Gabriel Mokobodzki

**Principe de balayage, principe de domination**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 1 (1962), exp. n° 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A1_0>

# PRINCIPE DE BALAYAGE, PRINCIPE DE DOMINATION ([1])

par Gabriel MOKOBODZKI

## 1. Notations. Position du problème.

Soient $X$ un espace compact, $C$ un cône convexe de fonctions numériques continues sur $X$, et soit $H$ un compact de $X$.

1° On dit que $C$ satisfait au principe du balayage dans $H$ si, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur $X$, il existe une mesure $\nu \geqslant 0$ de support dans $H$, telle que

$$\int f\, d\nu \leqslant \int f\, d\mu \quad \text{pour toute} \quad f \in C \quad .$$

2° On dit que $C$ satisfait au principe de domination dans $H$ si les relations

$$(f \in C) \qquad (f(x) \geqslant 0\,, \ \forall \ x \in H) \ \text{ impliquent } \ (f(x) \geqslant 0\,, \ \forall \ x \in X)\,.$$

Le problème posé est le suivant :

Existe-t-il, pour un cône convexe $C$ donné, un plus petit compact $H$ tel que $C$ satisfasse aux principes de balayage et de domination dans $K$. Moyennant des hypothèses convenables sur $C$, ce problème admet une solution, et il y a équivalence entre les principes de domination et de balayage dans un compact $H$ donné.

Enfin, on peut se demander s'il existe un plus petit ensemble $\mathcal{E} \subset H$ tel qu'il existe, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur $X$, une mesure $\nu$ portée en un sens plus ou moins strict par l'ensemble $\mathcal{E}$, et telle que

$$\int f\, d\nu \leqslant \int f\, d\mu \quad \text{pour toute} \quad f \in C \quad .$$

([1]) Le présent exposé constitue la rédaction développée de :

MOKOBODZKI (Gabriel). - Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques sur un espace compact, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 803-805.

## 2. Préliminaires.

Soient $E$ un espace topologique séparé, $\leqslant$ une relation d'ordre sur $E$.

PROPOSITION 2.1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Le graphe de $\leqslant$ dans $E \times E$ est fermé.

2° Soient $x$, $y \in E$ si, pour tous voisinages $V$ et $W$ de $x$ et $y$ respectivement, il existe $x' \in V$ et $y' \in W$ tels que $x' \leqslant y'$, alors $x \leqslant y$.

3° L'application multivoque

$$x \rightsquigarrow A_x = \{y \; ; \; y \in E , \; y \leqslant x\}$$

est semi-continue supérieurement (définition équivalente au graphe fermé).

Si $\leqslant$ vérifie ces conditions, on dit qu'elle est compatible avec la topologie de $E$.

Définition. - Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques séparés. On dira q'une application multivoque $\varphi$ de $E$ dans $F$ est semi-continue supérieurement (s. c. s.) au sens fort si

1° pour tout $x \in E$, $\varphi(x)$ est un compact de $F$,

2° pour tout voisinage ouvert $W$ de $\varphi(x)$ dans $F$, il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$ dans $E$, tel que

$$(x' \in V) \Longrightarrow \varphi(x') \subset W \quad .$$

PROPOSITION 2.2. - Soient toujours $E$ et $F$ deux espaces topologiques séparés, $\varphi$ une application multivoque s. c. s. au sens fort et $f$ une fonction numérique s. c. s. (sens ordinaire) définie sur $F$. On pose

$$f \circ \varphi(x) = \sup_{y \in \varphi(x)} f(y) , \quad \forall \; x \in E \quad .$$

Alors $f \circ \varphi = h$ est s. c. s. sur $E$.

En effet, si $f \circ \varphi(x) < \lambda$, $\varphi(x)$ est contenu dans l'ouvert

$$W : \{y \; ; \; y \in F , \; f(y) < \lambda\} \quad ,$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 2.3. - Soit $\varphi$ une application multivoque s. c. s. de $E$ dans $F$. Si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage $V$ de $x$ et un compact $K$ de $F$, tels que

$$(x' \in V) \Longrightarrow (\varphi(x') \subset K)$$

alors $\varphi$ est semi-continue supérieurement au sens fort.

Démonstration.

a. La condition (1) est vérifiée, car $\varphi(x)$ est fermé dans un compact pour tout $x$.

b. Soit $W$ un voisinage ouvert de $\varphi(x)$ ; $\complement W \cap K$ est compact, donc fermé.

D'autre part, le graphe de $\varphi$ restreint à $V$ est fermé dans $V \times K$. Il résulte d'un théorème classique que l'ensemble des $y \in V$, tels que $\varphi(y) \cap (\complement W \cap K) \neq \emptyset$, est fermé dans $V$, et ne contient pas $x$.

Application. - Soient $E$ un espace topologique séparé, $\leqslant$ une relation d'ordre compatible avec la topologie de $E$.

Soit $A_x = \{y \; ; \; y \in E \; ; \; y \leqslant x\}$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage $V$ de $x$ et un compact $K \subset E$ tel que

$$(x' \in V) \Longrightarrow (A_{x'} \subset K) \quad .$$

PROPOSITION 2.4.

1° L'application $x \rightsquigarrow A_x$ est s. c. s. au sens fort.

2° Toute famille filtrante décroissante d'éléments de $E$ admet un élément minorant. Par suite, tout élément de $E$ est minoré par un élément minimal.

Soient maintenant $F$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, $C_1$, $C_2$ deux cônes convexes fermés de $F$.

PROPOSITION 2.5. - Si $C_1 \cap (-C_2) = \{0\}$ et si $C_2$ est à base compacte $B$, alors $C_1 + C_2$ est un cône convexe fermé.

Démonstration. - Soit $x \notin C_1 + C_2$ ; ceci s'écrit encore

$$(\lambda x - (1 - \lambda)B) \cap C_1 = \emptyset$$

pour $1 \geq \lambda > 0$ , et aussi pour $\lambda = 0$ , puisque $C_1 \cap (-C_2) = \{0\}$ .

Considérons le convexe compact $D = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (\lambda x - (1-\lambda) B)$ . On a $D \cap C_1 = \emptyset$ .

Il existe alors un voisinage convexe ouvert $V$ de $0$ , tel que $(D + V) \cap C_1 = \emptyset$ . Soit alors $C_3$ le cône convexe ouvert engendré par $(D + V)$ . On a $C_3 \cap C_1 = \emptyset$ et $-C_2 \subset \overline{C_3}$ . Il existe une forme linéaire continue $f$ sur $F$ telle que

$$f(y) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in C_1$$

$$f(y) < 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in C_3$$

et par suite

$$f(y) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in C_2 \quad .$$

D'où l'on a $f(x) < 0$ et $f(y) \geqslant 0$ , pour tout $y \in C_1 + C_2$ ; autrement dit : $x \notin \overline{C_1 + C_2}$ .

## 3. Étude du balayage.

Ces préliminaires étant établis, abordons notre problème.

Notations. - Soient $X$ un espace compact, $\mathcal{C}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $X$ , muni de la topologie de la convergence uniforme, $\mathfrak{M}(X)$ l'espace des mesures sur $X$ , muni de la topologie vague, $\mathfrak{M}^+(X)$ l'ensemble des mesures positives sur $X$ , $\mathcal{C}^+(X)$ l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{C}(X)$ .

DÉFINITION 3.1. - On dit qu'un ensemble $C \subset \mathcal{C}(X)$ est linéairement séparant, si quels que soient $x_1 , x_2 \in X$ , $x_1 \neq x_2$ , il existe deux fonctions $f_1 , f_2 \in C$ dont les restrictions au compact $\{x_1 , x_2\}$ soient linéairement indépendantes.

Soit alors un cône convexe $C \subset \mathcal{C}(X)$ séparant linéairement les points de $X$ . On pose :

$$X^+ = \{x \; ; \; x \in X \; ; \; f(x) \geqslant 0 , \; \forall \; f \in C\} \quad ;$$

$$C_0 = \{\mu \; ; \; \mu \in \mathfrak{M}(X) \; ; \; \int f \, d\mu \geqslant 0 , \; \forall \; f \in C\} \quad .$$

On suppose que $C_0 \cap (-\mathfrak{M}^+(X)) = \{0\}$ .

Ceci est équivalent à l'existence dans $C$ d'une fonction $f_0 \geqslant 1$ . (Considérer un hyperplan fermé séparant strictement $C_0$ et le compact $-\mathfrak{M}^1(X)$ .)

En outre, pour éviter un cas trivial, on supposera $X^+ \neq X$ .

DÉFINITION 3.2. – Le cône vaguement fermé $C_0$ définit une relation de pré-ordre sur $\mathfrak{M}(X)$ : $(\mu \prec\!\prec \nu) \iff (\nu - \mu) \in C_0$ . Soient $\mu$ et $\nu \in \mathfrak{M}^+(X)$ ; on dira que $\mu$ est une balayée de $\nu$ si $\mu \prec\!\prec \nu$ et que $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$ se balaye dans un ensemble $A$ universellement mesurable s'il existe $\nu \in \mathfrak{M}^+(X)$ , $\nu \prec\!\prec \mu$ , $\nu$ étant portée par $A$ .

DÉFINITION 3.3. – Un ensemble borélien $A \subset X$ sera dit <u>stable</u> si, pour tout $x \in A$ et toute balayée $\sigma$ de $\varepsilon_x$ , on a $\sigma(\complement A) = 0$ .

Toute intersection non vide de compacts stables est un compact stable (toute réunion d'ouverts de mesure nulle est de mesure nulle) et tout compact stable contient un compact stable minimal.

Toute intersection dénombrable d'ensembles boréliens stables est un ensemble borélien stable.

PROPOSITION 3.1.

1° <u>Pour toute</u> $f \in C \cap \mathcal{C}^+(X)$ , $f^{-1}(0)$ <u>est vide ou est un compact stable.</u>

2° <u>Tout compact stable minimal non-contenu dans</u> $X^+$ <u>est réduit à un point. Un tel point sera dit un point-frontière.</u>

<u>Démonstration.</u>

1° Soit $x \in f^{-1}(0) \neq \emptyset$ , et soit $\sigma \prec\!\prec \varepsilon_x$ , $\sigma \geqslant 0$ . On a $0 \leqslant \int f\, d\sigma \leqslant f(x) = 0$ ; par suite, $\int f\, d\sigma = 0$ .

2° Soit $K$ un compact stable non contenu dans $X^+$ , et soient $x_1 , x_2 \in K$ , $x_1 \neq x_2$ , avec $x_1 \notin X^+$ .

Il existe alors $f_1 \in C$ telle que $f_1(x_1) < 0$ et que $f_1$ et $f_0$ soient linéairement indépendantes dans $K$ . (On rappelle que $f_0 \in C$ et que $f_0 \geqslant 1$ .)

Soit alors

$$\lambda = \inf_{x \in K} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \qquad ;$$

on a $\lambda < 0$, posons $g = f_1 - \lambda f_0$. On a $g^{-1}(0) \cap K \neq \emptyset$ et $g^{-1}(0) \cap K$, qui est un compact stable, différent de $K$.

Par suite, pour tout $K$ stable minimal $K \not\subset X^+$, on a $K = \{x\}$.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points frontières. Si $f \in \overline{C}$ et si $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{E}$, alors $f(x) > 0$ pour tout $x \notin X^+$.

(Considérer la fonction $f - \lambda f_0$ où $\lambda = \inf\limits_{x \in X} \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$ lorsque $\lambda \leqslant 0$.)

DÉFINITION 3.4. - <u>Soit</u> $C^*$ <u>le cône convexe fermé engendré par les mesures</u> $\mu = (\varepsilon_x - \sigma_x)$ <u>où</u> $x \in X$ <u>et</u> $\sigma_x$ <u>est une balayée de</u> $\varepsilon_x$. <u>On a</u> $C^* \subset C_0$ <u>et</u> $C^*$ <u>définit une relation de pré-ordre notée</u> $\prec$ <u>plus fine que</u> $\ll$.

PROPOSITION 3.2. - Le cône $C^*$ ainsi défini est saillant, et définit donc une relation d'ordre.

La proposition va résulter des deux lemmes suivants.

LEMME 3.1. - Soit $C' = \{f \; ; \; f \in \mathcal{C}(X) \; ; \; \int f \, d\mu \geqslant 0 \, , \; \forall \; \mu \in C^*\}$.

Si $f_1$, $f_2 \in C'$, alors $\inf(f_1, f_2) \in C'$.

Il suffit de vérifier, pour les $\mu \in C^*$, $\mu = \varepsilon_x - \sigma_x$, que

$$\int \inf(f_1, f_2) \, d\sigma_x \leqslant \inf(f_1, f_2)(x) \quad .$$

Or

$$\int f_1 \, d\sigma_x \leqslant f_1(x) \quad ,$$

$$\int f_2 \, d\sigma_x \leqslant f_2(x) \quad ,$$

d'où le résultat.

Enfin $C'$ est fermé, et $C' \supset C$.

LEMME 3.2. - L'espace vectoriel $H = C' - C'$ est réticulé et partout dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Cela résulte de l'identité

$$\inf(h_1 - g_1, h_2 - g_2) = \inf(h_1 + g_2, h_2 + g_1) - (g_1 + g_2) \quad .$$

On applique ensuite le théorème de Stone-Weierstrass.

Considérons maintenant la restriction de $\prec$ à $\mathcal{M}^+(X) \times \mathcal{M}^+(X)$.

LEMME 3.3. - Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, il existe un voisinage $V$ de $\mu$ dans $\mathcal{M}^+(X)$, et un compact $K \subset \mathcal{M}^+(X)$ tel que l'ensemble $A\mu' = \{\nu \,;\; \nu \in \mathcal{M}^+(X) \,;\, \nu \leqslant \mu\}$ soit contenu dans $K$ pour tout $\mu' \in V \cap \mathcal{M}^+(X)$.

En effet, il existe $f_0 \in C$, $f_0 \geqslant 1$.

Soit $V$, défini par la relation

$$(\mu' \in V) \iff \left|\int f_0 \, d(\mu - \mu')\right| < \varepsilon$$

alors $A\mu'$ est contenu dans le compact

$$K = \{\nu \,;\; \nu \in \mathcal{M}^+(X) \,;\; \int f_0 \, d\nu \leqslant \int f_0 \, d\mu + \varepsilon\} \qquad .$$

Nous sommes donc dans les conditions de la proposition 2.4. Nous en déduisons les corollaires suivants.

PROPOSITION 3.3. - $\mathcal{M}^+(X)$ est inductif pour la relation d'ordre opposée à $\prec$. Par suite, toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ admet une balayée minimale (Nous sous-entendrons toujours "minimale dans $\mathcal{M}^+(X)$ ").

DÉFINITION 3.5. - Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, on pose

$$P(\mu) = (\mu - \mathcal{M}^+(X)) \cap C^*$$

(on a aussi $P(\mu) = \mu - A\mu$ ) et, pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, on définit $f^*$ sur $\mathcal{M}^+(X)$ par

$$f^*(\mu) = \sup_{\sigma \in P(\mu)} \int f \, d\sigma \qquad .$$

PROPOSITION 3.4.

1° Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, $P(\mu)$ est convexe et compact.

2° L'application multivoque $P$ est s. c. s. au sens fort.

3° $P$ est positivement homogène et concave.

$$P(k_1\,\mu_1 + k_2\,\mu_2) \supset (k_1\,P(\mu_1) + k_2\,P(\mu_2)) \quad \text{avec} \quad k_1\,,\,k_2 \geqslant 0 \quad .$$

COROLLAIRE.

1° Les fonctions $f^*$ sont positivement homogènes, positives concaves, semi-continues supérieurement dans $\mathfrak{M}^+(X)$. Par suite, si $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$,

$$\int f^*(\varepsilon_x)\, d\mu(x) \leqslant f^*(\mu) \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{C}(X)$$

( $f^*$ est enveloppe inférieure d'une famille de formes linéaires continues dans $\mathfrak{M}^1(X)$, convexe et compact).

2° Si $\mu$ est minimale, $P(\mu) = \{0\}$, $f^*(\mu) = 0$ ; pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, la mesure $\mu$ est portée par

$$A_f = \{x\ ;\ x \in X\ ;\ f^*(\varepsilon_x) = 0\}$$

qui est un $G_\delta$.

<u>Remarque</u>. - Les relations $(P(\mu) = \{0\})$ et ( $\mu$ est minimale) sont équivalentes. Donc si $\mu$ est minimale, et si $\nu \leqslant \mu$, $\nu \in \mathfrak{M}^+(X)$, $\nu$ l'est aussi.

<u>Définition</u>. - Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, on définit $\overline{f}$ sur $X$ par

$$\overline{f}(x) = \sup_{\sigma \geqslant 0;\, \sigma \prec \varepsilon_x} \int f\, d\sigma \quad ;$$

pour tout $x \in X$, on a l'identité

$$\overline{f}(x) = f(x) + (-f)^*\,(\varepsilon_x) \quad .$$

PROPOSITION. - <u>Pour tout couple</u> $\sigma$, $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}^+(X)$, $\sigma \prec \varepsilon_x$, on a $\int \overline{f}\, d\sigma \leqslant \overline{f}(x)$ <u>pour tout</u> $f \in \mathcal{C}(X)$.

<u>Démonstration</u>. - On a

$$\int \overline{f}\, d\sigma = \int f\, d\sigma + \int (-f)^*\, d\sigma \leqslant \int f\, d\sigma + (-f)^*\,(\sigma) \quad ;$$

or

$$(-f)^* (\sigma) = \sup_{\nu \prec \sigma} (\int f\, d\sigma - \int f\, d\nu)$$

d'où

$$\int \overline{f}\, d\sigma \leqslant \sup_{\nu \prec \sigma} \int f\, d\nu \leqslant \sup_{\nu \prec \varepsilon_x} \int f\, d\nu = \overline{f}(x) \quad .$$

COROLLAIRE. - Soit $f \in \mathcal{C}^+(X)$ ; si $(\overline{f})^{-1}(0)$ n'est pas vide, c'est un $G_\delta$ stable.

DÉFINITION 3.7. - Soit $T$ l'ensemble des couples $(f, \mu)$, $f \in \mathcal{C}^+(X)$, $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, $\mu \neq 0$, tels que $\int f\, d\mu = 0$. On définit la relation suivante sur $T$,

$$[(f, \mu) \dashv (g, \nu)] \Longleftrightarrow [(\mu \leqslant \nu) \text{ et } (\overline{g} \leqslant f)] \quad .$$

PROPOSITION. - Soit $(f, \mu) \in T$ avec $\mu$ minimale

1° $\mu$ ne charge pas $X^+$ et $\mu$ est portée par le $G_\delta$ stable $(\overline{f})^{-1}(0)$.

2° Il existe $(f', \mu') \in T$, tel que $(f', \mu') \dashv (f, \mu)$ avec, de plus, la condition $f'(x) > 0$, pour tout $x \in X^+$.

Démonstration.

1° Pour toute mesure $\nu \geqslant 0$, portée par $X^+$, on a $0 \prec \nu$ ; par suite, si $\mu$ est minimale, $\mu$ ne charge pas $X^+$. D'autre part, $\mu$ est portée par le $G_\delta$ $A_{-f}$ et par $f^{-1}(0)$ ; par suite, $\mu$ est portée par leur intersection $(\overline{f})^{-1}(0)$.

2° Soit $K$ un compact de $X$ tel que $K \subset (\overline{f})^{-1}(0)$, $K \cap X^+ = \emptyset$ et $\mu(K) \geqslant \mu(X)(1 - \varepsilon)$ où $1 > \varepsilon > 0$. Comme $(\overline{f})^{-1}(0)$ est un $G_\delta$, on peut trouver un compact $K' \supset K$ qui soit un $G_\delta$, $K'$ jouissant des mêmes propriétés que $K$.

L'espace $X$ étant normal et $\overline{f}$ s. c. s., il existe une fonction $f' \in \mathcal{C}^+(X)$ telle que $f' \geqslant \overline{f}$ et que $f'^{-1}(0) = K'$. Le couple $(f', \mu_{K'})$ répond à la question.

Remarque. - Il est équivalent de dire que $x$ est point-frontière ou que $\varepsilon_x$ est minimale.

PROPOSITION. - Soit $(f, \mu) \in T$ avec $\mu$ minimale. Il existe alors un point-frontière dans $f^{-1}(0)$.

Démonstration. - On construit, par récurrence, une suite $(f_n, \mu_n)$ d'éléments de $T$ telle que

$$(f_0, \mu_0) = (f, \mu) \quad ;$$

$$(f_{n+1}, \mu_{n+1}) \dashv (f_n, \mu_n)$$

$$f_1^{-1}(0) \cap X^+ = \emptyset \quad .$$

Le compact

$$K = \bigcap_n f_n^{-1}(0) = \bigcap_n (\overline{f}_n)^{-1}(0)$$

est stable et $K \cap X^+ = \emptyset$.

Par suite $K$ contient un point frontière.

COROLLAIRE. - Soit $A$ un $G_\delta$ tel que $A \cap \mathcal{E} = \emptyset$, alors $\mu(A) = 0$ pour toute mesure minimale. On dit encore que les mesures minimales sont pseudo-portées par $\mathcal{E}$.

PROPOSITION. - S'il existe dans $C'$ une fonction $f_1$ telle que

$$(\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+(X), \ \mu \neq \nu, \ \mu \prec \nu) \implies (\int f_1 \, d\mu < \int f_1 \, d\nu) \quad ,$$

alors l'ensemble $\mathcal{E}$ des points-frontière est un $G_\delta$ et toute mesure minimale est portée par $\mathcal{E}$.

En effet, on a alors $\mathcal{E} = (f_1^*)^{-1}(0) = A_{f_1}$ et toute mesure minimale est portée par $A_{f_1}$.

Cette condition est, en particulier, réalisée lorsque $X$ est métrisable.

Cas particulier qui fournirait le théorème de représentation intégrale de Choquet. - Soient $E$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, $X$ un convexe compact de $E$.

Soit $C$ l'espace vectoriel des fonctions affines continues dans $X$.

Le cône $C$ est linéairement séparant et les points-frontière sont les points extrémaux de $X$. Enfin la relation $(\mu \prec\!\prec \nu)$ équivaut à dire que $\mu$ et $\nu$ ont même barycentre et même masse totale.

## 4. Réciproque du principe de domination dans un compact.

Rappelons que dans nos hypothèses figure la condition

$$C_0 \cap (-\mathfrak{M}^+(X)) = \{0\} \quad .$$

Soit alors $H$ un compact de $X$ tel que les conditions

$$(f \in \overline{C}) \ , \quad (f(x) \geqslant 0 \ , \quad \forall \quad x \in H) \quad \text{entraînent} \quad (f \in \mathcal{C}^+(X))$$

(principe de domination dans $H$).

Cela signifie encore que, si l'on a $\int f \, d\sigma \geqslant 0$, pour tout $\sigma \in C_0$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{M}^+(H)$, alors $\int f \, d\mu \geqslant 0$, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$.

Mais $\mathfrak{M}(X)$ est localement convexe et séparé pour la topologie vague, et $\mathcal{C}(X)$ est son dual. Par conséquent, le principe de domination signifie que

$$\mathfrak{M}^+(X) \subset \overline{C_0 + \mathfrak{M}^+(H)} \quad .$$

Or, d'après la proposition 2.5, $C_0 + \mathfrak{M}^+(H)$ est fermé lorsque $C_0 \cap (-\mathfrak{M}^+(H)) = \{0\}$ et que $H$ est compact, donc

$$\mathfrak{M}^+(X) \subset C_0 + \mathfrak{M}^+(H)$$

ce qui n'est autre que l'expression du principe de balayage dans $H$.