ADRIEN DOUADY

Variétés abéliennes

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A9_0>

VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Adrien DOUADY

1. Groupes algébriques.

DÉFINITION. - Un groupe algébrique est un couple (G, φ) où G est une variété algébrique et φ un morphisme de $G \times G$ dans G qui munit l'ensemble des points de G d'une structure de groupe.

PROPRIÉTÉS. - Pour tout point a de G, les translations ℓ_a et r_a définies par $\ell_a(x) = \varphi(a, x)$ et $r_a(x) = \varphi(x, a)$ sont des automorphismes de la structure de variété algébrique de G.

Tout point x de G est simple (en effet, si y est un point simple de G, il existe un automorphisme de G qui envoie y en x).

Si G est connexe, G est irréductible. L'application $\sigma : G \longrightarrow G$ qui, à tout point, fait correspondre son inverse pour la loi de groupe est un morphisme (donc un automorphisme) de la structure de variété algébrique. La démonstration de cette propriété utilise le fait qu'un morphisme bijectif (donc radiciel) d'une variété dans une autre est birationnel s'il est non ramifié ([1], p. 211, corollaire 2 à la proposition 3, paragraphe II, chapitre VI).

Il n'y aurait d'ailleurs pas d'inconvénient à la prendre comme axiome dans la définition des groupes algébriques.

DÉFINITION. - Une variété abélienne est un groupe algébrique dont la variété est connexe (donc irréductible) et complète.

On va montrer que ceci entraîne que le groupe est commutatif.

2. Une propriété des variétés complètes.

Rappelons qu'une variété V est dite complète si, pour toute variété T et tout fermé $F \subset T \times V$, la projection de F sur T est fermée. Dans le cas classique, cette propriété équivaut à la compacité.

A. PROPOSITION 0. - Soient V une variété complète connexe, T une variété connexe, f un morphisme de $T \times V$ dans une variété U. Alors, si pour un $t_0 \in T$, $f(t_0, v)$ ne dépend pas de v, on a :

$$\forall t, \quad \forall v \qquad f(t, v) = \varphi(t)$$

où φ est un morphisme de T dans U.

DÉMONSTRATION. - Si $v_1 , v_2 \in V$, l'ensemble P_{v_1,v_2} des $t \in T$ tels que $f(t , v_1) = f(t , v_2)$ est fermé. L'ensemble $P = \bigcap P_{v_1,v_2}$ des $t \in T$ pour lesquels $f(t , v)$ ne dépend pas de v est donc fermé. Montrons qu'il est aussi ouvert. Si $t_1 \in P$, $f(t_1 , v) = u_1$ pour tout v . Soit $U - F$ un voisinage affine de u_1 , F fermé, $f^{-1}(F)$ est fermé, $G = pr_T(f^{-1}(F))$ est fermée, $T - G$ est un voisinage de t_1 . Pour $t' \in T - G$, f définit un morphisme $v \longrightarrow f(t' , v)$ de V complète connexe dans $U - F$ affine. Cette application est nécessairement constante. Donc $P \supset T - G$ est un voisinage de chacun de ses points, i. e. un ouvert.

T étant connexe, si $P \ni t_0$, $P = T$ ce qui démontre la proposition (pour voir que φ est un morphisme, il suffit de prendre un point $v_0 \in V$, sans s'inquiéter du cas où $V = \emptyset$).

REMARQUE. - On a un énoncé analogue en géométrie analytique : soit V un espace analytique, complexe, compact, connexe, T un espace topologique connexe, f une application continue de $T \times V$ dans un espace analytique U , qui induise pour tout $t \in T$ une application holomorphe f_t de $\{t\} \times V$ dans U . Alors, si f_t est constante pour $t = t_0$, elle est constante pour tout $t \in T$. En d'autres termes, une application holomorphe de V dans U homotope à une application constante parmi les applications holomorphes est constante. L'hypothèse f_t holomorphe pour tout t est essentielle : il y a des contre-exemples avec des variétés V non Kählériennes.

B. Conséquences de la proposition 0.

PROPOSITION 1. - Si V est une variété complète connexe, T une variété connexe, G un groupe algébrique, tout morphisme $f : T \times V \longrightarrow G$ est de la forme $f(t , v) = \varphi_1(t) \times \varphi_2(v)$, où φ_1 et φ_2 sont des morphismes de T et V dans G .

DÉMONSTRATION. - Soit $t_0 \in T$. Considérons $f(t , v).f(t_0 , v)^{-1}$; c'est un morphisme de $T \times V$ dans G qui, pour $t = t_0$, v quelconque, prend la valeur e , élément neutre de G . On a donc :

$$f(t , v).f(t_0 , v)^{-1} = \varphi_1(t)$$

$$f(t , v) = \varphi_1(t).f(t_0 , v) .$$

REMARQUE 1. - "Par un raisonnement analogue on montrerait" ou "en considérant le groupe opposé à G , on en déduit" que $f(t , v)$ se met aussi sous la forme $\Psi_1(v)\ \Psi_2(t)$.

REMARQUE 2. - Si $\varphi_1(t)\ \varphi_2(v) = \varphi_1'(t)\ \varphi_2'(v)$, on a $\varphi_1'(t) = \varphi_1(t).a$ et $\varphi_2'(v) = a^{-1}\ \varphi_2(v)$, où a est un élément fixe de G.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> G <u>un groupe connexe,</u> V <u>une variété complète connexe ; supposons</u> $e \in V \subset G$. <u>Alors</u> V <u>est contenue dans le centre de</u> G.

DÉMONSTRATION. - Considérons $f : G \times V \to G$ définie par $f(g , v) = v.g.v^{-1}$. Pour $g = e$, f ne dépend pas de v. Donc $f(g , v) = \varphi(g)$. En faisant $v = e$, on trouve $\varphi(g) = g$, soit $vgv^{-1} = g$, ce qui démontre la proposition. En particulier :

THÉORÈME 0. - <u>Le groupe sous-jacent d'une variété abélienne est abélien.</u>
(Pour une autre démonstration de ce résultat, voir l'appendice).

3. Fonctions à valeurs dans une variété abélienne.

THÉORÈME 1. - <u>Toute fonction</u> f <u>sur une variété non singulière</u> U <u>à valeurs dans une variété abélienne</u> A <u>est un morphisme.</u>

Ce théorème résulte de la confrontation de deux lemmes.

LEMME 1. - <u>Si</u> f <u>est une fonction définie sur une variété non singulière</u> U <u>à valeurs dans un groupe algébrique</u> G, <u>l'ensemble</u> S <u>des points de</u> U <u>où</u> f <u>est non définie est purement de codimension</u> 1.

DÉMONSTRATION. - Soit φ la fonction de $U \times U$ dans G définie par $\varphi(u , u') = f(u)\ f(u')^{-1}$. Soit X un voisinage affine de e dans G et φ_0 la fonction de $U \times U$ dans X qui ne diffère de φ que par son ensemble de définition : il n'est pas à craindre que $\varphi(U)$ soit contenu dans $G - X$ car, si f est définie en u, φ est définie en (u , u) et y prend la valeur e ; plus précisément, montrons l'équivalence des trois propriétés

a. f est définie en u ;
b. φ est définie en (u , u) ;
c. φ_0 est définie en (u , u).

$a \Longrightarrow b \Longleftrightarrow c$ est évident.

Montrons que $b \Longrightarrow a$. Si φ est définie en (u , u), soit $v \in U$ tel que f soit définie en v, et φ définie en (u , v) ; on a, pour tout u' où f est définie :

$$f(u') = f(u').f(v)^{-1}.f(v) = \varphi(u' , v).f(v) .$$

La fonction f_0 définie par $f_0(u') = \varphi(u' , v).f(v)$ coïncide avec f, et est définie au point u, on a bien $b \Longrightarrow a$. Ceci montre que l'intersection avec la diagonale de l'ensemble H des points de $U \times U$ où φ_0 n'est pas définie, est S, ou plutôt l'image de S par l'application diagonale. Or l'ensemble des points en lesquels une fonction numérique sur une variété normale n'est pas définie est purement de codimension 1 ; il en est donc de même si on remplace "fonction numérique" par "fonction à valeurs dans une variété affine". H est donc purement de codimension 1. Comme $U \times U$ n'est pas singulière, la codimension dans $U \times U$ de $H \cap \Delta$ est $\leqslant \operatorname{codim} H + \operatorname{codim} \Delta = \dim U + 1$, ce qui montre que toute composante de $H \cap \Delta$ est de codimension $\leqslant 1$ dans Δ.

REMARQUE. - L'hypothèse U non singulière est essentielle pour le lemme 1 ainsi que pour le théorème 1.

Contre-exemple. - Soit U un cône de K^3 ayant pour base une cubique G de genre 1 de l'espace projectif à 2 dimensions. G peut être muni d'une structure de groupe. La projection f de U sur G est définie en tout point sauf à l'origine ; S est donc de codimension 2.

LEMME 2. - Si f est une fonction définie sur une variété normale U à valeurs dans une variété complète V, l'ensemble S des points de U où f est non définie est de codimension > 1.

DÉMONSTRATION. - Puisque V est complète, il existe une variété W contenue dans D^r, D désignant la droite projective, un morphisme p de W sur V et une fonction s de V dans W tels que $p \odot s = I_V$.
$f = p \odot (s \odot f)$ sera définie chaque fois que $s \odot f$ est définie. Mais cette dernière peut être considérée comme à valeurs dans D^r puisque W est fermée dans D^r, et sera définie chaque fois que les r fonctions coordonnées de f sont définies. Ces fonctions sont à valeurs dans D donc, U étant normale, l'ensemble des points où elles sont non définies est de codimension > 1 ([1], p. 166, corollaire à la proposition 2, paragraphe 1, chapitre V).

4. Fonctions définies sur un produit à valeurs dans une variété abélienne.

THÉORÈME 2. - Soient X et Y deux variétés irréductibles, f une fonction définie sur $X \times Y$ à valeurs dans une variété abélienne A, dont la loi de groupe est notée additivement. Alors f est de la forme $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions de X et de Y dans A.

REMARQUE. - Ceci entraîne que f est définie aux points où f_1 et f_2 sont définies, et en ces points seulement.

DÉMONSTRATION. - Soit (x_0 , y_0) un point simple de $X \times Y$. En considérant la fonction g définie sur $X \times Y$ par

$$g(x , y) = f(x , y) - f(x_0 , y) - f(x , y_0) + f(x_0 , y_0) \quad ,$$

on est ramené à montrer que, si une fonction g à valeurs dans A est nulle sur

$$X \vee Y = \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \quad ,$$

elle est nulle sur $X \times Y$.

Nous nous ramènerons successivement aux cas particuliers suivants :

a. X est une courbe ;

b. X est une courbe non singulière complète et Y est non singulière.

<u>Réduction à a.</u> - L'ensemble des points x_1 de X tels qu'il existe une courbe irréductible contenant x_0 et x_1, dont x_0 soit un point simple, est dense dans X. Or a. entraîne que g est nulle en tout point (x_1 , y) de son ouvert de définition, donc en tous les points d'un ensemble dense, donc partout.

<u>Réduction à b.</u> - Si X est une courbe irréductible, il existe une courbe complète et normale, donc non singulière X_1 ; et une équivalence rationnelle de X à X_1, définie en x_0. D'autre part, si Y_1 est l'ouvert des points simples de Y, Y_1 est birationnellement équivalent à Y. A la fonction g, définie sur $X \times Y$ correspond une fonction g_1 définie sur $X_1 \times Y_1$ et il suffira évidemment de démontrer le théorème pour la fonction g_1.

<u>Démonstration dans le cas b.</u> - La variété $X \times Y$, produit de deux variétés non singulières est non singulière, et g est un morphisme d'après le théorème 1. Sa valeur ne dépend pas de x pour $y = y_0$, donc pour tout y d'après la proposition 0, X étant complète. Elle est nulle pour $x = x_0$ donc pour tout x. Le théorème 2 est démontré.

COROLLAIRE 1. - <u>Toute fonction f définie sur un groupe algébrique G à valeurs dans une variété abélienne A est de la forme $h + a$, où h est un homomorphisme de G dans A et a une constante.</u>

DÉMONSTRATION. - Posons $h(x) = f(x) - f(e)$. La fonction $g : G \times G \to A$ définie par $g(x , y) = h(x.y)$ est de la forme $g_1(x) + g_2(y)$. On peut imposer $g_1(e) = 0$, alors $g_2(e) = 0$. En faisant successivement $x = e$ et $y = e$, on trouve $g_1 = g_2 = h$. D'où $h(x , y) = h(x) + h(y)$,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2. - <u>Toute fonction f définie sur une droite D à valeurs dans une variété abélienne A est constante.</u>

DÉMONSTRATION. - f est partout définie d'après le théorème 1, et d'après le corollaire 1 appliqué au groupe multiplicatif, on a : $f(xy) = f(x) + f(y) + a$. En faisant $x = 0$, on a $f(0) = f(0) + f(y) + a$, d'où $f(y) = -a$,

C. Q. F. D.

5. Appendice : Représentations adjointes. - Le théorème 0 peut aussi s'obtenir à partir de la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - *Soient G un groupe algébrique connexe, C le centre de G. Il existe un groupe linéaire $L = GL(m)$ et un homomorphisme algébrique $f : G \longrightarrow L$, tels que $f^{-1}(e) = C$.*

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local des fonctions sur G définies à l'élément neutre e, $\mathfrak{M}$ son idéal maximal, posons $T_n = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^n$. Pour tout n, T_n est un espace vectoriel de dimension finie. Tout élément $x \in G$ définit un automorphisme intérieur $\alpha(x) : G \longrightarrow G$ qui induit un automorphisme $Ad_n(x) : T_n \longrightarrow T_n$. Soit C_n le noyau de $Ad_n : G \longrightarrow GL(T_n)$. Les C_n forment une suite décroissante de sous-variétés de G. Une telle suite est stationnaire, et il existe un n_0 tel que $C_n = C_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Montrons que $C_{n_0} = C$: si $x \in C_{n_0}$, $Ad_n(x)$ est l'identité pour tout n, donc l'automorphisme de $\mathcal{O}$ défini par l'automorphisme intérieur $\alpha(x)$ de G est l'identité, puisque l'anneau local $\mathcal{O}$ est séparé. Par suite, G étant connexe, donc irréductible, $\alpha(x)$ est l'identité. D'ou la proposition 3 en posant $L = GL(T_{n_0})$.

REMARQUE. - En caractéristique $p \neq 0$, le monomorphisme $G/C \longrightarrow L$ n'est pas forcément un isomorphisme de G/C sur son image.

Exemple : $G = k^* \times k$, muni de la loi $\varphi((a, b), (a', b')) = (aa', b + a^p b')$

On déduit la proposition 2 et le théorème 0 de la proposition 3 en remarquant que L est une variété affine, et que, si V est complète connexe, tout morphisme $V \longrightarrow L$ est constant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958 (multigraphié).