Séminaire Claude Chevalley

Claude Chevalley

Les classes d'équivalence rationnelle, II

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A3_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

5 mai 1958

LES CLASSES D'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE, II.

par Claude CHEVALLEY

1. Grassmaniennes.

Soit P un espace projectif de dimension $N > 0$. Pour $0 \leq n \leq N$, nous désignerons par G_n l'ensemble des variétés linéaires de dimension n de P. On définit sur G_n une structure de variété comme suit. L'espace P étant supposé être l'espace des sous-espaces de dimension 1 d'un vectoriel V de dimension $N + 1$, G_n peut s'identifier à l'ensemble dessous-espaces de dimension $n + 1$ de V. Soit W la puissance extérieure $(n + 1)$-ième de V ; il y a correspondance biunivoque entre G_n et l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de W qui sont engendrés par des éléments décomposables. Or l'ensemble des éléments décomposables de W est fermé. C'est évident si $n = N$. Si $n < N$, soit W' la puissance extérieure $(n + 2)$-ième de V ; pour qu'un élément w de W soit décomposable, il faut et suffit que le rang de l'application linéaire $y \longrightarrow y \wedge w$ de V dans W' soit $\leq N - n$; or les éléments de la matrice qui représente cette application par rapport à des bases fixes de V et W' sont des fonctions linéaires de w ; il en résulte bien que l'ensemble des éléments décomposables est fermé. Si Q est l'espace projectif associé à W, G_n s'identifie à une partie fermée de Q. L'ensemble G_n est de plus irréductible, car les opérations du groupe projectif de l'espace P fournissent un groupe d'automorphismes de Q qui permute transitivement entre eux les points de G_n.

Donnons-nous une base $(e_1, \ldots, e_{N+1})$ de V, et soit A le sous-espace engendré par $e_{n+2}, \ldots, e_{N+1}$; A définit une variété linéaire de dimension $N - n - 1$ dans P, soit A'. Si X est un sous-espace de dimension $n + 1$ de W tel que $X \cap A = \{0\}$, X admet une base $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ et une seule telle que $x_i \equiv e_i \pmod{A}$ $(1 \leq i \leq n + 1)$. Réciproquement, si on a $n + 1$ éléments $x_i \in V$ tels que $x_i \equiv e_i \pmod{A}$, $Kx_1 + \ldots + Kx_{n+1}$ est un espace de dimension $n + 1$ qui n'a que 0 en commun avec A ; si nous désignons la variété linéaire correspondante de P par $L(x_1, \ldots, x_{n+1})$, il est clair que l'application $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \longrightarrow L(e_1 + y_1, \ldots, e_{n+1} + y_{n+1})$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel A^{n+1} sur un morceau affine de G_n qui se

compose des variétés linéaires de dimension n de P qui ne rencontrent pas A'. Il en résulte en particulier que G_n est une variété spéciale.

Nous désignerons par J_n l'ensemble des couples $(L, x) \in G_n \times P$ tels que $x \in L$. Cet ensemble est fermé, comme il résulte tout de suite du fait que l'ensemble des $(w, y) \in W \times V$ tels que $w \wedge y = 0$ est fermé. Nous désignerons par p_n et q_n les restrictions à J_n des projections de $G_n \times P$ sur son premier et son second facteur. On va montrer que J_n est irréductible et que p_n est un morphisme fibrant. Utilisons les mêmes notations que ci-dessus et désignons par G_n^A l'ensemble des éléments $L \in G_n$ qui ne rencontrent pas A'. Soit $P(K^{n+1})$ l'espace projectif associé à K^{n+1}. Soit t l'application qui fait correspondre à tout couple formé d'un point $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in A^{n+1}$ et d'un point $z \in P(K^{n+1})$ de coordonnées homogènes $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ le couple formé de l'élément $L(e_1 + y_1, \ldots, e_{n+1} + y_{n+1})$ de G_n^A et de l'élément $K(c_1(e_1 + y_1) + \ldots + c_{n+1}(e_{n+1} + y_{n+1}))$ de $L(e_1 + y_1, \ldots, e_{n+1} + y_{n+1})$. Il est clair que t est une bijection de $A^{n+1} \times P(K^{n+1})$ sur $p_n^{-1}(G_n^A)$, et est un isomorphisme de la variété $A^{n+1} \times P(K^{n+1})$ sur une sous-variété de $G_n \times P$. On en conclut que $p_n^{-1}(G_n^A)$ est une variété, et qu'il y a un isomorphisme t' de $G_n^A \times P(K^{n+1})$ sur $p_n^{-1}(G_n^A)$ tel que $p_n(t'(L, z)) = L$ pour tout $L \in G_n^A$ et tout $z \in P(K^{n+1})$; nos assertions résultent immédiatement de là.

Soit Ω le complémentaire de J_n par rapport à $G_n \times P$; c'est l'ensemble des couples (L, x) tels que $x \notin L$. A chaque point (L, x) de Ω on peut faire correspondre la variété linéaire $f(L, x)$ de P, de dimension $n + 1$, engendrée par L et x. L'application f ainsi définie est un morphisme de Ω dans G_{n+1}, comme il résulte tout de suite du fait que $(w, y) \to w \wedge y$ est un morphisme de $W \times V$ dans la puissance extérieure $(n + 2)$-ième W' de V. En particulier, pour un L fixe, l'application $x \to f_L(x)$ qui fait correspondre à tout $x \in P - L$ la variété linéaire engendrée par L et x est un morphisme de $P - L$ dans G_{n+1}. De plus, G_{n+1} étant plongé dans l'espace projectif Q' associé à W', f_L est une application projective de $P - L$ dans l'espace Q', comme il résulte du fait que, pour w fixe, $y \to w \wedge y$ est une application linéaire de V dans W'.

Nous utiliserons aussi le fait bien connu que, si U est une sous-variété fermée de dimension $n < N$ de P, l'ensemble des variétés linéaires de dimension $N - n - 1$ qui rencontrent pas U est ouvert et non vide dans G_{N-n-1}.

2. Définition d'une opération sur les cycles.

Nous désignerons dans ce qui suit par P un espace projectif de dimension N et par U une sous-variété fermée de dimension $n < N$ de P, Si L est une variété linéaire de dimension $N - n - 1$ de P qui ne rencontre pas U, nous désignerons par f_L le morphisme de $P - L$ dans G_{N-n} qui fait correspondre à tout $x \in P - L$ la variété linéaire engendrée par x et L.

Soit A une sous-variété fermée de dimension a de U. Le cône projetant de A d'arête L est par définition la réunion des $f_L(x)$ pour $x \in A$; nous le désignerons par $\Theta_L(A)$. Montrons que c'est une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de P. Utilisant les notations introduites au n° 1, il est clair que l'on a $\Theta_L(A) = q_{N-n}(\bar{p}^{1}_{N-n}(f_L(A)))$. Puisque $L \cap U = \emptyset$, $f_L(x)$ n'a, pour tout $x \in U$, qu'un nombre fini de points communs avec U, de sorte que $\bar{f}^{1}_{L}(f_L(x))$ est fini ; il en résulte que $f_L(A)$ est une sous-variété fermée de dimension a de G_{N-n}. Comme p_{N-n} est une application fibrante, $\bar{p}^{1}_{N-n}(f_L(A))$ est une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de J_{N-n}. Montrons que la restriction de q_{N-n} à cette variété est un morphisme birationnel de $\bar{p}^{1}_{N-n}(f_L(A))$ sur $\Theta_L(A)$. Comme q_{N-n} est un morphisme propre, $\Theta_L(A)$ est une sous-variété fermée de P, manifestement $\neq L$. Il est clair que, si $(M, y) \in \bar{p}^{1}_{N-n}(f_L(A))$, $y \notin L$, on a $f_L(y) = M$ puisque $L \subset M$. Il en résulte que q_{N-n} induit une application bijective de $\bar{p}^{1}_{N-n}(f_L(A)) \cap (G_{N-n} \times (P - L))$ sur $\Theta_L(A) \cap (P - L)$, et que l'application réciproque de cette bijection est la restriction à $\Theta_L(A) \times (P - L)$ du morphisme $y \longrightarrow (f_L(y), y)$ de $P - L$ dans J_{N-n}, ce qui établit notre assertion. L'ensemble $\Theta_L(A)$ est donc bien une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de P.

Toute composante irréductible A' de $\Theta_L(A) \cap U$ est de dimension $\geqslant (N - n + a) + n - N = a$; par ailleurs, il est clair que le cône projetant $\Theta_L(A')$, de dimension $N - n + \dim A'$, est contenu dans $\Theta_L(A)$, d'où $\dim A' \leq a$, $\dim A' = a$. On déduit de là que l'intersection $\Theta_L(A).U$ est définie. Il est clair que A intervient avec un coefficient > 0 dans cette intersection.

Il résulte de ce que nous avons dit que, pour tout cycle X porté par U, $q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(X))).U$ est défini ; nous poserons

$$\rho_L(X) = q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(X))).U - X .$$

L'opération ρ_L est un endomorphisme du groupe des cycles portés par U, qui transforme tout cycle en un cycle de la même dimension. Si $X = A$, où A est une sous-variété fermée de U, on a $f_{L;\mathfrak{Z}}(A) = d_L(A)A$, où $d_L(A)$ est un entier > 0 égal au degré du morphisme de A sur $f_L(A)$ induit par f_L ; soit par ailleurs $e_L(A)$ la multiplicité avec laquelle A intervient dans $\Theta_L(A).U$. Comme p_{N-n} est un morphisme fibrant, on a $p^{-1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_L(A)) = \bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))$; comme la restriction de q_{N-n} à $\bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))$ est un morphisme birationnel de cette variété sur $\Theta_L(A)$, on a $q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))) = \Theta_L(A)$. On en conclut que le coefficient de A dans $\Theta_L(A)$ est $d_L(A)\, e_L(A) - 1$. En particulier, ρ_L transforme tout cycle $\geqslant 0$ en un cycle $\geqslant 0$.

Soit $\mathfrak{X}$ une famille algébrique de cycles tous portés par U, paramétrée par une variété T. Soit par ailleurs G^U_{N-n-1} l'ensemble des $L \in G_{N-n-1}$ qui ne rencontrent pas U ; c'est une sous-variété ouverte de G_{N-n-1}. La famille $(t, L) \to \rho_L(\mathfrak{X}(t))$ est alors une famille algébrique paramétrée par $T \times G^U_{N-n-1}$. Tenant compte des résultats de l'exposé précédent, et représentant $\mathfrak{X}$ comme différence de deux familles algébriques positives, on voit qu'il suffit de montrer que $(t, L) \to f_{L;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique de cycles de G_{N-n}. L'ensemble M des $(x, L) \in P \times G_{N-n-1}$ tels que $x \notin L$ est une sous-variété ouverte de $P \times G_{N-n-1}$, et l'application $\tilde{f} : (x, L) \to f_L(x)$ est un morphisme de M dans G_{N-n}. Il est clair que l'on a, si $t \in T$, $L \in G^U_{N-n-1}$,

$$F_{L;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t)) = f_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t) \times \{L\}) .$$

Or, $(t, L) \to \mathfrak{X}(t) \times \{L\}$ est une famille algébrique de cycles de M paramétrée par $T \times G^U_{N-n-1}$. Soit Z une composante irréductible du support de son cycle de définition ; elle est contenue dans la sous-variété N de $M \times T \times G^U_{N-n-1}$ composée des (x, L, t, L) tels que $x \in U$, $L \in G^U_{N-n-1}$. Comme U est une variété complète, on voit tout de suite que la restriction à N de l'application $(z, t, L) \to (\tilde{f}(z), t, L)$ $(z \in M)$ est un morphisme propre de N dans $G_{N-n} \times T \times G^U_{N-n-1}$. Tenant compte de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5 de l'exposé précédent, on voit que $(t, L) \to f_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t) \times \{L\})$ est une famille algébrique de cycles de G_{N-n}, ce qui démontre notre assertion.

Nous désignerons dans ce qui suit par $C(L)$ le contour apparent de U relativement à L ; c'est l'ensemble des points $x \in U$ tels que la variété linéaire tangente à U en x rencontre L. Cet ensemble contient tous les points singuliers de U, puisque, si x est un point singulier, la variété linéaire tangente à U en x est de dimension $> n$. Soit U_1 l'ensemble des points simples de U ; l'application qui fait correspondre à tout $x \in U_1$ la variété linéaire tangente à U en x est un morphisme de U_1 dans G_n. Par ailleurs, l'ensemble des $(M, L) \in G_n \times G_{N-n-1}$ tels que $M \cap L \neq \emptyset$ est fermé ; il en résulte que l'ensemble des $(x, L) \in U_1 \times G_{N-n-1}$ tels que $x \in C(L)$ est relativement fermé dans $U_1 \times G_{N-n-1}$, et par suite que l'ensemble des $(x, L) \in U \times G_{N-n-1}$ tels que $x \in C(L)$ est fermé.

LEMME 1. - <u>Soit</u> X <u>un cycle porté par</u> U, <u>et soit</u> x_o <u>un point de</u> $\operatorname{Supp} \rho_L(X)$ (<u>où</u> $L \in G^U_{N-n-1}$) ; <u>ou bien</u> $f_L(x_o) \cap \operatorname{Supp} X$ <u>contient un point</u> $\neq x_o$ <u>ou bien</u> $x_o \in C(L) \cap \operatorname{Supp} X$.

Désignons par E_o l'ensemble des couples $(x, x') \in U \times U$ tels que $x' \neq x$ et que la droite joignant x à x' rencontre L, i.e. que $x' \in f_L(x)$. Soit E l'adhérence de E_o ; comme f_L induit un morphisme de U dans G_{N-n}, on a $x' \in f_L(x)$ pour tout $(x, x') \in E$. Montrons que, si $x_1 \in U$ est tel que $(x_1, x_1) \in E$, on a $x_1 \in C(L)$. Le point (x_1, x_1) appartient à une composante irréductible E' de E ; comme E est l'adhérence de E_o, E' est l'adhérence d'une composante irréductible E'_o de E'. L'application $(x, x') \to f_L(x).U - x - x'$ est une famille algébrique de cycles de dimension 0 paramétrée par E' (proposition 4 de l'exposé précédent) ; de plus, on a $f_L(x).U - x - x' \geqslant 0$ pour tout $(x, x') \in E'_o$; il en résulte que cette relation est encore vraie pour tout $(x, x') \in E'$ (corollaire 2 à la proposition 1 de l'exposé précédent), donc que $f_L(x_1).U - 2x_1 \geqslant 0$. Tenant compte du critère de multiplicité 1, cela signifie que ou bien x_1 est singulier sur U (d'où $x_1 \in C(L)$) ou bien x_1 est simple sur U et $f_L(x_1)$ a une intersection de dimension $\geqslant 0$ avec la variété linéaire tangente à U en x_1, ce qui implique que cette dernière rencontre L.

L'ensemble $E \cap (\operatorname{Supp} X \times U)$ est une partie fermée de E ; soit H son image par la projection de $U \times U$ sur son second facteur. Il est clair que H contient tout point $x \in U$ tel que $f_L(x) \cap \operatorname{Supp} X$ contiennne un point $\neq x$, et que, si $x \in H$, ou bien $f_L(x) \cap \operatorname{Supp} X$ contient un point $\neq x$ ou bien $x \in C(L)$.

Ceci étant, il suffira évidemment de démontrer le lemme 1 dans le cas où X est une sous-variété fermée A de U. Le lemme 1 est vrai si $x_o \in H$; supposons donc que x_o n'appartienne pas à H. Soit A' une composante irréductible de $\operatorname{Supp} r_L(A)$ passant par x_o ; l'ensemble $A' - A' \cap H$ est relativement ouvert dans A' (car H est fermé) ; si x appartient à cet ensemble, $f_L(x)$ rencontre $\operatorname{Supp} X = A$ (puisque $x \in \operatorname{Supp} r_L(A) \subset \Theta_L(A)$) mais n'a aucun point $\neq x$ en commun avec A (puisque $x \notin H$) ; il en résulte que $f_L(x) \cap A = \{x\}$. On a donc $A' - A' \cap H \subset A$, d'où $A' = A$ (puisque $\dim A' = \dim A$). On en conclut que A intervient avec un coefficient > 0 dans $r_L(A)$, donc que l'un au moins des nombres $d_L(A)$, $e_L(A)$ (cf. ci-dessus) est > 1.

Supposons d'abord que $d_L(A) > 1$. Ce nombre est le degré du morphisme de A sur $f_L(A)$ induit par f_L ; soit f_L^A ce morphisme. Pour tous les points $x \in A - A \cap H$, l'image réciproque de $f_L(x)$ par f_L^A se compose du seul point x, puisque $f_L(x) \cap A = \{x\}$; le morphisme f_L^A ne peut donc être de degré > 1 que s'il est radiciel. Dans ce cas, si x est un point simple de A, l'application dérivée $D_x f_L^A$ de f_L^A en x a un noyau $\neq \{0\}$, ce qui signifie que le noyau $D_x f_L$ de l'application dérivée de f_L en x a des éléments $\neq 0$ en commun avec l'espace vectoriel tangent à A en x. Or, la variété G_{N-n} étant plongée dans un espace projectif Q au moyen des coordonnées plückeriennes, f_L est une application projective de $P - L$ dans Q ; il en résulte immédiatement que le noyau de $D_x f_L$ n'est autre que l'espace tangent à $f_L(x)$ en x. Comme ce noyau a des éléments $\neq 0$ en commun avec l'espace tangent à A en x, donc <u>a fortiori</u> avec l'espace tangent à U en x, on voit que la variété linéaire tangente à U en x a une intersection de dimension > 0 avec $f_L(x)$, donc rencontre L. Comme tous les points simples de A sont dans $C(L)$, on a $A \subset C(L)$, $x_o \in C(L)$.

Supposons maintenant que $e_L(A) > 1$. L'ensemble A_1 des points $x \in A$ qui sont simples sur la variété $\Theta_L(A)$ est relativement ouvert dans A. Montrons qu'il n'est pas vide. Soit y un point simple de $\Theta_L(A)$ n'appartenant pas à L ; comme $y \in \Theta_L(A)$, il y a un point $x \in A$ et un point $z \in L$ tel que x, y, z soient alignés. Comme $\Theta_L(A)$ est un cône de sommet z, x est simple sur $\Theta_L(A)$. Ceci étant, soit $x \in A_1$; supposons que x soit simple sur U. Il résulte du critère de multiplicité 1 et du fait que $e_L(A) > 1$ que la variété linéaire T_U tangente à U en x a une intersection de dimension $> \dim A$ avec la variété linéaire $T_{\Theta_L(A)}$ tangente à $\Theta_L(A)$ en x. Cette dernière est de dimension $\dim A + N - n$ et contient L ; il en résulte que

$T_U \cap L \neq \emptyset$; on a donc $A_1 \subset C(L)$, d'où $A \subset C(L)$, ce qui achève la démonstration du lemme 1 .

Nous supposerons données dans ce qui suit un certain nombre de sous-variétés $B_1 , \dots , B_m$ (non nécessairement fermées) de U qui ne rencontrent pas l'ensemble des points singuliers de U , ainsi que des nombres $\beta_1 \geqslant 0 , \dots , \beta_m \geqslant 0$; nous poserons $b_i = \dim B_i$. Si A est une sous-variété de U , nous noterons $\mathfrak{e}(A)$ le plus grand des nombres $\dim A \cap B_i - (\dim A + b_i - n) - \beta_i$ pour tous les i tels que $A \cap B_i \neq \emptyset$ (si tous les $A \cap B_i$ sont vides, nous posons $\mathfrak{e}(A) = 0$).

Si X est un cycle porté par U , nous désignerons par $\mathfrak{e}(X)$ le plus grand des nombres $\mathfrak{e}(A)$ pour toutes les variétés A qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans X . Soit $\mathfrak{X}$ une famille algébrique de cycles portés par U , paramétrée par une variété T ; montrons qu'il existe un nombre e et un seul tel que $\mathfrak{e}(\mathfrak{X}(t)) = e$ pour tous les points d'une partie ouverte non vide de T . L'unicité de e est évidente. Posons $\mathfrak{X} = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i$, les $\mathfrak{X}_i$ étant des familles irréductibles et les c_i des entiers $\neq 0$; il résulte de la proposition 1 de l'exposé précédent qu'il y a une partie ouverte non vide T_1 de T telle que, pour $t \in T_1$, les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans $\mathfrak{X}(t)$ soient exactement toutes celles qui interviennent avec un coefficient $\neq 0$ dans l'un au moins de $\mathfrak{X}_i(t)$, de sorte que $\mathfrak{e}(\mathfrak{X}(t)) = \sup \mathfrak{e}(\mathfrak{X}_i(t))$. Ceci montre qu'on peut se ramener au cas où $\mathfrak{X}$ est irréductible, donc définie par une sous-variété fermée Z de $U \times T$. Les composantes irréductibles de $Z \cap (B_i \times T)$ sont des sous-variétés C_{ij} de $U \times T$. Soit h_{ij} la restriction à C_{ij} de la projection $U \times T \longrightarrow T$. Pour tout i , on a

$$(\mathfrak{X}(t) \cap B_i) \times t = \bigcup_j \bar{h}^1_{ij}(t) \quad ;$$

il en résulte que, si a est la dimension commune des cycles $\mathfrak{X}(t)$, $\mathfrak{e}(\mathfrak{X}(t))$ est le plus grand des nombres $\dim \bar{h}^1_{ij}(t) - (a + b_i - n) - \beta_i$ pour ceux des $\bar{h}^1_{ij}(t)$ qui ne sont pas vides (0 si tous ces ensembles sont vides). Or, pour tout couple (i , j) , il y a une partie ouverte T_{ij} de T telle que ou bien $\bar{h}^1_{ij}(t) = \emptyset$ pour tous les $t \in T_{ij}$ ou bien, pour tous les $t \in T_{ij}$, $\bar{h}^1_{ij}(t)$ soit non vide et de dimension indépendante de t . L'intersection des T_{ij} est alors une partie ouverte non vide de T possèdant la propriété requise.

Nous noterons $e(\mathfrak{F})$ le nombre e dont nous venons d'établir l'existence et l'unicité ; nous l'appellerons l'<u>excès</u> de la famille $\mathfrak{F}$.

LEMME 2. - <u>Soit</u> X <u>un cycle porté par</u> U ; <u>l'excès de la famille</u> $L \longrightarrow \rho_L(X)$, <u>paramétrée par</u> G^U_{N-n-1} , <u>est</u> $\leq \max(e(X) - 1 , 0)$.

L'excès d'une combinaison linéaire de familles algébriques est évidemment au plus égal au plus grand des excès de ces familles ; par ailleurs, il y a un sous-variété fermée A de U qui intervient dans X avec un coefficient $\neq 0$ telle que $e(A) = e(X)$ (si $X \neq 0$) ; on peut donc se borner au cas où $X = A$ est une sous-variété fermée de U . Nous désignerons par Ω_i l'ensemble des points $(x , y , L) \in A \times B_i \times G_{N-n-1}$ qui possèdent les propriétés suivantes : on a $x \neq y$ et L rencontre la droite qui joint x à y (i.e. $f_L(x) = f_L(y)$) . Pour toute droite δ , l'ensemble des $L \in G_{N-n-1}$ qui rencontrent δ est fermé et de dimension $\dim G_{N-n-1} - n$. Il en résulte que, si $\Omega_i \neq \emptyset$, cet ensemble est de dimension $\leq \dim A + b_i + \dim G_{N-n-1} - n$. Il existe donc une partie ouverte non vide C_i de G_{N-n-1} telle que, pour tout $L \in C_i$, l'ensemble des $(x , y) \in A \times B_i$ tels que $(x , y , L) \in \Omega_i$ soit vide ou de dimension $\dim A + b_i - n$; si $L \in C_i$, l'ensemble $B_i(L)$ des $y \in B_i$ tels que $f_L(y)$ rencontre A un point $\neq y$ est donc vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$. Or il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\operatorname{Supp} \rho_L(A) \cap B_i \subset B_i(L) \cup (A \cap B_i \cap C(L)) .$$

Choisissons un point dans chaque composante irréductible de $A \cap B_i$; soient $x_1 , \dots , x_s$ les points ainsi obtenus ; ils sont simples sur U . Il en résulte immédiatement qu'il y a une partie ouverte non vide C'_i de G^U_{N-n-1} telle que, pour $L \in C'_i$, aucun des points $x_1 , \dots , x_s$ n'appartienne à $C(L)$; si donc $L \in C'_i$, $A \cap B_i \cap C(L)$ est vide ou de dimension $\leq \dim (A \cap B_i)$. Si $L \in C_i \cap C'_i$, $(\operatorname{Supp} \rho_L(A)) \cap B_i$ est vide ou de dimension au plus égale au plus grand des nombres $\dim A + b_i - n$, $\dim(A \cap B_i) - 1$. Il en résulte que si L appartient à l'intersection des C_i , C'_i pour tous les i , on a

$$e(\rho_L(A)) \leq \max(e(A) - 1 , 0) .$$

Nous désignerons dans ce qui suit par Γ le groupe projectif de l'espace P , et par Σ l'ensemble des $(s , L) \in \Gamma \times G^U_{N-n-1}$ tels que $s(L)$ ne rencontre pas U ; c'est une sous-variété ouverte de $\Gamma \times G^U_{N-n-1}$. Montrons que, si

$(s , L) \in \Sigma$, et si A est une sous-variété fermée de U , l'intersection $s(\Theta_L(A)).U$ est définie. En effet, $s(\Theta_L(A))$ est un cône d'arête $s(L)$ et de dimension $N - n + \dim A$. Si A' est une sous-variété de U contenue dans $s(\Theta_L(A))$, $\Theta_{s(L)}(A')$ est,, comme on l'a vu, de dimension $\dim A' + N - n$ et est contenu dans $s(\Theta_L(A))$, d'où $\dim A' \leq \dim A$, ce qui démontre notre assertion. Pour tout cycle X porté par U et pour tout $(s , L) \in \Sigma$, nous poserons

$$\tau_{s,L}(X) = s_{\mathcal{B}}(q_{N-n;\mathcal{B}}(\bar{p}^{-1}_{N-n;\mathcal{B}}(f_{L;\mathcal{B}}(X))).U .$$

Si $\mathfrak{X}$ est une famille algébrique de cycles portés par U , paramétrée par une variété T , $(s , L , t) \longrightarrow \tau_{s,L}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique paramétrée par $\Sigma \times T$. Pour le montrer, on peut évidemment se limiter au cas où $\mathfrak{X}$ est une famille $\geqslant 0$. Si $(s , L , t) \in \Sigma \times T$, posons

$$\mathcal{Y}(s , L , t) = q_{N-n;\mathcal{B}}(\bar{p}^{-1}_{N-n;\mathcal{B}}(f_{L;\mathcal{B}}(t))) \quad ;$$

on sait déjà que $\mathcal{Y}$ est une famille algébrique de cycles de P ; cette famille est positive, et $s_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y}(s , L , t)).U$ est toujours défini. Il suffira donc de montrer que, si $\mathcal{Y}$ est une famille algébrique de cycles de P paramétrée par une variété T' , la famille $(s , t') \longrightarrow s_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y}(t'))$ est algébrique. Or, $(s , t') \longrightarrow s \times \mathcal{Y}(t')$ est évidemment une famille algébrique de cycles de $\Gamma \times P$. Comme $(s , x) \longrightarrow (s , s(x))$ est un automorphisme de $\Gamma \times P$, la famille $(s , t') \longrightarrow s \times s_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y}(t'))$ est algébrique. Le support du graphe de cette famille est contenu dans l'ensemble des $(s , x , s' , t') \in \Gamma \times P \times \Gamma \times T'$ tels que $s = s'$; il en résulte que la restriction à toute composante irréductible de ce support de l'application $(s , x , s' , t') \longrightarrow (X , s' , t')$ est un isomorphisme de cette composante irréductible sur une sous-variété de $P \times \Gamma \times T'$; on en conclut alors en faisant usage de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5 de l'exposé précédent.

LEMME 3. - <u>Pour tout cycle</u> X <u>porté par</u> U , <u>l'excès de la famille</u> $(s , L) \longrightarrow \tau_{s,L}(X)$, <u>paramétrée par</u> Σ , <u>est</u> $\leqslant 0$.

Si $L \in G^U_{N-n-1}$, soit Γ_L l'ensemble des $s \in \Gamma$ tels que $(s , L) \in \Sigma$.

Pour démontrer le lemme 3 , on peut se limiter au cas où X est une sous-variété fermée A de U . Pour qu'un point $y \in B_i$ appartienne à $\tau_{s,L}(A)$, il faut et suffit qu'il existe un point $s \in \Theta_L(A)$ tel que $y = s(x)$. Soit Ω_i l'ensemble des points $(s , x , y) \in \Gamma \times \Theta_L(A) \times B_i$ tels que $s(x) = y$. Il est clair que

cet ensemble est fermé de dimension $(\dim \Gamma - N) + \dim A + N - n + b_i$. Il en résulte qu'il y a une partie ouverte non vide $C_i(L)$ de Γ_L telle que, pour $s \in C_i(L)$, l'ensemble des $(x , y) \in \Theta_L(A) \times B_i$ tels que $(s , x , y) \in \Omega_i$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$. Soit $C(L)$ l'ensemble $\bigcap_i C_i(L)$; il est clair que, si $s \in C(L)$, $(\mathrm{Supp}\ \rho_{s,L}(A)) \cap B_i$ est vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$ pour tout i , d'où $\mathfrak{e}(\tau_{s,L}(A)) \leq 0$. L'ensemble des $(s , L) \in \Sigma$ tels que $\mathfrak{e}(\tau_{s,L}(A)) \leq 0$, contenant tous les $C(L) \times \{L\}$ pour $L \in G^U_{N-n-1}$, est évidemment dense dans Σ , ce qui démontre le lemme 3 .

LEMME 4. - Soit $\mathfrak{X}$ une famille algébrique de cycles portés par U , paramétrée par une variété T . Il existe alors une variété spéciale R et une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de cycles portés par U , paramétrée par $R \times T$, qui possèdent les propriétés suivantes : $\mathfrak{X}$ est la différence de deux familles $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Y}'$ positives et algébriques telles que, pour tout $t \in T$, les excès de familles $r \to \mathfrak{Y}(r , t)$, $r \to \mathfrak{Y}'(r , t)$ (paramétrées par R) soient ≤ 0 ; pour tout $t \in T$, il existe deux familles algébriques positives $\mathfrak{Z}^t$ et $\mathfrak{Z}'^t$ d'excès ≤ 0 , paramétrées par R , et un élément r_t de R tels que $\mathfrak{Z}^t - \mathfrak{Z}'^t$ soit la famille $r \to \mathfrak{X}'(r , t)$, que l'on ait $\mathfrak{X}'(r_t , t) = \mathfrak{X}(t)$ et

$$\max(\mathfrak{e}(\mathfrak{Z}^t(r_t)) , \mathfrak{e}(\mathfrak{Z}'^t(r_t))) \leq \max(\mathfrak{e}(\mathfrak{X}(t)) , 0) .$$

Soit A_h l'assertion qui se déduit de la précédente en remplaçant la condition que les excès des familles $r \to \mathfrak{Y}(r , t)$, $r \to \mathfrak{Y}'(r , t)$, $\mathfrak{Z}^t$, $\mathfrak{Z}'^t$ soient ≤ 0 par celle que ces excès soient $\leq n - h$. Comme on a $\mathfrak{e}(X) \leq n$ pour tout cycle X porté par U , A_o est vrai (on prend R composé d'un seul point r_o , $\mathfrak{X}'(r_o , t) = \mathfrak{X}(t)$ et pour $\mathfrak{Z}^t(r_o)$, $\mathfrak{Z}'^t(r_o)$ des cycles ≥ 0 dont la différence est $\mathfrak{X}(t)$ et tels que $\max(\mathfrak{e}(\mathfrak{Z}^t(r_o)) , \mathfrak{e}(\mathfrak{Z}'^t(r_o))) = \mathfrak{e}(\mathfrak{X}(t))$. Supposons que A_h soit vrai ; soient R la variété, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ et (pour un certain $t \in T$) $\mathfrak{Z}^t$, $\mathfrak{Z}'^t$ les familles et r_t le point de R dont les existences sont affirmées par A_h . Posons $R' = \Sigma \times R$; comme Γ et G^U_{N-n-1} sont des variétés spéciales, il en est de même de Σ , donc de R' . Si $(s , L , r) \in R'$, nous posons

$$\mathfrak{Y}_1(s , L , r , t) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Y}(r , t)) + \rho_L(\mathfrak{Y}'(r , t))$$
$$\mathfrak{Y}'_1(s , L , r , t) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Y}'(r , t)) + \rho_L(\mathfrak{Y}(r , t))$$
$$\mathfrak{X}'_1(s , L , r , t) = \mathfrak{Y}_1(s , L , r , t) - \mathfrak{Y}'_1(s , L , r , t)$$
$$\mathfrak{Z}^t_1(s , L , r) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Z}^t(r)) + \rho_L(\mathfrak{Z}'^t(r))$$
$$\mathfrak{Z}'^t_1(s , L , r) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Z}'^t(r)) + \rho_L(\mathfrak{Z}^t(r)) .$$

Les familles $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}'_1$, $\mathcal{B}^t_1$, $\mathcal{B}'^t_1$ sont algébriques et positives.

Pour tout $r \in R$, les excès des familles $(s , L) \to \tau_{s,L}(\mathcal{B}^t(r))$, $(s,L) \to \tau_{s,L}(\mathcal{B}'^t(r))$ sont $\leqslant 0$ (lemme 3) ; ceux des familles $(s , L) \to \rho_L(\mathcal{B}^t(r))$, $(s , L) \to \rho_L(\mathcal{B}'^t(r))$ sont respectivement au plus égaux à $\max(e(\mathcal{B}^t(r)) - 1 , 0)$ et à $\max(e(\mathcal{B}'^t(r)) - 1 , 0)$ (lemme 2). Par ailleurs, il existe une partie ouverte non vide R_o de R telle que, pour $r \in R_o$, on ait

$$e(\mathcal{B}^t(r)) = e(\mathcal{B}^t) \leqslant \max(n - h , 0) , \quad e(\mathcal{B}'^t(r)) = e(\mathcal{B}'^t) \leqslant \max(n - h , 0) .$$

Si $r \in R_o$, il y a donc une partie ouverte $\Sigma(r)$ de Σ telle que, pour tout $(s , L) \in \Sigma(r)$, les nombres $e(\tau_{s,L}(\mathcal{B}^t(r)))$, $e(\tau_{s,L}(\mathcal{B}'^t(r)))$, $e(\rho_L(\mathcal{B}^t(r)))$, $e(\rho_L(\mathcal{B}'^t(r)))$ soient tous $\leqslant \max(n - h - 1 , 0)$, ce qui entraîne que $e(\mathcal{B}_1(s , L , r))$ et $e(\mathcal{B}'_1(s , L , r))$ sont $\leqslant \max(n - h - 1 , 0)$. La réunion des $\Sigma(r) \times \{r\}$ pour tous les $r \in R_o$ étant évidemment dense dans $\Sigma \times R$, on voit que $e(\mathcal{B}_1)$ et $e(\mathcal{B}'_1)$ sont $\leqslant \max(n - h - 1 , 0)$. On vérifie exactement de la même manière que les excès des familles $(s , L , r) \to \mathcal{Y}_1(s , L , r , t)$, $(s , L , r) \to \mathcal{Y}'_1(s , L , r , t)$ (pour un t donné quelconque) sont $\leqslant \max(n - h - 1 , 0)$. Il est clair que $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}'_1$ est la famille $(s , L , r) \to \mathfrak{F}'_1(s , L , r , t)$. Soit u l'élément neutre de Γ . Pour tout cycle X porté par U et tout $L \in G^U_{N-n-1}$, on a $\tau_{u,L}(X) = X + \rho_L(X)$. Il en résulte immédiatement que l'on a $\mathfrak{F}'_1(u , L , r_t , t) = \mathfrak{F}(t)$ pour tout $L \in G^U_{N-n-1}$. Il existe une partie ouverte non vide G'_{N-n-1} de G^U_{N-n-1} telle que, si $L \in G'_{N-n-1}$, on ait

$$e(\rho_L(\mathcal{B}'^t(r_t))) \leqslant \max(e(\mathcal{B}'^t(r_t)) - 1 , 0) \leqslant \max(e(\mathfrak{F}(t)) , 0)$$

et

$$e(\rho_L(\mathcal{B}^t(r_t))) \leqslant \max(e(\mathcal{B}^t(r_t)) - 1 , 0) \leqslant \max(e(\mathfrak{F}(t)) , 0) .$$

Par ailleurs, on a

$$\rho_{u,L}(\mathcal{B}^t(r_t)) = \mathcal{B}^t(r_t) + \rho_L(\mathcal{B}^t(r_t))$$

et

$$\rho_{u,L}(\mathcal{B}'^t(r_t)) = \mathcal{B}'^t(r_t) + \rho_L(\mathcal{B}'^t(r_t)) .$$

Soit L_t un élément de G'_{N-n-1} , et soit $r'_t = (u , L_t , r_t)$; il est clair que les nombres $e(\mathcal{B}^t_1(r'_t))$, $e(\mathcal{B}'^t_1(r_t))$ sont $\leqslant \max(e(\mathfrak{F}(t)) , 0)$. Ceci

démontre l'assertion A_{h+1} .

REMARQUE. - Les notations étant celles du lemme 4 , les excès des familles $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{X}'$ sont $\leqslant 0$. En effet, pour tout $t \in T$, il existe une partie ouverte non vide R_t de R telle que, pour tout $r \in R_t$, $\varepsilon(\mathfrak{Y}(r , t))$ et $\varepsilon(\mathfrak{Y}'(r , t))$ soient tous deux $\leqslant 0$; la réunion des ensembles $R_t \times \{t\}$ pour tous les $t \in T$ étant dense dans $R \times T$, notre assertion est établie.

3. Application à l'équivalence rationnelle.

PROPOSITION 1. - Soient $V_1 , \dots , V_h$ des variétés non singulières et U une variété quasi-projective non singulière. Pour tout i , soit f_i un morphisme de V_i dans U . Soit X un cycle de U ; il existe alors un cycle X' rationnellement équivalent à X tel que les $\bar{f}^{1}_{i;\mathfrak{Z}}(X')$ soient tous définis. Si les $\bar{f}^{1}_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ sont tous définis et si X est rationnellement équivalent à 0 , les $\bar{f}^{1}_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ sont rationnellement équivalents à 0 .

Nous poserons $n = \dim U$. On peut supposer que U est une sous-variété (non nécessairement fermée) d'un espace projectif P de dimension $N > n$. Nous désignerons par $\bar{U}$ l'adhérence de U dans P et par J l'application identique de U dans P . Il est clair que X peut toujours se mettre sous la forme $\bar{J}^{1}_{\mathfrak{Z}}(\bar{X})$, où $\bar{X}$ est un cycle de P porté par $\bar{U}$ (on notera que $\bar{J}^{1}_{\mathfrak{Z}}(\bar{X})$ est toujours défini si $\bar{X}$ est une cycle porté par $\bar{U}$). Montrons que, si X est rationnellement équivalent à 0 , on peut supposer qu'il existe une famille algébrique $\bar{\mathfrak{X}}$ de cycles de P portés par $\bar{U}$, paramétrée par K , telle que $\bar{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\bar{\mathfrak{X}}(1) = \bar{X}$ (en choisissant convenablement $\bar{X}$). Il existe par hypothèse une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de cycles de U , paramétrée par K , telle que $\mathfrak{X}(0) = 0$, $\mathfrak{X}(1) = X$. Soit Z le cycle de définition de $\mathfrak{X}$, et soit $Z = \sum_i c_i Z_i$, les Z_i étant des sous-variétés fermées de $U \times K$ et les c_i des entiers $\neq 0$. Pour chaque i , désignons par $\bar{Z}_i$ l'adhérence de Z_i dans $P \times K$, qui est une sous-variété de $\bar{U} \times K$. L'image de Z_i par la projection $U \times K \longrightarrow K$ est dense dans K ; celle de $\bar{Z}_i$ par la projection $P \times K \longrightarrow K$ est donc également dense dans K , d'où il résulte que, pour tout $t \in K$, $\bar{Z}_i.(P \times t)$ est défini (dans $P \times K$). Posons $Z_i.(U \times t) = \mathfrak{X}_i(t) \times t$, $\bar{Z}_i.(P \times t) = \bar{\mathfrak{X}}_i(t) \times t$; $\bar{\mathfrak{X}}_i(t)$ est alors un cycle porté par $\bar{U}$. Montrons que $\bar{J}^{1}_{\mathfrak{Z}}(\bar{\mathfrak{X}}_i(t)) = \mathfrak{X}_i(t)$. Il existe une partie ouverte non vide P_o de P telle que $P_o \cap \bar{U} = U$. Soient A une sous-variété fermée de U et $\bar{A}$ son adhérence dans $\bar{U}$. On a $\bar{Z}_i \cap (P_o \times K) = Z_i$; le coefficient de $\bar{A}$ dans $\bar{Z}_i.(P \times t)$ est égal à celui de A dans l'intersection $Z_i.(P_o \times t)$ dans $P_o \times K$ (en vertu du caractère

local de la définition des multiplicités d'intersection) ; celui-ci est aussi égal au coefficient de A dans l'intersection $Z_i.(U \times t)$ dans $U \times K$, ce qui démontre notre assertion. Soit $\overline{\mathfrak{X}}'$ la famille $\sum_i c_i \overline{\mathfrak{X}}_i$; on a donc $\overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}'(t)) = \mathfrak{X}(t)$ pour tout $t \in T$. Il suffit alors de prendre $\overline{\mathfrak{X}}(t) = \overline{\mathfrak{X}}'(t) - \overline{\mathfrak{X}}'(0)$; $\overline{X} = \overline{\mathfrak{X}}'(1) - \mathfrak{X}'(0)$.

Pour tout i, il existe des sous-variétés B_{ij} de U et des entiers $\beta_{ij} \geqslant 0$ qui possèdent les propriétés suivantes : si A est une sous-variété fermée de U, une condition nécessaire et suffisante pour que les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(A)$ soient définis est que, pour tout (i, j), $A \cap B_{ij}$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + \dim B_{ij} - n + \beta_{ij}$ (proposition de l'exposé précédent). Les B_{ij} sont des sous-variétés de $\overline{U}$ qui ne rencontrent pas l'ensemble des points singuliers de $\overline{U}$; utilisant ces variétés et les nombres β_{ij}, nous définissons une fonction $\varphi(\overline{X})$ sur l'ensemble des cycles portés par $\overline{U}$ de la manière indiquée au n° 2. Il est alors clair que, si $\overline{X}$ est un cycle porté par $\overline{U}$ tel que $\varphi(\overline{X}) \leq 0$, les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{X}))$ sont tous définis. Soit $\overline{\mathfrak{X}}$ une famille algébrique positive de cycles portés par $\overline{U}$ telle que $\varphi(\overline{\mathfrak{X}}) \leq 0$, paramétrée par une variété spéciale T. Soit T' l'ensemble des t tels que les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}(t)))$ soient définis ; T' est alors dense dans T. Les cycles $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t)))$, pour $t \in T'$, sont alors tous rationnellement équivalents entre eux, comme il résulte d'une double application du lemme 1 de l'exposé précédent. Par ailleurs, si $\mathfrak{X}$ est une famille (positive ou non) de cycles protés par $\overline{U}$, paramétrée par une variété spéciale T, les cycles de la famille $t \longmapsto \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}(t))$ sont tous rationnellement équivalents, comme on le voit en représentant $\mathfrak{X}$ comme différence de deux familles positives.

Ceci étant, appliquons le lemme 4 du n° 2 à la famille $\overline{\mathfrak{X}}$ paramétrée par une variété composée d'un seul point t_o et définie par $\overline{\mathfrak{X}}(t_o) = \overline{X}$. On voit qu'il existe une famille $\overline{\mathfrak{X}}'$ paramétrée par une variété spéciale R et un point $r_o \in R$ tels que $\varphi(\overline{\mathfrak{X}}') = 0$ et que $\overline{\mathfrak{X}}'(r_o) = \overline{X}$. Soit r un point de R tel que $\varphi(\overline{\mathfrak{X}}'(r)) \leq 0$; posons $\overline{X}' = \overline{\mathfrak{X}}'(r)$, $X = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{X}')$. Il résulte alors de ce que nous avons dit que X' est rationnellement équivalent à X et que les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X')$ sont définis. Ceci démontre la première assertion de la proposition 1.

Supposons maintenant que X soit rationnellement équivalent à 0. Soit $\overline{\mathfrak{X}}$ une famille algébrique de cycles portés par $\overline{U}$, paramétrée par K, telle que $\overline{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\overline{\mathfrak{X}}(1) = \overline{X}$. Appliquons le lemme 5, n° 2 à cette famille : on voit

qu'il existe une famille $\overline{\mathfrak{X}}'$ de cycles portés par $\overline{U}$, paramétrée par le produit $R \times K$ d'une variété spéciale R par K, qui possède les propriétés suivantes : $\overline{\mathfrak{X}}'$ est la différence de deux familles algébriques positives $\overline{\mathfrak{Y}}$ et $\overline{\mathfrak{Y}}'$ d'excès ≤ 0 telles que, pour tout $t \in K$, les familles $r \to \overline{\mathfrak{Y}}(r, t)$, $r \to \overline{\mathfrak{Y}}'(r, t)$ soient d'excès nuls ; pour tout $t \in T$, il existe un $r_t \in R$ et des familles algébriques positives $\mathfrak{Z}^t$ et $\mathfrak{Z}'^t$ paramétrées par R telles que $e(\mathfrak{Z}^t)$ et $e(\mathfrak{Z}'^t)$ soient ≤ 0, que $\mathfrak{Z}^t(r) - \mathfrak{Z}'^t(r) = \overline{\mathfrak{X}}'(r, t)$ pour tout $r \in R$, que $\overline{\mathfrak{X}}'(r_t, t) = \overline{\mathfrak{X}}(t)$ et que $e(\mathfrak{Z}^t(r_t))$ et $e(\mathfrak{Z}'^t(r_t))$ soient tous deux $\leq \max(e(\overline{\mathfrak{X}}(t)), 0)$. Supposons de plus que les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis. Pour toute variété A qui intervient dans X avec un coefficient $\neq 0$, chaque $A \cap B_{ij}$ est vide ou de dimension $\leq \dim A + b_{ij} - n + \rho_{ij}$; comme les B_{ij} sont contenus dans U, il en résulte que $e(\overline{X}) \leq 0$; on a alors $e(\overline{\mathfrak{X}}(0)) \leq 0$, $e(\overline{\mathfrak{X}}(1)) \leq 0$, et par suite $e(\mathfrak{Z}^t(r_t)) \leq 0$, $e(\mathfrak{Z}'^t_t(r_t)) \leq 0$ si $t = 0$ ou 1.

Il y a des éléments r'_0, r'_1 de R tels que les nombres $e(\mathfrak{Z}^0(r'_0))$, $e(\mathfrak{Z}'^0(r'_0))$, $e(\mathfrak{Y}(r'_0, 0))$, $e(\mathfrak{Y}'(r'_0, 0))$, $e(\mathfrak{Z}^1(r'_1)$, $e(\mathfrak{Z}'^1(r'_1))$, $e(\mathfrak{Y}(r'_1, 1))$, $e(\mathfrak{Y}'(r'_1, 1))$ soient tous ≤ 0. Posons

$$Z^t = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}^t(r_t)), \quad Z'^t = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}'^t(r_t)), \quad Z^t_* = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}^t(r'_t)), \quad Z'^t_* = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}'^t(r'_t))$$

($t = 0$ ou 1). Les images réciproques par les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}$ de tous ces cycles sont définies ; les excès des familles $\mathfrak{Z}^t$ étant ≤ 0, les cycles $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^t_* - Z^t)$, $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z'^t_* - Z'^t)$ ($t = 0$ ou 1) sont rationnellement équivalents à 0. Comme $\overline{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\overline{\mathfrak{X}}(1) = \overline{X}$, on a $Z^0 = Z'^0$, $Z^1 - Z'^1 = X$; pour chaque i, $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^0_* - Z'^0_*)$ est donc rationnellement équivalent à 0 et $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^1_* - Z'^1_*)$ est rationnellement équivalent à $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$. Posons $Y^t = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}(r'_t, t))$, $Y'^t = \overline{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}'(r'_t, t))$ ($t = 0$ ou 1) ; les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y^t)$, $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y'^t)$ sont donc définis. On a $Y^t - Y'^t = Z^t_* - Z'^t_*$; de plus, les excès des familles $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ étant ≤ 0, les $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y^1 - Y^0)$, $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y'^1 - Y'^0)$ sont rationnellement équivalents à 0. Il en résulte que, pour tout i, $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^1_* - Z'^1_*)$ est rationnellement équivalent à $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^0_* - Z'^0_*)$, donc à 0, ce qui montre que $\overline{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ est rationnellement équivalent à 0 et démontre la proposition 1.

4. L'anneau de Chow.

Si U est une variété non singulière quasi-projective, les classes d'équivalence rationnelle de cycles de U forment un groupe additif ; nous désignerons

ce groupe par $\mathcal{C}(U)$.

Soient U et V des variétés non singulières quasi-projectives et f un morphisme de V dans U . Si $C \in \mathcal{C}(V)$, la classe dans $C(U)$ de l'image par $f_{\mathfrak{Z}}$ d'un cycle $Y \in C$ ne dépend que de C , comme il résulte de la proposition 8 de l'exposé précédent ; nous désignerons cette classe par $f_*(C)$. Il est clair que f_* est un homomorphisme de $\mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{C}(U)$.

Soient maintenant V et U des variétés projectives non singulières et f un morphisme quelconque de V dans U . Soit C un élément de $\mathcal{C}(U)$; il existe au moins un cycle $X \in C$ tel que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini et, si X , X' sont deux cycles de C possédant cette propriété, $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ et $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X')$ sont rationnellement équivalents (proposition 1). Nous désignerons par $\bar{f}^1_*(C)$ la classe d'équilence rationnelle de V qui contient les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ pour tous les $X \in C$ tels que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini. Il est clair que $\bar{f}^1_*$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}(U)$ dans $\mathcal{C}(V)$.

Soient U et V des variétés quasi-projectives non singulières, C un élément de $\mathcal{C}(U)$ et D un élément de $\mathcal{C}(V)$. Si $X \in C$, $Y \in D$, la classe du cycle $X \times Y$ dans $U \times V$ ne dépend que de C et D , comme il résulte tout de suite de la proposition 3 de l'exposé précédent. Nous désignerons par $C \times D$ la classe d'équivalence rationnelle de $U \times V$ qui contient les $X \times Y$ pour $X \in C$, $Y \in D$. Il est clair que $(C , D) \longrightarrow C \times D$ est une application bilinéaire de $\mathcal{C}(U) \times \mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{C}(U \times V)$.

Soient U , V et W des variétés quasi-projectives non singulières, f un morphisme de V dans U et g un morphisme de W dans V ; soit $h = f \circ g$. On a alors $\bar{h}^1_* = \bar{g}^1_* \circ \bar{f}^1_*$. Il existe en effet des variétés C_j en nombre fini et des morphismes $f_j : C_j \longrightarrow U$ qui possèdent les propriétés suivantes : pour tout cycle X de U tel $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ et les $\bar{f}^1_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis, $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(\bar{f}^1(X))$ et $\bar{h}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ sont définis et égaux (corollaire à la proposition 7 de l'exposé précédent). Notre assertion résulte alors immédiatement du fait que tout élément $C \in \mathcal{C}(U)$ contient un cycle X tel que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ et les $\bar{f}^1_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis (proposition 1). De plus, si f et g sont propres, on a $h_* = f_* \circ g_*$, car il résulte immédiatement de la définition de l'opération $f_{\mathfrak{Z}}$ sur les cycles que $h_{\mathfrak{Z}}(Z) = f_{\mathfrak{Z}}(g_{\mathfrak{Z}}(Z))$ pour tout cycle Z de W .

Soient U , U' , V , V' des variétés quasi-projectives non singulières, f un morphisme de U' dans U et g un morphisme de V' dans V . Désignons par h le morphisme $(x' , y') \longrightarrow (x , y)$ de $U' \times V'$ dans $U \times V$.

Si $A \in \mathfrak{C}(U)$, $B \in \mathfrak{C}(V)$, on a

$$\bar{h}^1_*(A \times B) = \bar{f}^1_*(A) \times \bar{g}^1_*(B) .$$

Soient en effet X et Y des cycles tels que $X \in A$, $Y \in B$ et que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ et $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$ soient définis. On va montrer que $\bar{h}^1_{\mathfrak{Z}}(X \times Y)$ est défini et égal à $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X) \times \bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$. Soient Φ et Γ les graphes de f et g ; comme $\Phi.(X \times U')$ et $\Gamma.(Y \times V')$ sont définis, l'intersection $(\Phi \times \Gamma).(X \times U' \times Y \times V')$ dans $U \times U' \times V \times V'$ est définie et égale à $(\Phi.(X \times U')) \times (\Gamma.(Y \times V'))$. L'isomorphisme canonique de $U \times U' \times V \times V'$ sur $U \times V \times U' \times V'$ transforme $\Phi \times \Gamma$ en le graphe Δ de h ; $\Delta.(X \times Y \times U' \times V')$ est donc défini et égal à l'image de $(\Phi.(X \times U')) \times (\Gamma.(Y \times V'))$. Or $\Phi.(X \times U')$ s'applique sur $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ par l'isomorphisme naturel de Φ sur U' et $\Gamma.(Y \times V')$ s'applique sur $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$ par l'isomorphisme naturel de Γ sur V' . Notre assertion résulte immédiatement de là.

Soient U , V des variétés quasi-projectives non singulières. Si s est l'isomorphisme $(x , y) \to (y , x)$ de $U \times V$ sur $V \times U$, il est clair que $s_*(x \times y) = y \times x$ si $x \in \mathfrak{C}(U)$, $y \in \mathfrak{C}(V)$. De même, si W est une troisième variété quasi-projective non singulière, et si a est l'isomorphisme $((x , y) , z) \to (x , (y , z))$ de $(U \times V) \times W$ sur $U \times (V \times W)$, on a $a_*((x \times y) \times z) = x \times (y \times z)$ si $x \in \mathfrak{C}(U)$, $y \in \mathfrak{C}(V)$, $z \in \mathfrak{C}(W)$. Il est donc correct de faire les identifications usuelles entre produits quand on considère des produits de classes d'équivalence.

Soit U une variété quasi-projective non singulière. Soit r l'application $x \to (x , x)$ de U dans $U \times U$; on définit une loi de composition $(x , y) \to x.y$ dans $\mathfrak{C}(U)$ en posant

$$x.y = \bar{r}^1_*(x \times y) .$$

Il est clair que $(x , y) \to x.y$ est une application bilinéaire de $\mathfrak{C}(U) \times \mathfrak{C}(U)$ dans $\mathfrak{C}(U)$. Si s est la symétrie dans $U \times U$, on a $s \circ r = r$; il en résulte que $x.y = y.x$. Montrons maintenant que la loi $(x , y) \to x.y$ est associative. On a

$$(x.y).z = \bar{r}^1_*(\bar{r}^1_*(x \times y) \times z) .$$

Désignons par t l'application $(u , v) \to ((u , u) , v)$ de $U \times U$ dans $U \times U \times U$; alors $(x.y).z = (\bar{r}^1_* \circ \bar{t}^1_*)(x \times y \times z)$. On a de même, en désignant par θ l'application $(u , v) \to (u , v , v)$, $x.(y.z) = (\bar{r}^1_* \circ \bar{\theta}^1_*)(x \times y \times z)$

notre assertion résulte alors de ce que l'on a $t \circ r = \theta \circ r$. Montrons enfin que la loi $(x , y) \rightarrow x.y$ comporte un élément unité. Nous désignerons par 1_U la classe d'équivalence du cycle U ; pour tout cycle de X de U , il est clair que $\bar{r}^1_{\mathfrak{Z}}(X \times U) = X$; 1_U est donc élément unité pour notre loi de composition. Il en résulte que $\mathfrak{C}(U)$ se trouve muni d'une structure d'anneau commutatif.

On notera que, si des classes d'équivalence x et y sont représentées par des cycles X et Y tels que $X.Y$ soit défini, $X.Y$ appartient à la classe $x.y$; on sait en effet que l'on a alors $X.Y = \bar{r}^1_{\mathfrak{Z}}(X \times Y)$. Par ailleurs, étant donnés des cycles quelconques X et Y , il y a toujours un cycle Y' rationnellement équivalent à Y tel que $X.Y'$ soit défini. Soient en effet B_j les sous-variétés de U qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans X , et soit f_j l'application identique de B_j dans U ; il y a un cycle Y' rationnellement équivalent à Y tel que les $\bar{f}^1_{j;\mathfrak{Z}}(Y')$ soient définie, ce qui démontre notre assertion.

Soient f un morphisme propre d'une variété quasi-projective non singulière V dans une variété quasi-projective non sigulière U , y un élément de $\mathfrak{C}(V)$ et x un élément de $\mathfrak{C}(U)$; on a alors

$$f_*(y.\bar{f}^1_*(x)) = f_*(y).x \ .$$

Soit en effet Y un élement quelconque de la classe y ; soient $B_1 , \ldots , B_m$ les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans Y , et f_j la restriction de f à B_j . On voit facilement que, si A est une sous-variété fermée de U telle que les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(A)$, $\bar{f}^1_{j;\mathfrak{Z}}(A)$ soient tous définis, $Y.\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(A)$ et $f_{\mathfrak{Z}}(Y).A$ sont définis. On peut représenter x par un cycle X tel que les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$, $\bar{f}^1_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient tous définis. Soient alors Φ le graphe de f et Y' le cycle de Φ qui correspond à Y par l'isomorphisme naturel de Φ sur V ; celui qui correspond à $M.\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ est l'intersection $Y'.(X' \times V)$ prise dans $U \times V$. Soit p la projection de $U \times V$ sur son premier facteur, d'où $p_{\mathfrak{Z}}(Y') = f_{\mathfrak{Z}}(Y)$. Comme $Y'.(X \times V)$ et $p_{\mathfrak{Z}}(Y').X$ sont définis et comme p induit un morphisme propre de la variété Φ , qui contient Supp Y' , il résulte de la formule des projections que $p_{\mathfrak{Z}}(Y').X = p_{\mathfrak{Z}}(Y'.(X \times V)$, ce qui démontre la formule.

Soit maintenant f un morphisme quelconque de V dans U ; alors $\bar{f}^1_*$ est un homomorphisme de l'anneau $\mathfrak{C}(U)$ dans $\mathfrak{C}(V)$. Soient en effet r_U l'application $u \rightarrow (u , u)$ de U dans $U \times U$, r_V l'application $v \rightarrow (v , v)$

de V dans $V \times V$ et g l'application $(v , v') \to (f(v) , f(v'))$ de $V \times V$ dans $U \times U$. On a $g \circ r_V = r_U \circ f$; si $x , y \in \mathfrak{C}(U)$, on a

$$\bar{f}^1_*(x.y) = \bar{f}^1_*((\bar{r}^1_U)_*(x \times y)) = (\bar{r}^1_V)_*(\bar{g}^1_*(x \times y)) = (\bar{r}^1_V)_*(\bar{f}^1_*(x) \times \bar{f}^1_*(y)) = \bar{f}^1_*(x).\bar{f}^1_*(y) ,$$

ce qui démontre notre assertion.

Soit U une variété quasi-projective non singulière. Pour tout d , soit $\mathfrak{C}^d(U)$ le groupe des classes d'équivalence rationnelle représentées par des cycles de codimension d ; $\mathfrak{C}(U)$ est alors la somme directe des $\mathfrak{C}^d(U)$, et le produit d'un élément de $\mathfrak{C}^d(U)$ par un élément de $\mathfrak{C}^{d'}(U)$ est dans $\mathfrak{C}^{d+d'}(U)$. Il en résulte que $\mathfrak{C}(U)$ est un anneau gradué. Il résulte tout de suite des définitions que, si m est un entier $\neq 0$, mU n'est pas rationnellement équivalent à 0 ; $\mathfrak{C}^0(U)$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$, de sorte que $\mathfrak{C}(U)$ est un anneau gradué augmenté. Si f est un morphisme d'une variété quasi-projective non singulière V dans U , $\bar{f}^1_*$ est homogène de degré 0 . Si f est propre, f_* est une application additive homogène de degré $\dim U - \dim V$.