = Y \cup X$ de $\mathfrak{Z}$. Tout point x de E appartient donc à $\mathfrak{F}$. Pour tout point x de E, les égalités $t(x) = p(x) = p_1(x)$ montrent que (S_{p_1}) est compatible avec (S_t).

Puisque $Y \bar{\delta}_{p_1} X$ implique $Y \bar{\delta}_p X$, la structure de proximité (S_{p_1}) est moins fine que la structure de proximité (S_p). Par hypothèse les ensembles fermés Y_0 et X_0 vérifient $Y_0 \bar{\delta}_p X_0$. Les filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ étant portés par Y_0 et X_0, pour tout $Z \in \mathfrak{Z}$, les relations $Y_0 \cap Z \neq \emptyset$ et $X_0 \cap Z \neq \emptyset$ impliquent $Y_0 \notin \mathfrak{F}$ et $X_0 \notin \mathfrak{F}$ qui entraînent $Y_0 \, \delta_{p_1} X_0$. Les relations $Y_0 \bar{\delta}_p X_0$ et $Y_0 \, \delta_{p_1} X_0$ montrent que (S_{p_1}) est strictement moins fine que (S_p).

La structure de proximité (S_{p_1}) est donc compatible avec la structure topologique uniformisable (S_t) et elle est strictement moins fine que la structure de proximité (S_p).

THÉORÈME 9.2. - <u>Pour qu'une structure topologique uniformisable</u> (S_t) <u>soit localement quasi-compacte, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes</u> :

1. <u>La structure de proximité faible pseudo-minimale</u> (S_{ρ_3}) <u>est une structure de proximité (qui est alors la moins fine des structures de proximité compatibles avec</u> (S_t)).

2. L'ensemble des structures de proximité compatibles avec (S_t) admet un élément minimal (qui est alors minimum et identique à (S_{ρ_3})).

3. La structure faiblement uniforme d'Alexandroff (S_3') est une structure uniforme (qui est alors la moins fine des structures uniformes compatibles avec (S_t)).

4. L'ensemble des structures uniformes compatibles avec (S_t) admet un élément minimal (qui est alors minimum et identique à la structure uniforme d'Alexandroff (S_3')) [2].

La condition 1 résulte du lemme 9.2. D'après la proposition 9.3, la condition 1 entraîne la condition 2. Le lemme 9.3 montre que la condition 2 entraîne la condition 1. Le théorème 7.4 entraîne l'équivalence des conditions 1 et 3. Toute structure uniforme compatible avec (S_t) étant plus fine qu'une structure uniforme totalement bornée compatible avec (S_t) , un élément minimal dans l'ensemble des structures uniformes compatibles avec (S_t) est nécessairement une structure uniforme totalement bornée. Le corollaire 7.4 entraîne alors l'équivalence des conditions 2 et 4.

COROLLAIRE 9.2. - Pour qu'il n'existe qu'une seule structure de proximité compatible avec une structure topologique uniformisable, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun couple de parties fermées non quasi-compactes normalement séparées.

En outre la structure topologique est alors localement quasi-compacte.

Si l'ensemble des structures de proximité compatibles avec une structure topologique uniformisable (S_t) admet un seul élément, celui-ci qui est nécessairement la structure de proximité universelle $(S_{p'})$ est aussi minimal et la seconde condition du théorème 9.2 montre que $(S_{p'})$ coïncide avec la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) . Réciproquement, l'égalité $(S_{\rho_3}) = (S_{p'})$ entraîne qu'il n'existe qu'une seule structure de proximité compatible avec (S_t) . La première partie du corollaire 9.2 résulte du fait que l'égalité $(S_{\rho_3}) = (S_{p'})$ signifie que si deux parties fermées sont normalement séparées, l'une au moins est quasi-compacte. La seconde partie du corollaire 9.2 résulte alors de la seconde condition du théorème 9.2.

LEMME 9.4. - S'il existe une structure uniforme (S) non totalement bornée compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t) , alors il existe deux ensembles fermés $\overline{A}$ et $\overline{B}$ normalement séparés et non quasi-compacts.

Soit (S) une structure uniforme non totalement bornée compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t). Par hypothèse, il existe un entourage symetrique W' de la structure uniforme (S) tel qu'il n'existe aucun recouvrement fini de E par des ensembles petits d'ordre W'. Soit W un entourage symétrique vérifiant $W^2 \subset W'$, alors pour tout point x de E, l'ensemble $W(x)$ est petit d'ordre W'. Soit V un entourage symétrique vérifiant $V^4 \subset W$. Il existe alors une suite $(x_m)_{m\in N}$ de points de E vérifiant la condition : $(x_i , x_j) \notin W$ pour $i \neq j$. En effet cette suite peut être déterminée par récurrence de la façon suivante. Si x_1 est un point quelconque de E, l'ensemble $W(x_1)$ petit d'ordre W' ne constitue pas un recouvrement de E : il existe donc un point x_2 de E vérifiant $(x_1 , x_2) \notin W$. Pour un entier positif m, en posant $I = [1 , m]$, soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de m points de E vérifiant $(x_i , x_j) \notin W$ pour $i \neq j$ avec $i \in I$ et $j \in I$. Les m ensembles $W(x_i)$ petits d'ordre W' ne constituent pas un recouvrement de E : il existe donc un point x_{m+1} de E vérifiant $(x_i , x_{m+1}) \notin W$ pour $i \in I$. En posant $I' = [1 , m + 1]$, la famille $(x_i)_{i\in I'}$ de $(m + 1)$ points de E vérifie alors la condition $(x_i , x_j) \notin W$ pour $i \neq j$ avec $i \in I'$ et $j \in I'$. La condition de récurrence est donc satisfaite. Il existe donc une suite $(x_m)_{m\in N}$ de points de E vérifiant la condition $(x_i , x_j) \notin W$ pour $i \neq j$. Cette condition et la condition $V^4 \subset W$ entraînent la condition : $V(x_i) \cap V(x_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$. De plus, pour tout point x de E, ces conditions entraînent également que l'ensemble $V(x)$ rencontre au plus un seul ensemble $V(x_m)$. Il en résulte que l'adhérence d'un ensemble constitué par les points d'une sous-famille de la famille $(x_m)_{m\in N}$ est formée par la réunion des adhérences des points de cette sous-famille. En posant

$$a_m = x_{2m-1} \quad \text{et} \quad b_m = x_{2m} \quad ,$$

les ensembles

$$A = \bigcup_{m\in N} \{a_m\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{m\in N} \{b_m\}$$

admettent donc respectivement pour adhérences

$$\overline{A} = \bigcup_{m\in N} \overline{\{a_m\}} \quad \text{et} \quad \overline{B} = \bigcup_{m\in N} \overline{\{b_m\}} \quad .$$

Pour tout entier positif m , si U_m est un voisinage ouvert de a_m inclus dans $V(a_m)$, alors la famille $\{U_m\}_{m\in N}$ constitue un recouvrement ouvert de l'ensemble fermé $\bar{A}$ dont il est impossible d'extraire un recouvrement fini. L'ensemble fermé $\bar{A}$ n'est donc pas quasi-compact. De même, l'ensemble fermé $\bar{B}$ n'est pas quasi-compact. L'ensemble $U = \bigcup_{m\in N} U_m$ est un voisinage de l'ensemble fermé $\bar{A}$, disjoint de l'ensemble fermé $\bar{B}$. Pour tout entier positif m , le point a_m est normalement séparé du complémentaire de U_m . Il existe donc une famille dyadique $(\omega(m))$ continue pour (S_t) , d'extrémités $\{a_m\}$ et $\complement U_m$. En posant

$$\omega^n_{2^n+1} = \bigcap_{m\in N} \omega^n_{2^n+1}(m) \quad \text{et} \quad \omega^n_j = \bigcup_{m\in N} \omega^n_j(m) \quad \text{pour} \quad j \in K_n \quad ,$$

les parties ω^n_j pour $j \in J_n$, constituent les éléments d'une famille dyadique (ω) d'extrémités A et $\complement U$. La seconde condition de la proposition 8.3 montre alors que la famille dyadique (ω) est continue pour (S_t) . Les ensembles A et $\complement U$ sont donc normalement séparés dans (S_t) . D'après le lemme 8.1 et la relation $\bar{B} \subset \complement U$, il en résulte que les ensembles fermés $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont normalement séparés dans (S_t) . Ainsi, l'hypothèse entraîne l'existence de deux ensembles fermés $\bar{A}$ et $\bar{B}$ normalement séparés et non quasi-compacts.

COROLLAIRE 9.3. – Pour qu'il n'existe qu'une seule structure uniforme compatible avec une structure topologique uniformisable, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun couple de parties fermées non quasi-compactes normalement séparées.

En outre la structure topologique est alors localement quasi-compacte et l'unique structure uniforme compatible est totalement bornée [1].

S'il n'existe qu'une structure uniforme (S) compatible avec une structure topologique uniformisable (S_t) , il n'existe qu'une seule structure de proximité compatible avec (S_t) et le corollaire 9.2 implique qu'il n'existe aucun couple de parties fermées non quasi-compactes normalement séparées. Réciproquement, si une structure topologique (S_t) vérifie cette hypothèse, d'après le corollaire 9.2 il n'existe qu'une seule structure de proximité compatible avec (S_t) donc il n'existe qu'une seule structure uniforme totalement bornée (S) compatible avec (S_t) . De plus, d'après le lemme 9.4, toute structure uniforme compatible avec (S_t) étant totalement bornée, la structure uniforme totalement bornée (S) est l'unique structure uniforme compatible avec (S_t) .

COROLLAIRE 9.4. - Pour toute structure topologique uniformisable (S_t) quasi-compacte, il n'existe qu'une seule structure uniforme (S) compatible avec (S_t). Cette structure uniforme est la structure uniforme des recouvrements ouverts finis dont le filtre d'entourages coïncide avec le filtre des voisinages de la diagonale. En outre la structure topologique (S_t) est quasi-normale.

Dans une structure topologique (S_t) quasi-compacte, toute partie fermée étant quasi-compacte, la première partie du corollaire 9.4 résulte du corollaire 9.3. La seconde partie du corollaire 9.4 résulte du fait que deux parties fermées disjointes admettent des voisinages disjoints ainsi que de la caractérisation du filtre des voisinages de la diagonale.

COROLLAIRE 9.5. - Toute structure topologique compacte (S_t) est uniformisable et normale. Il n'existe qu'une seule structure uniforme compatible avec (S_t) dont le filtre des entourages est le filtre des voisinages de la diagonale.

Ce résultat bien connu peut être retrouvé de la façon suivante. La structure topologique compacte (S_t) étant normale, le corollaire 9.1 entraîne qu'elle est uniformisable et le corollaire 9.4 entraîne la seconde partie du corollaire 9.5.

COROLLAIRE 9.6. - Toute structure topologique localement compacte est uniformisable.

Pour qu'une structure topologique séparée (S_t) soit localement compacte, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 9.2 [2].

La première partie du corollaire 9.6 résulte du corollaire 9.5 et du caractère local de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure topologique soit uniformisable.

Soit (S_t) une structure topologique localement compacte. La première partie du corollaire 9.6 entraîne que (S_t) est uniformisable et le théorème 9.2 entraîne que (S_t) vérifie les conditions équivalentes du théorème 9.2.

Réciproquement soit (S_t) une structure topologique séparée vérifiant l'une des conditions équivalentes du théorème 9.2. La structure topologique séparée (S_t) étant faiblement proximisable, la proposition 9.6 entraîne que la structure de proximité faible pseudo-minimale (S_{ρ_3}) associée à (S_t) est compatible avec (S_t). Puisque la première condition du théorème 9.2 exprime que (S_{ρ_3}) est une structure de proximité, il en résulte que (S_t) est uniformisable. Le théorème

9.2 implique alors que (S_t) est localement quasi-compacte et puisque (S_t) est séparée, la structure topologique (S_t) est localement compacte.

Remarque. - Les propriétés signalées ci-dessus ont été obtenues de façon directe et interne. Plus précisément, les démonstrations ne font intervenir que des structures définies sur un même ensemble E, sans recours à des compactifications ou à des complétions. De même, les démonstrations n'utilisent pas la notion de fonction numérique continue. Cette notion ne figure que dans le théorème 8.2 totalement indépendant des autres résultats et qui ne sert qu'à montrer l'identité de quelques définitions ou critères avec des définitions ou critères classiques exprimés à l'aide des fonctions numériques continues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOSS (Raouf). - On uniform spaces with a unique structure, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 19-23.

[2] SAMUEL (Pierre). - Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 64, 1948, p. 100-132.