Claude Chevalley

Les classes d'équivalence rationnelle, I

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A2_0>

LES CLASSES D'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE, I.

par Claude CHEVALLEY

1. Familles algébriques de cycles.

Dans ce numéro, toutes les variétés que l'on considérera seront supposées non singulières.

Si T et U sont des variétés, nous désignerons par $\mathfrak{Z}(T)$ et $\mathfrak{Z}(U)$ leurs groupes de cycles et par $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ le groupe de cycles de $U \times T$ engendré par les sous-variétés fermées Z qui possèdent la propriété suivante : pour tout $t \in T$, $Z.(U \times t)$ est défini. Il résulte de là que l'image de Z par la projection p de $U \times T$ sur son second facteur est dense dans T, car, si $t \in p(Z)$, $Z \cap \overset{-1}{p}(t)$ est de dimension $\dim Z - \dim T$.

DÉFINITION 1. - *On appelle famille algébrique de cycles sur* U, *paramétrée par* T, *une application* X *de* T *dans* $\mathfrak{Z}(u)$ *qui possède la propriété suivante : il existe un cycle* $Z \in \mathfrak{Z}'(U \times T)$ *tel que l'on ait* $Z.(U \times t) = X(t) \times t$ *pour tout* $t \in T$.

Nous dirons alors que X est la famille définie par Z. Il est clair que, si les $X(t)$ sont de dimension a, Z de dimension $\dim T + a$. Si Z est une sous-variété de $T \times U$, on dit que X est irréductible.

Les familles algébriques de cycles de U paramétrées par T forment manifestement un groupe $\mathfrak{X}$ dans lequel l'addition est définie par

$$(X + X')(t) = X(t) + X'(t) .$$

Les familles X pour lesquels $X(t)$ est de dimension a (pour tout $t \in T$) forment un sous-groupe $\mathfrak{X}_a$ de $\mathfrak{X}$, et $\mathfrak{X}$ est la somme directe des $\mathfrak{X}_a$. Le groupe $\mathfrak{X}$ est engendré par les familles irréductibles. Nous allons voir maintenant que la donnée d'une famille algébrique de cycles détermine entièrement le cycle Z qui définit cette famille. Cela résultera de ce qui précède et de la

PROPOSITION 1. - *Soient* $X_1, \dots, X_h$ *des familles algébriques irréductibles de cycles de* U *paramétrées par une même variété* T *et définies par des sous-variétés fermées* $Z_1, \dots, Z_h$ *mutuellement distinctes de* $U \times T$ *toutes de* même dimension. Il existe alors une partie ouverte non vide T_1 de T qui possède la propriété suivante : si $t \in T_1$, les $X_i(t)$ sont >0 , et, si $i \neq j$, $\mathrm{Supp}\, X_i(t)$ n'a aucune composante irréductible en commun avec $\mathrm{Supp}\, X_j(t)$.

Si $i \neq j$, Z_i et Z_j sont distinctes et ont même dimension ; on a donc $Z_i \cap Z_j \neq Z_i$. Soit E_i la réunion des $Z_i \cap Z_j$ pour $j \neq i$; c'est une partie fermée $\neq Z_i$ de Z_i . La restriction p_i de la projection $U \times T \longrightarrow T$ à Z_i est un morphisme de Z_i dans T , et $p(Z_i)$ est dense dans T ; on sait (cf. appendice) qu'il existe alors une sous-variété ouverte T_i' de T telle que, pour $t \in T_i'$, $\overset{-1}{p_i}(t)$ soit non vide et n'ait aucune composante irréductible contenue dans E_i ; il suffit alors de prendre $T_1 = \bigcap_{i=1}^{h} T_i'$.

COROLLAIRE 1. - L'application qui fait correspondre à tout cycle appartenant à $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ la famille algébrique qu'il définit est un isomorphisme de $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ sur le groupe $\mathfrak{X}$ des familles algébriques de cycles paramétrées par T ; $\mathfrak{X}$ admet une base composée des familles irréductibles.

COROLLAIRE 2. - Soit X une famille algébrique de cycles de U paramétrée par T . Si on a $X(t) \geqslant 0$ pour tout point t d'une partie dense de T , on a $X(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in T$.

Si la condition du corollaire 2 est satisfaite, on dit que la famille X est positive. Les familles positives sont évidemment les combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ de familles irréductibles.

PROPOSITION 2. - Soit X une famille algébrique de cycles paramétrée par une variété T , et soit f un morphisme d'une variété T' dans T . Alors $X' : t' \longrightarrow X(f(t'))$ est une famille algébrique paramétrée par T' .

Il suffit de le montrer quand X est irréductible ; soit Z la sous-variété de $U \times T$ qui la définit. Soit Φ le graphe de f , ensemble des $(f(t'), t')$ pour $t' \in T'$. Montrons que l'intersection $(U \times \Phi).(Z \times T')$ est définie. Soit Z_1' une composante irréductible de $(U \times \Phi) \cap (Z \times T')$; c'est une sous-variété de $U \times \Phi$; nous désignerons par p_1' la restriction à Z_1' de la projection $U \times \Phi \longrightarrow \Phi$. Si $(f(t'), t') \in \Phi$, $\overset{-1}{p}(f(t'), t')$ est de dimension $\leqslant a$ parce que contenu dans $(f(t'), t') \times X(f(t'))$ (on désigne par a la dimension des cycles $X(t)$). On en conclut que

$$\dim Z_1' \leqslant \dim p_1'(Z_1') + a \leqslant \dim \Phi + a = \dim T' + a$$

(puisque Φ est isomorphe à T'). Or on a aussi $\dim Z_1' \geqslant \dim T' + a$ par le théorème de dimension ; il y a donc égalité ; on en conclut que l'on a $\dim p_1'(Z_1') = \dim \Phi$; Z_1' appartient donc à $\mathfrak{Z}'(U \times \Phi)$. Ceci montre que l'intersection $Z' = (U \times \Phi).(Z \times T')$ est définie et que Z'', considéré comme cycle sur $U \times \Phi$, appartient à $\mathfrak{Z}'(U \times \Phi)$. Considérons l'intersection $Z'.(U \times (f(t'), t'))$, où Z' et $U \times (f(t'), t')$ sont considérés comme cycles sur $U \times \Phi$. Comme f est un morphisme, on a $\Phi.(T \times t') = (f(t'), t')$ (dans $T \times T'$) et par suite $(U.\Phi).(U \times T \times t') = U \times (f(t'), t')$ (dans $U \times T \times T'$). Tenant compte de la définition de Z' et de la formule de relativisation des intersections, il vient

$$Z'.(U \times (f(t'), t')) = (U \times f(t') \times t').(Z \times T')) = (X(f(t')) \times f(t') \times t' .$$

On en conclut que la famille paramétrée par Φ définie par Z' est $(f(t'), t') \longrightarrow X(f(t'))$. On en conclut alors en tenant compte de l'isomorphisme entre Φ et T'.

COROLLAIRE 1. - Si T' est une sous-variété de T, la restriction à T' d'une famille algébrique paramétrée par T est une famille algébrique paramétrée par T'.

COROLLAIRE 2. - Soit X une famille algébrique paramétrée par T ; si T' est une variété quelconque, $(t, t') \longrightarrow X(t)$ est une famille algébrique paramétrée par $T \times T'$.

PROPOSITION 3. - Soient T, U, V des variétés, X une famille algébrique de cycles paramétrée par T et Y une famille algébrique de cycles de V paramétrée par T ; alors $t \longrightarrow X(t) \times Y(t)$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$ paramétrée par T.

Soient Z_U et Z_V les cycles qui définissent X et Y ; on voit facilement au moyen des formules d'intersections dans le produits que

$$Z_U \times Z_V \in \mathfrak{Z}'(T \times T \times U \times V)$$

et définit la famille $(t, t') \longrightarrow X(t) \times Y(t')$; il suffit alors d'appliquer le corollaire à la proposition 2 à la diagonale de $T \times T$.

PROPOSITION 4. - Soient X et Y des familles algébriques positives de cycles d'une variété U, paramétrées par une même variété T ; si, pour tout $t \in T$, l'intersection $X(t).Y(t)$ est définie, $t \longrightarrow X(t).Y(t)$ est une famille algébrique de cycles.

Ecrivons $X = \sum_{i \in I} X_i$, $Y = \sum_{j \in J} Y_j$, où les X_i , Y_j sont des familles irréductibles ; pour tout $t \in T$, toute sous-variété fermée de U qui intervient avec un coefficient > 0 dans $X_i(t)$ (resp. $Y_j(t)$) intervient avec un coefficient > 0 dans $X(t)$ (resp. $Y(t)$) ; les intersections $X_i(t).Y_j(t)$ sont donc définies. Ceci montre qu'il suffit de démontrer la proposition 4 dans le cas où X et Y sont irréductibles ; ces familles sont alors définies par des sous-variétés fermées Z_X et Z_Y de $U \times T$, dont nous désignerons les dimensions par $a + \dim T$ et $b + \dim T$. Soit Z_1' une composante irréductible de $Z_X \cap Z_Y$, et soit p_1' la restriction à Z_1' de la projection $U \times T \rightarrow T$. Soit $t \in T$; on a $p^{-1}(t) \subset (\mathrm{Supp}\, X(t) \cap \mathrm{Supp}\, Y(t)) \times t$, d'où

$$\dim p_1'^{-1}(t) \leq a + b - n \quad (\text{où } n = \dim U).$$

Il en résulte que l'on a

$$\dim Z_1' \leq \dim p_1'(Z_1') + a + b - n \leq \dim T + a + b - n .$$

Mais on a aussi

$$\dim Z_1' \geq (\dim T + a) + (\dim T + n) = \dim T + a + b - n \quad ;$$

il résulte immédiatement de là que $Z_X.Z_Y$ est défini, et, comme $\dim p_1'(Z_1') = \dim T$, que $Z_X.Z_Y \in \mathcal{B}'(U \times T)$. Si $t \in T$, on a

$$Z_X.Z_Y.(U \times t) = Z_X.(Y(t) \times t) = Z_X.(U \times t).(Y(t) \times T) =$$
$$(X(t) \times t).(Y(t) \times T) = X(t).Y(t) \times t \quad ,$$

ce qui démontre la proposition 4 .

REMARQUE. - L'hypothèse que X et Y sont positives est essentielle à la validité de la proposition 4 . Prenons en effet $U = K^2$, $T = K$; si $t \in K$, soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ les droites d'équations $y = tx + 1 - t(1 + t)$ et $y = tx + 1 - t(t - 1)$ respectivement ; soit $Y(t)$ la droite d'équation $y = 1$; posons $X(t) = X_1(t) - X_2(t)$. Alors, pour tout $t \in K$, $X(t).Y(t)$ est défini et est $(t + 1 , 1) - (t - 1 , 1)$ si $t \neq 0$, 0 si $t = 0$; il est facile de voir que $t \rightarrow X(t).Y(t)$ n'est pas une famille algébrique de cycles.

Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U . Rappelons qu'on peut associer à f un homomorphisme $f_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}(V)$ dans $\mathcal{B}(U)$ et un homomorphisme $f_{\mathcal{B}}^{-1}$ d'un sous-groupe $\mathcal{B}^*(U)$ dans $\mathcal{B}(V)$ qui sont définis comme suit. Si Y est une sous-variété fermée de V , on a $f_{\mathcal{B}}(Y) = d\, \overline{f(Y)}$ où $\overline{f(Y)}$ est l'adhérence de $f(Y)$ et où d est un entier déterminé comme suit : $d = 0$

si $\dim Y > \dim f(Y)$; si $\dim Y = \dim f(Y)$, d est le degré du morphisme f_Y de Y dans $\overline{f(Y)}$ induit par f (i.e. le degré du corps des fonctions numériques sur Y par rapport à l'image du corps des fonctions sur $\overline{f(Y)}$ par le cohomomorphisme de f). L'homomorphisme $f_{\mathfrak{Z}}$ se définit alors par linéarité. Pour définir $\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}$, on introduit le graphe Φ du morphisme f , qui est une sous-variété fermée de $U \times V$; $\mathfrak{Z}^*(U)$ est le groupe des cycles X de U tels que $\Phi.(X \times V)$ soit défini dans $U \times V$; si X est dans ce groupe, $\Phi.(X \times V)$ peut être considéré comme un cycle sur Φ ; $\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ est alors le cycle sur V qui s'en déduit au moyen de l'isomorphisme naturel entre Φ et V . Pour tout cycle Y sur V , $f_{\mathfrak{Z}}(Y)$ a même dimension que Y ; si $X \in \mathfrak{Z}^*(U)$, $\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ est de dimension $a + \dim V - \dim U$ si X est de dimension a . On notera que $\mathfrak{Z}^*(U)$ est engendré par les sous-variétés fermées de U qui y sont contenues. La formule des projections donne le résultat suivant : si f est un morphisme propre, si $Y \in \mathfrak{Z}(V)$, $X \in \mathfrak{Z}^*(U)$, alors $Y.\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ est défini, il en est de même de $f_{\mathfrak{Z}}(Y).X$ et on a $f_{\mathfrak{Z}}(Y.\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X)) = f_{\mathfrak{Z}}(Y).X$. Il suffit d'ailleurs que la restriction de f à toute composante irréductible de $\operatorname{Supp} Y$ soit propre.

PROPOSITION 5. - Soit f un morphisme propre d'une variété V dans une variété U ; si Y est une famille algébrique de cycles de V paramétrée par une variété T , $t \to f_{\mathfrak{Z}}(Y(t))$ est une famille algébrique de cycle de U .

L'application $g : (y , t) \to (f(y) , t)$ est un morphisme propre de $V \times T$ dans $U \times T$. Il suffit de démontrer la proposition 5 dans le cas où Y est irréductible ; cette famille est alors définie par une sous-variété fermée Z de $V \times T$; $g(Z) = Z'$ est alors une sous-variété fermée de $U \times T$ (puisque g est propre) ; on a $g_{\mathfrak{Z}}(Z) = dZ'$, d étant un entier $\geqslant 0$. Si $t \in T$, on vérifie immédiatement que $\bar{g}^{1}_{\mathfrak{Z}}(U \times t)$ est défini et égal à $V \times t$; comme $Z.(V \times t)$ est défini et égal à $Y(t) \times t$, $g_{\mathfrak{Z}}(Z).(U \times t)$ est défini et égal à $g_{\mathfrak{Z}}(Y(t) \times t)$, qui est évidemment lui-même égal à $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t)) \times t$. Si $d = 0$, on a $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t)) = 0$ pour tout t . Si $d > 0$, soit $\dim T + a$ la dimension de Z , donc aussi de Z' . Pour tout $t \in T$, $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t))$ est de dimension a , ce qui montre que $Z' \cap (U \times t)$ est de dimension a s'il n'est pas vide. Comme Z' est de dimension $\dim T + a$, il en résulte que son image par la projection $U \times T \to T$ est dense dans T . La proposition 5 est donc établie.

REMARQUE. - La démonstration montre que la condition que f soit propre peut être remplacée par la suivante : pour toute composante irréductible Z du support du cycle de définition de la famille Y , la restriction à Z de l'application $(y , t) \longrightarrow (f(y) , t)$ est propre.

PROPOSITION 6. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U ; soit X une famille algébrique positive de cycles de U paramétrée par une variété T. Si, pour tout $t \in T$, $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est défini, $t \longrightarrow f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est une famille algébrique de cycles de V.

Soit Φ le graphe de f ; pour tout $t \in T$, $\Phi . (X(t) \times V)$ est défini. Il résulte de la proposition 3 que $t \longrightarrow X(t) \times V$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$; tenant compte de la proposition 4, on voit que $t \longrightarrow \Phi . (X(t) \times V)$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$; il est clair que c'est aussi une famille algébrique de cycles de Φ (on notera que Φ est non singulière). Tenant compte de l'isomorphisme naturel de Φ sur V, on voit que $t \longrightarrow f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est une famille algébrique de cycles de V.

REMARQUE. - La condition que X soit positive est essentielle à la validité de la proposition 6. Montrons-le par l'exemple suivant. Prenons $U = K^2$; prenons pour V la sous-variété de K^3 définie par l'équation $xz = y$; prenons pour f l'application $(x , y , z) \longrightarrow (x , y)$; prenons $T = K$, $X(t) = (t , t) - (- t , t)$; on a alors $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(t)) = (t , t , 1) - (- t , t , - 1)$ si $t \neq 0$, $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(0)) = 0$; il est facile de voir que $t \longrightarrow f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ n'est pas une famille algébrique.

PROPOSITION 7. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U. Il existe alors un nombre fini de sous-variétés B_j $(1 \leq j \leq m)$ (non nécessairement fermées) de U et des nombres $\beta_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq m)$ qui possèdent la propriété suivante : si X est un cycle de U, pour que $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini, il faut et suffit que, pour toute sous-variété fermée A de U qui intervient avec un coefficient > 0 dans X, et pour tout j $(1 \leq j \leq m)$, $A \cap B_j$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + \dim B_j - \dim U + \beta_j$.

Pour tout $e \geq 0$, désignons par $H(e)$ l'ensemble des points $x \in U$ tels que $f^{-1}(x)$ soit non vide et de dimension e. On sait que $H(e)$ est un ensemble constructible ; c'est donc la réunion d'un nombre fini de sous-variétés $B(e ; i)$ de U $(1 \leq i \leq m(e))$. Si L est une sous-variété de $B(e ; i)$, on a $\dim f^{-1}(L) = \dim L + e$. Soient en effet M_k $(1 \leq k \leq r)$ les composantes irréductibles de $f^{-1}(L)$; ce sont des sous-variétés de V. Soit f_k la restriction de f à M_k. Pour tout $x \in L$, $f^{-1}_k(x)$ est vide ou de dimension $\leq e$, d'où $\dim M_k \leq \dim L + e$. Si les dimensions des M_k étaient toutes

$< \dim L + e$, il y aurait une partie relativement ouverte non vide L' de L telle que, pour tous les k et tout $x \in L'$, $f_k^{-1}(x)$ soit de dimension $\leq e$ (ou vide) ; mais $f^{-1}(x)$ serait alors de dimension $< e$, ce qui est impossible. En particulier, on a $\dim B(e\,;\,i) + e \leq \dim V$; posons

$$\beta(e\,;\,i) = \dim V - \dim B(e\,;\,i) - e \ ,$$

d'où $\beta(e\,;\,i) \geq 0$. Soit A une sous-variété fermée de U . Si Φ est le graphe de f , l'isomorphisme naturel de Φ sur V applique $\Phi \cap (A \times V)$ sur $f^{-1}(A)$; pour que $f_{\mathcal{Z}}^{-1}(A)$ soit défini, il est donc nécessaire et suffisant que $f^{-1}(A)$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + \dim V - \dim U$. Or $f^{-1}(A)$ est la réunion des $f^{-1}(A \cap H(e))$, donc des $f^{-1}(A \cap B(e\,;\,i))$; $f^{-1}(A \cap B(e\,;\,i))$ est vide ou de dimension $\dim (A \cap B(e\,;\,i)) + e$. Pour que $f_{\mathcal{Z}}^{-1}(A)$ soit défini, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\dim (A \cap B(e\,;\,i)) + e \leq \dim A + \dim V - \dim U$$

pour tout e et tout i . Cette condition s'écrit encore

$$\dim (A \cap B(e\,;\,i)) \leq \dim A + \dim B(e\,;\,i) - \dim U + \beta(e\,;\,i) \ ,$$

ce qui démontre la proposition 7 .

COROLLAIRE. - *Soient* f *un morphisme d'une variété* V *dans une variété* U *et* g *un morphisme d'une variété* W *dans* V ; *soit* $h = f \circ g$. *Il existe alors un nombre fini de sous-variétés* C_j *de* V *qui possèdent les propriétés suivantes, où* f_j *désigne la restriction de* f *à* C_j : *si* X *est un cycle de* U *tel que* $f_{\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ *et les* $f_{j;\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ *soient tous définis,* $g_{\mathcal{Z}}^{-1}(f_{\mathcal{Z}}^{-1}(X))$ *et* $h_{\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ *sont définis et égaux.*

Il existe des sous-variétés C_j de V telles que, si Y est une sous-variété fermée de V telle que, pour tout j , $Y \cap C_j$ soit vide ou de dimension $\leq \dim Y + \dim C_j - \dim V$, $g_{\mathcal{Z}}^{-1}(Y)$ soit défini. Soit X une sous-variété fermée de U telle que $f_{\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ et les $f_{j;\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ soient tous définis. Si Y est une composante irréductible de $f^{-1}(X)$, $Y \cap C_j$ est contenu dans $f_j^{-1}(X)$ et est par suite vide ou de dimension $\leq \dim X + \dim C_j - \dim U$. Par ailleurs, comme U et V sont non singulières, Y est de dimension $\geq \dim X + \dim V - \dim U$ et est effectivement de dimension $\dim X + \dim V - \dim U$ puisque $f_{\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ est défini. Il en résulte que $Y \cap C_j$ est vide ou de dimension $\leq \dim Y + \dim C_j - \dim V$. on en conclut de là que $g_{\mathcal{Z}}^{-1}(f_{\mathcal{Z}}^{-1}(X))$ est défini et que $h^{-1}(X) = g^{-1}(f^{-1}(X))$ est vide ou de dimension $\leq \dim X + \dim W - \dim U$, donc que $h_{\mathcal{Z}}^{-1}(X)$ est défini.

Soient Φ et Γ les graphes de f et de g ; l'isomorphisme naturel de Φ sur V définit un isomorphisme de $\Phi \times W$ sur $V \times W$; nous désignerons par Γ_1 l'image réciproque de Γ par cet isomorphisme ; Γ_1 se compose des points $(h(z), g(z), z)$ pour $z \in W$. Soit r la restriction à Γ_1 de la projection $\Phi \times W \to W$; $\bar{g}^{1}_{\mathfrak{Z}}(\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X))$ est alors $r_{\mathfrak{Z}}(\Gamma_1 . ((\Phi . (X \times V)) \times W)$, l'intersection $\Phi . (X \times V)$ étant calculée dans la variété $U \times V$ et l'intersection $\Gamma_1 . ((\Phi . (X \times V)) \times W)$ dans $\Phi \times W$. Or, soit s l'application $(x, y, z) \to (x, z)$ de $U \times V \times W$ sur $V \times W$; s induit un isomorphisme de Γ_1 sur le graphe Δ de h ; $\Gamma_1 . ((\Phi . (X \times V)) \times W) = \Gamma_1 . ((\Phi \times W) . (X \times V \times W))$ est égal à l'intersection $\Gamma_1 . (X \times V \times W)$ dans $U \times V \times W$; son image par s est donc $\Delta . (X \times W)$. Si t est la projection $U \times W \to W$, on a $r = t \circ s$, et par suite

$$\bar{g}^{1}_{\mathfrak{Z}}(\bar{f}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X)) = t_{\mathfrak{Z}}(\Delta . (X \times W)) = \bar{h}^{1}_{\mathfrak{Z}}(X) .$$

Rappelons qu'un morphisme f d'une variété V dans une variété U est dit fibrant s'il existe une variété W qui possède la propriété suivante : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert U_x de U et un isomorphisme t_x de $U_x \times W$ sur $\bar{f}^1(U_x)$ tels que $f(t_x(x', z)) = x'$ pour tout $x' \in U_x$ et tout $z \in W$. Supposons cette condition satisfaite. Pour tout $x \in U$, $\bar{f}^1(x)$ est de dimension $\dim W$; il en résulte que, pour toute sous-variété fermée A de U, $\bar{f}^1(A)$ est de dimension $\dim A + \dim W = \dim A + \dim V - \dim U$, ce qui montre que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(A)$ est défini. Par ailleurs, $\bar{f}^1(A)$ est une sous-variété de V. Soient en effet B et B' des composantes irréductibles de cet ensemble, x un point de $f(B)$ et x' un point de $f(B')$. Il est clair qu'il existe des voisinages ouverts U_x de x et $U_{x'}$ de x' tels que $\bar{f}^1(A \cap U_x)$ et $\bar{f}^1(A \cap U_{x'})$ soient homéomorphes à $(A \cap U_x) \times W$ et $(A \cap U_{x'}) \times W$ respectivement, donc irréductibles ; on en conclut que $\bar{f}^1(A \cap U_x)$ et $\bar{f}^1(A \cap U_{x'})$ sont des parties denses de composantes irréductibles B_1 et B_1' de $\bar{f}^1(A)$; on a $B \cap \bar{f}^1(U_x) \subset B_1$, $B' \cap \bar{f}^1(U_{x'}) \subset B_1'$, d'où $B \subset B_1$, et par suite $B = B_1$, et $B' = B_1'$. Or $\bar{f}^1(A \cap U_x \cap U_x')$ est dense dans B et dans B', d'où $B = B'$. Montrons maintenant que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(A) = \bar{f}^1(A)$. Soient x un point de A, U_x un voisinage ouvert de x et t_x un isomorphisme de $U_x \times W$ sur $V_x = \bar{f}^1(U_x)$ tels que $f(t_x(x', z)) = x'$ si $x' \in U_x$, $z \in W$. Soient Φ le graphe de f et Φ_x son intersection avec $U_x \times V_x$. Si on pose $A_x = A \cap U_x$, le coefficient de $\bar{f}^1(A_x)$ dans l'intersection $\Phi_x . (A_x \times V_x)$ dans la variété $U_x \times V_x$ est égal à celui de $\bar{f}^1(A)$ dans l'intersection

$\Phi.(A \times V)$ dans la variété $U \times V$. On se ramène donc au cas où $V = U \times W$, f étant la projection $U \times W \to U$. Dans ce cas, Φ est $\Delta \times W$, où Δ est la diagonale de $U \times U$. Si Δ_A est l'ensemble des (x , x) , $x \in A$, il est clair que $(\Delta \times W).(A \times U \times W) = \Delta_A \times W$ (avec le coefficient 1), ce qui démontre notre assertion.

2. Equivalence rationnelle des cycles.

Les variétés qui seront considérées dans ce numéro seront encore supposées non singulières.

DÉFINITION 2. - On dit qu'un cycle X sur une variété U est rationnellement équivalent à 0 s'il existe une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de cycles de U paramétrée par K telle que $\mathfrak{X}(X) = 0$, $\mathfrak{X}(1) = X$.

Il est clair que les cycles rationnellement équivalents à 0 forment un sous-groupe $\mathfrak{Z}_r(U)$ du groupe de tous les cycles, et que $\mathfrak{Z}_r(U)$ est un groupe gradué (par la dimension). Les éléments de $\mathfrak{Z}(U)/\mathfrak{Z}_r(U)$ s'appellent les classes d'équivalence rationnelles sur U .

PROPOSITION 8. - Soit f un morphisme propre d'une variété V dans une variété U ; si Y est un cycle rationnellement équivalent à 0 sur V , $f_{\mathfrak{Z}}(Y)$ est rationnellement équivalent à 0 sur U .

Cela résulte immédiatement de la proposition 5 .

Nous démontrerons plus tard (c'est l'objet essentiel de ces exposés) que, si f est un morphisme de V dans U , et X un cycle de U rationnellement équivalent à 0 tel que $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini, ce dernier cycle est rationnellement équivalent à 0 , tout au moins dans le cas où U est une variété quasi-projective.

Nous appellerons spéciale une variété T qui possède la propriété suivante : pour tout point $t \in T$, il existe un voisinage ouvert de t qui est isomorphe à une sous-variété ouverte d'un espace numérique K^r . Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U ; soient T une variété spéciale et $\mathfrak{X}$ une famille algébrique positive de cycles de U paramétrée par T . Soit T' l'ensemble des $t \in T$ tels que $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ soit défini ; supposons que T' soit dense dans T . Les cycles $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$,

<u>pour tous les</u> $t \in T'$, <u>sont alors rationnellement équivalents les uns aux autres.</u>

Soit $\mathfrak{X} = \sum_{i \in I} c_i \mathfrak{X}_i$, les $\mathfrak{X}_i$ étant des familles irréductibles et les c_i des entiers > 0 ; si $t \in T'$, les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}_i(t))$ sont tous définis. Il suffit donc de démontrer le lemme dans le cas où $\mathfrak{X}$ est irréductible, donc défini par une sous-variété fermée Z de $U \times T$. Soit Z_1 l'ensemble des $(x , y , t) \in U \times V \times T$ tels que $(x , t) \in Z$. Soit Φ le graphe de f . Désignons par $A_1 , \dots , A_m$ les composantes irréductibles de $Z_1 \cap (\Phi \times T)$, et par p_i la restriction à A_i de la projection $\Phi \times T \longrightarrow T$. Pour que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ soit défini, il faut et suffit que les ensembles $\bar{p}^1_i(t)$ soient tous vides ou de dimension $a + \dim V - \dim U$ (en désignant par a la dimension des cycles $\mathfrak{X}(t)$). Il en résulte que T' est un ensemble constructible, donc qu'il contient une partie ouverte non vide T_o de T ; comme la restriction de $\mathfrak{X}$ à T_o est une famille algébrique positive, la restriction à T_o de l'application $t \longrightarrow \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique (proposition 6). Ceci dit, considérons d'abord le cas où $T = K$; l'ensemble T' , qui contient un ouvert non vide, donc le complémentaire d'une partie finie, est alors lui-même ouvert et on peut prendre $T' = T_o$. Posant $\mathfrak{Y}(t) = \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ pour $t \in T'$, nous allons voir que $\mathfrak{Y}$ peut se prolonger en une famille algébrique définie sur K tout entier. La famille $\mathfrak{Y}$ est définie par un cycle $E = \sum_{i=1}^{s} a_i E_i$ de $V \times T'$, où les E_i sont des sous-variétés fermées de $V \times T'$. Soit $\bar{E}_i$ l'adhérence de E_i dans $V \times K$. L'image de $\bar{E}_i$ par la projection de $V \times K$ dans K est dense dans K , puisqu'il en est ainsi de celle de E_i ; on en déduit que, si t est un point quelconque de K , et si $1 + e_i = \dim E_i$, $\bar{E}_i \cap (V \times t)$ est de <u>dimension</u> e_i . Il en résulte que le cycle $\bar{E} = \sum a_i \bar{E}_i$ définit une famille $\bar{\mathfrak{Y}}$ paramétrée par K ; cette famille prolonge $\mathfrak{Y}$, car, E_i étant fermé dans $V \times T'$, on a $E_i = \bar{E}_i \cap (V \times T')$. Si t , t' sont des points distincts quelconques de K , il y a un automorphisme de la variété K qui transforme t' en 0 et t en 1 ; il en résulte que $\overline{\mathfrak{Y}}(t) - \overline{\mathfrak{Y}}(t')$ est rationnellement équivalent à 0 , ce qui démontre le lemme dans le cas où $T = K$. Passons maintenant au cas général. On peut supposer que T_o est isomorphe à une sous-variété ouverte de K^r ; deux points quelconques de T_o appartiennent alors toujours à une sous-variété de T_o qui est isomorphe à une sous-variété ouverte de K , ce qui montre que les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ pour tous les $t \in T_o$ sont rationnellement équivalents entre eux. Soit maintenant t' un point de T' ; il admet un voisinage ouvert T_1 qui est isomorphe à une sous-variété ouverte de K^r. L'ensemble T_1 rencontre T_o ; soit t_o un point commun à ces deux ensembles. Les points t' et t_o appartiennent alors à une sous-variété de T_1 qui est isomorphe à une sous-variété ouverte de K. On en conclut que $f_{\mathfrak{Z}}^{-1}(\mathfrak{X}(t'))$ est rationnellement équivalent à $f_{\mathfrak{Z}}^{-1}(\mathfrak{X}(t_o))$, ce qui achève la démonstration du lemme.

On notera que toute sous-variété ouverte d'une variété spéciale est spéciale, que tout produit de variétés spéciales est une variété spéciale, et que les variétés suivantes sont spéciales : les espaces projectifs ; le groupe projectif d'un espace projectif ; les grassmanniennes d'un espace projectif.

3. Les diviseurs des fonctions.

Il nous sera commode dans ce qui suit de modifier quelque peu la notion de diviseur d'une fonction $\neq 0$ sur une variété U, de manière à prendre en considération les hypersurfaces singulières de U. Soit S une hypersurface de U ; désignons par $\mathcal{O}(S)$ son anneau local. Si $t \in \mathcal{O}(S)$, $t \neq 0$, posons $e(t\ ;\ S) = \ell(\mathcal{O}(S)/t\mathcal{O}(S))$ où $\ell(\mathfrak{M})$ désigne la longueur d'un module $\mathfrak{M}$. Il est clair que l'on a

$$e(t_1 t_2\ ;\ S) = e(t_1\ ;\ S) + e(t_2\ ;\ S)$$

quels que soient les éléments t_1, $t_2 \neq 0$ de $\mathcal{O}(S)$; l'application $t \longrightarrow e(t\ ;\ S)$ se prolonge donc en un homomorphisme $t \longrightarrow e(t\ ;\ S)$ du groupe multiplicatif des fonctions numériques $\neq 0$ sur U dans Z. Si S est non singulière sur U, $e(t\ ;\ S)$ n'est autre que la multiplicité avec laquelle S figure dans le diviseur de la fonction t. Il suffit de le montrer dans le cas où $t \in \mathcal{O}(S)$. Remplaçant U par une sous-variété ouverte, on peut supposer t partout définie sur U. Soit alors U' le graphe de t ; soit S' l'hypersurface de U' qui correspond à S par l'isomorphisme naturel de U sur U'. Désignons par $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$ l'anneau local de S' sur $K \times U$ et par θ la projection de $K \times U$ sur K, qui est une fonction numérique sur $K \times U$. La multiplicité e' avec laquelle S intervient dans le diviseur (t) de t est le coefficient de S' dans l'intersection de U' et de $0 \times U$. Or l'idéal de définition de la variété $0 \times U$ dans $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$ est l'idéal engendré par θ. Soit par ailleurs $\mathfrak{u}'$ l'idéal de définition de U' dans $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$; posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{K\times U}(S')$. Comme $\mathcal{O}\theta$ est idéal principal, on a $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{O}/\mathfrak{u}', \mathcal{O}/\mathcal{O}\theta) = \{0\}$ si $i > 0$, et e' est la longueur de $\mathrm{Tor}_o(\mathcal{O}/\mathfrak{u}', \mathcal{O}/\mathcal{O}\theta)$, c'est-à-dire de $(\mathcal{O}/\mathfrak{u}') \otimes (\mathcal{O}/\mathcal{O}\theta)$, ou encore de $\mathcal{O}/(\mathfrak{u}' + \mathcal{O}\theta)$. Or $\mathcal{O}/\mathfrak{u}'$ est l'anneau local

$\mathfrak{o}(S')$ de S' sur U' , et la classe de θ modulo $\mathfrak{u}'$ est la fonction t' induite par θ sur U' ; on voit donc que e' est la longueur du module $\mathfrak{o}(S')/\mathfrak{o}(S')t'$ sur $\mathfrak{o}(S')$, donc est égal à $e(t\ ;\ S)$ puisque t' est la fonction qui correspond à t par l'isomorphisme naturel de U' sur U .

Ceci étant, nous appellerons maintenant diviseur de t la somme formelle $\sum_S e(t\ ;\ S)S$, étendue à toutes les hypersurfaces S singulières ou non de U . Nous désignerons ce diviseur par (t) .

Soient maintenant U et V des variétés et f un morphisme propre de degré fini de V dans U . Soient $F(U)$ et $F(V)$ les corps de fonctions numériques sur U et V ; le cohomomorphisme φ de f est alors un isomorphisme de $F(U)$ sur un sous-corps de $F(V)$; si t est une fonction numérique sur V , nous désignerons par $N_{V/U}(t)$ la fonction numérique sur U dont l'image par φ est la norme relative de v par rapport au sous-corps $\varphi(F(U))$ de $F(V)$. Nous nous proposons de montrer que, si $t \neq 0$, on a

$$(N_{V/U}(t)) = f_{\mathfrak{Z}}((t)) .$$

(On notera que la définition de l'opération $f_{\mathfrak{Z}}$ s'étend immédiatement au cas des cycles qui font intervenir des variétés singulières). On voit tout de suite qu'il suffit de démontrer cette formule dans les cas suivants :

a. U et V sont normales ;

b. V est la variété dérivée normale de $F(U)$ relative au corps $F(U)$ lui-même.

Soit S une hypersurface de U ; nous désignerons par $\mathfrak{o}$ l'image par φ de son anneau local et par $\mathcal{O}$ la fermeture entière de $\mathfrak{o}$ dans $F(V)$, qui est un $\mathfrak{o}$-module de type fini. Les anneaux locaux des hypersurfaces de V dont les images par f sont denses dans S sont les anneaux locaux des idéaux premiers maximaux de $\mathcal{O}$. Pour établir que les coefficients de S dans les cycles qui figurent aux deux membres de la formule à établir sont égaux, il suffira de considérer le cas où $t \in \mathcal{O}$, et même, dans le cas b., où $t \in \mathfrak{o}$; on peut même supposer, en multipliant t par un élément convenable de $\mathfrak{o}$, que, dans le cas b., t appartient à l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$. Soit u la norme relative de t par rapport à $\varphi(F(U))$. Le coefficient de S dans $(N_{V/U}(t))$ est $\ell(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}u)$. Dans le cas a., $\mathfrak{o}$ est un anneau à idéaux principaux, et il résulte immédiatement de la théorie des diviseurs élémentaires et du fait que u est le déterminant de l'endomorphisme $a \rightarrow at$ de $\mathcal{O}$ que $\ell(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}u)$ est la longueur de $\mathcal{O}/\mathcal{O}t$ considéré comme $\mathfrak{o}$-module. Dans tous les cas, $\mathcal{O}$ est un anneau à idéaux principaux puisque $\mathfrak{o}$ est de dimension 1 ; si $S_1, \ldots, S_h$ sont les hypersurfaces distinctes de V dont les images par f sont denses dans S, $\mathcal{O}$ admet h idéaux premiers $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_h$ dont les anneaux locaux sont les anneaux locaux des S_i ; soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}$ et d_i le degré du corps $\mathcal{O}/\mathfrak{P}_i$ par rapport à $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; on a alors $f_{\mathfrak{Z}}(S_i) = d_i S$. Soit $\mathcal{O}t = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_h^{e_h}$; alors le coefficient de S dans $f_{\mathfrak{Z}}((t))$ est $\sum_{i=1}^h d_i e_i$. Le module $\mathcal{O}/\mathcal{O}t$ admet une suite de composition de longueur $\sum_{i=1}^h e_i$; parmi les quotients de cette suite, il y en a e_i qui sont isomorphes à $\mathcal{O}/\mathfrak{P}_i$; comme $\mathcal{O}/\mathfrak{P}_i$ est un $\mathfrak{o}$-module de longueur d_i, on voit que $\sum_{i=1}^h d_i e_i$ est égal à la longueur de $\mathcal{O}/\mathcal{O}t$ considéré comme $\mathfrak{o}$-module. Ceci démontre la formule dans le cas a. Pour traiter le cas b., il faut encore montrer que, dans ce cas, $\mathcal{O}/\mathcal{O}t$ et $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t$ ont même longueur en tant que $\mathfrak{o}$-modules. Or, il y a un $a > 0$ tel que $\mathcal{O}t^a \subset \mathfrak{o}$; en désignant par $\ell_{\mathfrak{o}}$ la longueur en tant que $\mathfrak{o}$-module, et par n un entier > 0, $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathcal{O}t^a/\mathcal{O}t^{a+n}) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t^{a+n})$, puisque $\mathcal{O}t^a \subset \mathfrak{o}$, $\mathcal{O}t^{a+n} \supset \mathfrak{o}t^{a+n}$. Il en résulte que $n\,\ell_{\mathfrak{o}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}t) \leq (a+n)\,\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t)$, d'où $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}t) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t)$. De même, comme $\mathfrak{o} \subset \mathcal{O}$, $\mathfrak{o}t^n \supset \mathcal{O}t^{a+n}$, on a $n\,\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t) \leq (n+a)\ell_{\mathfrak{o}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}t)$, d'où $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}t)$, ce qui achève la démonstration de la formule.

Nous allons appliquer ceci à la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 9. - Soit U une variété non singulière. Pour qu'un diviseur X de U soit rationnellement équivalent à 0, il faut et suffit que ce soit le diviseur d'une fonction numérique sur U.

Soit t une fonction numérique $\neq 0$ sur U. Elle se prolonge en une fonction sur U à valeurs dans la droite projective D ; soit Z l'adhérence dans $D \times U$ du graphe de cette fonction. Si t est constante, on a $(t) = 0$. Supposons t non constante ; alors $Z.(a \times U)$ est défini pour tout $a \in D$; soit $Z.(a \times U) = X(a) \times U$. Il est clair que $a \to X(a)$ est une famille algébrique de cycles paramétrée par D, qui est une variété spéciale ; comme $(t) = X(0) - X(\infty)$ (t) est rationnellement équivalent à 0. Soit réciproquement X un diviseur rationnellement équivalent à 0 sur U. Utisant un raisonnement analogue à celui qui nous a permis de prolonger à K une famille algébrique de cycles définie sur une partie ouverte non vide de K (cf. la démonstration du lemme 1), on voit facilement qu'il existe une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de diviseurs de U, paramétrée par D, telle que $\mathfrak{X}(0) = 0$, $\mathfrak{X}(\infty) = X$. Soit Z le cycle de définition de cette famille ; soit $Z = \sum_{i=1}^{h} c_i Z_i$, les Z_i étant des sous-variétés fermées de $U \times D$. Pour chaque i, la projection de $U \times D$ sur U induit un morphisme propre f_i de Z_i sur U, et f_i est de degré fini. Par ailleurs, la projection de $U \times D$ sur D définit une fonction numérique t_i sur Z_i. Si S est une hypersurface contenue dans $Z_i \cap (U \times 0)$, le coefficient de S dans $Z_i.(U \times 0)$ est la longueur de $\mathcal{O}(S)/\mathcal{O}(S)t_i$, où $\mathcal{O}(S)$ est l'anneau local de S sur Z_i ; appliquant un résultat analogue à $1/t_i$, on voit que le diviseur de t_i sur Z_i, considéré comme cycle dans $U \times D$, est $Z_i.((U \times 0) - (U \times \infty))$. Si $\mathfrak{X}_i$ est la famille algébrique de cycles définie par Z_i, on voit que le diviseur de t_i sur Z_i est $\mathfrak{X}_i(0) \times 0 - \mathfrak{X}_i(\infty) \times \infty$. Or il est clair que $f_{i;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}_i(0) \times 0) = \mathfrak{X}_i(0)$, $f_{i;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}_i(\infty) \times \infty) = \mathfrak{X}_i(\infty)$. Il en résulte, en vertu de la formule précédemment démontrée, que $\mathfrak{X}_i(0) - \mathfrak{X}_i(\infty)$ est le diviseur d'une fonction sur U (à savoir de $N_{Z_i/U}\, t_i$). Or on a

$$X = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i(\infty) \qquad 0 = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i(0) \quad ;$$

Il en résulte que X est le diviseur d'une fonction.

APPENDICE.

Nous avons utilisé le résultat suivant : _soit_ f _un morphisme dominant d'une variété_ V _dans une variété_ U, _et soit_ E _une partie fermée_ $\neq V$ _de_ V ; _il existe alors une partie ouverte non vide_ U_0 _de_ U _telle que, si_ $x \in U_0$, _aucune composante irréductible de l'ensemble_ $f^{-1}(x)$ _ne soit contenue dans_ E.

Soient $E_1, \dots, E_h$ celles des composantes irréductibles de E dont les images par f sont denses dans U. Il y a d'abord une partie ouverte non vide U_1 de U qui ne rencontre pas l'ensemble $f(E - \bigcup_{i=1}^{h} E_i)$. Soit f_i la restriction de f à E_i ; il y a une partie ouverte non vide U_0 de U_1 telle que, pour tout $x \in U_0$, et pour tout i $(1 \leq i \leq h)$, $f_i^{-1}(x)$ soit vide ou de dimension $\leq \dim E_i - \dim U < \dim V - \dim U$. Soit x un point de U_0, et soit Z une composante irréductible de $f^{-1}(x)$; il est bien connu que $\dim Z \geq \dim V - \dim U$; Z n'est donc contenu dans aucun des ensembles E_i ; comme les E_i sont fermés, Z n'est pas contenu dans leur réunion ; comme $x \in U_1$, Z ne rencontre pas $E - \bigcup_{i=1}^{h} E_i$; Z n'est donc pas contenu dans E.