Paul Krée

Frontière de Šilov, d'après H. Bauer

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. nº 3 bis, p. 9-20
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A4_0>

FRONTIÈRE DE ŠILOV, D'APRÈS H. BAUER

par Paul KRÉE

Pour tout compact X , on connaît l'existence de la frontière de Šilov pour :

- un espace vectoriel de fonctions numériques continues, séparant les points de X ;

- une algèbre de fonctions continues à valeurs complexes séparant les points de X .

Par rapport à ces théorèmes, l'intérêt des travaux de H. BAUER est qu'ils prouvent l'existence de la frontière de Šilov pour un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions numériques définies sur un espace compact X en supposant seulement que $\mathcal{E}$ sépare les points de X , qu'il est stable par addition, que les fonctions de $\mathcal{E}$ sont semi-continues inférieurement et ne prennent pas la valeur $-\infty$. Il en déduit aussitôt l'existence de la frontière de Šilov pour une algèbre séparante de fonctions continues f à valeurs dans une algèbre normée B où l'on aurait, pour tout couple (x , y) d'éléments de B :

$$|xy| = |x|.|y| \qquad .$$

(En effet : il suffit de considérer les fonctions numériques $x \to -\operatorname{Log}|f(x)|$.)

Notations.

- Sauf avis contraire les fonctions considérées sont définies sur un compact X (le même pour tout l'exposé).

- N désignant un certain espace normé $(N = \underset{\sim}{R} , \underset{\sim}{C} , \ldots)$, $\mathcal{C}(X , N)$ désigne l'espace des fonctions continues définies sur X , à valeurs dans N , avec la topologie de la convergence uniforme.

- Pour toute g de $\mathcal{C}(X , N)$ et tout sous-compact S de X , g_S désigne la restriction de g à S .

- $\mathcal{K}(X)$ désigne la famille des sous-compacts de X .

- L'expression "fonction numérique f , s. c. i., $> -\infty$ " désigne une fonction numérique f définie sur X , semi-continue inférieurement, prenant éventuellement la valeur $+\infty$, mais pas $-\infty$.

- Si $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, ensemble des mesures de Radon sur X , $S\mu$ désigne le support de μ .

- $\mathfrak{M}_1^+(X)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon sur X , qui sont positives, et de masse totale $+1$.

- Pour toute fonction numérique f , au moins s. c. i., $> -\infty$, $S(f)$ désignera le sous-compact de X où f atteint son minimum.

1. Principe du minimum de Bauer.

1.1. Définition d'une application multivoque Φ .

Φ fait correspondre à tout x de X une famille Φx non vide, de compacts non vides de X

(1)
$$\begin{aligned} \Phi : X &\to \mathcal{K}(X) \\ x &\to \Phi x \end{aligned} .$$

Un compact E de X est dit " Φ-extrémal" si :

Pour tout x de E , et tout compact K de Φx , on a $K \in \Phi x$.

L'ensemble ordonné par inclusion de ces compacts Φ-extrémaux est inductif vers le bas. D'où l'existence de compacts Φ-extrémaux minimaux.

Par exemple, un point x est Φ-extrémal si

$$\Phi x = \{x\} .$$

Un tel point est évidemment Φ-extrémal minimal.

1.2. Famille $\mathcal{F}_\Phi$ de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$.

Φ étant donnée, on pose

(2)
$$\mathcal{F}_\Phi = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ numérique s. c. i.}, > -\infty \\ \left.\begin{array}{l} \forall\ x ,\ \forall\ K ,\ K \in \Phi x \\ f(x) \leq f(y) ,\ \forall\ y ,\ y \in K \end{array}\right) \Longrightarrow f(x) = f(y) ,\ \forall\ y,\ y \in K \end{array} \right\}$$

On voit que $\forall\ f$, $f \in \mathcal{F}_\Phi$, Sf est Φ-extrémal ; en effet, les relations

$$x \in S(f)$$

$$K \in \Phi x$$

impliquent-elles $K \subset S(f)$ (et ceci pour tout x de $S(f)$, et tout K dans Φx) ? Oui, car :

$$x \in S(f) \implies f(x) \leqslant f(y) \,, \quad \forall\, y \,,\; y \in K \quad .$$

Mais

$$f \in \mathfrak{F}(\Phi) \implies f(x) = f(y) \,, \quad \forall\, y \,,\; y \in K \quad ,$$

c'est donc que $\forall\, y$, $y \in K$, $y \in S(f)$, soit $K \subset S(f)$.

1.3. Théorème de Bauer.

Se donnant l'application Φ définie par (1) et lui associant $\mathfrak{F}_\Phi$ telle que (2), si les fonctions de $\mathfrak{F}_\Phi$ séparent les points de X non extrémaux, alors il existe de tels points Φ-extrémaux et toute fonction f de $\mathfrak{F}_\Phi$ atteint son minimum en au moins un point Φ-extrémal.

Preuve. - Comme $S(f)$ est Φ-extrémal, et que tout compact Φ-extrémal contient un compact Φ-extrémal minimal, il suffit de prouver que "Tout compact Φ-extrémal minimal M est un point de X ".

Sinon, M contient 2 points non Φ-extrémaux ; donc $\exists\, h$, $h \in \mathfrak{F}_\Phi$, qui sépare ces 2 points ; h_M n'est donc pas constante.

Soit M' le sous-compact de M où h_M atteint son minimum (relativement à M). M' serait Φ-extrémal, en effet :

$$\forall\, x \,,\; x \in M \,,\; \forall\, K \,,\; K \in \Phi x \,,\; K \subset M \quad ;$$

donc on peut raisonner sur l'application multivoque Φ_M restreinte à M comme tout à l'heure sur Φ ; en effet :

$$\forall\, x \,,\; x \in M' \,,\; h(x) \leqslant h(y) \,,\; \forall\, y \,,\; y \in K$$
$$\implies h(x) = h(y) \,,\; \forall\, y \,,\; y \in K$$

d'où

$$K \subset M' \quad ;$$

M' serait Φ-extrémal, ce qui est impossible.

2. Application du théorème de Bauer à la frontière de Choquet.

Donnons-nous $\mathcal{E}$, ensemble de fonctions numériques, définies sur X, s. c. i., $> -\infty$ séparant les points de X.

Pour tout x de X , on pose

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) = \{\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_1^+(X) \ ; \ \forall \ u \ , u \in \mathcal{E} \ , \ \int^* u \, d\mu \leqslant u(x)\} \quad .$$

Cet ensemble est non vide, car il contient ε_x .

2.1. Définition de l'application multivoque Φ .

Elle associe à tout x de X , la famille des supports des mesures de $\mathcal{M}_x(\mathcal{E})$.

Un sous-compact S de X est dit $\mathcal{E}$-extrémal s'il est Φ-extrémal (au sens du n° 1.1). On définit de même les compacts $\mathcal{E}$-extrémaux minimaux.

Un point x , $\mathcal{E}$-extrémal, est caractérisé par $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) = \{\varepsilon_x\}$. L'ensemble des points $\mathcal{E}$-extrémaux est appelé la frontière de Choquet de X relativement à $\mathcal{E}$. On la note $\partial_{\mathcal{E}}(X)$.

2.2. Étude de l'ensemble $\mathcal{F}_\Phi$.

$\mathcal{F}_\Phi$ est définie comme au n° 1.2. Nous montrerons seulement $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_\Phi$.

A cet effet, $\forall$ f , $f \in \mathcal{E}$, il faut prouver :

$$\forall \ x \ , \ x \in X \ , \ \forall \ \mu \ , \ \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E}) \quad ,$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \leqslant f(y) \ , \ \forall \ y \ , \ y \in S\mu \\ \int^* f \, d\mu \leqslant f(x) \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} f(x) = f(y) \\ \forall \ y \ , \ y \in S\mu \end{array} \quad .$$

Remarquons que si $\int^* f \, d\mu = \infty$ la proposition est démontrée, car on a

$$\forall \ y \ , \ y \in S\mu \ , \ f(x) = f(y) = \infty \quad .$$

Supposons donc que

$$\int^* f \, d\mu = \int f \, d\mu$$

est fini. On ne peut avoir

$$\forall \ y \ , \ y \in S\mu \ , \ f(y) > f(x)$$

car alors

$$\int^* f \, d\mu > f(x) \quad .$$

Sur $M' = S(f_{S\mu})$ = lieu des minimums de f restreinte à $S\mu$, on a donc

$$f = f(x) \quad .$$

Si la proposition à démontrer était fausse, $M' \not\subset S\mu$ et il existerait z dans $S\mu \setminus M'$ où $f(z) > f(x)$.

$S\mu$ étant normal, il existe un ouvert $V(z)$ contenant z , disjoint de M' , f étant s. c. i., on peut supposer que sur cet ouvert $f \geqslant f(x) + \varepsilon$. Si φ est la fonction caractéristique de $V(z) \cap S\mu$, on a sur $S\mu$

$$f \geqslant f(x) + \varepsilon\, \varphi$$

d'où

$$\int f \, d\mu > f(x) \int d\mu = f(x)$$

d'où contradiction.

2.3. Théorème.

Donnons-nous $\mathcal{E}$, ensemble de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$ séparant les points de X . Appliquant le théorème du n° 1.3 à l'application multivoque définie au n° 2.1, et en utilisant l'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_\Phi$ démontrée au n° 2.2, on obtient :

Soient X un espace compact non vide, $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$ séparant les points de X .

Alors : la frontière de Choquet de X relativement à $\mathcal{E}$ existe (frontière définie au n° 2.1) et toute fonction f de $\mathcal{E}$ atteint son minimum en au moins un point de cette frontière.

3. Frontière de Šilov.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$.

3.1. Définition de la frontière de Šilov relativement à $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ l'ensemble des sous-compacts de X "portant les minimums des fonctions de $\mathcal{E}$ " . Plus précisémment :

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \{S \mid S \in \mathcal{K}(X) \;;\; \forall\ f \;;\; f \in \mathcal{E}\,,\ \ Sf \cap S \neq \Phi\} ,$$

$\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est ordonné par inclusion et inductif vers le bas. Il existe des compacts minimaux. S'il y en a un seul, on dit que c'est la frontière de Šilov $\delta_{\mathcal{E}}(X)$ de X relativement à $\mathcal{E}$ (et que cette frontière existe).

3.2. Théorème.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$ séparant les points de X, et stable par addition ($\forall$ u et v, éléments de $\mathcal{E}$, $u + v \in \mathcal{E}$). Alors la frontière de Šilov (relativement à $\mathcal{E}$) existe et c'est l'adhérence de la frontière de Choquet

$$\delta_{\mathcal{E}}(X) = \overline{\partial_{\mathcal{E}}(X)} \quad .$$

Preuve. - Le théorème du n° 2.3 prouve l'existence de $\partial_{\mathcal{E}}(X)$ et que toute fonction de $\mathcal{E}$ y atteint son minimum en module. Il suffit donc de prouver que : "tout compact S de X, portant les minimums des fonctions de $\mathcal{E}$, contient tout point de la frontière de Choquet $\partial_{\mathcal{E}}(X)$. C'est-à-dire, en utilisant la définition de ces points (n° 2.1), que :

$$\forall\ x\ ,\quad x \in X \setminus S\ ,\quad \exists\ \mu\ ,\quad \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E}) \quad \text{avec} \quad S\mu \subset S$$

(car alors, cela implique $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) \neq \{\varepsilon_x\}$).

C'est une conséquence du lemme suivant.

3.3. Lemme.

$\mathcal{E}$ est un ensemble de fonctions numériques s. c. i., $> -\infty$ stable par addition ($\mathcal{E} + \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$) et séparant les points de X. Soit S un compact de X où toute fonction de $\mathcal{E}$ atteint son minimum.

Alors, pour tout point x de X, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$ (c'est-à-dire $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$, et $\forall\ f\ ,\ f \in \mathcal{E}\ ,\ \int f\, d\mu \leqslant f(x)$) dont le support $S\mu$ est inclus dans S.

Preuve. - Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble formé par la réunion :

- de toutes les fonctions constantes sur X,

- de toutes les translatées des fonctions de $\mathcal{E}$ (donc de la forme $f + k$, où $f \in \mathcal{E}$, $k \in \underset{\sim}{R}$).

Pour construire μ, cherchons d'abord une mesure sur S. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}(S\ ,\ \underset{\sim}{R})$ posons :

$$(3) \qquad p(f) = \inf_{\substack{v \in \mathcal{E} \\ v_S \geq f}} v(x) \quad .$$

De $\mathcal{E} + \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, il découle que $\mathcal{E}' + \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$ puisque, g étant une 2e fonction de $\mathcal{C}(S\ ,\ \underset{\sim}{R})$,

(4) $$p(f + g) \leqslant p(f) + p(g) \quad .$$

Pour tout f de $\mathcal{C}(S, \underset{\sim}{R})$

(5) $$|p(f)| \leqslant \infty \quad .$$

Si f appartient à $Q(S, \underset{\sim}{R})$, ensemble des fonctions numériques constantes sur S et si $f = q$, où $q \in \underset{\sim}{R}$, on a

(6) $$p(f) = q \quad .$$

(C'est une conséquence de (3) et du fait que S porte les minimums de toutes les fonctions de $\mathcal{E}$.)

Les relations (4), (5) et (6) prouvent que, dans le groupe abélien additif $\mathcal{C}(S, \underset{\sim}{R})$, p est une forme finie, sous-additive, mais qui est additive sur le sous-groupe $Q(S, \underset{\sim}{R})$.

D'après un théorème de Aumann (n° 3.4), il existe un prolongement ν au grand groupe de la forme p additive sur le sous-groupe, ν étant additive et $\leqslant p$.

ν est croissante car si f dans $\mathcal{C}(S, \underset{\sim}{R})$ est $\geqslant 0$ ceci implique

$$-\nu(f) = \nu(-f) \leqslant p(-f) \leqslant 0$$

et

$$\nu(f) \geqslant 0 \quad .$$

Donc ν est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(S, \underset{\sim}{R})$ donc une mesure.

La mesure μ cherchée est l'image de ν par l'injection $S \to X$ c'est-à-dire la mesure μ , telle que, pour toute g de $\mathcal{C}(X, \underset{\sim}{R})$, on a

$$\int g \, d\mu = \int g_S \, d\nu \quad .$$

En effet :

$$S\mu \subset S$$

$$\int d\mu = \int d\nu = 1 \quad .$$

Pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, on a :

$$\int^* u \, d\mu = \sup_{\substack{g \leqslant u \\ g \in \mathcal{C}(X,\underset{\sim}{R})}} \int g \, d\mu = \sup_{\substack{g \leqslant u \\ g \in \mathcal{C}(X,\underset{\sim}{R})}} \int g_S \, d\nu = \sup_{\substack{g \leqslant u \\ g \in \mathcal{C}(X,\underset{\sim}{R})}} \nu(g_S) \leqslant \sup_{\substack{g \leqslant u \\ g \in \mathcal{C}(X,\underset{\sim}{R})}} p(g_S) \quad ;$$

donc d'après (3)

$$\int^* u \, d\mu \leqslant u(x) \quad .$$

3.4. Théorème de Aumann.

Soit G un groupe abélien et p une forme sous-additive sur G

$$p : G \to \mathbb{R} \qquad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$
$$x \to p(x) \qquad p(0) = 0 \quad .$$

Soit H_0 un sous-groupe de G et ν_0 une forme additive sur H

$$\nu_0 : H \to \mathbb{R} \qquad \nu_0(x+y) = \nu_0(x) + \nu_0(y) \quad .$$

On suppose que pour tout x de H_0

$$\nu_0(x) \leqslant p(x) \quad .$$

Alors, il existe un prolongement de ν_0 en une forme additive ν sur tout G, avec

$$\nu(x) \leqslant p(x)$$

pour tout x dans G.

Preuve (d'après MOKOBODSKI). - On considère les couples (ν_i , H_i), où ν_i est une forme additive sur le sous-groupe H_i de G avec $\nu_i \leqslant p$. Et on ordonne ces couples :

$$(\nu_i , H_i) \prec (\nu_j , H_j) \quad \text{si} \quad H_i \subset H_j \quad \text{et} \quad \nu_j \quad \text{prolonge} \quad \nu_i \quad .$$

L'ensemble des couples (ν_i , H_i) qui sont tels que $(\nu_0 , H_0) \prec (\nu_i , H_i)$ est inductif à droite.

Soit (ν , H) un couple maximal de cet ensemble. Montrons par l'absurde que $H = G$.

Sinon, on peut prendre $a \in H \setminus G$.

Montrons qu'on peut trouver un prolongement ν' de ν au sous-groupe H' des éléments de G qui sont de la forme :

$$x + na \quad \text{ou} \quad x - ma$$

(où x décrit H et où n et m sont deux entiers positifs). On doit poser

$$\nu'(x+na) = \nu(x) + n\nu'(a)$$
$$\nu'(x-ma) = \nu(x) - m\nu'(a) \quad .$$

Dire que sur H' , $\nu' \leqslant p$, c'est dire que quels que soient les entiers positifs m et n , on a :

$$\frac{\nu(x) - p(x - ma)}{m} \leqslant \nu'(a) \leqslant \frac{p(x + na) - \nu(x)}{n} \quad .$$

- Dans le cas où aucun des éléments na ou $-ma$ ne vient dans H, il suffit de prouver que dans cette relation le premier membre est toujours inférieur au troisième (quels que soient m et n), ce qui permettra de choisir $\nu'(a)$ dans la "fourchette" ainsi déterminée.

A-t-on donc $(m + n)\ \nu(x) \leqslant m\ p(x + na) + n\ p(x - ma)$? Oui car $(m + n)\ x = m(x + na) + n(x - ma)$.

- Dans le cas contraire, k étant le plus petit entier positif tel que $na \in H$, puisque ν' prolonge ν , il faut poser

$$\nu'(a) = \frac{\nu(ka)}{k} \quad ,$$

et le prolongement n'est possible que si l'on a :

$$\frac{\nu(x) - p(x - ma)}{m} \leqslant \frac{\nu(ka)}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\nu(ka)}{k} \leqslant \frac{p(x + na) - \nu(x)}{n} \quad .$$

Relations qui s'écrivent :

$$k\nu(x) - m\nu(ka) \leqslant p(x - ma) \quad \text{pour tout } m$$

$$n\nu(ka) + k\nu(x) \leqslant p(x + na) \quad \text{pour tout } n \quad ,$$

et qui se vérifient directement.

4. Frontière de Šilov pour certaines algèbres de fonctions.

4.1. Fonctions à valeurs dans certaines algèbres normées B .

On suppose que pour tout couple (x , y) d'éléments de B , on a :

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad .$$

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X , B)$ qui sépare les points de X . On lui associe la famille $\mathcal{E}$ de fonctions numériques, s. c. i., $> -\infty$

$$\mathcal{E} = \{ -\mathrm{Log}(f) \mid f \in \mathfrak{A}\} \quad .$$

Alors la frontière de Šilov $\delta_{\mathfrak{A}}(X)$ existe (plus petit compact de X où toute f de $\mathfrak{A}$ atteint $\|f\|$ en module). Avec les notations du § 3, on a encore

$$\delta_{\mathfrak{A}}(X) = \overline{\delta_{\mathcal{E}}(X)} \quad .$$

Preuve. - On a $\delta_{\mathfrak{A}}(X) = \delta_{\mathcal{E}}(X)$: monotonie de la fonction log

$\mathcal{E} + \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$: puisque $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$.

$\mathcal{E}$ sépare les points de X

(en effet : quels que soient x et y distincts dans X , il existe f dans $\mathfrak{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors, si $|f(x)| \neq |f(y)|$, $-\operatorname{Log}|f|$ convient ; sinon, prendre $-\operatorname{Log}|f - f^2/f(x)|$. La conclusion résulte alors du théorème du § 3).

4.2. Fonctions à valeurs complexes.

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X , \mathbb{C})$ séparant les points de X

$$\mathcal{H} = \{\operatorname{Re} f \mid f \in \mathfrak{A}\} \quad .$$

Dans ces conditions on a :

$$\delta_{\mathfrak{A}}(X) = \overline{\delta_{\mathcal{E}}(X)} = \overline{\delta_{\mathcal{H}}(X)} \quad .$$

Preuve. - Le théorème du § 4.1 prouve l'égalité des deux premiers membres de cette relation. Comme on s'en aperçoit en reprenant la définition de la frontière de Choquet, les deux derniers membres ne changent pas lorsqu'on remplace $\mathfrak{A}$ par son adhérence dans $\mathcal{C}(X , \mathbb{C})$.

Supposant $\mathfrak{A}$ fermée, a-t-on $\overline{\delta_{\mathcal{E}}(X)} = \overline{\delta_{\mathcal{H}}(X)}$?

Remarquons d'abord que, quelle que soit f dans $\mathfrak{A}$, e^{-f} est dans $\mathfrak{A}$, donc

$$\operatorname{Re} f = -\log|e^{-f}| \text{ est dans } \mathcal{E} \quad .$$

Donc

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{E} \quad .$$

Reprenant la définition de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$, on voit que ceci implique pour tout x de X

$$\mathfrak{M}_x(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{H}) \quad .$$

La réduction à $\mathcal{E}_x$ du membre de droite implique la même réduction du membre de gauche :

$$\partial_{\mathcal{H}}(X) \subset \partial_{\mathcal{E}}(X) \quad .$$

Comparant cette relation à la relation à démontrer, on voit qu'il suffit de démontrer que toute fonction de $\mathfrak{A}$ atteint son maximum en module sur $\partial_{\mathcal{H}}(X)$.

Or f étant quelconque dans $\mathfrak{A}$, supposons qu'on ait pour un point x de X

$$f(x) = \|f\| \, e^{i\theta} \quad .$$

Alors la fonction $\mathrm{Re}(e^{i(\pi-\theta)} f)$ atteint son minimum en x .

D'après le théorème du § 3, parmi tous les y de X tels que $f(y) = f(x)$, il en existe un dans $\partial_{\mathcal{H}}(X)$.

5. Remarque de G. CHOQUET.

Dans le cas où B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X , \mathbb{R})$ et où B sépare les points de X , on peut montrer ainsi l'existence de la frontière de Šilov $\delta_B(X)$.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base (algébrique) de B .

On plonge X dans l'espace vectoriel topologique faible $\mathbb{R}^I$ par l'application

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^I$$

$$x \to (f_i(x))_{i\in I} \quad .$$

φ est continue (puisque chaque application $x \to f_i(x)$ l'est) et injective (puisque B sépare les points de X).

L'application bijective du compact X sur $\varphi(X)$ est une homéomorphie. D'autre part, il y a identité entre les fonctions de B définies sur X (de la forme $\sum \alpha_i f_i$) et les traces sur $\varphi(X)$ des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel faible $\mathbb{R}^I$.

Il est donc équivalent d'étudier

$$\delta_B(X) \quad \text{ou} \quad \delta_{B'}(\varphi(X))$$

où B' = ensemble des restrictions à X des formes linéaires continues de $\mathbb{R}^I$.

Soit $Y = \overline{c(\varphi(X))}$ = enveloppe convexe fermée de $\varphi(X)$. Y est compact puisque $\mathbb{R}^I$ est complet.

On sait que l'ensemble Z des points extrémaux de Y (forts d'ailleurs) appartient à $\varphi(X)$.

On sait aussi que tout hyperplan d'appui de Y, d'équation $f = k$ (où $f \in (\underset{\sim}{R}^I)'$ et $k \in \underset{\sim}{R}$) coupe Z.

Si $\overline{Z}$ désigne l'adhérence de Z relativement à $\varphi(Y)$ le raisonnement ci-dessus prouve que toute forme linéaire continue sur $\varphi(Y)$ atteint son extrémum sur $\overline{Z}$.

Réciproquement on montre par l'absurde que si un fermé F de $\varphi(Y)$ est tel que $F \subset G(B)$ alors F contient tout point extrémal de $\varphi(X)$, donc

$$\delta_{B'}(\varphi(X)) = \overline{Z}$$

et

$$\delta_B(X) = \varphi^{-1}(\overline{Z}) = \overline{\varphi^{-1}(Z)}$$

où Z = ensemble des points extrémaux de Y.

<u>Représentation intégrale.</u>

Si X est un compact métrisable, $\overline{c(\varphi(X))}$ l'est aussi :

$$\forall \quad a \in X \, , \quad \exists \quad \mu \in \mathfrak{M}_1^+(X) \, , \quad S\mu \subset B^*$$

$$\forall \ \ell : \quad \ell(a) = \int \ell(x) \, d\mu(x)$$

(d'après un théorème de représentation intégrale) d'où, revenant aux f :

$$\forall \quad f \in B \, , \quad f(a) = \int f(x) \, d\mu(x) \qquad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUMANN (G.). - Über die Erweiterung von additiven monotonen Funktionen auf regulär geordneten Halbgruppen, Arch. der Math., t. 8, 1957, p. 422-427.

[2] BAUER (Heinz). - Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 7, 23 pages.

[3] BAUER (Heinz). - Minimalstellen von Funktionen und extremal Punkte, Arch. der Math., t. 11, 1960, p. 200-205.

[4] BAUER (Heinz). - Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.