Michel Hacque

Étude des E-structures. I. Structures simples

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 6, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A6_0>

ÉTUDE DES E-STRUCTURES (*)

I. STRUCTURES SIMPLES

par Michel HACQUE

Introduction. - La notion de E-structure trouve son origine dans les quelques remarques suivantes.

La détermination d'une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E peut reposer sur des notions de base distinctes mais équivalentes. Parmi les plus simples figurent les notions d'ensembles fermés, d'ensembles ouverts et de voisinages.

Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E peut être déterminée globalement

- soit par la donnée d'une famille $\mathfrak{F}$ de parties de E vérifiant les axiomes des fermés :

(F_1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$, $E \in \mathfrak{F}$.

(F_2) Toute famille finie $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{F}$ vérifie : $\bigcup_{i\in I} F_i \in \mathfrak{F}$.

(F_3) Toute famille $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{F}$ vérifie : $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathfrak{F}$.

- soit par la donnée d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de E vérifiant les axiomes des ouverts :

(O_1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $E \in \mathcal{O}$.

(O_2) Toute famille finie $(O_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ vérifie : $\bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

(O_3) Toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ vérifie : $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Il est bien connu que la donnée d'une famille $\mathfrak{F}$ de fermés est équivalente à la donnée d'une application α de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes des "fermetures topologiques" :

(FT_1) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$.

(FT_2) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset \alpha(A)$.

(FT_3) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

(*) Le présent exposé et les suivants constituent la rédaction développée de : HACQUE (Michel). - Sur les E-structures, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1905-1907 et p. 2120-2122.

(FT_4) L'application α est idempotente : $\alpha^2 = \alpha$.

De même, la donnée d'une famille $\mathcal{O}$ d'ouverts est équivalente à la donnée d'une application β de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes des "ouvertures topologiques" :

(OT_1) $\beta(E) = E$.

(OT_2) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $\beta(A) \subset A$

(OT_3) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$.

(OT_4) L'application β est idempotente : $\beta^2 = \beta$.

Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E peut également être déterminée localement par la donnée en tout point x de E d'un ensemble $\mathcal{V}(x)$ de parties de E vérifiant les axiomes des voisinages :

(V_1) Toute partie de E qui contient un ensemble de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

(V_2) Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

(V_3) L'élément x appartient à tout ensemble de $\mathcal{V}(x)$.

(V_4) Si V appartient à $\mathcal{V}(x)$, il existe un ensemble W appartenant à $\mathcal{V}(x)$ et tel que, pour tout $y \in W$, V appartienne à $\mathcal{V}(y)$.

A ce dernier mode de détermination d'une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E , il est inusuel d'associer une application jouant dans ce cas un rôle analogue à ceux des fermetures topologiques et des ouvertures topologiques associées aux deux premiers modes de détermination. Il est pourtant naturel de considérer l'application $\mathcal{V}$ de E dans l'ensemble $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ qui, à tout point x de E , associe l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x . Compte tenu de l'axiome (V_3), les axiomes (V_1) et (V_2) expriment que l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ constitue un filtre sur l'ensemble E . L'application $\mathcal{V}$ est donc une application de E dans l'ensemble des filtres sur E . Si $\mathcal{V}_0$ désigne l'application associée à la topologie discrète $\mathcal{T}_0$, l'axiome (V_3) est équivalent à la condition : $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}_0(x)$ pour tout point x de E . Les axiomes (V_1), (V_2) et (V_3) prennent alors une forme simple mais l'axiome (V_4) ne se prête pas à une traduction aussi immédiate. L'introduction de la notion de E-structure simple déterminée par une E-application montre que les structures topologiques sur E sont des E-structures simples et que l'axiome (V_4) se traduit par une condition d'idempotence analogue aux axiomes (FT_4) et (OT_4).

La détermination locale d'une topologie est adaptée à l'étude des questions dans lesquelles interviennent les notions essentielles de convergence et de limite. Elle permet naturellement d'introduire aisément les notions d'adhérence et d'intérieur liées à celles d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts. Les définitions de ces notions ne sont pas essentiellement liées aux propriétés particulières de l'application $\mathcal{V}$ et il est possible de les étendre au cas d'une application analogue à l'application $\mathcal{V}$ mais vérifiant des conditions plus faibles qui constituent les axiomes des E-applications.

Dans un espace métrique dont la topologie est déterminée par une distance d, la distance de deux points x et y est un nombre qui évalue leur ordre de proximité ou d'éloignement. Un voisinage d'un point x est alors constitué par une partie V contenant tous les points y assez proches de x. De même, la distance de deux ensembles A et B est le nombre $d(A, B) \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y)$ qui évalue leur ordre de proximité ou d'éloignement. De façon plus précise, si $d(A, B) > 0$, les ensembles A et B sont éloignés et si $d(A, B) = 0$, les ensembles A et B sont proches. L'adhérence d'un ensemble A est alors l'ensemble des points proches de A, ce qui montre que la connaissance des couples de parties de E proches, détermine la topologie de l'espace métrique. L'étude axiomatique des relations binaires sur $\mathcal{P}(E)$, vérifiant les propriétés essentielles de la relation binaire $d(A, B) = 0$, conduit à la notion "d'espace de proximité" introduite par EFRĚMOVIČ. En fait, la notion de proximité et d'éloignement de deux parties de E se présente également de façon naturelle et plus générale dans les E-structures. De plus, cette notion se trouve très étroitement liée aux structures variées introduites dans le but de généraliser les espaces métriques : structures uniformes, structures topologiques, structures prétopologiques, etc. Cette parenté paraît bien naturelle puisque le caractère commun de ces structures réside en ce qu'elles établissent justement des formulations précises de la notion ordinaire de proximité et d'éloignement.

1. Définition et propriétés des E-applications.

Notion de E-application. – Étant donné un ensemble quelconque E, soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ non vides, héréditaires à droite. Soit ρ_0 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}$ définie par :

$$\rho_0(X) = \{Y \; ; \; Y \in \mathcal{P}(E) \; , \; X \subset Y\} \quad .$$

DÉFINITION 1.1. - Une E-application est une application ρ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}$ vérifiant les axiomes suivants :

(E_1) $\rho(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$.

(E_2) $\rho(X) \subset \rho_0(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

(E_3) $X \subset Y$ implique $\rho(X) \supset \rho(Y)$.

Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des E-applications, la relation $\rho_1 \subset \rho_2$ équivalente à $\rho_1(X) \subset \rho_2(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{E}$ constitue un treillis complet dont l'élément maximum est l'application ρ_0 et l'élément minimum une E-application ρ_u caractérisée par les conditions : $\rho_u(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$ et $\rho_u(X) = \{E\}$ si $X \neq \emptyset$.

Composition des E-applications. - Étant données deux E-applications ρ_1 et ρ_2 , il est immédiat que l'application ρ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$, caractérisée par la condition : $\rho(X) = \bigcup_{Y \in \rho_2(X)} \rho_1(Y)$, est une E-application.

DÉFINITION 1.2. - Le composé de deux E-applications ρ_1 et ρ_2 est la E-application ρ notée $\rho_1 \circ \rho_2$ caractérisée par la condition.

$$\rho(X) = \bigcup_{Y \in \rho_2(X)} \rho_1(Y) \quad .$$

Il est immédiat que la loi de composition des E-applications est associative.

PROPOSITION 1.1. - Dans l'ensemble $\mathcal{E}$, la loi de composition associative des E-applications possède les propriétés suivantes :

a. La E-application ρ_0 est un élément neutre et la E-application ρ_u est un élément permis (ou un zéro).

b. Pour toute E-application ρ_1 et toute E-application ρ_2 , les applications : $\rho \to \rho_1 \circ \rho$ et $\rho \to \rho \circ \rho_2$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ sont isotones.

c. Pour toute famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de E-applications et pour toute famille $(\rho_j)_{j \in J}$ de E-applications :

$$\left[\bigcup_{i \in I} \rho_i\right] \circ \left[\bigcup_{j \in J} \rho_j\right] = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (\rho_i \circ \rho_j) \quad .$$

d. Pour tout couple de E-applications ρ_1 et ρ_2 :

$$\rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_1 , \qquad \rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_2 \quad .$$

e. Toute E-application ρ vérifie la condition : $\rho^2 \subset \rho$. Pour qu'une E-application ρ soit idempotente : $\rho^2 = \rho$, il faut et il suffit que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ et pour tout $Z \in \rho(X)$, il existe un $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $Z \in \rho(Y)$ et $Y \in \rho(X)$.

La propriété (a) résulte immédiatement des définitions de la loi de composition et des E-applications ρ_0 et ρ_u qui entraînent

$$\rho \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho = \rho \quad \text{et} \quad \rho \circ \rho_u = \rho_u \circ \rho = \rho \quad .$$

La propriété (b) est également une conséquence directe de la formule qui détermine la loi de composition.

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, la condition

$$Z \in \left[\bigcup_{i\in I} \rho_i\right] \circ \left[\bigcup_{j\in J} \rho_j\right](X)$$

est équivalente à l'existence d'un $Y \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant :

$$Z \in \left[\bigcup_{i\in I} \rho_i\right](Y) \quad \text{et} \quad Y \in \left[\bigcup_{j\in J} \rho_j\right](X) \quad .$$

Cette condition est équivalente à l'existence d'un $Y \in \mathcal{P}(E)$ et d'un couple $(i , j) \in I \times J$ tels que : $Z \in \rho_i(Y)$ et $Y \in \rho_j(X)$ c'est-à-dire : $Z \in (\rho_i \circ \rho_j)(X)$. La propriété (c) en résulte immédiatement.

Puisque ρ_0 est un élément maximum, tout couple de E-applications ρ_1 et ρ_2 vérifie : $\rho_1 \subset \rho_0$ et $\rho_2 \subset \rho_0$. La propriété (b) entraîne : $\rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_0 \circ \rho_2$ et $\rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_1 \circ \rho_0$. La propriété (a) entraîne alors : $\rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_2$ et $\rho_1 \circ \rho_2 \subset \rho_1$, c'est-à-dire la propriété (d).

La propriété (d) entraîne la première partie de la propriété (e) et la seconde partie n'est qu'une traduction de la condition : $\rho^2 \supset \rho$.

Remarque. - Dans la terminologie des demi-groupes ordonnés, d'après (b), la loi de composition et l'ordre déterminent sur $\mathcal{E}$ une structure de demi-groupe ordonné. Puisque l'élément unité ρ_0 est l'élément maximum, le demi-groupe $\mathcal{E}$

est entier et puisque l'élément zéro ρ_u est l'élément minimum, le demi-groupe $\mathcal{E}$ est avec zéro. La propriété (d), conséquence des précédentes, est valable dans tout demi-groupe ordonné entier. Puisque $\mathcal{E}$ est un treillis complet, la propriété (c) exprime que $\mathcal{E}$ est un demi-groupe réticulé complet. Les propriétés (a), (b), (c), (d) expriment que $\mathcal{E}$ est un demi-groupe réticulé complet entier avec zéro.

Ensemble des E-applications engendrées par des systèmes de parties. - Une famille σ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ est un système de parties si elle contient les éléments $\emptyset$ et E. Etant donné un système σ, il est immédiat que l'application ρ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ caractérisée par la condition :

$$\rho(X) = \{Y \,;\; A \subset Y \,,\; A \in \rho_0(X) \cap \sigma\}$$

est une E-application.

DÉFINITION 1.3. - La E-application ρ engendrée par un système σ est caractérisée par la condition :

$$\rho(X) = \{Y \,;\; A \subset Y \,,\; A \in \rho_0(X) \cap \sigma\} \quad .$$

Dans un espace topologique E, l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ et l'ensemble des fermés $\mathcal{F}$ constituent des systèmes. La E-application ρ engendrée par le système $\mathcal{O}$ associe à toute partie X de E le filtre $\rho(X)$ de ses voisinages.

PROPOSITION 1.2. - Pour toute E-application ρ, l'ensemble des solutions dans $\mathcal{P}(E)$ de l'équation $\rho(X) = \rho_0(X)$ constitue un système σ_1 qui engendre une E-application ρ_1 vérifiant : $\rho_1 \subset \rho$.

Pour que la E-application ρ soit engendrée par un système σ il faut et il suffit qu'elle vérifie l'égalité : $\rho_1 = \rho$ et alors, le système σ est identique au système σ_1.

Les relations $\rho(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$ et $\rho(E) = \{E\}$ entraînent $\emptyset \in \sigma_1$ et $E \in \sigma_1$. La condition $A \in \rho_0(X) \cap \sigma_1$ implique : $A \in \rho(A)$ et $A \supset X$ qui entraînent : $A \in \rho(X)$. Il en résulte la relation : $\rho_0(X) \cap \sigma_1 \subset \rho(X)$ qui implique $\rho_1(X) \subset \rho(X)$ et $\rho_1 \subset \rho$.

Si une E-application ρ est engendrée par un système σ, la relation $A \in \sigma$ implique $\rho(A) = \rho_0(A)$, soit : $A \in \sigma_1$. L'inclusion $\sigma \subset \sigma_1$ implique $\rho \subset \rho_1$

qui entraîne $\rho = \rho_1$. Réciproquement, l'égalité $\rho = \rho_1$ montre que la E-application ρ est engendrée par le système σ_1 . Tout système σ qui engendre la E-application ρ vérifie : $\sigma \subset \sigma_1$ et la condition $A \in \sigma_1$ implique $A \in \rho(A)$ qui entraîne $A \in \sigma$ et $\sigma_1 \subset \sigma$. Il en résulte l'égalité $\sigma = \sigma_1$.

PROPOSITION 1.3. - Toute E-application engendrée par un système est idempotente.

Si une E-application ρ est engendrée par un système σ , la relation $Y \in \rho(X)$ implique l'existence de $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $Y \supset A$ et $A \in \rho_0(X) \cap \sigma$. Ces conditions impliquent $Y \in \rho(A)$ et $A \in \rho(X)$ qui, d'après la propriété (e) de la proposition 1.1, entraînent $\rho^2 = \rho$.

PROPOSITION 1.4. - Soit $\mathcal{E}_I$ l'ensemble des E-applications ρ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

a. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, tout $Y \in \rho(X)$ contient un élément minimal dans $\rho(X)$.

b. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, tout $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Y \in \rho(X)$ est contenu dans un élément maximal dans l'ensemble des $Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $Y \in \rho(Z)$.

Pour qu'une E-application ρ appartenant à $\mathcal{E}_I$ soit idempotente il faut et il suffit qu'elle soit engendrée par un système.

Si l'ensemble E est fini ; $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}$, mais si l'ensemble E est infini, il existe au moins une E-application idempotente qui n'est pas engendrée par un système.

Soit ρ une E-application idempotente vérifiant la condition (a). Si $Y \in \rho(X)$, il existe $Y_0 \in \rho(X)$ minimal dans $\rho(X)$ vérifiant $Y_0 \subset Y$. Puisque la E-application ρ est idempotente, il existe $Z \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant : $Y_0 \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$. Ces conditions entraînent $Y_0 \supset Z$ et $Z \in \rho(X)$ qui impliquent $Y_0 = Z$ puisque Y_0 est minimal dans l'ensemble $\rho(X)$. La relation $Y_0 \in \rho(Y_0)$ implique $Y_0 \in \sigma_1$ qui entraîne : $Y \in \rho_1(X)$. Il en résulte $\rho \subset \rho_1$ qui, d'après la première partie de la proposition 1.2, implique $\rho = \rho_1$ et d'après la seconde partie de la proposition 1.2, la E-application ρ est engendrée par un système.

Soit ρ une E-application idempotente vérifiant la condition (b). Si $Y \in \rho(X)$, il existe $X_0 \in \mathcal{P}(E)$, maximal dans l'ensemble des $Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $Y \in \rho(Z)$, et tel que : $X_0 \supset X$. Puisque la E-application ρ est idempotente, la relation $Y \in \rho(X_0)$ implique l'existence d'un $Z \in \mathcal{P}(E)$, vérifiant $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X_0)$. Ces conditions entraînent : $Y \in \rho(Z)$ et $Z \supset X_0$ qui impliquent

$Z = X_0$ puisque X_0 est maximal dans l'ensemble des $Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $Y \in \rho(Z)$. La relation $X_0 \in \rho(X_0)$ implique $X_0 \in \sigma_1$ qui entraîne $Y \in \rho_1(X_0)$ et $Y \in \rho_1(X)$. Il en résulte $\rho \subset \rho_1$ qui montre que la E-application ρ est engendrée par un système.

Ainsi toute E-application idempotente appartenant à $\mathcal{E}_I$ est engendrée par un système. Ce résultat et la proposition 1.3 entraînent la première affirmation de la proposition 1.4.

Si l'ensemble E est fini, $\mathcal{P}(E)$ est fini ce qui montre que toute E-application ρ vérifie les conditions (a) et (b). Ainsi $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}$ et pour qu'une E-application soit idempotente, il faut et il suffit qu'elle soit engendrée par un système.

Si l'ensemble E est infini, soit ρ l'application caractérisée par les conditions :

Si $X = \emptyset$: $\rho(X) = \mathcal{P}(E)$.

Si $X \neq \emptyset$ et $E - X$ est infini : $\rho(X) = \{Y \,;\; X \subset Y \,,\; Y - X \text{ infini}\}$.

Si $X \neq \emptyset$ et $E - X$ fini : $\rho(X) = \{E\}$.

Il est aisé de vérifier que ρ est une E-application idempotente mais qu'elle n'est pas engendrée par un système puisque : $\rho \neq \rho_1 = \rho_u$. Cet exemple justifie la dernière affirmation.

Remarque. - Si l'ensemble E possède au moins trois éléments, il existe au moins une E-application ρ non idempotente et non engendrée par un système. En effet, l'application ρ caractérisée par : $\rho(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$, $\rho(E) = \{E\}$, $\rho(X) = \rho_0(X) - \{X\}$ si $X = \emptyset$ et $X \neq E$, est une E-application non idempotente.

2. Structures simples.

Structures simples sur un ensemble.

DÉFINITION 2.1. - Une E-application ρ détermine sur l'ensemble E une structure simple appelée aussi ρ-structure ou structure d'ordre ρ .

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des structures simples sur E est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\mathcal{E}$ des E-applications. Les structures de $\mathcal{E}$ se transportent donc sur $\mathbb{S}_0$. En particulier, l'ensemble $\mathbb{S}_0$ constitue un treillis complet pour lequel l'élément maximum est la ρ_0-structure et l'élément minimum la ρ_u-structure. Si : $\rho_2 \subset \rho_1$, la ρ_1-structure (S_1) est dite plus fine que la ρ_2-structure (S_2) : $(S_2) \subset (S_1)$. La ρ_0-structure qui est la plus fine des structures simples définies sur E est dite discrète et la ρ_u-structure qui est la moins fine des structures simples définies sur E est dite grossière.

Notions fondamentales liées à une ρ-structure. — Il est commode d'identifier un point x de E à l'élément $\{x\}$ de $\mathcal{P}(E)$, de sorte que E représente l'ensemble des points du treillis atomique $\mathcal{P}(E)$. Ainsi par convention :

$$\rho(x) = \rho(\{x\}) \quad .$$

DÉFINITION 2.2. — Soit E un ensemble muni d'une ρ-structure déterminée par une E-application ρ et soit X un élément quelconque de $\mathcal{P}(E)$.

a. Tout élément Y de $\rho(X)$ est une partie de E, ρ-voisine de X, ou un ρ-voisinage de X. L'élément $\rho(X)$ de $\mathcal{H}$ constitue l'ensemble des ρ-voisinages de X. Si Y est un ρ-voisinage de X, l'élément X est ρ-intérieur à l'élément Y.

b. Tout élément Y dont le complémentaire est un ρ-voisinage de X est une partie de E, ρ-éloignée de X. Si Y est ρ-éloigné de X, l'élément X est ρ-extérieur à l'élément Y.

c. Tout élément Y qui n'est pas ρ-éloigné de X est ρ-proche de X. Si Y est ρ-proche de X, l'élément X est ρ-adhérent à l'élément Y.

d. Un filtre Φ sur E ρ-converge vers X si $\rho(X) \subset \Phi$. L'élément X est alors une ρ-limite du filtre Φ.

Remarque. — Les éléments ρ-éloignés et les éléments ρ-proches d'un élément $X \in \mathcal{P}(E)$ peuvent être caractérisés simplement à l'aide de deux involutions naturelles définies sur l'ensemble $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$. Soient c_1 l'extension à $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ de l'application $c \equiv \complement_E$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même et c_2 l'application $\complement_{\mathcal{P}(E)}$ de $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ dans lui-même. L'application c_1 est un isomorphisme du treillis complet $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ sur lui-même et l'application c_2 est un anti-isomorphisme du treillis complet $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ sur lui-même. Si ε et η sont les applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ caractérisées par les formules : $\varepsilon = c_1 \circ \rho$ et $\eta = c_2 \circ c_1 \circ \rho$, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $\varepsilon(X)$ est l'ensemble des parties de E ρ-éloignées de X et $\eta(X)$ est l'ensemble des parties de E ρ-proches de X.

Les *E-relations ou relations de proximité*. – Soit δ_0 la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ caractérisée par la condition : $Y \,\delta_0\, X$ est équivalent à $Y \cap X \neq \emptyset$.

DÉFINITION 2.3. – *Une* *E-relation ou relation de proximité est une relation binaire* δ *sur* $\mathcal{P}(E)$ *vérifiant les axiomes suivants* :

(E'_1) $Y \,\delta\, X$ *implique* $Y \neq \emptyset$ et $X \neq \emptyset$.

(E'_2) $Y \,\delta_0\, X$ *implique* $Y \,\delta\, X$.

(E'_3) $Y_1 \supset Y \,\delta\, X \subset X_1$ *implique* $Y_1 \,\delta\, X_1$.

La négation $\overline{\delta}$ d'une relation de proximité δ est une relation d'éloignement.

LEMME 2.1. – *Soient* g *et* φ *les applications caractérisées par les formules* : $g = c_2 \circ c_1$ *et* $\varphi = c_1 \circ c_2$.

L'application c_1 *est un isomorphisme du treillis complet* $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ *sur lui-même. L'application* c_2 *est un anti-isomorphisme du treillis complet* $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ *sur lui-même. Les applications* g *et* φ *sont deux anti-isomorphismes inverses du treillis complet* $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ *sur lui-même*.

Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ *trois éléments de* $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ *liés par les conditions* : $\mathfrak{X}_1 = c_1(\mathfrak{X})$ *et* $\mathfrak{X}_2 = c_2(\mathfrak{X}_1)$ $[\mathfrak{X}_2 = g(\mathfrak{X})$ *et* $\mathfrak{X} = \varphi(\mathfrak{X}_2)]$.

a. *Il y a équivalence des conditions suivantes* :

- $\mathfrak{X}$ *est héréditaire à droite* [resp. à gauche].
- $\mathfrak{X}_1$ *est héréditaire à gauche* [resp. à droite].
- $\mathfrak{X}_2$ *est héréditaire à droite* [resp. à gauche].

b. *Il y a équivalence des conditions suivantes* :

- $\mathfrak{X}$ *est non vide* [resp. $\mathfrak{X} \neq \mathcal{P}(E)$].
- $\mathfrak{X}_1$ *est non vide* [resp. $\mathfrak{X}_1 \neq \mathcal{P}(E)$].
- $\mathfrak{X}_2 \neq \mathcal{P}(E)$ [resp. $\mathfrak{X}_2$ est non vide].

En particulier si $\mathfrak{X}$ *est héréditaire à droite, il y a équivalence des conditions* :

- $\mathfrak{X}$ *est non vide* [resp. $\emptyset \notin \mathfrak{X}$].
- $\mathfrak{X}_1$ *est non vide* [resp. $\emptyset \notin \mathfrak{X}_1$].
- $\emptyset \notin \mathfrak{X}_2$ [resp. $\mathfrak{X}_2$ est non vide].

c. *Il y a équivalence des conditions suivantes* :

- $A \in \mathfrak{X}$ et $B \in \mathfrak{X}$ impliquent $A \cap B \in \mathfrak{X}$.
- $A \in \mathfrak{X}_1$ et $B \in \mathfrak{X}_1$ impliquent $A \cup B \in \mathfrak{X}_1$.
- $A \cup B \in \mathfrak{X}_2$ implique $A \in \mathfrak{X}_2$ ou $B \in \mathfrak{X}_2$.

d. Il y a équivalence des conditions suivantes.

- Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{X}$: $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathfrak{X}$.
- Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{X}_1$: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{X}_1$.
- Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{X}_2$, il existe $i \in I$ tel que $A_i \in \mathfrak{X}_2$.

Ces affirmations résultent immédiatement des définitions.

Soit η_0 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ caractérisée par $\eta_0 = g \circ \rho_0$ et soit $\mathcal{H}''$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ éventuellement vides, héréditaires à droite et distinctes de $\mathcal{P}(E)$.

PROPOSITION 2.1. - Les applications inverses : $\rho \to \eta = g \circ \rho$ et $\eta \to \rho = \varphi \circ \eta$ établissent une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}$ des E-applications et l'ensemble $\mathcal{E}''$ des applications η de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}''$ vérifiant les axiomes suivants :

(E''_1) $\eta(\emptyset)$ est vide.

(E''_2) $\eta_0(X) \subset \eta(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

(E''_3) $X \subset Y$ implique $\eta(X) \subset \eta(Y)$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme.

PROPOSITION 2.2. - La bijection entre l'ensemble des relations binaires δ sur $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications η de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ caractérisée par la condition : $Y \,\delta\, X$ est équivalent à $Y \in \eta(X)$, établit une bijection entre l'ensemble des E-relations ou relations de proximité et l'ensemble $\mathcal{E}''$ des applications η de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}''$ vérifiant les axiomes (E''_1), (E''_2), (E''_3).

L'axiome (E'_1) est équivalent à : $Y \notin \eta(\emptyset)$ et $\emptyset \notin \eta(X)$ c'est-à-dire à la conjonction des propriétés : $\eta(\emptyset)$ est vide et $\eta(X) \neq \mathcal{P}(E)$ puisque $\eta(X)$ est héréditaire à droite. L'axiome (E'_2) est équivalent à l'axiome (E''_2). L'axiome (E'_3) se compose des deux conditions : $Y_1 \supset Y \,\delta\, X$ implique $Y_1 \,\delta\, X$ et $Y \,\delta\, X \subset X_1$ implique $Y \,\delta\, X_1$. La première est équivalente à la condition : $\eta(X)$ est héréditaire à droite, et la seconde est équivalente à l'axiome (E''_3).

PROPOSITION 2.3. - Une E-relation ou relation de proximité δ et une E-application ρ étant associées si δ est associée à l'application $\eta = g \circ \rho$, une structure simple est caractérisée par la relation de proximité ρ associée à la E-application ρ qui la détermine.

Cette affirmation est une conséquence immédiate des propositions 2.1 et 2.2. En bref, une structure simple est déterminée par l'un des éléments ρ, ε, η, δ associés par les conditions : $\varepsilon = c_1 \circ \rho$, $\eta = g \circ \rho$, δ a pour graphe celui de l'application η.

Dans une ρ-structure associée à une relation de proximité δ, la condition $Y \delta X$ signifie que Y est ρ-proche de X ou que X est ρ-adhérent à Y. En général la relation binaire δ n'est pas symétrique

DÉFINITION 2.4. - Une E-relation ρ et la structure simple qu'elle détermine sont dites symétriques si la relation de proximité δ est symétrique.

Adhérence d'ordre ρ, intérieur d'ordre ρ, extérieur d'ordre ρ.

DÉFINITION 2.5. - Soit (S) une structure simple déterminée par une E-application ρ. L'application de ρ-adhérence est l'application α de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ caractérisée par :

$$\alpha(X) = \{x \ ; \ X \in \eta(x)\} = \{x \ ; \ X \delta x\} \quad .$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $\alpha(X)$ est l'adhérence d'ordre ρ ou la ρ-adhérence de X. L'application de ρ-ouverture est l'application β de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ caractérisée par :

$$\beta(X) = \{x \ ; \ X \in \rho(x)\} = \{x \ ; \ c(X) \bar{\delta} x\} \quad .$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $\beta(X)$ est l'intérieur d'ordre ρ ou le ρ-intérieur de X. L'application de ρ-éloignement est l'application γ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ caractérisée par :

$$\gamma(X) = \{x \ ; \ X \in \varepsilon(x)\} = \{x \ ; \ X \bar{\delta} x\} \quad .$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma(X)$ est l'extérieur d'ordre ρ ou le ρ-extérieur de X.

PROPOSITION 2.4. - Les applications α, β, γ vérifient les relations :

$$\alpha = c \circ \beta \circ c \qquad \alpha = c \circ \gamma$$
$$\beta = c \circ \alpha \circ c \qquad \beta = \gamma \circ c$$
$$\gamma = c \circ \alpha \qquad \gamma = \beta \circ c \quad .$$

En particulier, la ρ-adhérence et le ρ-intérieur de deux parties complémentaires sont complémentaires. Le ρ-extérieur d'une partie de E est le complémentaire de sa ρ-adhérence et le ρ-intérieur de son complémentaire.

La relation : $\beta(X) = \{x \,;\; c(X)\ \bar{\delta}\ x\}$ entraîne $c \circ \beta(X) = \{x \,;\; c(X)\ \delta\ x\}$ qui implique $c \circ \beta \circ c(X) = \{x \,;\; X\ \delta\ x\} = \alpha(X)$ c'est-à-dire : $\alpha = c \circ \beta \circ c$. La relation $\gamma(X) = \{x \,;\; X\ \bar{\delta}\ x\}$ entraîne $c \circ \gamma(X) = \{x \,;\; X\ \delta\ x\} = \alpha(X)$ c'est-à-dire $\alpha = c \circ \gamma$. Ces deux relations entraînent immédiatement les suivantes. Les autres affirmations traduisent les relations $c \circ \alpha = \beta \circ c$ et $\gamma = c \circ \alpha = \beta \circ c$.

Remarque. - La dernière partie de la proposition 2.4 exprime des propriétés classiques pour les notions d'adhérence, d'intérieur et d'extérieur au sens topologique.

PROPOSITION 2.5. - Les applications α, β, γ possèdent les propriétés suivantes :

a. L'application α de ρ-adhérence vérifie :

1° $\alpha(\emptyset) = \emptyset$.

2° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset \alpha(A)$.

3° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\alpha(A \cup B) \supset \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

4° Tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ qui rencontre $\alpha(X)$ est ρ-adhérent à X.

b. L'application β de ρ-ouverture vérifie :

1° $\beta(E) = E$.

2° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $\beta(A) \subset A$.

3° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\beta(A \cap B) \subset \beta(A) \cap \beta(B)$.

4° Tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ ρ-intérieur à X est inclus dans $\beta(X)$.

c. L'application γ de ρ-éloignement vérifie :

1° $\gamma(\emptyset) = E$.

2° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $\gamma(A) \cap A = \emptyset$.

3° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\gamma(A \cup B) \subset \gamma(A) \cap \gamma(B)$.

4° Tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ ρ-extérieur à X est inclus dans $\gamma(X)$.

D'après la proposition 2.1, $\eta(x)$ est héréditaire à droite et distinct de $\mathcal{P}(E)$ ce qui implique $\emptyset \notin \eta(x)$ et $\alpha(\emptyset) = \emptyset$. La condition $x \in A$ implique : $A \in \eta_0(x)$ et, d'après (E_2''), $A \in \eta(x)$ qui implique $x \in \alpha(A)$. Il en résulte la relation $A \subset \alpha(A)$. La relation $x \in \alpha(X)$ implique $X \in \eta(x)$ et puisque $\eta(x)$ est héréditaire à droite, la relation $X \subset Y$ implique $Y \in \eta(x)$ qui donne $x \in \alpha(Y)$. Il en résulte que $X \subset Y$ implique $\alpha(X) \subset \alpha(Y)$. Les relations $\alpha(A \cup B) \supset \alpha(A)$ et $\alpha(A \cup B) \supset \alpha(B)$ impliquent $\alpha(A \cup B) \supset \alpha(A) \cup \alpha(B)$. Si $Y \cap \alpha(X) \neq \emptyset$, il existe un point x de E vérifiant $x \in Y$ et $x \in \alpha(X)$ c'est-à-dire $X \in \eta(x)$. L'axiome (E_3'') implique $\eta(x) \subset \eta(Y)$ qui entraîne $X \in \eta(Y)$ c'est-à-dire $X \,\delta\, Y$. Ainsi Y est ρ-adhérent à X . La partie (a) de la proposition 2.5 ayant été démontrée, les parties (b) et (c) en découlent grâce aux formules $\beta = c \circ \alpha \circ c$ et $\gamma = c \circ \alpha$.

Remarques. - Les applications α et β vérifient respectivement les axiomes (FT_1), (FT_2) et (OT_1), (OT_2) des fermetures topologiques et des ouvertures topologiques. Par contre, elles ne vérifient respectivement que des axiomes plus faibles que les axiomes (FT_3) et (OT_3).

Une structure simple engendrée par une E-application ρ détermine des applications α , β , γ mais ces applications ne permettent pas en général de caractériser la E-application ρ .

3. Propriétés des E-applications et des structures simples.

Les E-applications $\cap$-semi-parfaites et $\cap$-parfaites.

DÉFINITION 3.1. - Une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine sont $\cap$-semi-parfaites [resp. $\cap$-parfaites] si pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $\rho(X)$ est fermé par rapport aux intersections finies [resp. quelconques].

PROPOSITION 3.1. - Pour qu'une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine soient $\cap$-semi-parfaites, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

a. Pour toute partie X non vide de E, $\rho(X)$ est un filtre sur E.

b. La relation de proximité δ vérifie la condition :

$$(Y_1 \cup Y_2)\ \delta\ X \text{ est équivalent à : } Y_1\ \delta\ X \text{ ou } Y_2\ \delta\ X \quad .$$

[identique à : $(Y_1 \cup Y_2)\ \bar{\delta}\ X$ est équivalent à : $Y_1\ \bar{\delta}\ X$ et $Y_2\ \bar{\delta}\ X$].

La première condition résulte immédiatement de l'axiome (E_2). D'après la partie (c) du lemme 2.1 et la formule $\eta = g \circ \rho$, pour que ρ soit $\cap$-semi-parfaite il faut et il suffit que $(Y_1 \cup Y_2) \in \eta(X)$ implique $Y_1 \in \eta(X)$ ou $Y_2 \in \eta(X)$ c'est-à-dire que $(Y_1 \cup Y_2)\ \delta\ X$ implique $Y_1\ \delta\ X$ ou $Y_2\ \delta\ X$. D'après l'axiome (E_3'), l'implication inverse est toujours valable, ce qui établit la condition (b). La dernière affirmation est une traduction de la précédente.

PROPOSITION 3.2. - Pour qu'une E-application ρ est la ρ-structure qu'elle détermine soient $\cap$-parfaites, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

a. L'application ρ est de la forme $\rho = \rho_0 \circ \Pi$ dans laquelle Π est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les conditions :

1° $\Pi(\emptyset) = \emptyset$.

2° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset \Pi(A)$.

3° Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $\Pi(A \cup B) \supset \Pi(A) \cup \Pi(B)$.

b. La relation de proximité δ vérifie la condition :

$$Y\ \delta\ X \text{ est équivalent à l'existence d'un point } y \in Y \text{ tel que } y\ \delta\ X \quad .$$

[identique à : $Y\ \bar{\delta}\ X$, et équivalent à : $y\ \bar{\delta}\ X$ pour tout point $y \in Y$].
Lorsqu'il en est ainsi : $\Pi(X) = \{y\ ;\ y\ \delta\ X\}$.

Si ρ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{H}$, pour que $\rho(X)$ soit fermé par rapport aux intersections quelconques, il faut et il suffit que $\rho(X)$ admette un plus petit élément c'est-à-dire que ρ soit de la forme $\rho = \rho_0 \circ \Pi$ dans laquelle Π est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$. Pour que de plus ρ soit une E-application, il faut et il suffit que l'application Π vérifie les trois conditions indiquées.

D'après la partie (d) du lemme 2.1 et la formule $\eta = g \circ \rho$, pour que ρ soit $\cap$-parfaite il faut et il suffit que $\left[\bigcup_{i\in I} Y_i\right] \in \eta(X)$ implique l'existence d'un $i \in I$ tel que $Y_i \in \eta(X)$. Puisque $\eta(X)$ est héréditaire à droite et que $Y = \bigcup_{y\in Y} \{y\}$, la dernière condition est équivalente au fait que $Y \in \eta(X)$ implique l'existence d'un point $y \in Y$ tel que $y \in \eta(X)$ c'est-à-dire à la condition (b). L'avant-dernière affirmation est une traduction de la précédente et la dernière affirmation résulte immédiatement des définitions.

Les E-applications $\cup$-semi-parfaites et $\cup$-parfaites. - Soit ρ une E-application et $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E. Soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. les relations $X \supset X_i$ et l'axiome (E_3) impliquent $\rho(X) \subset \rho(X_i)$ qui entraînent :

$$\rho\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] \subset \bigcap_{i\in I} \rho(X_i) \quad .$$

DÉFINITION 3.2. - Une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine sont $\cup$-semi-parfaites [resp. $\cup$-parfaites, ou ponctuelles] si toute famille finie [resp. quelconque] $(X_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ vérifie :

$$\rho\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcap_{i\in I} \rho(X_i) \quad .$$

PROPOSITION 3.3. - Pour qu'une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine soient $\cup$-semi-parfaites il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

a. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, toute réunion finie de parties de E ρ-intérieures à Y est ρ-intérieure à Y.

b. La relation de proximité δ vérifie la condition :

$$Y \,\delta\, (X_1 \cup X_2) \text{ est équivalent à } Y \,\delta\, X_1 \text{ ou } Y \,\delta\, X_2 \quad .$$

[identique à : $Y \,\bar{\delta}\, (X_1 \cup X_2)$ est équivalent à $Y \,\bar{\delta}\, X_1$ et $Y \,\bar{\delta}\, X_2$].

Pour qu'une E-application ρ soit $\cup$-semi-parfaite, il faut et il suffit que pour toute famille finie $(X_i)_{i\in I}$ de parties de E, la condition $Y \in \bigcap_{i\in I} \rho(X_i)$ implique $Y \in \rho\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right]$, c'est-à-dire que les conditions $Y \in \rho(X_i)$ impliquent $Y \in \rho\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right]$. Cette propriété est équivalente à la condition (a).

D'après la première partie du lemme 2.1 qui établit que l'application g est un anti-isomorphisme du treillis $\mathcal{P}(E)$ sur lui-même et la formule $\eta = g \circ \rho$, la condition $\rho\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcap_{i\in I} \rho(X_i)$ est équivalente à la condition

$$\eta\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcup_{i\in I} \eta(X_i) \quad .$$

Pour que cette condition soit vérifiée lorsque I est fini, il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée lorsque I possède deux éléments, ce qui donne la condition : $\eta[X_1 \cup X_2] = \eta[X_1] \cup \eta[X_2]$ équivalente à la première partie de la condition (b). La dernière affirmation est une traduction de la précédente.

PROPOSITION 3.4. - Pour qu'une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine soit $\cup$-parfaite ou ponctuelle, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

a. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, toute réunion de parties de E ρ-intérieures à Y est ρ-intérieure à Y. [équivalent à : les parties de E ρ-intérieures à Y ont un plus grand élément].

b. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, $\beta(Y)$ est ρ-intérieur à Y.

c. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, les éléments $X \in \mathcal{P}(E)$ ρ-adhérents à Y sont caractérisés par la condition $X \cap \alpha(Y) \neq \emptyset$.

d. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, les éléments $X \in \mathcal{P}(E)$ ρ-intérieurs à Y sont caractérisés par la condition : $X \subset \beta(Y)$.

e. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, les éléments $X \in \mathcal{P}(E)$ ρ-extérieurs à Y sont caractérisés par la condition : $X \subset \gamma(Y)$.

f. La relation de proximité δ vérifie la condition :

$Y \,\delta\, X$ est équivalent à l'existence d'un point $x \in X$ tel que $Y \,\delta\, x$.

[identique à : $Y \,\bar{\delta}\, X$ est équivalent à $Y \,\bar{\delta}\, x$ pour tout point $x \in X$].

g. <u>Pour toute partie</u> X <u>de</u> E <u>non vide</u> : $\rho(X) = \bigcap_{x \in X} \rho(x)$.

Pour qu'une E-application ρ soit $\cup$-parfaite, il faut et il suffit que pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de E , la condition $Y \in \bigcap_{i \in I} \rho(X_i)$ implique $Y \in \rho\left[\bigcup_{i \in I} X_i\right]$, c'est-à-dire que les conditions $Y \in \rho(X_i)$ impliquent $Y \in \rho\left[\bigcup_{i \in I} X_i\right]$. Cette propriété est équivalente à la condition (a). Naturellement cette propriété est équivalente au fait que l'ensemble des parties ρ-intérieures à Y admet un plus grand élément.

Puisque $\beta(Y)$ contient les parties de E ρ-intérieures à Y et qu'il est la réunion des points ρ-intérieurs à Y , pour que l'ensemble des parties ρ-intérieures à Y admette un plus grand élément, il faut et il suffit que $\beta(Y)$ soit ρ-intérieur à Y , ce qui démontre la condition (b).

Il est immédiat que la condition (b) est équivalente à la condition (d).

La condition (d) signifie que $Y \in \rho(X)$ est équivalent à $X \subset \beta(Y)$ c'est-à-dire que $c(Y) \notin \rho(X)$ est équivalent à $X \not\subset \beta \circ c(Y)$ ou à : $X \cap [c \circ \beta \circ c(Y)] \neq \emptyset$. En vertu de la formule $\alpha = c \circ \beta \circ c$, cette dernière équivalence signifie que X est ρ-adhérent à Y , est équivalent à : $X \cap \alpha(Y) \neq 0$, ce qui exprime la condition (c).

La condition (d) signifie que $Y \in \rho(X)$ est équivalent à $X \subset \beta(X)$ c'est-à-dire que $c(Y) \in \rho(X)$ est équivalent à $X \subset \beta \circ c(Y)$. En vertu de la formule $\gamma = \beta \circ c$, cette dernière équivalence signifie que : X est ρ-extérieur à Y est équivalent à $X \subset \gamma(Y)$, ce qui exprime la condition (e).

La condition (f) est équivalente à la condition (c).

Enfin la condition (g) résulte immédiatement de la définition. C'est cette condition qui justifie la terminologie utilisée dans la définition. En effet une E-application ρ ponctuelle est caractérisée par sa restriction à l'ensemble des points de E .

COROLLAIRE 3.1. - <u>Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des structures simples ponctuelles ou l'ensemble des</u> E-<u>applications ponctuelles et l'ensemble des applications</u> α [resp. β ou γ] <u>de</u> $\mathcal{P}(E)$ <u>dans</u> $\mathcal{P}(E)$ <u>vérifiant les conditions 1, 2, 3 de la partie (a)</u> [resp. (b) ou (c)] <u>de la proposition 2.5.</u>

Tout d'abord, si $\mathcal{A}$ [resp. $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$] désigne l'ensemble des applications α [resp. β ou γ] de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les conditions 1, 2, 3 de la partie a [resp. b ou c] de la proposition 2.5, les formules $\alpha = c \circ \beta \circ c$ et $\gamma = \beta \circ c$ établissent des bijections canoniques entre les ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Soit r l'application de $\mathcal{B}$ dans l'ensemble des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ qui, à $\beta \in \mathcal{B}$ associe l'application ρ caractérisée par : $Y \in \rho(X)$ est équivalent à $X \subset \beta(Y)$. Il est immédiat que l'application r est une injection de $\mathcal{B}$ dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des E-applications. De plus, d'après la partie (a) de la proposition 3.4, l'application r est en fait une injection de $\mathcal{B}$ dans l'ensemble $\mathcal{E}_p$ des E-applications ponctuelles. Soit b l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$ qui, à une E-application ρ, associe l'application β de ρ-ouverture. La partie (d) de la proposition 3.4 montre que l'application $r \bullet b$ se réduit à l'identité sur $\mathcal{E}_p$. Il en résulte que l'application r établit une bijection canonique entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}_p$.

PROPOSITION 3.5. - <u>Pour qu'une E-application ρ soit telle que $\rho(x)$ soit un filtre pour tout point x de E, il faut et il suffit que les applications α, β, γ associées vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes.</u>

a. 3'. <u>Pour tout</u> $A \in \mathcal{P}(E)$ <u>et tout</u> $B \in \mathcal{P}(E)$: $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

b. 3'. <u>Pour tout</u> $A \in \mathcal{P}(E)$ <u>et tout</u> $B \in \mathcal{P}(E)$: $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$.

c. 3'. <u>Pour tout</u> $A \in \mathcal{P}(E)$ <u>et tout</u> $B \in \mathcal{P}(E)$: $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cap \gamma(B)$.

<u>En particulier, ces conditions sont réalisées si la E-application ρ est $\cap$-semi-parfaite. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'une E-application ponctuelle ρ soit $\cap$-semi-parfaite.</u>

L'équivalence des trois conditions résulte des formules $\alpha = c \circ \beta \circ c$ et $\gamma = \beta \circ c$. D'après la relation $\beta(A \cap B) \subset \beta(A) \cap \beta(B)$, la condition (b. 3') est équivalente à la condition : $x \in \beta(A)$ et $x \in \beta(B)$ impliquent $x \in \beta(A \cap B)$ c'est-à-dire à la condition : $A \in \rho(x)$ et $B \in \rho(x)$ impliquent $A \cap B \in \rho(x)$ qui signifie que $\rho(x)$ est un filtre. Cette condition est naturellement réalisée si ρ est $\cap$-semi-parfaite. La dernière affirmation résulte du fait que si $\rho(x)$ est un filtre, pour $X \neq \emptyset$, $\rho(X) = \bigcap_{x \in X} \rho(x)$ est un filtre.

4. Comparaison des structures simples et de quelques structures classiques.

Structures pré-topologiques et structures de pré-adhérence [1]. - Une structure pré-topologique ou pré-topologie sur un ensemble E est déterminée par la donnée en tout point x de E d'un filtre $\mathcal{V}(x)$ appelé filtre des pseudo-voisinages de x et assujetti à la seule condition : $\mathcal{V}(x) \subset \rho_0(x)$.

Une structure de pré-adhérence sur un ensemble E est déterminée par la donnée d'une application α de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ appelée pré-adhérence et vérifiant les axiomes (FT_1), (FT_2), (FT_3) des fermetures topologiques.

Soit $\mathcal{A}'$ [resp. $\mathcal{B}'$ ou $\mathcal{C}'$] l'ensemble des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les conditions 1, 2 de la partie (a) [resp. (b) ou (c)] de la proposition 2.5 et la condition 3' obtenue en remplaçant l'inclusion par l'égalité dans la condition 3 de la partie (a) [resp. (b) ou (c)].

LEMME 4.1. - Il existe des bijections canoniques entre les ensembles $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ et l'ensemble des E-applications ponctuelles $\cap$-semi-parfaites.

Ce résultat découle immédiatement du corollaire 3.1 et de la proposition 3.5.

THÉORÈME 4.1. - Il y a identité des structures suivantes :

1° Les structures pré-topologiques déterminées par des filtres de pseudo-voisinages $\mathcal{V}(x)$.

2° Les strcutures de pré-adhérence déterminées par une application α de pré-adhérence.

3° Les strcutures simples ponctuelles $\cap$-semi-parfaites déterminées par une E-application ponctuelle ρ $\cap$-semi-parfaite.

L'identification est réalisée par les conditions suivantes : $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ pour tout point x de E et α est l'application de ρ-adhérence.

En effet, d'une part, la condition $\mathcal{V}(x) \subset \rho_0(x)$ et le fait qu'une E-application ponctuelle est déterminée par sa restriction à E , montre que la condition $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ réalise l'identification des structures 1 et 3 . D'autre part, puisque l'ensemble $\mathcal{A}'$ est l'ensemble des applications de pré-adhérence, d'après le lemme 4.1, la condition : α est l'application de ρ-adhérence, réalise l'identification des structures 2 et 3 .

Structures topologiques et structures d'adhérence. - Une structure topologique ou topologie sur un ensemble E est déterminée par la donnée en tout point x de E d'un ensemble $\mathcal{V}(x)$ de parties de E vérifiant les axiomes des voisinages (V_1) (V_2) (V_3) (V_4).

Une structure d'adhérence sur un ensemble E est déterminée par la donnée d'une application α de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes (FT_1), (FT_2), (FT_3), (FT_4) des fermetures topologiques : c'est donc une structure de pré-adhérence idempotente.

PROPOSITION 4.1. - Soit ρ une E-application engendrée par un système $\mathcal{O}$. Pour que ρ soit ponctuelle, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ vérifie l'axiome (O_3). Pour que ρ soit $\cap$-semi-parfaite, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ vérifie l'axiome (O_2). En particulier, pour que ρ soit ponctuelle et $\cap$-semi-parfaite, il faut et il suffit que le système $\mathcal{O}$ vérifie les axiomes des ouverts (O_1), (O_2), (O_3).

En effet, la nécessité de ces conditions résulte de l'application des définitions à des familles constituées d'éléments du système et il est immédiat qu'elles sont suffisantes.

PROPOSITION 4.2. - Pour qu'une E-application ponctuelle ρ soit idempotente, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes:

a. La E-application ponctuelle ρ est engendrée par un système $\mathcal{O}$ [qui vérifie alors l'axiome (O_3)].

b. L'application α de ρ-adhérence est idempotente : $\alpha^2 = \alpha$.

c. L'application β de ρ-adhérence est idempotente : $\beta^2 = \beta$.

d. L'application γ de ρ-éloignement vérifie : $\gamma \circ c \circ \gamma = \gamma$.

e. La famille des ensembles $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ vérifie l'axiome (V_4).

L'équivalence des conditions (b), (c), (d), résulte des formules $\alpha = c \circ \beta \circ c$ et $\gamma = \beta \circ c$.

Si ρ est une E-application ponctuelle, d'après la proposition 3.4, pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que $Y \in \rho(X)$ admet un plus grand élément $\beta(Y)$, ce qui montre que la condition (b) de la proposition 1.4 est satisfaite. Il en résulte : $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_I$ et la proposition 1.4 entraîne la condition (a) de la proposition 4.2.

Pour une E-application ponctuelle ρ , les conditions $Y \in \rho(X)$ et $X \subset \beta(Y)$ sont équivalentes. Si β est idempotente, la condition $Y \in \rho(X)$ équivalente à : $X \subset \beta(Y) = \beta^2(Y)$ implique l'existence de l'élément $Z = \beta(Y)$ vérifiant $X \subset \beta(Z)$ et $Z \subset \beta(Y)$ c'est-à-dire $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$, ce qui montre que ρ est idempotente. Réciproquement, si ρ est idempotente, la relation $X = \beta(Y)$ implique $Y \in \rho(X) = \rho^2(X)$ qui implique l'existence d'un élément $Z \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$ c'est-à-dire : $X \subset \beta(Z)$ et $Z \subset \beta(Y)$. Ces relations entraînent $X \subset \beta(Z) \subset Z \subset \beta(Y) = X$ qui implique $X = \beta(Z)$ et $Z = \beta(Y)$ d'où résulte $X = \beta^2(Y)$ c'est-à-dire $\beta = \beta^2$. Ce résultat démontre la condition (c).

Si ρ est une application ponctuelle idempotente, la condition (a) montre qu'elle est engendrée par un système ce qui entraîne immédiatement que la famille des ensembles $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ vérifie l'axiome (V_4). Réciproquement, si la famille des ensembles $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ vérifie l'axiome (V_4), la relation $Y \in \rho(X)$ équivalente à $Y \in \rho(x)$ pour tout $x \in X$ implique l'existence d'une famille $\{Z_x\}_{x\in X}$ de parties de E telle que $Y \in \rho(y)$ pour tout $y \in Z_x$ et $Z_x \in \rho(x)$. En posant $Z = \bigcup_{x\in X} Z_x$, il en résulte $Y \in \rho(y)$ pour tout $y \in Z$ et $Z \in \rho(x)$ pour tout $x \in X$, ce qui implique $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$. Ainsi la condition $Y \in \rho(X)$ implique l'existence de $Z \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$: la E-application ρ est donc idempotente. Ce résultat démontre la condition (e).

Soient $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$ les sous-ensembles des ensembles $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ caractérisés respectivement par les conditions (b), (c), (d) de la proposition 4.2.

LEMME 4.2. - <u>Il existe des bijections canoniques entre les ensembles</u> $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, <u>l'ensemble des</u> E-<u>applications ponctuelles</u> $\cap$-<u>semi-parfaites idempotentes, l'ensemble des systèmes d'ouverts</u> $\mathcal{O}$ <u>vérifiant les axiomes</u> (O_1), (O_2), (O_3) <u>et l'ensemble des familles</u> $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in E}$ <u>d'ensembles de parties de</u> E <u>vérifiant les axiomes des voisinages</u> (V_1), (V_2), (V_3), (V_4).

La première partie résulte du lemme 4.1 et des conditions (b), (c), (d) de la proposition 4.2. La seconde partie résulte de la proposition 4.1, des conditions (a) et (e) de la proposition 4.2 et du fait que les axiomes (V_1) (V_2) (V_3) signifient que les $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ sont des filtres vérifiant $\mathcal{V}(x) \subset \rho_0(x)$.

THÉORÈME 4.2. - <u>Il y a identité des structures suivantes</u> :

a. Les structures topologiques déterminées par la donnée de l'un des éléments équivalents suivants :

1° Une famille $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in E}$ d'ensembles de parties de E vérifiant les axiomes des voisinages (V_1) (V_2) (V_3) (V_4).

2° Une famille $\mathcal{O}$ vérifiant les axiomes des ouverts (O_1) (O_2) (O_3) [ou une famille $\mathcal{F}$ vérifiant les axiomes des fermés (F_1) (F_2) (F_3)].

3° Une application α d'adhérence ou de fermeture topologique vérifiant les axiomes (FT_1) (FT_2) (FT_3) (FT_4) [ou une application β d'ouverture topologique vérifiant les axiomes (OT_1) (OT_2) (OT_3) (OT_4)].

b. Les structures simples ponctuelles $\cap$-semi-parfaites idempotentes déterminées par une E-application ponctuelle ρ $\cap$-semi-parfaite idempotente.

L'identification est réalisée par les conditions suivantes : $\mathcal{V}(x) = \rho(x)$ pour tout point x de E, le système $\mathcal{O}$ engendre ρ et $\mathcal{F} = c_1(\mathcal{O})$, α est l'application de ρ-adhérence et β est l'application de ρ-ouverture.

Ce résultat découle immédiatement du lemme 4.2 et des conditions qui caractérisent les bijections canoniques.

Remarque. - Soit ρ une E-application ponctuelle et soit ρ' une E-application ponctuelle engendrée par un système σ' et vérifiant : $\rho' \subset \rho$. La condition $X \in \sigma'$ équivalente à $\rho_0(X) = \rho'(X)$ implique $\rho_0(X) = \rho(X)$, c'est-à-dire $X \in \sigma_1$ avec la terminologie de la proposition 1.2. Il en résulte $\sigma' \subset \sigma_1$ qui implique $\rho' \subset \rho_1$. Ainsi la E-application ρ_1 est donc la plus fine des E-applications ponctuelles engendrées par un système et moins fines que ρ. D'après la condition (a) de la proposition 4.2, c'est aussi la plus fine des E-applications ponctuelles idempotentes moins fines que ρ. De plus, il est immédiat que le système σ_1 est l'ensemble des parties ρ-ouvertes, solutions de l'équation $X = \beta(X)$. Si ρ est en plus $\cap$-semi-parfaite, l'ensemble σ_1 des parties ρ-ouvertes vérifie les axiomes des ouverts et engendre la E-application ponctuelle $\cap$-semi-parfaite idempotente ρ_1 qui est la plus fine des E-applications ponctuelles $\cap$-semi-parfaites idempotentes moins fines que ρ. Ainsi, avec les notations de la proposition 1.2, si une pré-topologie (S) est déterminée par une E-application ρ, la E-application ρ_1 détermine la topologie associée (S_1) qui est la plus fine des topologies moins fines que (S).

Structures de proximité et structures de proximité faible. - Une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine sont dites semi-parfaites [resp. parfaites] si elles sont à la fois $\cap$- et $\cup$-semi-parfaites [resp. $\cap$- et $\cup$-parfaites].

LEMME 4.3. - Pour qu'une E-application ρ et la ρ-structure qu'elle détermine soient symétriques et semi-parfaites, il faut et il suffit que la relation de proximité associée soit une relation binaire δ sur $\mathcal{P}(E)$ [de négation $\overline{\delta}$] vérifiant les conditions suivantes :

1° $Y \,\delta\, X$ implique $X \,\delta\, Y$.

2° $(Y_1 \cup Y_2) \,\delta\, X$ est équivalent à : $Y_1 \,\delta\, X$ ou $Y_2 \,\delta\, X$. [Identique à : $(Y_1 \cup Y_2) \,\overline{\delta}\, X$ est équivalent à $Y_1 \,\overline{\delta}\, X$ et $Y_2 \,\overline{\delta}\, X$.]

3° $x \,\delta\, x$ pour tout $x \in E$.

4° $Y \,\overline{\delta}\, \emptyset$ pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$.

En outre pour qu'une E-application ρ symétrique et la ρ-structure symétrique qu'elle détermine soient idempotentes, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition suivante :

5° Deux parties Y et X de E ρ-éloignées $[Y \,\overline{\delta}\, X]$ admettent des ρ-voisinages U_Y et V_X disjoints.

La condition 1 exprime la symétrie de la relation δ.

Compte tenu de la symétrie, la condition 2 est équivalente à la conjonction de l'axiome (E_3') et des conditions (b) des propositions 3.1 et 3.3 qui expriment des conditions nécessaires et suffisantes pour que δ soit associée à une E relation $\cap$-semi-parfaite et $\cup$-semi-parfaite. La condition 3 est équivalente à l'axiome (E_2') dès qu'un axiome équivalent à l'axiome (E_3') est vérifié. Enfin, compte tenu de la symétrie, la condition 4 est équivalente à l'axiome (E_1').

Soient ρ une E-application symétrique et δ la relation de proximité symétrique associée. Si la E-application ρ est idempotente, la relation $Y \,\overline{\delta}\, X$ équivalente à $c(Y) \in \rho(X)$ implique l'existence d'un élément $Z \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $c(Y) \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$. Ces conditions impliquent $c(Z) \in \rho(Y)$ et $Z \in \rho(X)$, ce qui montre que la condition 5 est vérifiée en posant : $U_Y = c(Z)$ et $V_X = Z$. Réciproquement, si la condition est vérifiée, la relation $Y \in \rho(X)$ équivalente à $c(Y) \,\overline{\delta}\, X$ implique l'existence d'éléments U et V de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant, $U \in \rho[c(Y)]$, $V \in \rho(X)$ et $U \cap V = \emptyset$. La relation $U \in \rho[c(Y)]$ entraîne $c(U) \,\overline{\delta}\, c(Y)$ et

$c(Y)\ \bar{\delta}\ c(U)$ c'est-à-dire $Y \in \rho[c(U)]$, avec $c(U) \supset V$. En posant $Z = V$, il en résulte $Y \in \rho(Z)$ et $Z \in \rho(X)$, ce qui montre que la E-application ρ est idempotente. Ce résultat démontre donc la dernière affirmation.

EFRĔMOVIČ et Yu. M. SMIRNOV [2] ont défini et étudié des "Espaces de proximité" dont la structure est déterminée par la donnée d'une relation binaire δ sur $\mathcal{P}(E)$ vérifiant un système d'axiomes équivalent aux conditions 1, 2, 3, 4 du lemme 4.3 et à l'une des conditions suivantes :

5'. Si $Y\ \bar{\delta}\ X$, il existe deux parties Y' et X' de E vérifiant :

$$Y\ \bar{\delta}\ Y' , \qquad X\ \bar{\delta}\ X' , \qquad Y' \cup X' = E \quad .$$

5". Si $Y\ \bar{\delta}\ X$, il existe deux parties U de V de E vérifiant :

$$Y\ \bar{\delta}\ (E - U) , \qquad X\ \bar{\delta}\ (E - V) , \qquad U \cap V = \emptyset \quad .$$

Ces deux conditions sont naturellement équivalentes en posant $Y' = (E - U)$ et $X' = (E - V)$. Ces auteurs envisagent également les structures pour lesquelles la condition 3 du lemme 4.3 est remplacée par la condition suivante qui exprime une propriété de séparation :

3'. Pour tout $y \in E$ et tout $x \in E$, la relation $y\ \delta\ x$ est équivalente à $y = x$.

THÉORÈME 4.3. - <u>Il y a identité des structures suivantes</u> :

a. <u>Les structures de proximité au sens de EFRĔMOVIČ ou de Yu. M. SMIRNOV déterminées par une relation binaire</u> δ <u>sur</u> $\mathcal{P}(E)$ <u>vérifiant les axiomes des "Espaces de proximité"</u>.

b. <u>Les structures simples symétriques semi-parfaites idempotentes déterminées par une</u> E-<u>application</u> ρ <u>symétrique semi-parfaite idempotente</u>.

<u>L'identification est réalisée par la condition</u> : δ <u>est la relation de proximité associée à la</u> E-<u>application</u> ρ .

Ce résultat découle immédiatement du lemme 4.3 et de l'équivalence des conditions 5, 5' et 5" qui résulte de la définition de la relation de proximité δ associée à une ρ-structure.

DÉFINITION 4.1. - Une structure de proximité faible est une structure simple déterminée par une E-application ρ symétrique et semi-parfaite.

Cette définition est justifiée par le lemme 4.3 qui montre qu'une structure de proximité est une structure de proximité faible idempotente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Nouvelle série, t. 23, 1947-1948, p. 57-112.

[2] SMIRNOV (Ju. M.). - O prostranstvakh blizosti, Mat. Sbornik, Nouvelle série, t. 31, 1952, p. 543-574.