Alexandre Grothendieck

Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 4, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A4_0>

2 , 9 et 12 juin 1958

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES EN THÉORIE DES INTERSECTIONS

par Alexandre GROTHENDIECK

Ces trois exposés ont pour but de développer un certain nombre de propriétés communes à diverses théories (globales) d'intersection en géométrie algébrique. Beaucoup de ces propriétés (plus précisément celles des paragraphes 1,2,3) sont aussi valables pour des théories d'intersection dans d'autres contextes (variétés topologiques, variétés analytiques complexes, et sans doute les "variétés arithmétiques"). Les propriétés envisagées dans les paragraphes 4,5,6 sont cependant assez spéciales aux anneaux de classes de cycles en géométrie algébrique, relativement à des relations d'équivalence qui peuvent être de types divers (équivalence rationnelle ou équivalence algébrique, équivalence définie par la considération de l'anneau des classes de faisceaux, qui intervient dans l'énoncé actuel du théorème de Riemann-Roch). Notons dès à présent que toutes les propriétés que nous serons amenés à envisager seront satisfaites pour la théorie de l'équivalence rationnelle dans la catégorie des espaces algébriques quasi-projectifs non singuliers. Il en sera de même en remplaçant l'équivalence rationnelle par l'équivalence algébrique (dont la définition, classique est calquée sur celle de l'équivalence rationnelle, et n'a pas été reproduite dans ce Séminaire). Comme les démonstrations sont essentiellement les mêmes que pour l'équivalence rationnelle, nous ne les avons pas reproduites.

Dans un dernier exposé, nous appliquerons la notion d'anneau de Chow, et certains des résultats obtenus, à un problème d'existence de sections rationnelles dans certains fibrés algébriques.

1. Le formulaire général d'une théorie globale des intersections.

Dans toute la suite, nous supposons donnée une catégorie $\underset{\sim}{V}$ d'espaces algébriques (non nécessairement irréductibles) sur $\underset{\sim}{k}$, les morphismes dans $\underset{\sim}{V}$ étant les morphismes d'espaces algébriques définis sur $\underset{\sim}{k}$. Pour simplifier, nous supposerons $\underset{\sim}{k}$ algébriquement clos. On supposera seulement, dans les deux numéros qui suivent, que $\underset{\sim}{V}$ satisfait aux conditions suivantes :

(V.1) La catégorie $\underset{\sim}{V}$ est stable par l'opération $X \times Y$, et contient une variété réduite à un point e. Si $X \in \underset{\sim}{V}$, tout espace algébrique isomorphe à X est dans $\underset{\sim}{V}$.

En plus, on suppose fixé un anneau commutatif Λ , et les données suivantes réalisées :

a. Un foncteur contravariant $X \to A(X)$ de $\underset{\sim}{V}$ dans la catégorie des Λ-modules

Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\underset{\sim}{V}$, on notera f^* le morphisme de $A(Y)$ dans $A(X)$ qui lui est associé.

b. Pour tout morphisme propre $f : X \to Y$, on donne un homomorphisme de Λ-modules : $f_* : A(X) \to A(Y)$, de telle façon que $A(X)$ devienne un foncteur covariant de X relativement aux morphismes propres : $id_* = id$; $(gf)_* = g_* f_*$.

(Pour la notion de morphisme propre, voir [2]).

c. Pour deux objets X , $Y \in \underset{\sim}{V}$, on donne un homomorphisme de modules

$$A(X) \otimes_{\Lambda} A(Y) \to A(X \times Y)$$

L'image de $x \otimes y$ par cet homomorphisme est notée $x \times y$.

d. Si $X \in \underset{\sim}{V}$ est un espace algébrique irréductible, on donne un Λ-homomorphisme $\varepsilon : A(X) \to \Lambda$ (l'augmentation).

Relativement à ces données, on suppose satisfaits les axiomes (I.1) à (I.9) qui vont suivre.

(I.1) On a les formules suivantes :

$$\begin{cases} (f \times g)^*(x_2 \times y_2) = f^*(x_2) \times g^*(y_2) \\ (f \times g)_*(x_1 \times y_1) = f_*(x_1) \times g_*(y_1) \end{cases}$$

pour des morphismes $f : X_1 \to X_2$ et $g : Y_1 \to Y_2$ dans $\underset{\sim}{V}$ (supposés propres dans la deuxième formule), et $x_i \in A(X_i)$, $y_i \in A(Y_i)$. (Fonctoralité du produit cartésien $x \times y$ par rapport à f^* et f_*).

(I.2) On a la formule

$$\varepsilon(f^*(y)) = \varepsilon(y)$$

pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\underset{\sim}{V}$, X et Y irréductibles, et $y \in A(Y)$. (Fonctoralité de l'augmentation pour f^*).

(I.3) On a la formule

$$\varepsilon(x \times y) = \varepsilon(x) \ \varepsilon(y)$$

pour $X , Y \in \mathbf{V}$, X et Y irréductibles, $x \in A(X)$, $y \in A(Y)$. (<u>Compatibilité de l'augmentation avec le produit cartésien</u>).

(I.4) <u>Associativité et commutativité de l'opération</u> $\times$. On a

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

$$y \times x = s_*(x \times y)$$

($x \in A(X)$, $y \in A(Y)$, $z \in A(Z)$, $X , Y , Z \in \mathbf{V}$) , où dans la deuxième formule, s désigne la symétrie du produit $X \times Y$.

(I.5) Si $(e) \in \mathbf{V}$ est une variété réduite à un point, alors l'augmentation $\varepsilon : A((e)) \to \Lambda$ est un <u>isomorphisme</u> (<u>structure de</u> $A(X)$ <u>pour</u> X <u>réduit à un point</u>).

Choisissons alors une fois pour toutes une variété $(e) \in \mathbf{V}$ réduite à un point. Soit 1_e l'unique élément de $A((e))$ tel que $\varepsilon(1_e) = 1$.

(I.6) On a la formule

$$x \times 1_e = 1_e \times x = x$$

lorsqu'on identifie $X \times (e)$ et $(e) \times X$ à X de la fçon usuelle ($X \in \mathbf{V}$) .

Pour tout $X \in \mathbf{V}$, soit λ_X l'unique morphisme de X dans (e) , et posons

$$1_X = \lambda_X^*(1_e) \tag{1}$$

(il résulte de **(I.2)** que cette définition de 1_X ne dépend pas du choix de (e)). On a alors les formules suivantes

$$\begin{cases} 1_X \times 1_Y = 1_{X \times Y} & \text{pour } X , Y \in \mathbf{V} \\ f^*(1_Y) = 1_X & \text{pour } f : X \to Y \text{ un morphisme dans } \mathbf{V} \\ \varepsilon(1_X) = 1 & \text{pour } X \in \mathbf{V} \end{cases} \tag{2}$$

et les formules

$$x \times 1_Y = p_1^*(x) \ , \quad 1_X \times y = p_2^*(y) \tag{3}$$

pour $X , Y \in \mathbf{V}$, $x \in A(X)$, $y \in A(Y)$, p_1 et p_2 désignant les projections de $X \times Y$ sur ces deux facteurs.

Démontrons par exemple la première formule (2), et la première formule (3). On a

$$1_{X\times Y} = \lambda^{*}_{X\times Y}(1_e) = (\lambda_X \times \lambda_Y)^{*}(1_e \times 1_e) = \lambda^{*}_X(1_e) \times \lambda^{*}_Y(1_e) = 1_X \times 1_Y$$

(en utilisant (I.6) pour la deuxième égalité, (I.1) pour la troisième). De même, on a

$$x \times 1_Y = x \times \lambda^{*}_Y(1_e) = \mathrm{id}^{*}_X(x) \times \lambda^{*}_Y(1_e) = (\mathrm{id}_X \times \lambda_Y)^{*}(x \times 1_e) = p_1^{*}(x)$$

en utilisant (I.6) et $p_1 = \mathrm{id}_X \lambda_Y$ pour la dernière égalité.

Si $X \in \underset{\sim}{V}$, et si $a \in X$, il est parfois utile d'introduire l'unique morphisme u_a de (e) dans X dont l'image est (a). On a alors, si X est irréductible

$$u_a^{*}(x) = \varepsilon(x)1_e \tag{4}$$

En effet, pour montrer que les deux membres sont égaux, il suffit en vertu de (I.5) de prouver que leurs images par ε le sont, ce qui résulte de (I.2) et de $\varepsilon(1_e) = 1$.

Pour tout $X \in \underset{\sim}{V}$, soit $\Delta_X : X \to X \times X$ le morphisme diagonal. On posera, pour x, $x' \in A(X)$:

$$xx' = \Delta^{*}_X(x \times x') \tag{5}$$

On définit ainsi sur $A(X)$ une loi de composition bilinéaire.

PROPOSITION 1. - *Pour tout* $X \in \underset{\sim}{V}$, *la loi de composition* (5) *fait de* $A(X)$ *une* Λ*-algèbre associative et commutative ayant pour unité* 1_X, *et l'homomorphisme* $\varepsilon : A(X) \to \Lambda$ (défini si X est irréductible) *est un homomorphisme d'algèbres unitaires* (i.e. est une augmentation de la Λ-algèbre $A(X)$). *Si* $f : X \to Y$ *est un morphisme dans* $\underset{\sim}{V}$, *alors* $f^{*} : A(Y) \to A(X)$ *est un homomorphisme de* Λ*-algèbres. Si* X, $Y \in \underset{\sim}{V}$, *alors l'homomorphisme* $A(X) \otimes_{\Lambda} A(Y) \to A(X \times Y)$ *est un homomorphisme d'algèbres, et même d'algèbres augmentées si* X *et* Y *sont irréductibles*.

La démonstration est laissée au lecteur. Indiquons seulement que la commutativité et l'associativité de la loi de composition dans chaque $A(X)$ résultent des deux formules (I.4). Par la suite, nous considérons chaque $A(X)$ comme un anneau grâce à (5).

La dernière assertion dans la proposition 1 s'écrit

$$(x \times y)(x' \times y') = xx' \times yy' \tag{6}$$

$(x\,,\,x' \in A(X)\;,\;\; y\,,\,y' \in A(Y)\;,\;\; X\,,\,Y \in \mathbf{V})$. On obtient en particulier $(x \times 1_Y)(1_X \times y) = x \times y$. Cela s'écrit, compte tenu de (3)

$$x \times y = p_1^*(x)\; p_2^*(y) \qquad (x \in A(X)\;,\; y \in A(Y)\;,\;\; X\,,\,Y \in \mathbf{V}) \tag{7}$$

ce qui redonne la loi de produit cartésien connaissant la structure de produit dans les $A(X)$ et les opérations f^* .

Sauf pour écrire la première formule (I.1), nous n'avons pas encore utilisé l'opération f_* . Les trois axiomes qui restent donnent des relations entre f^* et f_* .

(I.7) Soient X , X_i $(1 \leq i \leq n)$ des objets dans $\mathbf{V}$, $f_i : X_i \to X$ des isomorphismes des X_i sur des parties ouvertes deux à deux disjointes de X dont la réunion est X . Considérons les homomorphismes f^* et f_* de $A(X)$ dans la somme directe $\coprod_i A(X_i)$, et de $\coprod_i A(X_i)$ dans $A(X)$, définis par la famille (f_i^*) resp. par la famille $((f_i)_*)$. Alors f^* et f_* sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. (Réciprocité des opérations f^* et f_*).

En particulier, si f est un isomorphisme de X sur Y $(X\,,\,Y \in \mathbf{V})$ alors les isomorphismes f^* et f_* sont inverses l'un de l'autre.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'une variété X dans une variété Y . Soit Y' une sous-variété de Y . On dit que f est transversal à Y' si, pour tout point $x \in f^{-1}(Y')$, les conditions suivantes sont satisfaites : x est simple sur X ; $f(x)$ est simple sur Y et Y' ; tout vecteur tangent à Y en $f(x)$ se met sous la forme de la somme d'un vecteur tangent à Y' et de l'image (par l'application dérivée de f en x) d'un vecteur tangent à X en x . On sait que $f^{-1}(Y')$ est alors un sous-espace fermé non singulier de X .

(I.8) Soit f un morphisme propre d'un espace algébrique $X \in \mathbf{V}'$ dans un espace algébrique $S \in \mathbf{V}'$; soit Y un sous-espace fermé de S tel que f soit transversal à Y et que l'on ait $Y \in \mathbf{V}$, $Z = f^{-1}(Y) \in \mathbf{V}'$; alors, si i_Y , i_Z sont les injections canoniques de Y et Z dans S et X respectivement, et f_Z la restriction de f à Z , on a

$$j_Y^*\, f_* = (f_Z)_*\, j_Z^*$$

(compatibilité des images directes avec les opérations de restriction à des sous-espaces).

Soient f et g des morphismes d'espaces algébriques X et Y dans un espace algébrique S ; supposons que $h = f \times g : X \times Y \longrightarrow S \times S$ soit transversal à la diagonale Δ_S de $S \times S$; nous poserons alors

$$X \times_S Y = h^{-1}(\Delta_S) \quad ;$$

cet espace s'appelle le produit fibré de X et Y sur S.

PROPOSITION 2. - *Soient f, g des morphismes d'espaces algébriques X, Y dans un espace algébrique S tels que $f \times g$ soit transversal à la diagonale de $S \times S$; soient φ et ψ les restrictions à $X \times_S Y$ des projections de $X \times Y$ sur X et Y. Supposons que X, Y, S, $X \times_S Y$ soient dans V et que f soit propre. Alors ψ est propre et on a*

$$g^* f_* = \psi_* \varphi^* \quad .$$

Avant d'établir ce résultat, nous établirons d'abord une autre formule. La situation étant celle de la proposition 2, soient de plus X', Y' des espaces algébriques appartenant à V, u un morphisme propre de X' dans X, v un morphisme propre de Y' dans Y, $f' = fu$, $g' = fg$; supposons que $f' \times g'$ soit transversal à la diagonale de $S \times S$ et que $X' \times_S Y'$ soit dans $\underset{\sim}{V}$. Soient φ', ψ' les restrictions à $X' \times_S Y'$ des projections de $X' \times Y'$ sur X' et sur Y' ; si $x' \in A(X')$, $y' \in A(Y')$, posons

$$x' \times_S y' = \varphi'^*(x')\,\psi'^*(y') = i'^*(x' \times y') \quad ,$$

où i' est l'injection canonique de $X' \times_S Y'$ dans $X' \times Y'$ (l'égalité des deux derniers membres de cette formule se vérifie facilement) ; soit enfin $u \times_S v$ la restriction de $u \times v$ à $X' \times_S Y'$. On a alors

$$(u \times_S v)_*(x' \times_S y') = u_*(x') \times_S v_*(y') \quad . \tag{8}$$

En effet, on vérifie facilement que l'application $u \times v$ est transversale à la sous-variété $X \times_S Y$ de $X \times Y$; il suffit alors d'appliquer l'axiome $(\underset{\sim}{I.8})$ au morphisme propre $u \times v$ de $X' \times Y'$ dans $X \times Y$ et au sous-espace $X \times_S Y$ de $X \times Y$ dont l'image réciproque est évidemment $X' \times_S Y'$.

On notera que la démonstration subsiste sans modification si on remplace la condition que $f \times g$ soit transversal à la diagonale de $S \times S$ par la condition un peu plus faible suivante : l'image réciproque de la diagonale de $S \times S$ par $f \times g$ est un sous-espace fermé de $X \times Y$ qui appartient à V (on le désigne encore par $X \times_S Y$) et la condition de transversalité est satisfaite pour tout point de $X \times_S Y$ qui appartient à $(u \times v)(X' \times Y')$.

On peut maintenant déduire la proposition 2 de la formule (8) comme suit. On applique (8) en y remplaçant S par S, X par S, Y par Y, X' par X, Y' par Y, u par f, v par Id_Y, f par Id_S, g par g, donc f' par g, x' par un élément $x \in A(X)$ et y' par 1_Y. L'image réciproque de la diagonale de $S \times S$ par $Id_S \times g$ est l'ensemble Γ des points $(s, y) \in S \times Y$ tels que $s = g(y)$; c'est un sous-espace fermé de $S \times Y$ qui appartient à $\underset{\sim}{V}$ car il est isomorphe à Y ; si un point $(g(y), y)$ de cet ensemble appartient à $(f \times Id_Y)(X \times Y)$, y est simple sur Y et $g(y)$ l'est sur S, d'où il résulte que la condition de transversalité pour $Id_S \times g$ est satisfaite en ce point. Par ailleurs, si π est la restriction à Γ de la projection $S \times Y \to Y$, π^* et π_* sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre (axiome ($\underset{\sim}{I.7}$)). On voit alors facilement que la formule (1) donne la formule cherchée $(g^* f_*)(x) = (\psi_* \varphi^*)(x)$.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme dans</u> $\underset{\sim}{V}$, Y' <u>une partie fermée de</u> Y <u>telle que</u> $Y' \in \underset{\sim}{V}$, $X' = f^{-1}(Y') \in \underset{\sim}{V}$; <u>on suppose</u> f <u>transversale à</u> Y'. <u>Soient</u> $i : Y' \to Y$ <u>et</u> $j : X' \to X$ <u>les morphismes d'injection,</u> f' <u>la restriction de</u> f <u>à</u> X' ; <u>on a</u>

(9) $$f^* i_* = j_* f'^* .$$

Il suffit d'appliquer la proposition 2 en y remplaçant S par Y, X par Y' Y par X, f par i et g par f ; on vérifie immédiatement que $i \times f$ est transversal à la diagonale de $Y \times Y$; $Y' \times_Y X$ s'identifie à $f^{-1}(Y')$.

La notation suivante sera souvent commode : soient $X \in \underset{\sim}{V}$, Z une partie fermée de X avec $Z \in \underset{\sim}{V}$, i le morphisme d'injection $Z \to X$; on posera alors

$$p_X(Z) = i_*(1_Y) .$$

Les notations étant celles du corollaire 1, on a

(10) $$p_X(f^{-1}(Y')) = f^*(p_Y(Y')) ;$$

on a en effet $(f^* i_*)(1_{Y'}) = (j_* f'^*)(1_{Y'})$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> E <u>et</u> V <u>des espaces algébriques non singuliers dans</u> $\underset{\sim}{V}$, f <u>un morphisme propre de</u> E <u>dans</u> V, V' <u>une partie ouverte de</u> V <u>telle que pour tout</u> $a \in f^{-1}(V') = E'$, <u>l'application tangente à</u> f <u>en</u> a <u>soit surjective. Soient</u> $i : V' \to V$ <u>et</u> $j : E' \to E$ <u>les morphismes d'injection,</u>

f' <u>le morphisme de</u> E' <u>dans</u> V' <u>induit par</u> f . <u>On a alors</u>

$$i^* f_* = f'_* j^* \quad . \tag{11}$$

Il suffit d'appliquer la proposition 2 en y remplaçant S par V , X par E et Y par V' .

$(\underset{\sim}{I.9})$ <u>Soient</u> X , $Y \in \underset{\sim}{V}$, f <u>un morphisme propre de</u> X <u>dans</u> Y , $x \in A(X)$, $y \in A(Y)$; <u>alors on a</u>

$$f_*(f^*(y)x) = y\, f_*(x)$$

(<u>formule de projection</u>).

On notera que, si on supposait X et Y non singuliers, l'axiome $(\underset{\sim}{I.9})$ serait une conséquence de la proposition 2. On applique en effet la proposition 2 en y remplaçant S par $Y \times Y$, X par $X \times Y$, Y par Y , f par $f \times Id_Y$, g par le morphisme diagonal $y \longrightarrow (y\ ,\ y)$; si X et Y sont non singuliers, la condition de transversalité est satisfaite ; par ailleurs, le produit fibré de $X \times Y$ et de Y au dessus du $Y \times Y$ s'identifie à X .

PROPOSITION 3. - <u>Soient</u> $X \in \underset{\sim}{V}$, Y <u>et</u> Y' <u>deux parties fermées de</u> X <u>qui se coupent transversalement, avec</u> Y , Y' , $Y \cap Y'$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{V}$. <u>Alors on a</u>

$$p_X(Y \cap Y') = p_X(Y)\ p_X(Y') \tag{12}$$

En effet, l'hypothèse signifie que le morphisme diagonal Δ_X est transversal au sous-espace $Y \times Y'$ de $X \times X$, d'où en vertu de (10)

$$p_X(Y) \cdot p_X(Y') = \Delta_X^*(p_X(Y) \times p_X(Y')) = \Delta_X^*(p_{X\times X}(Y \times Y')) =$$

$$= p_X(\Delta_X^{-1}(Y \times Y')) = p_X(Y \cap Y')$$

(La relation

$$p_X(Y) \times p_X(Y') = p_{X\times X}(Y \times Y')$$

résulte aussitôt de (I.1) et des définitions, compte tenu de $1_{Y\times Y'} = 1_Y \times 1_{Y'}$) . Cela prouve (12).

REMARQUES.

1° On notera que dans ce numéro, nous ne supposons pas les $A(X)$ gradués, afin d'englober dans ce formalisme aussi le cas où par exemple $\underset{\sim}{V}$ est la catégorie de tous les espaces algébriques non singuliers, et $A(X)$ le groupe des classes de faisceaux sur $A(X)$, tel qu'il est défini dans le rapport de BOREL-SERRE [1]. Au numéro suivant, nous examinons les faits spéciaux relatifs au cas gradué.

2° Dans les théories cohomologiques usuelles de l'intersection l'axiome de commutativité (I.4) n'est pas vrai tel quel, et doit se remplacer par un axiome d'anticommutativité (faisant intervenir les structures graduées). Nous aurions pu ne pas postuler l'axiome de commutativité, mais avons préféré l'écrire par pure raison de commodité, pour n'avoir pas à distinguer la gauche et la droite.

3° Quelques bons auteurs répugnent à la considération d'espaces algébriques réductibles, i.e. qui ne sont pas des variétés. La considération des espaces réductibles est cependant techniquement bien commode, (par exemple l'image inverse par un morphisme d'une sous-variété fermée peut fort bien être réductible, et on répugne à la décomposer en ses composantes). On notera d'ailleurs que si $\underset{\sim}{V}$ était défini (par un des bons auteurs mentionnés plus hauts) comme formé uniquement de variétés, on peut élargir la catégorie $\underset{\sim}{V}$ en la catégorie $\underset{\sim}{V'}$ formée des sommes disjointes X de variétés X_i éléments de $\underset{\sim}{V}$, et définir $A(X)$ comme la somme directe des $A(X_i)$, en définissant de plus de façon évidente les opérations f^*, f_* et $\times$ dans la catégorie ainsi élargie. Alors l'axiome (I.7) sera satisfait (vu qu'il sera devenu définition) ainsi que tous les autres axiomes (I.1) à (I.9) supposés vérifiés dans $\underset{\sim}{V}$.

4° Soient $f : X \to Y$ un morphisme dans $\underset{\sim}{V}$, $\Gamma_f \subset X \times Y$ son graphe, p_1 la projection de $X \times Y$ sur son premier facteur. On suppose Y complet de sorte que p_1 est propre, donc p_{1*} est défini. Si $y \in A(Y)$, on a alors la formule

$$f^*(y) = p_{1*}(p_{X\times Y}(\Gamma_f).(1_X \times y)) \tag{13}$$

En effet, on a $1_X \times y = p_2^*(y)$ (formules (3)), $p_{X\times Y}(\Gamma_f) = f'_*(1_X)$, où $f' : X \to X \times Y$ est défini par $f'(x) = (x, f(x))$. La deuxième formule résulte du cas particulier de (I.7) signalé après l'énoncé de cet axiome, et qui implique $g_*(1_X) = 1_{X'}$, si $g : X \to X'$ est un isomorphisme dans $\underset{\sim}{V}$).

Par suite, on a

$$p_{X\times Y}(\Gamma_f)\cdot(1_X \times y) = f'_*(1_X)\ p_2^*(y) = f'_*(f'^*(p_2^*(y)))\ ,$$

la dernière égalité résultant de la formule de projection. On obtient par suite

$$p_{1*}(p_{X\times Y}(\Gamma_f)\cdot(1_X \times y)) = p_{1*}\ f'_*\ f'^*\ p_2^*(y) = (p_1\ f')_*\ (p_2\ f')^*\ (y)\ .$$

Or $p_1 f' = \mathrm{id}_X$, $p_2\ f' = f$, d'où la formule (13).

La formule (13) redonne pour Y complet une définition de l'opération f^* en termes des opérations f_* , $\times$, et de la loi de produit dans les $A(X)$. Mais une telle définition n'est plus possible si Y n'est pas complet, ce qui explique pourquoi, dans l'axiomatique présentée ici, nous avons dû en tout état de cause supposer données les opérations f^* et f_* , (le choix restant alors de prendre soit l'opération $\times$, soit le produit dans les $A(X)$, comme autre donnée ; nous avons choisi la première pour des raisons de simplicité).

2. Cas gradué.

Dans ce cas, on suppose que $X \to A(X)$ est un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{V}$ dans la catégorie des Λ-modules gradués à degrés ≥ 0 (les opérations f^* étant supposées par suite de degré 0). On suppose de plus que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre dans $\underset{\sim}{V}$, X et Y étant équidimensionnels de dimensions respectives m et n , alors f_* est homogène de degré $n - m$. L'homomorphisme $A(X) \otimes_\Lambda A(Y) \to A(X \times Y)$ est supposé de degré 0 . Enfin si $X \in \underset{\sim}{V}$ est irréductible, on suppose que l'augmentation $\varepsilon : A(X) \to \Lambda$ s'annule sur les $A^i(X)$ avec $i > 0$, et induit un isomorphisme de $A^0(X)$ sur Λ .

Sous ces conditions, pour tout $X \in \underset{\sim}{V}$, $A(X)$ est un anneau gradué.

De plus, on introduit une nouvelle donnée, qu'on va expliciter. Pour tout espace algébrique X , soit $P(X)$ le groupe des classes de fibrés vectoriels de rang 1 sur X (la loi de composition de ce groupe étant donnée par la multiplication tensorielle des fibrés vectoriels). Si L est un tel fibré de rang 1 on désigne par $cl(L)$ ou $cl_X(L)$ sa classe, qui est un élément de $P(X)$. On a donc

$$cl_X(L \otimes L') = cl_X(L) + cl_X(L')\ ,\quad cl_X(\check{L}) = -cl_X(L)$$

Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces algébriques, alors la formule

$$f^*(cl_Y(L)) = cl_X(f^{-1}(L))$$

définit un homomorphisme f^* de $P(Y)$ dans $P(X)$. Ainsi $P(X)$ devient un foncteur contravariant en X , à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

Nous supposons maintenant qu'on a, en plus des données (a), (b) , (c) , (d) du numéro précédent, la donnée suivante :

e. <u>Pour tout</u> $X \in \underset{\sim}{V}$, <u>on donne un homomorphisme de groupes abéliens</u>

$$p_X : P(X) \to A^1(X)$$

<u>qui est fonctoriel par rapport aux opérations</u> f^* <u>sur</u> $P(X)$, $A^1(X)$.

On supposera de plus l'axiome suivant satisfait :

(I.10) (<u>Compatibilité des classes de Poincaré de cycles avec les classes caractéristiques des fibrés de rang</u> 1). Soient $X \in \underset{\sim}{V}$, L un fibré vectoriel de rang 1 sur X , s une section régulière de L transversale à la section nulle, Y l'ensemble de ses zéros ; supposons $Y \in \underset{\sim}{V}$. Alors on a

$$p_X(Y) = p_X(cl_X(L))$$

(Rappelons qu'une section régulière s d'un fibré vectoriel E est dite transversale à la section nulle s_o , si s est un morphisme de X dans E transversal à la partie fermée $s_o(X)$ de E).

Si X est un espace algébrique, E un fibré vectoriel sur X , on désigne par $P(E)$ le fibré projectif associé. La fibre $P(E)_x$ de $P(E)$ au point $x \in X$ est donc l'espace projectif $P(E_x)$ associé à l'espace vectoriel E_x , fibre de E en x . Soit $f : P(E) \to X$ la projection de $P(E)$ sur X , considérons sur $P(E)$ le fibré vectoriel $f^{-1}(E)$ image inverse de E par f . Il y a un sous-fibré canonique de rang 1 de $f^{-1}(E)$, dont la fibre en un point d de $P(E)$ est la droite d dans $E_x = f^{-1}(E)_d$. Le fibré dual de ce sous-fibré est noté L_E , on a donc une inclusion

$$\check{L}_E \subset f^{-1}(E)$$

On pose alors, si $P(E) \in \underset{\sim}{V}$

(14) $$\xi_E = p_{P(E)}\, cl_{P(E)}\,(L_E) \in A^1(P(E))$$

Avec les notations précédentes, soit $g : X' \to X$ un morphisme d'espaces algébriques, et soit $E' = g^{-1}(E)$ le fibré vectoriel sur X' image inverse de E par g. Alors $P(E')$ s'identifie à l'image inverse de $P(E)$ par g, d'où un morphisme canonique $\overline{g}$ de $P(E')$ dans $P(E)$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(E') & \xrightarrow{\overline{g}} & P(E) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

(où f' désigne la projection de $P(E')$ sur X'). De plus, le fibré $L_{E'}$ sur $P(E')$ s'identifie à l'image inverse par $\overline{g}$ du fibré L_E sur $P(E)$. On en conclut en particulier la formule

(15) $$\xi_{E'} = \overline{g}^*(\xi_E)$$

Lorsque la base X est réduite à un point e, alors E s'identifie à un espace vectoriel V, et $P(E)$ à l'espace projectif associé $P(V)$. La considération du fibré L_V sur $P(V)$ est alors classique : l'espace des sections régulières de L_V sur $P(V)$ s'identifie au dual $\check{V}$ de V, l'homomorphisme de $\check{V}$ dans l'espace des sections de L_V étant celui qui se déduit de l'homomorphisme canonique du fibré vectoriel constant $P(V) \times \check{V}$ sur L_V, transposé de l'homomorphisme d'injection naturel de L_V dans le fibré constant $P(V) \times V$. Toute section non nulle s de L_V est transversale à la section nulle, et son ensemble des zéros est l'hyperplan de $P(V)$ défini par l'élément de $\check{V}$ qui correspond à s. Par suite, en vertu de (I.10), si H est un hyperplan affine de $P(V)$, on a la formule suivante (en supposant que tout espace projectif appartient à $\mathcal{V}$) :

$$p_{P(V)}\,(H) = \xi_V$$

où conformément à (14), on pose $\xi_V = p_{P(V)}\, cl_{P(V)}\,(L_V)$. Comme une sous-variété affine Q de codimension q de $P(V)$ est toujours l'intersection de q hyperplans affines H_i de $P(V)$, la proposition 3 montre, par récurrence sur q, que l'on a

(16) $$p_{P(V)}\,(Q) = (\xi_V)^q \qquad (q = \operatorname{codim} Q)$$

En particulier, si V est de dimension p, et si a est un point de $P(V)$, la formule (16) donne (avec $q = p - 1$ et $q = p$)

(16 bis) $$(\xi_V)^{p-1} = p_{P(V)}((a)) , \quad (\xi_V)^p = 0$$

En vue de ce qui va suivre, nous allons supposer dans la suite de ce numéro que V satisfait à la condition suivante :

(V.2) Si E est un fibré vectoriel sur $X \in V$, alors le fibré projectif associé $P(E)$ est dans V.

Sous ces conditions, on va prouver :

PROPOSITION 4. - Soient $X \in V$, X non singulier, E un fibré vectoriel de rang p sur X, f le morphisme de projection de $P(E)$ sur X. Considérons $A(P(E))$ comme un $A(X)$-module, grâce à l'homomorphisme d'anneaux $f^* : A(X) \to A(P(E))$. Alors les classes $(\xi_E)^i$ $(0 \leq i \leq p-1)$ sont linéairement indépendantes sur $A(X)$.

On va d'abord prouver les formules

(17) $$\begin{cases} f_*(\xi_E^i) = 0 & \text{si } 0 \leq i \leq p-2 \\ f_*(\xi_E^{p-1}) = 1_X \end{cases}$$

Les premières formules sont vraies pour une raison de degrés, car f diminue les degrés de $p-1$, et $A(X)$ est à degrés positifs. Pour prouver la dernière formule, on voit aussitôt, appliquant (I.7), qu'on peut se ramener au cas où X est irréductible. Dans ce cas, comme $x = f_*(\xi_E^{p-1})$ est de degré 0, la formule à démontrer $x = 1_X$ équivaut (en vertu de ce qui a été dit dans le premier alinéa de ce paragraphe) à la relation $\varepsilon(x) = 1$. Soient U une partie ouverte non vide de X, E' le fibré induit par E sur U, donc $P(E')$ est le fibré induit par $P(E)$ sur U. Soient $i : U \to X$ et $j : P(E') \to P(E)$ les morphismes d'injection, et $f' : P(E') \to U$ la projection de $P(E')$ sur U, induite par f. Appliquant le corollaire 2 à la proposition 2, on trouve $i^*(f_*(\xi_E^{p-1})) = f'_*(j^*(\xi_E^{p-1}))$, or $j^*(\xi_E^{p-1}) = (j^*(\xi_E))^{p-1} = \xi_{E'}^{p-1}$, d'où $i^*(f_*(\xi_E^{p-1})) = f'_*(\xi_{E'}^{p-1})$. Comme $\varepsilon(x) = \varepsilon(i^*(x))$, on est ramené à prouver que $f'_*(\xi_{E'}^{p-1}) = 1$. En prenant U assez petit, on est donc ramené au cas où E est un produit $X \times V$. Alors $P(E) = X \times P(V)$, et si on désigne par g la projection de $X \times P(V)$ sur son deuxième facteur $P(V)$, on a $L_E = g^{-1}(L_V)$ donc $\xi_E = g^*(\xi_V)$ et $\xi_E^{p-1} = g^*(\xi_V^{p-1}) = 1_X \times \xi_V^{p-1}$. Comme la projection f de $P(E)$ sur X n'est autre que $\mathrm{id}_X \times \lambda_{P(V)}$ (où, conformément à la notation introduite dans le paragraphe 1, $\lambda_{P(V)}$ est l'unique morphisme de $P(V)$ dans la variété (ϵ) réduite au point ϵ) on obtient

$$f_*(\xi_E^{p-1}) = (\mathrm{id}_X \times \lambda_{P(V)})_* (1_X \times \xi_V^{p-1})$$

$$= (\mathrm{id}_{X*}(1_X) \times \lambda_{P(V)*}(\xi_V^{p-1}) = 1_X \times \lambda_{P(V)*}(\xi_V^{p-1}) \quad .$$

Or en vertu de la première formule (16 bis), qui peut s'écrire $\xi_V^{p-1} = u_{a*}(1_\epsilon)$ (où, conformément aux notations du paragraphe 1, u_a est le morphisme de (ϵ) dans $P(V)$ dont l'image est le point a), on aura

$$\lambda_{P(V)*}(\xi_V^{p-1}) = \lambda_{P(V)*} u_{a*}(1_\epsilon) = (\lambda_{P(V)} u_a)_* (1_\epsilon) = \mathrm{id}_{(\epsilon)*}(1_\epsilon) = 1_\epsilon \quad ,$$

d'où

$$f_*(\xi_E^{p-1}) = 1_X \times 1_\epsilon = 1_X \ ,$$

ce qui achève d'établir (17).

Supposons maintenant qu'on puisse trouver entre les ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$ une relation non triviale $\sum_{i=0}^{p-1} x_i \xi_E^i = 0$, à coefficients $x_i \in A(X)$. Soit j le plus grand indice tel que $x_j \neq 0$; multipliant la relation donnée par ξ_E^{p-1-j} , on peut supposer $a_{p-1} \neq 0$. On aura aussi $f_*(\sum_i x_i \xi_E^i = 0$. Or, utilisant la formule de projection, le premier membre s'écrit $\sum_i x_i f_*(\xi_E^i)$, donc en vertu de (17) est égal à x_{p-1} . On trouve donc $x_{p-1} = 0$, ce qui est absurde, et achève la démonstration de la proposition 4.

Dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent, la propriété suivante, plus forte que celle énoncée dans la proposition 4, est vérifiée :

(I.11) Pour tout $X \in V$, et tout fibré vectoriel E sur X de rang p , les $(\xi_E)^i$ $(0 \leq i \leq p-1)$ forment une base de $A(P(E))$ considérée comme module sur $A(X)$ de la façon naturelle.

Un des buts des paragraphes 4,5,6 est de montrer que cet axiome est vérifié en particulier en théorie de l'équivalence rationnelle. Dans le paragraphe 3, nous allons supposer les axiomes (I.1) à (I.11) satisfaits, et en déduire la détermination de $A(Q)$ pour certains espaces fibrés Q . Pour l'usage que nous aurons à en faire dans le dernier exposé, seule la détermination de $A(D)$, lorsque D est une variété de drapeaux (de type $(1 , 1 , \ldots , 1)$), sera nécessaire.

Nous allons montrer maintenant que toutes les données envisagées dans l'axiomatique envisagée dans les deux paragraphes précédents, et les axiomes (I.1) à (I.10), s'appliquent en théorie de l'équivalence rationnelle pour les espaces algébriques non singuliers quasi-projectifs. Dans cette théorie, V désignera la catégorie des espaces algébriques quasi-projectifs non singuliers. Cette catégorie satisfait trivialement à la condition (V.1) du paragraphe 1, et on peut montrer sans difficulté qu'elle satisfait aussi à la condition (V.2) du présent paragraphe. On prend pour Λ l'anneau Z des entiers. Si $X \in V$, $A(X)$ désigne le groupe, gradué par la codimension, des classes de cycles sur X (pour l'équivalence rationnelle). Si f est un morphisme dans V, la définition de f^* est donnée dans l'exposé 3 n° 4 (où on a adopté la notation f_*^{-1}). On prouve, dans loc. cité que $A(X)$ devient ainsi un foncteur contravariant en X, i.e. que $(gf)^* = f^* g^*$ (la relation $id^* = id$ étant comme d'habitude triviale). On définit de même dans loc. cité l'opération $f_* : A(X) \to A(Y)$ quand f est un morphisme propre, comme l'opération déduite de l'opération "image directe de cycles" par passage au quotient. La relation $(gf)_* = g_* f_*$ résulte ici immédiatement de la relation analogue pour les opérations sur les cycles eux-mêmes : ainsi $A(X)$ est bien un foncteur covariant de X relativement aux morphismes propres. L'opération $\times$ (produit cartésien) est aussi définie dans loc. cité à partir de l'opération de produit cartésien de cycles. Enfin, si X est irréductible, on désigne par ε l'homomorphisme de $A(X)$ dans Z qui est nul en degrés > 0, et qui prend la valeur 1 sur la classe du cycle (X). Cette définition a un sens, en d'autres termes cette classe (X) définit une base de $A^0(X)$. En effet le groupe des cycles de degré 0 admet une base réduite au cycle (X), d'autre part $n(X)$ n'est rationnellement équivalent à 0 que si $n = 0$, comme on voit aussitôt sur la définition (un cycle de déformation dans $X \times T$, pour des cycles de degré 0 dans X, étant nécessairement un multiple de $X \times T$). Les conditions sur les degrés données au début de ce paragraphe sont vérifiées. Enfin, on a un isomorphisme classique entre $P(X)$ en $A^1(X)$ (X espace algébrique non singulier), obtenu en associant à tout fibré vectoriel L de rang 1 sur X la classe du diviseur d'une section rationnelle de L qui n'est nulle sur aucune composante de X (classe ne dépendant pas de la section choisie). Cela donne l'homomorphisme $p_X : P(X) \to A^1(X)$, dont on sait bien qu'il est fonctoriel.

L'axiome (I.1) a été vérifié dans loc. cité, les axiomes (I.1) à (I.6) se vérifient trivialement. Notons que la multiplication dans $A(X)$ définie dans la formule (5) est celle envisagée dans le paragraphe cité, de sorte que $A(X)$ est l'anneau de Chow de X . On voit d'ailleurs tout de suite que 1_X est la classe du cycle X . La vérification de (I.7) est triviale.

Pour vérifier l'axiome (I.8), observons que tout élément $x \in A(X)$ peut être représenté par un cycle ξ tel que $\xi.Z$ soit défini (cf. exposé 3), ce qui entraîne que $f(\xi).Y$ est défini. La classe $j_Z^*(x)$ est celle représentée par $\xi.Z$, considéré comme cycle sur Z , et son image par $(f_Z)_*$ est représentée par $f(\xi.Z) = f(\xi.f^{-1}(Y)) = f(\xi).Y$, en vertu de la formule de projection pour les cycles ; or $f(\xi).Y$ est un représentant de la classe $(j_Y^* f_*)(x)$. L'axiome (I.9) ("formule de projection") est prouvé aussi dans loc. cit. Enfin la formule (I.10) résulte aussitôt de la définition même de $p_X : P(X) \to A^1(X)$.

REMARQUES.

1° Pour bien faire et inclure les théories cohomologiques les plus importantes, nous aurions dû, dans les propriétés d'homogénéité envisagées dans le premier alinéa de ce paragraphe, imposer que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de X^m dans Y^n , alors f est homogène de degré $2(n - m)$ (et non de degré $(n - m)$) ; la donnée (e) est alors un homomorphisme p_X de $P(X)$ dans $A^2(X)$ (et non dans $A^1(X)$) . Cela amène alors à doubler les degrés dans l'anneau de Chow, qui devient alors un anneau gradué anticommutatif (voir remarque 2 du paragraphe 1), mais dont tous les degrés sont pairs (de sorte qu'il est aussi commutatif). Comme dans la suite de ces exposés, nous aurons seulement affaire à des groupes de classes de cycles, nous n'avons pas voulu ici imposer cette modification aux notations reçues.

2° Il semble plausible que parmi toutes les théories satisfaisant aux axiomes (I.1) à (I.10), ($\underline{V}$ étant la catégorie des espaces algébriques non singuliers quasi-projectifs pour fixer les idées), la théorie de Chow $\mathcal{C}$, où on prend $A(X) = C(X) \otimes_{\underline{Z}} \Lambda$ ($C(X)$ désignant l'anneau de Chow X) puisse être caractérisée abstraitement comme étant la "théorie minimale", au sens suivant : pour toute autre telle théorie $\mathcal{C}'$ (avec des groupes gradués $B(X)$, etc) il existe un homomorphisme unique de la théorie $\mathcal{C}$ dans la théorie $\mathcal{C}'$ (par quoi on entend la donnée, pour tout $X \in \underline{V}$, d'un homomorphisme de Λ-modules gradués $\varphi : A(X) \to B(X)$, fonctoriel pour f^* et f_* , compatible avec les augmentations et les produits cartésiens, et la formation de classes caractéristiques de fibrés vectoriels de rang 1). Cet homomorphisme φ transformerait nécessairement la classe d'un cycle irréductible non singulier Y de X en $p_X(Y) \in B(X)$, et la classe d'un diviseur D (non nécessairement non singulier) de X en $p_X(\lambda(D)) \in B(X)$, où $\lambda(D) \in P(X)$ est la classe de fibrés vectoriels de rang 1 qui correspond à D .

La démonstration de la conjecture ci-dessus permettrait d'éviter complètement les difficultés qu'on rencontre dans le formalisme actuel de la dualité de Poincaré en Géométrie Algébrique (cf. [3], dues à la présence possible de singularités dans les cycles, difficultés qui ne tarderont pas à se présenter à nouveau dans les théories cohomologiques plus perfectionnées qui sont appelées à remplacer celle qu'on vient de citer.

3. Classes de Chern et fibrés en drapeaux.

Pour simplifier, nous supposons dans tout ce paragraphe que les $X \in \underset{\sim}{V}$ sont des espaces algébriques non singuliers. Pour l'instant, c'est seulement dans ce cas que l'on sait construire une théorie "des intersections" satisfaisant aux axiomes du paragraphe 1. Nous supposons de plus qu'on se soit donné une théorie impliquant les données et les axiomes des paragraphes 1 et 2. En fait, ce qu'on va dire s'applique, sous des conditions plus larges, explicitées dans [4] : les données essentielles sont (a) et (e) , l'axiome essentiel dans la question étant (I.11) qui donne la structure de $A(P(E))$, lorsque E est un fibré vectoriel sur un $X \in \underset{\sim}{V}$.

Soient $X \in \underset{\sim}{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X , $P(E)$ le fibré en espaces projectifs associé, L_E le fibré vectoriel de rang 1 sur $P(E)$ défini dans le paragraphe 2 et $\xi_E \in A^1(P(E))$ sa "classe caractéristique". Du fait que, en vertu de (I.11), les ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$ forment une base de $A(P(E))$, considéré comme module sur $A(X)$, on peut trouver de façon unique des éléments $c_i(E) \in A^i(X)$ (définis pour tout entier $i \geq 0$) satisfaisant aux conditions :

$$(18) \quad \begin{cases} \sum_{i \geq 0} c_i(E)\, \xi_E^{p-i} = 0 \\ c_0(E) = 1 \,, \quad c_i(E) = 0 \quad \text{si } i > p \end{cases}$$

Les $c_i(E)$ s'appellent les classes de Chern de E , $c_i(E)$ est dit la i-ième classe de Chern. On pose

$$(18\text{ bis}) \qquad c(E) = \sum_{i \geq 0} c_i(E)$$

et $c(E)$ est appelé la classe de Chern (totale) de E ; sa donnée équivaut donc à la donnée de tous les $c_i(E)$.

On prouve (loc. cité, théorème 1) que les $c_i(E)$ satisfont à toutes les propriétés usuelles des classes de Chern, et en particulier aux propriétés suivantes, qui les caractérisent :

i. Fonctoralité des classes de Chern (relativement à f^* et aux images inverses de fibrés vectoriels).

ii. Normalisation : si E est de rang 1, alors $c^1(E) = p_X\, cl_X(E)$.

iii. Additivité : $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels sur X , alors on a $c(E) = c(E')\, c(E'')$.

(Seule cette dernière propriété n'est pas immédiate sur la définition donnée).

La théorie des classes de Chern est utile dans la détermination d'un anneau du type $A(Y)$ $(Y \in \underset{\sim}{V})$ dans un grand nombre de cas, dont nous donnons un exemple intéressant dans ce numéro. Signalons déjà que si E est un fibré vectoriel sur $X \in \underset{\sim}{V}$, alors la connaissance des $c_i = c_i(E)$ détermine complètement la structure de l'anneau $A(P(E))$ quand $A = A(X)$ est supposé connu, car on aura manifestement :

$$A(P(E)) \simeq A[\xi]/A[\xi].(\xi^p + c_1\, \xi^{p-1} + \dots + c_p)$$

C'est ce résultat que nous allons généraliser ici.

Soit V un espace vectoriel de dimension p sur $\underline{k}$. Soit

$$\pi = (p_1\ , \dots , p_k)$$

une suite de k entiers > 0 , de somme p . Un drapeau de type π de V est une suite croissante $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = V$ de sous-espaces vectoriels de V , avec $\dim V_i = p_1 + \dots + p_i$. L'ensemble $D_\pi(V)$ des drapeaux de type π de V est un espace homogène sous le groupe $Gl(V)$ des automorphismes de V . Si H est le stabilisateur d'un drapeau de type π , on voit aussitôt que H est un sous-groupe fermé de $Gl(V)$ contenant un groupe de Borel (groupe des matrices triangulaires), et l'on explicite facilement une section rationnelle de $Gl(V)$ fibré par H . On peut alors munir $D_\pi(V)$ de la structure algébrique d'espace homogène, qui fait de $D_\pi(V)$ une variété complète. (On montre facilement que cette variété est rationnelle, et même "spéciale" au sens de l'exposé 2, mais nous n'aurons pas besoin de ces faits). Plus généralement on déduit de ce qui précède que si E est un fibré vectoriel sur un espace algébrique X , on peut définir alors le fibré $D_\pi(E)$ des drapeaux de type π de E . C'est un fibré algébrique localement trivial sur X , dont la fibre en un point $x \in X$ est la variété $D_\pi(E_x)$ des drapeaux de type π de la fibre E_x de E en x . Prenant $\pi = (1\ , p - 1)$, on trouve $P(E)$, faisant $\pi = (\underbrace{1\ , \dots , 1}_{p})$

on trouve le fibré en drapeau usuel $D(E)$, enfin faisant $\pi = (m , n)$ (avec $m + n = p$) on trouve le fibré en variétés grassmaniennes de type (m , n) associé à E .

Supposons de nouveau π quelconque. Soit f la projection de $D_\pi(E)$ sur X . Alors le fibré vectoriel $f^{-1}(E)$ sur $D_\pi(E)$ admet une suite canonique croissante de sous-fibrés vectoriels $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k = E$, E_i étant de rang $p_1 + \dots + p_i$. Soit $F_i = E_i/E_{i-1}$ $(1 \leq i \leq k)$ (en posant E_0 = sous-fibré nul de E). Posons (supposant X et $D_\pi(E)$ dans $\underset{\sim}{V}$) :

(19) $$c_i^{(j)} = c_i(F_j) \in A^i(D_\pi(E)) \qquad (1 \leq j \leq k\ ,\ \ 1 \leq i \leq p_j)$$

Ces éléments de $A(D_\pi(E))$ sont liés par la relation $c(f^{-1}(E)) = \prod_j c(F_j)$, i.e.

(20) $$\sum c_i = \prod_{1 \leq j \leq k} \Big(\sum_{1 \leq i \leq p_j} c_i^{(j)} \Big)$$

où on pose $c_i = c_i(E)$, et où (conformément à l'usage quand on est en présence d'une algèbre sur un anneau de base $A(X)$) on écrit aussi c_i pour l'élément de la $A(X)$-algèbre $A(P(X))$ correspondant à l'élément c_i de $A(X)$. Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> $X \in \underset{\sim}{V}$, E <u>un fibré vectoriel de rang</u> p <u>sur</u> X , $D_\pi(E)$ <u>le fibré en drapeaux de type</u> $\pi = (p_1 , \dots , p_j)$ <u>associé à</u> E , $c_i = c_i(E)$ $(1 \leq i \leq p)$ <u>les classes de Chern de</u> E . <u>On suppose</u> $D_\pi(E) \in \underset{\sim}{V}$. <u>Sous ces conditions, les éléments</u> (19) <u>engendrent la</u> $A(X)$-<u>algèbre</u> $A(D_\pi(E))$, <u>et les</u> p <u>relations homogènes entre les</u> $c_i^{(j)}$ <u>déduites de</u> (20) <u>engendrent l'idéal des relations de ces générateurs</u>.

Nous nous servirons du lemme suivant, de nature purement algébrique :

LEMME 1. - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif avec unité</u>, p <u>un entier</u> >0 , (c_i) $(1 \leq i \leq p)$ <u>une famille d'éléments de</u> A , <u>soit</u> C <u>la</u> A-<u>algèbre engendrée par des générateurs</u> ξ_i $(1 \leq i \leq p)$ <u>soumis aux relations</u>

$$\sigma_i(\xi_1 , \dots , \xi_p) = c_i \qquad (1 \leq i \leq p)$$

<u>où les</u> σ_i <u>désignent les fonctions symétriques élémentaires. Soient</u> $p_1 , \dots p_k$ <u>des entiers</u> >0 , <u>de somme</u> p , <u>et soit pour</u> $1 \leq j \leq k$

$$\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)} , \dots , \xi_{p_j}^{(j)})$$

avec

$$\xi_i^{(j)} = \xi\left(\sum_{\alpha < j} p_\alpha\right) + i \quad .$$

Posons

$$c_i^{(j)} = \sigma_i(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{p_j}^{(j)}) \quad (1 \leq j \leq k \, , \quad 1 \leq i \leq p_j)$$

et soit B la sous-algèbre de C engendrée par les $c_i^{(j)}$. Alors :

i. Les éléments de la forme

$$(\xi^{(1)})^{\alpha(1)} \ldots (\xi^{(k)})^{\alpha(k)} \quad ,$$

avec

$$0 \leq \alpha(j) = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{p_j}^{(j)}) \leq (p_j - 1 \, , \, p_j - 2 \, , \ldots , 1 \, , 0)$$

forment une base de C considéré comme module sur B .

ii. Les générateurs $c_i^{(j)}$ de la A-algèbre B satisfont aux p relations isobares déduites de la relation

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq p} c_i\right).1_B = \prod_{1 \leq j \leq k} \left(\sum_{1 \leq i \leq p_j} c_i^{(j)}\right)$$

(c_i et $c_i^{(j)}$ étant affecté du poids i), et ces p relations engendrent l'idéal des relations entre les $c_i^{(j)}$.

Faisant en particulier $k = 1$, on obtient le

COROLLAIRE. - Les éléments de C de la forme

$$\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq p - i)$$

forment une base de C considéré comme module sur A .

Prouvons (i). Montrons d'abord que les éléments envisagés dans (i) engendrent le B-module C , en utilisant seulement le fait que C est une B-algèbre engendrée par des groupes de variables $\xi^{(j)}$ $(1 \leq j \leq k)$ tels que les fonctions symétriques élémentaires par rapport aux variables de chaque groupe proviennent d'un élément de B . Une récurrence immédiate sur k nous ramène au cas où $k = 1$, i.e. au cas envisagé dans le corollaire. Dans ce cas, on procède par récurrence sur p, l'assertion étant triviale si $p = 1$. Si $p > 1$, on vérifie aussitôt par récurrence sur i, à l'aide des formules

$$\sigma_i(\xi_1, \dots, \xi_p) = \xi_1 \ \sigma_{i-1}(\xi_2, \dots, \xi_p) + \sigma_i(\xi_2, \dots, \xi_p)$$

que les fonctions symétriques élémentaires en $\xi_2, \dots, \xi_p$ sont dans la sous-algèbre $A[\xi_1]$, donc (par hypothèse de récurrence) C est engendré en tant que module sur $A[\xi_1]$ par les éléments de la forme $\xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}$ avec $0 \leq \alpha_i \leq p - i$. D'autre part, la formule $\prod(\xi_1 - \xi_i) = 0$ donne

$$\xi_1^p - c_1 \xi_1^{p-1} + \dots + (-1)^p c_p = 0$$

ce qui montre que $A[\xi_1]$ est engendré en tant que A-module par les éléments $\xi_1^{\alpha_1}$ $(0 \leq \alpha_1 \leq p - 1)$. Il en résulte que les éléments de la forme envisagée dans le corollaire engendrent bien le A-module C. Prouvons maintenant que les éléments envisagés dans (i) forment même une <u>base</u> du B-module C. Pour ceci, soient A_o, B_o, C_o les anneaux définis comme A, B, C, mais à partir de l'anneau de polynômes $A_o = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_p]$ et des éléments σ_i dudit anneau. Il est alors immédiat que C se déduit de C_o par extension des scalaires de la A_o-algèbre C_o, compte tenu de l'homomorphisme d'anneaux de A_o dans A qui envoie σ_i sur c_i. De plus, B s'identifie alors à la sous-algèbre de C engendrée par B_o. Il s'ensuit aussitôt qu'il suffit de prouver (i) pour le B_o-module C_o : en effet, il en résultera alors que B_o est facteur direct dans C_o (en tant que B_o-module et a fortiori en tant que A_o-module), donc B est aussi l'algèbre déduite de B_o en étendant les scalaires à A, donc une base de C_o sur B_o définit une base de C sur B. Prouvons donc (i) dans le cas particulier envisagé. On constate aussitôt que C_o est l'anneau des polynômes en $\xi_1, \dots, \xi_p$ (à coefficients entiers), A_o s'identifiant au sous-anneau formé des polynômes par rapport aux $\sigma_i = \sigma_i(\xi_1, \dots, \xi_p)$, i.e. l'ensemble des invariants du groupe symétrique S_p. De même, il est bien connu que B_o est l'ensemble des invariants du sous-groupe $G = S_{p_1} \times \dots \times S_{p_k}$ de S_p. Il en résulte que le corps des quotients de B_o est l'ensemble des invariants, sous G, du corps des quotients de C_o. Appliquant la théorie de Galois, on trouve que le rang de C_o sur B_o est égal à l'ordre de G, c'est-à-dire à $p_1! \dots p_k!$. C'est aussi le nombre des générateurs envisagés dans (i), donc il n'y a aucune relation non triviale entre ces générateurs.

Prouvons (ii). Les p relations envisagées sont bien vérifiées dans B , car elles reviennent à l'identité de polynômes en une indéterminée t , à coefficients dans B

$$(*) \qquad \sum_{1\leq i\leq p} c_i\, t^i = \prod_{1\leq j\leq k} \Big(\sum_{1\leq i\leq p_j} c_i^{(j)}\, t^i \Big)$$

qui s'écrit aussi, en tant qu'identité entre polynômes à coefficients dans C :

$$\prod_{1\leq i\leq p} (1 + t\,\xi_i) = \prod_{1\leq j\leq k} \Big(\prod_{1\leq i\leq p_j} (1 + t\,\xi_i^{(j)}) \Big)$$

et qui est donc manifestement vérifiée. Soit alors B' la A-algèbre engendrée par des générateurs $c_i'^{(j)}$ soumis aux seules relations $(*')$ déduites de $(*)$, quand on y remplace les $c_i^{(j)}$ par $c_i'^{(j)}$. Soit C' la B'-algèbre engendrée par des générateurs $\xi_i'^{(j)}$ $(1\leq j\leq k\ ,\ 1\leq i\leq p_j)$ soumis aux seules relations $\sigma_i(\xi_1'^{(j)}, \ldots, \xi_{p_j}'^{(j)}) = c_i'^{(j)}$ $(1\leq j\leq k\ ,\ 1\leq i\leq p_j)$, qui peuvent aussi s'écrire

$$\prod_{1\leq i\leq p_j} (1 + t\,\xi_i'^{(j)}) = \sum_{1\leq i\leq p_j} c_i'^{(j)}\, t^i$$

Ces relations, jointes à $(*')$, montrent que l'on a $c_i = \sigma_i(\xi_1', \ldots, \xi_p')$. Par suite, il existe un homomorphisme de A-algèbres unique de C dans C' qui transforme ξ_i en ξ_i' . Cet homomorphisme induit un homomorphisme de B sur la sous-algèbre de C' engendrée par les $\sigma_i(\xi_1'^{(j)}, \ldots, \xi_{p_j}'^{(j)})$, i.e. par les $c_i'^{(j)}$, laquelle sous-algèbre s'identifie à B' lui-même. On a donc un homomorphisme de B sur B' transformant $c_i^{(j)}$ en $c_i'^{(j)}$; comme on a aussi (par définition de B') un homomorphisme de B' sur B , transformant $c_i'^{(j)}$ en $c_i^{(j)}$, on conclut que ces deux homomorphismes sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre en particulier $B' \to B$ est injectif, ce qui prouve (ii). Le lemme est démontré

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1. Envisageons d'abord le cas particulier $\pi = (1 , \ldots , 1)$, alors l'énoncé est le suivant :

COROLLAIRE 1 au théorème 1. - <u>Soient</u> $X \in \underset{\sim}{V}$, E <u>un fibré vectoriel sur</u> X , $D(E)$ <u>le fibré en drapeaux de</u> E , $\xi_1 , \ldots , \xi_p$ <u>les classes dans</u> $A^1(D(E))$ <u>des facteurs qui interviennent dans le scindage canonique du fibré vectoriel sur</u>

$D(E)$ image réciproque de E. Alors $A(D(E))$ est la $A(X)$-algèbre engendrée par les ξ_i, soumis aux seules relations

$$\sigma_i(\xi_1, \ldots, \xi_p) = c_i(E) \quad .$$

En effet, cette relation étant bien vérifiée en vertu de l'additivité des classes de Chern, il reste seulement à prouver, compte tenu du corollaire au lemme, que les éléments de $A(D(E))$ de la forme

$$\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \quad (0 \leq \alpha_i \leq p - i)$$

forment une base du $A(X)$-module $A(D(E))$. On procède par récurrence sur p, l'assertion étant triviale si $p = 1$. Soient X' le fibré projectif associé à E, E' le fibré vectoriel sur X' image réciproque de E, F_1' le sous-fibré de rang 1 canonique de E', et $F' = E'/F_1'$. Alors $D(E)$ s'identifie au fibré $D(F')$ sur X', et les éléments $\xi_2, \ldots, \xi_p$ de $A(D(E))$ s'identfient aux éléments fondamentaux dans $A(D(F'))$. D'après l'hypothèse de récurrence, les $\xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}$ $(1 \leq \alpha_i \leq p - i)$ forment une base de $A(D(F'))$ sur $A(X')$, tandis qu'en vertu de l'axiome (I.11), les éléments $\xi_1^{\alpha_1}$ $(1 \leq \alpha_1 \leq p - 1)$ forment une base de $A(X')$ sur A. Par suite, les éléments $\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}$ $(1 \leq \alpha_i \leq p - i)$ forment une base de $A(D(F')) = A(D(E))$ sur $A(X)$, ce qui prouve le corollaire 1.

Prouvons maintenant le théorème 1 dans le cas général. On peut considérer $D(E)$ comme fibré au-dessus de $D_\pi(E)$, et de façon précise $D(E)$ s'identifie au produit fibré sur $D_\pi(E)$ des fibrés en drapeaux $D(F_1), \ldots, D(F_k)$ sur $D_\pi(E)$. Il en résulte (à l'aide du corollaire 1 déjà prouvé, par une récurrence immédiate sur k) que $C = A(D(E))$, considéré comme module sur $B' = A(D_\pi(E))$, admet une base formée des éléments de la forme envisagée dans le lemme 1 (i), en désignant par $\xi_i^{(j)}$ $(1 \leq i \leq p_j)$ les éléments de $A(D(E))$, classes des facteurs qui interviennent dans le scindage canonique de l'image inverse, sur $D(E)$, du fibré F_j sur $D_\pi(E)$. En particulier, B s'identifie à un sous-anneau de C ; d'ailleurs la structure de C est celle exprimée dans le corollaire 1. D'ailleurs les $\xi_i^{(j)}$ ne sont autres que les $\xi_\ell \in A(D(E))$, comme on le constate aussitôt. D'autre part, il résulte de l'additivité des classes de Chern que l'on a

$c_i^{(j)} = \sigma_i(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{p_j}^{(j)})$. Posons $A = A(X)$, on voit donc que B contient la sous-A-algèbre B' de C engendré par les $c_i^{(j)}$. Prouvons que $B = B'$. En effet, en vertu du lemme, (i), on a dans C un système d'éléments qui est une base à la fois pour la structure de B-module et de B'-module, cela implique $B = B'$. Ainsi les $c_i^{(j)}$ engendrent la A-algèbre $B = A(D_\pi(E))$. L'idéal des relations entre ces générateurs est de plus donné par le lemme 1 (ii). Cela achève la démonstration.

REMARQUES.

1° Comme dans le paragraphe précédent, il y aurait intérêt à énoncer le théorème 1 dans le contexte anticommutatif.

2° Le théorème 1 donne en particulier la structure de $D_\pi(V)$ pour un espace vectoriel V . On retrouve en particulier l'anneau associé à une variété grassmanienne. On notera que le résultat obtenu est indépendant de la théorie des intersections choisie, et ne dépend que de l'anneau de base Λ .

3° Lorsque Λ contient le corps des rationnels, il existe un théorème plus général que le théorème 1, permettant lorsque l'on a un fibré algébrique principal P sur X , de groupe structural un groupe linéaire connexe G , et un sous-groupe H de G contenant un sous-groupe de Borel, de calculer $A(P/H)$ connaissant $A(X)$ et les "classes caractéristiques" du fibré P . Lorsque Λ ne contient pas $\underset{\sim}{Q}$, par exemple $\Lambda = \underset{\sim}{Z}$, un tel énoncé ne peut plus exister pour tout G , à cause des phénomènes de "torsion" qui seront examinés dans un exposé ultérieur.

4° Pour énoncer le théorème 1, nous avons dû nous placer dans une théorie où les $A(X)$ étaient gradués. Indiquons rapidement les résultats correspondants lorsque $A(X)$ est l'anneau $\underset{\sim}{K}(X)$ des classes de faisceaux sur X ($\underset{\sim}{V}$ étant la catégorie de tous les espaces algébriques non singuliers), tel qu'il est défini dans [1]. Soient E un fibré vectoriel de rang p sur $X \in \underset{\sim}{V}$, et soit $\ell_E = \gamma(L_E) \in \underset{\sim}{K}(P(E))$ la classe du fibré vectoriel L_E . C'est donc un élément inversible de $\underset{\sim}{K}(P(E))$. On déduit de la formule de Künneth, et de la structure cohomologique connue d'un espace projectif (cf. FAC [5])que l'on a les formules suivantes (où f est la projection $P(E) \rightarrow X$) :

$$(21) \qquad \begin{cases} f_!(\ell_E^i) = 0 & \text{si} \quad -(p-1) \leq i \leq 0 \\ f_!(\ell_E^0) = f_!(1_{P(E)}) = 1_X \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt, comme dans la proposition 1, que les

$$\ell_E^i \qquad (0 \leq i \leq p-1)$$

sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{K}(X)$. D'autre part, le fibré $f^{-1}(E) \otimes L_E$ sur $P(E)$ contient un sous-fibré de rang 1 trivial, d'où résulte (en vertu de la formule d'additivité pour λ_t) que $\lambda_{-1}(f^{-1}(E) \otimes L_E) = 0$, ce qui s'écrit aussi

$$(22) \quad \lambda_{-1}(E\ell_E) = 1 - E\,\ell_E + \lambda^2(E)\ell_E^2 + \dots + (-1)^p\,\lambda^p(E)\ell_E^p = 0$$

et permet de calculer ℓ_E^p comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\underset{\sim}{K}(X)$) les ℓ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$, compte tenu que $\lambda^p(E)$ est un élément inversible de $\underset{\sim}{K}(X)$. D'autre part, utilisant les résultats des paragraphes 4,5,6, on prouve que les ℓ_E^i forment un système de générateurs de $\underset{\sim}{K}(P(E))$ considéré comme module sur $\underset{\sim}{K}(X)$. Donc ils forment même une base. Compte tenu de (22), cela détermine la structure d'anneau de $A(P(E))$ connaissant le λ-anneau $\underset{\sim}{K}(X)$ et l'élément E de $\underset{\sim}{K}(X)$. Sa structure de λ-anneau est aussi déterminée, tenant compte de $\lambda_t(\ell_E) = 1 + \ell_E\, t$.

Utilisant le résultat précédent, et procédant comme pour le théorème 1, (par utilisation du lemme), on trouve que plus généralement $\underset{\sim}{K}(D_\pi(E))$ est le λ-anneau engendré au-dessus du λ-anneau $\underset{\sim}{K}(X)$ par les générateurs f_j $(1 \leq j \leq k)$ classes des fibrés vectoriels F_i , les seules relations entre ces générateurs étant celles déduites (au sens de la théorie des λ-anneaux) des relations

$$(23) \quad \begin{cases} \lambda^i(f_j) = 0 & \text{si} \quad i > p_j \\ f_1 + \dots + f_k = E \end{cases}$$

On peut dire aussi qu'en tant que $\underset{\sim}{K}(X)$-algèbre, $\underset{\sim}{K}(D_\pi(E))$ est engendrée par les générateurs

$$\lambda^i(f_j) \quad (1 \leq j \leq k\,,\ 1 \leq i \leq p_j)$$

soumis aux p relations résumées dans la formule

$$(24) \quad \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda^i(E)t^i = \prod_{1 \leq j \leq k} \Big(\sum_{1 \leq i \leq p_j} \lambda^i(f_j)t^i \Big) .$$

4. Les axiomes d'exactitude et d'homotopie.

Dans les trois paragraphes qui suivent, nous allons examiner des propriétés spéciales au cas où les groupes $A(X)$ sont des groupes de classes de cycles en géométrie algébrique. Par ailleurs, pour les paragraphes 4 et 5, nous n'aurons besoin que d'une partie de l'axiomatique développée dans le paragraphe 1, que nous allons expliciter maintenant. La généralité ainsi gagnée sur le paragraphe 1 n'est d'ailleurs pas illusoire, car les résultats obtenus s'appliqueront aussi aux divers groupes de classes de cycles (pour l' équivalence rationnelle, ou algébrique, ou des "classes de faisceaux") sur des espaces algébriques quelconques, (singuliers ou non).

Nous supposons donnée une catégorie $\mathbf{V}$ d'espaces algébriques, satisfaisant aux conditions suivantes :

(V.3) Si $X \in \mathbf{V}$, tout espace algébrique isomorphe à une partie ouverte de X , ou à un sous-espace fermé non singulier de X , est aussi dans $\mathbf{V}$; si X et Y sont dans $\mathbf{V}$, alors $X \times Y$ est dans $\mathbf{V}$; $\mathbf{V}$ contient la droite affine $\mathbf{k}$.

On suppose de plus qu'on a les données (a), (b), (c), (d) du paragraphe 1, avec cependant les restrictions suivantes : f^* n'est défini que si le morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathbf{V}$ est un isomorphisme de X sur une partie ouverte de Y ; f_* n'est défini que si f est un isomorphisme de X sur une partie fermée de Y. Par ailleurs, on suppose que les lois fonctorielles $(gf)^* = f^* g^*$, $(gf)_* = g_* f_*$ et les lois analogues pour l'application identique, soient satisfaites. De plus, on suppose donné, pour tout $X \in \mathbf{V}$, un élément 1_X dans $A(X)$. On suppose satisfaits, relativement à ces données, les axiomes **(I.1)** à **(I.7)** du paragraphe 1, ainsi que les formules (2) dudit paragraphe, donnant le formalisme impliquant les "éléments unités" 1_X .

De plus, nous supposerons les deux axiomes plus spéciaux suivants satisfaits :

(E) (Axiome d'exactitude). Soient $X \in \mathbf{V}$, Y une partie fermée de X appartenant à $\mathbf{V}$, U son complémentaire ouvert, $i : Y \to X$ et $j : U \to X$ les morphismes d'injection. Alors la suite d'homomorphismes suivante

$$A(Y) \xrightarrow{i^*} A(X) \xrightarrow{j_*} A(U) \to 0$$

est exacte.

(H) (Axiome d'homotopie rationnelle). Soit $X \in \mathbf{V}$, alors l'application

$x \to x \times 1_{\mathbf{k}}$ de $A(X)$ dans $A(X \times \mathbf{k})$ est surjective.

(N.B.- Dans tous les cas rencontrés où cet axiome est valable, on peut même prouver que l'application envisagée est bijective ; mais nous n'aurons pas besoin de ce fait).

Dans les deux prochains paragraphes, nous n'utiliserons directement que ces deux axiomes. Cependant, pour les établir dans les cas particuliers que nous avons en vue, nous vérifierons dans ces cas l'axiome **(Z)** de nature auxiliaire ci-dessous, et un affaiblissement **(HD)** de l'axiome d'homotopie, axiomes dont la vérification n'offrira pas de difficultés. Nous envisageons donc les axiomes auxiliaires suivants ; (dont le premier exprime essentiellement que $A(X)$ est bien un groupe de *classes de cycles* sur X) :

(Z) Soient $X \in \mathbf{V}$ irréductible non singulier de dimension n, et $x \in A(X)$ tel que $\varepsilon(x) = 0$. Alors il existe une partie fermée R de X de dimension $\leq n-2$, une hypersurface non singulière V dans $X' = X - R$ et un élément x' de $A(V)$, tels que l'on ait $j^*(x) = i_*(x')$, où $j : X' \to X$ et $i : V \to X'$ sont les morphismes d'injection.

(HD) (*Axiome d'homotopie pour les diviseurs*). Soient $X \in \mathbf{V}$, V irréductible non singulière, Y une hypersurface non singulière de X telle que le diviseur défini par Y soit linéairement équivalent à 0. i l'injection de Y dans X. Alors on a $i_*(1_Y) = 0$.

PROPOSITION 5. - *L'axiome d'exactitude* **(E)** *joint aux axiomes* **(Z)** *et* **(HD)** *ci-dessus implique l'axiome d'homotopie* **(H)**.

On prouvera l'énoncé **(H)** par récurrence sur $n = \dim X$, l'énoncé étant trivial si $n < 0$. Supposons donc $n \geq 0$, et l'énoncé prouvé pour les valeurs strictement inférieures de la dimension. Soient Y un sous-espace fermé quelconque de X, Y' l'ensemble de ses singularités, $U = X - Y$, $U' = X - Y'$, $Y_1 = U' - U = Y - Y'$, soient $i : Y_1 \to U'$ et $j : U \to U'$ les injections canoniques, et $\bar{i} : Y_1 \times \mathbf{k} \to U' \times \mathbf{k}$ et $\bar{j} : U \times \mathbf{k} \to U' \times \mathbf{k}$ les injections correspondantes pour les produits avec $\mathbf{k}$, et considérons le diagramme suivant :

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccc}
A(Y_1) & \xrightarrow{i_*} & A(U') & \xrightarrow{j^*} & A(U) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle p^*_{Y_1}} & & \downarrow{\scriptstyle p^*_{U'}} & & \downarrow{\scriptstyle p^*_U} & & \\
A(Y_1 \times \mathbf{k}) & \xrightarrow{\bar{i}_*} & A(U' \times \mathbf{k}) & \xrightarrow{\bar{j}^*} & A(U \times \mathbf{k}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales désignent les produits cartésiens avex $1_{\mathbf{k}}$. Ce diagramme est commutatif en vertu de (I.1). Supposons dim $Y < n$, alors la première flèche verticale est surjective d'après l'hypothèse de récurrence. Considérons le diagramme suivant d'injections canoniques :

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbf{k} \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{k}"'] & U' \times \mathbf{k} \arrow[r, "\bar{k}'"] & X \times \mathbf{k} \end{tikzcd}$$

Soit enfin $x \in A(X \times \mathbf{k})$. Posons

$$\xi' = \bar{k}'^{*}(x) \in A(U' \times \mathbf{k}) \ , \quad \xi = \bar{j}^{*}(\xi') = \bar{k}^{*}(x) \in A(U \times \mathbf{k}) \ .$$

Avec ces notations, on a le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Supposons que</u> $\xi \in \operatorname{Im} p_U^{*}$, <u>alors</u> $\xi' \in \operatorname{Im} p_{U'}^{*}$.

Cela résulte aussitôt du diagramme (*), compte tenu de l'exactitude de la deuxième ligne (résultant de l'axiome (H)) et du fait que $p_{Y_1}^{*}$ est surjectif.

COROLLAIRE. - Supposons qu'on puisse trouver une partie fermée Y de X , de dimension $< n = \dim X$, telle que la "restriction" $\bar{k}^{*}(x)$ de x à $U \times \mathbf{k}$ (où $U = X - Y$) soit dans $\operatorname{Im} p_U^{*}$. Alors on a $x \in \operatorname{Im} p_X^{*}$.

En effet, du lemme 1 résulte que l'hypothèse sera encore vérifiée en remplaçant Y par l'ensemble Y' formé des points singuliers de Y . On voit ainsi de proche en proche qu'elle sera vraie aussi si on remplace Y par $\emptyset$, ce qui prouve le corollaire.

Le corollaire nous montre que, pour prouver $x \in \operatorname{Im} p_X^{*}$, on peut enlever de X tout sous-ensemble fermé de dimension $< n$" . En particulier on peut supposer X non singulière. Alors X est réunion disjointe de ses composantes irréductibles, et on peut se ramener au cas où X est irréductible (en utilisant (I.1) et (I.7)). Evidemment, la question est résolue si $x = 1_{X \times \mathbf{k}} = 1_X \times 1_{\mathbf{k}}$. Par suite, remplaçant x par $x - \varepsilon(x) 1_{X \times \mathbf{k}}$, et utilisant $\varepsilon(1_{X \times \mathbf{k}}) = 1$, on est ramené au cas où $\varepsilon(x) = 0$. Utilisons alors l'axiome (Z). Si R est la partie fermée de $X \times \mathbf{k}$, de dimension $\leq \dim(X \times \mathbf{k}) - 2 = n - 1$, qui intervient dans l'énoncé de cet axiome, alors l'adhérence de la projection de R sur X est de dimension $\leq n - 1$, on peut donc en vertu du corollaire précédent supposer que R est vide, donc qu'on a $x = i_{*}(x')$, où $i : V \to X \times \mathbf{k}$ est le morphisme d'injection d'une hypersurface non singulière fermée V de $X \times \mathbf{k}$ dans $X \times \mathbf{k}$, et x' un élément de $A(V)$. Soient V_i les composantes irréductibles de V. Utilisant (I.7), on voit que x est somme d'éléments provenant d'éléments x'_i des $A(V_i)$ ce qui nous ramène au cas où V est irréductible. Appliquant à nouveau (Z), on peut enfin se ramener au cas où x' est l'élément 1_V de $A(V)$. Admettons un instant le

LEMME 3. - *Soient* X *une variété non singulière,* D *un diviseur sur* $X \times \mathbf{k}$, *alors il existe un ouvert non vide* U *de* X *tel que le diviseur induit par* D *sur* $U \times k$ *soit linéairement équivalent à* 0.

Ce lemme nous ramène alors au cas où le diviseur défini par V est linéairement équivalent à 0. Mais dans ce cas, en vertu de (HD), $x = i_*(1_V)$ est nul, donc on a bien $x \in \operatorname{Im} p_X^*$.

Reste à prouver le lemme 2. On peut évidemment supposer X affine, D premier. Soit A l'anneau affine de X, alors D correspond à un idéal premier non nul minimal $\mathfrak{p}$ de $A[t]$ (t étant une indéterminée), et la conclusion du lemme signifie qu'il existe un $f \in A$, $f \neq 0$, tel que l'idéal $\mathfrak{p}.A_f[t]$ soit principal (où A_f est l'anneau des fractions de A de la forme gf^{-k}, avec $g \in A$). On peut évidemment supposer que la projection de D dans X est dense, ce qui signifie que $A \cap \mathfrak{p} = (0)$, ou encore $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, où S est l'ensemble des éléments de A différents de 0. Cela signifie aussi que $\mathfrak{p}$ est l'image réciproque d'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $A[t]S^{-1} = K[t]$, où $K = AS^{-1}$ désigne le corps des fractions de A. Comme $K[t]$ est principal, $\mathfrak{p}'$ admet un générateur P, que l'on peut supposer dans $A[t]$. Soit $\mathfrak{q} = P.A[t]$, on a $\mathfrak{p}S^{-1} = \mathfrak{q}S^{-1}$, i.e. $(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})S^{-1} = 0$, donc il existe $f \in S$ tel que $f(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 0$, i.e $(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})S_f^{-1} = 0$ (où S_f est la partie multiplicativement stable de A engendrée par f) ou encore $\mathfrak{p}S_f^{-1} = \mathfrak{q}S_f^{-1}$, en d'autres termes l'idéal $\mathfrak{p}S_f^{-1} = \mathfrak{p}.A_f[t]$ admet le générateur P. Cela achève la démonstration du lemme 2, donc de la proposition 5.

Notons maintenant que l'axiomatique envisagée au début de ce paragraphe est vérifiée manifestement quand on prend pour $\mathbf{V}$ la catégorie de tous les espaces algébriques non singuliers, $A(X)$ désignant le groupe des classes de cycles pour l'équivalence linéaire. (La définition de f^*, f_* sous les conditions indiquées, et celle du produit cartésien, de l'augmentation et de l'élément 1_X, étant évidente, ainsi que la vérification des axiomes (I.1) à (I.7) et des formules (2)). Ceci dit :

THÉORÈME 2. - <u>En théorie de l'équivalence linéaire dans la catégorie $\underset{\sim}{V}$ de tous les espaces algébriques non singuliers, les axiomes $(\underset{\sim}{E})$ et $(\underset{\sim}{H})$ d'exactitude et d'homotopie sont vérifiés.</u>

En effet, les axiomes $(\underset{\sim}{Z})$ et $(\underset{\sim}{HD})$ sont vérifiés trivialement. En vertu de la proposition 5, il reste donc à vérifier seulement l'axiome d'exactitude $(\underset{\sim}{E})$. Avec les notations de cet axiome, il est immédiat que j^* est surjective, car tout cycle sur U est la trace sur U d'un cycle sur X (obtenu en remplaçant les composantes irréductibles du cycle donné par leurs adhérences dans X). D'autre part on a évidemment $j^* i_* = 0$, il reste donc à montrer que le noyau de j^* est contenu dans l'image de i_*, ce qui va résulter du

LEMME 4. - <u>Soient X un espace algébrique non singulier, Y une partie fermée de X, $U = X - Y$, z un cycle sur X tel que la trace de z sur U soit linéairement équivalente à 0. Alors il existe un cycle z' dans X, linéairement équivalent à z, et dont le support est contenu dans Y.</u>

Par hypothèse il existe un cycle Z sur $U \times \underset{\sim}{k}$, tel que pour toute composante de Z, sa projection dans $\underset{\sim}{k}$ soit dense, et tel que l'on ait $z|U = Z(0) - Z(1)$ (avec les notations habituelles). Soit $\overline{Z}$ le cycle sur $X \times \underset{\sim}{k}$ obtenu en remplaçant les composantes irréductibles de Z par leurs adhérences dans $X \times \underset{\sim}{k}$. Alors les composantes irréductibles de $\overline{Z}$ ont encore une projection dense dans $\underset{\sim}{k}$, de plus $\overline{Z}|U \times \underset{\sim}{k} = Z$. Il en résulte aussitôt que $Z(t) = \overline{Z}(t)|U$ pour tout $t \in \underset{\sim}{k}$, d'où $Z(0) - Z(1) = (\overline{Z}(0) - \overline{Z}(1))|U$. Comme le premier membre est $z|U$, cette formule signifie que $z' = z - (\overline{Z}(0) - \overline{Z}(1))$ a une restriction à U qui est nulle, i.e. a son support dans Y. D'autre part z' est linéairement équivalent à z. Cela prouve le lemme 4.

REMARQUES. - Comme nous l'avons signalé plus haut, une théorie de l'équivalence linéaire des cycles, satisfaisant aux conditions indiquées au début de ce paragraphe, peut aussi se développer dans des espaces algébriques quelconques (pouvant avoir des singularités). En effet, si Z est un cycle sur un produit $X \times T$, où T est non singulière, alors il résulte de la théorie d'intersections développée par J.-P. SERRE dans son cours au Collège de France en 1958, que l'intersection $Z.(X \times t) = Z.p_2^{-1}(t)$ peut se définir comme un cycle sur $X \times T$, pourvu que la condition usuelle sur les dimensions d'intersections ensemblistes soient vérifiées (la formule de Serre fait intervenir une somme alternée de longueurs de modules Tor calculés sur les anneaux locaux de T). Ce cycle sera évidemment porté par $X \times t$, et sera donc de la forme $Z(t) \times t$, où t est un élément de T. Cela permet de définir les cycles linéairement équivalents à zéro sur X comme ceux qui sont de la forme $Z(0) - Z(1)$, où Z est un cycle sur $X \times \mathbf{k}$. Le théorème 2 sera valable alors dans la catégorie de tous les espaces algébriques (la démonstration donnée étant valable telle quelle). La même démonstration s'applique à l'équivalence algébrique. Enfin, les axiomes d'exactitude et d'homotopie sont aussi valables en théorie des groupes de classes de faisceaux, (cf. [1]). La démonstration utilise encore essentiellement la proposition 5, qui ramène à prouver l'axiome d'exactitude qui est une conséquence de propriétés de prolongement de faisceaux algébriques cohérents.

5. Application à certains espaces produits.

Dans ce paragraphe, nous supposons les conditions du début du paragraphe précédent satisfaites, ainsi que les axiomes $(\mathbf{E})$ et $(\mathbf{H})$.

PROPOSITION 6. - *Soient* $X \in \mathbf{V}$, U *un espace algébrique isomorphe à un ouvert d'un espace affine* $\mathbf{k}^n$. *Alors l'homomorphisme* $x \to x \times 1_U$ *de* $A(X)$ *dans* $A(X \times U)$ *est surjectif*.

On peut supposer que U est un ouvert de $\mathbf{k}^n$. En vertu de $(\mathbf{I.1})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A(X) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & A(X \times \mathbf{k}^n) \arrow[r] & A(X \times U) \end{tikzcd}$$

est commutatif, la deuxième flèche désignant l'homomorphisme de restriction. Comme ce dernier est surjectif en vertu de $(\mathbf{E})$, on est ramené au cas où $U = \mathbf{k}^n$. Si $n = 0$ l'assertion résulte de $(\mathbf{I.6})$, si $n = 1$ c'est l'axiome $(\mathbf{H})$, enfin pour $n > 1$ on le démontre par une récurrence immédiate, utilisant l'associativité du produit cartésien (axiome $(\mathbf{I.4})$).

PROPOSITION 7. - *Soient* $X \in \mathbf{V}$, $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$ *une suite croissante de parties fermées de* X *appartenant à* $\mathbf{V}$, *avec* $X_n = X$, $u_i : X_i \to X$ *et* $v_i : (X_i - X_{i-1}) \to X_i$ *les morphismes d'injection,* S_i *une partie de* $A(X_i)$. *Soit* $S = \bigcup u_{i*}(S_i) \subset A(X)$. *Supposons que pour tout* i, $v_i(S_i)$ *engendre le* Λ-*module* $A(X_i - X_{i-1})$. *Alors* S *engendre le* Λ-*module* $A(X)$.

(N.B. - On a posé $X_{-1} = \emptyset$, i.e. $X_0 - X_{-1} = X_0$). Démonstration par récurrence sur n, l'assertion étant triviale si $n = 0$. Supposons $n > 0$, et l'assertion démontrée pour les valeurs strictement inférieures de n. Soit, pour $0 \leq i \leq n-1$, $u'_i : X_i \to X_{n-1}$ le morphisme d'injection, et soit

$S' = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} u'_{i*}(S_i)$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence, appliquée à X_{n-1} et la suite des X_i $(0 \leq i \leq n-1)$ que S' engendre le Λ-module $A(X_{n-1})$. Considérons alors la suite :

$$A(X_{n-1}) \xrightarrow{(u_{n-1})_*} A(X_n) \xrightarrow{v_n^*} A(X_n - X_{n-1}) \longrightarrow 0$$

qui est exacte en vertu de (E). Comme $v_n^*(S_n)$ engendre le Λ-module $A(X_n - X_{n-1})$ et que S' engendre le Λ-module $A(X_{n-1})$, il s'ensuit aussitôt que $(u_{n-1})_*(S') \cup S_n$ engendre le Λ-module $A(X_n)$. Or ce système de générateurs n'est autre que S , comme on constate aussitôt.

En conjuguant les propositions 6 et 7, on obtient des informations sur l'engendrement de $A(X \times P)$ lorsque P admet une suite croissante $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ de parties fermées, telles que chaque $P_i - P_{i-1}$ soit isomorphe à une somme disjointe d'ouverts d'espaces affines. Le cas le plus simple et le plus important est le suivant :

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> P <u>un espace projectif de dimension</u> n , P_i $(0 \leq i \leq n)$ <u>une suite croissante de sous-espaces linéaires, avec</u> P_i <u>de dimension</u> i , <u>on suppose les</u> P_i <u>dans</u> V . <u>Soit</u> $X \in V$. <u>Alors tout élément de</u> $A(X \times P)$ <u>est somme d'éléments de la forme</u> $x \times p_P(P_i)$, <u>où</u> $x \in A(X)$ <u>et où on pose</u> $p_P(P_i) = w_{i*}(1_{P_i})$, w_i <u>étant le morphisme d'injection</u> $P_i \to P$.

On a $x \times p_P(P_i) = (id_X)_*(x) \times w_{i*}(1_{P_i}) = u_{i*}(x \times 1_{P_i})$, où $u_i = id_X \times w_i$ est le morphisme d'injection $X \times P_i \to X \times P$. Soit S_i l'ensemble des éléments de $A(X \times P_i)$ de la forme $x \times 1_{P_i}$. On veut donc prouver que $S = \cup u_{i*}(S_i)$ engendre le Λ-module $A(X \times P)$, pour ceci on applique la proposition 7. L'hypothèse de cette proposition est vérifiée, car on aura $v_i^*(S_i)$ = ensemble des $x \times 1_{P_i - P_{i-1}} \in A(X \times (P_i - P_{i-1}))$. Or $P_i - P_{i-1}$ est un espace affine, donc en vertu de la proposition 6 on a $v_i^*(S_i) = A(X \times (P_i - P_{i-1}))$, cela démontre le corollaire.

6. <u>Application à certains espaces fibrés.</u>

Dans ce paragraphe, nous supposons à nouveau que l'axiomatique du paragraphe 1 est valable, et nous supposons de plus, comme dans le paragraphe précédent, que (V.3) et les axiomes (E) et (H) sont valables. (D'ailleurs, dans le théorème suivant, nous n'utilisons que (E)).

THÉORÈME 3. - Soient X un espace algébrique non singulier appartenant à $\underset{\sim}{V}$, E un espace algébrique non singulier, f un morphisme de E dans X tel que l'application tangente en chaque point soit surjective, S une partie de $A(E)$. On suppose la condition suivante satisfaite : pour toute partie localement fermée irréductible non singulière Y de X, $f^{-1}(Y)$ est dans $\underset{\sim}{V}$, et pour tout $x \in A(f^{-1}(Y))$ on peut trouver une partie ouverte non vide U de Y tel que $x|f^{-1}(U)$ soit dans le $A(U)$-module engendré par $i^{*}(S)$, où $i : f^{-1}(U) \to E$ est le morphisme d'injection. Sous ces conditions, S engendre $A(E)$ considéré comme module sur $A(X)$.

Utilisant (I.7), on est aussitôt ramené au cas où X est irréductible. On procède par récurrence sur $n = \dim X$, l'assertion étant triviale si $n = 0$. Supposons donc $n > 0$, et l'assertion démontrée pour les valeurs strictement inférieures de la dimension. Soit U une partie ouverte non vide de X, soient $Y = X - U$, Y' l'ensemble des singularités de Y, posons $U' = X - Y'$, $Y_1 = U' - U = Y - Y'$, $\overline{U} = f^{-1}(U)$, $\overline{U}' = f^{-1}(U')$, $\overline{Y}_1 = f^{-1}(Y_1)$. Soient $i : Y_1 \to U'$ et $j : U \to U'$ les morphismes d'injection, $\overline{i} : \overline{Y}_1 \to \overline{U}'$ et $\overline{j} : \overline{U} \to \overline{U}'$ les morphismes d'injection correspondants, enfin, désignons aussi par abus de langage, par f_1, f', f les morphismes $\overline{U} \to U$, $\overline{U}' \to U'$ et $\overline{Y}_1 \to Y_1$ induits par f. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
A(Y_1)^{(S)} & \xrightarrow{i_*} & A(U')^{(S)} & \xrightarrow{j^*} & A(U)^{(S)} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A(\overline{Y}_1) & \xrightarrow{\overline{i}_*} & A(\overline{U}') & \xrightarrow{\overline{j}^*} & A(\overline{U}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où la première flèche verticale est définie en utilisant la structure de $A(Y_1)$-module sur $A(Y_1)$ définie par l'homomorphisme d'anneaux $f_1^* : A(Y_1) \to A(\overline{Y}_1)$ et la famille d'éléments de $A(\overline{Y}_1)$, indexée par S, déduite du morphisme d'injection $\overline{Y}_1 \to E$ et de la partie S de $A(E)$. Les deux autres flèches verticales sont définies de la même manière. Le diagramme précédent est commutatif : c'est immédiat pour le deuxième carré, compte tenu de la transitivité des opérations g^*, et du fait que $\overline{j}^*$ est un homomorphisme d'anneaux ; pour le premier carré, on utilise la formule $f'^* i_* = \overline{i}_* f_1^*$ (paragraphe 1, proposition 2, corollaire 1) et la "formule de projection" (I.9) pour i. D'après l'hypothèse de récurrence, la première flèche verticale est surjective. Il s'ensuit, utilisant l'exactitude de la deuxième ligne, que si $x \in A(E)$ est tel que $x|\overline{U} = \overline{j}^*(x|\overline{U}')$ est dans l'image de $A(U)^{(S)}$, alors $x|\overline{U}'$ est dans l'image de $A(U')^{(S)}$. Or on peut toujours trouver, par hypothèse, un ouvert $U = X - Y$ tel que l'hypothèse précédente soit vérifiée. La même hypothèse sera donc encore vérifiée en remplaçant Y par l'ensemble Y' de ses singularités, puis Y' par $(Y')'$ etc., de sorte qu'on voit de proche en proche que ce sera vrai aussi pour $Y = \emptyset$, i.e. on a $x \in \operatorname{Im} \; (A(X)^{(S)})$, ce qui démontre le théorème 3.

COROLLAIRE 1. - Soient $X \in \underset{\sim}{V}$ un espace algébrique non singulier, E un espace fibré localement trivial sur X dont la fibre F est isomorphe à un ouvert U d'un espace affine, f la projection de E sur X. On suppose que pour toute partie localement fermée non singulière Y de X, $f^{-1}(Y)$ appartient à $\underset{\sim}{V}$. Sous ces conditions, $f^{*} : A(X) \rightarrow A(E)$ est surjectif.

Il suffit de vérifier que, prenant $S = (1_E)$, la dernière condition du théorème 3 est vérifiée. Or il suffit de prendre l'ouvert U assez petit pour que $f^{-1}(U)$ fibré sur U soit trivial, i.e. s'identifie au produit $U \times F$. Alors en effet l'homomorphisme $f^{*} : A(U) \rightarrow A(f^{-1}(U))$ est surjectif, en vertu de la proposition 6. Cela démontre le corollaire 1.

COROLLAIRE 2. - Soient $X \in \underset{\sim}{V}$ un espace algébrique non singulier, E un fibré vectoriel de rang p sur X, $P(E)$ le fibré projectif associé. On suppose qu'on est dans le cas gradué, i.e. que la théorie d'intersection envisagée satisfait aux conditions du paragraphe 2. Considérons la classe $\xi_E \in A^1(P(E))$ définie dans le paragraphe 2. Alors les ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$ engendrent le $A(X)$-module $A(P(E))$.

Soit S l'ensemble des ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$. Montrons que les conditions du théorème 3 sont satisfaites. Si Y est une partie localement fermée non singulière de X, alors la partie de $P(E)$ au-dessus de Y est le fibré projectif associé au fibré vectoriel sur Y induit par E ; comme $Y \in \underset{\sim}{V}$, il s'ensuit que ce dernier est dans $\underset{\sim}{V}$ en vertu de la condition $(\underset{\sim}{V.2})$ du paragraphe 2. Reste à vérifier la dernière condition du théorème 3. Avec les notations de ce théorème, on prendra la partie ouverte U de Y assez petite pour que le fibré induit sur U par E soit trivial. Cela nous ramène à prouver le corollaire 2 dans le cas où E est un fibré trivial $X \times V$ (V étant un vectoriel de dim p sur $\underset{\sim}{k}$). Dans ce cas $P(E) = X \times P(V)$, et un calcul fait au paragraphe 2 (dans la démonstration de la proposition 4) montre que $\xi_E^i = 1_X \times p_{P(V)}(P_{p-1-i})$, où on désigne par $(P_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ une suite croissante de sous-espaces linéaires de $P(V)$, P_i de dimension i. Par suite on a, pour $x \in A(X)$, $x\,\xi_E^i = x \times p_{P(V)}(P_{p-1-i})$.

D'après le corollaire à la proposition 7, les éléments de cette forme (pour $x \in A(X)$, $0 \leq i \leq p-1$) engendrent le Λ-module $A(X \times P(V))$, en d'autres termes les ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$ engendrent le $A(X)$-module $A(X \times P(V))$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Compte tenu de la proposition 4 du paragraphe 2, on voit donc que les ξ_E^i $(0 \leq i \leq p-1)$ forment une base du $A(X)$-module $A(P(E))$. En d'autres termes, sous les conditions envisagées dans ce paragraphe, l'axiome (I.11) du paragraphe 2 est vérifié. D'après le théorème 2, il en est ainsi en particulier en théorie de l'équivalence linéaire dans la catégorie des espaces algébriques non singuliers quasi-projectifs.

REMARQUES. - Sous les conditions du corollaire 1, il n'est pas toujours vrai que l'homomorphisme f^* soit bijectif. Il en est toutefois ainsi chaque fois que E admet une section régulière, comme on voit aussitôt. Il en est de même lorsque E est un fibré en fibres k^n , de groupe structural le groupe linéaire affine (même si E n'admet pas de section régulière) : on le démontre en considérant le fibré en espaces projectifs $\overline{E}$ obtenu en fermant projectivement les fibres de E , et en utilisant l'axiome (E) pour $\overline{E}$ et la partie ouverte E de $\overline{E}$, (dont le complémentaire est aussi un fibré en espaces projectifs). Utilisant le résultat précédent, on montre sans difficulté que si P est le fibré principal associé à un fibré vectoriel E de rang p sur X (donc P est justiciable du corollaire 1), alors f^* est un homomorphisme de $A(X)$ sur $A(P)$ dont le noyau est l'idéal de $A(X)$ engendré par les $c_i(E)$ $(1 \leq i \leq p)$. (En effet, si G est le groupe linéaire à p variables, T le tore maximal et $B \supset T$ le sous-groupe de Borel de G , alors P/B est la variété de drapeaux D(E) , donc $A(P/B)$ est connu, d'autre part P/T est un fibré affine sur P/B , donc $A(P/T)$ est isomorphe à $A(P/B)$, enfin pour calculer $A(P)$ à partir de $A(P/T)$ on est ramené à calculer $A(Q)$ lorsque Q est un espace fibré principal sur Y associé à un fibré vectoriel de rang 1 , ce qui n'offre pas de difficultés grâce au corollaire 1 et à l'axiome d'exactitude).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958 (à paraître).

[2] CHEVALLEY (Claude). - La notion de correspondance propre en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58, n° 152.

[3] GROTHENDIECK (Alexandre). - Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, n° 149.

[4] GROTHENDIECK (Alexandre). - La théorie des classes de Chern, Appendice au mémoire de Borel-Serre, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958 (à paraître).

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.