CONJEERVERAM SRIRANGACHARI SESHADRI

La variété de Picard d'une variété complète

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 8, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A8_0>

LA VARIÉTÉ DE PICARD D'UNE VARIÉTÉ COMPLÈTE

par Conjeerveram Srirangachari SESHADRI

On conserve les notations des exposés 4 et 5 et par conséquent, sauf mention expresse contraire, on entend par variété une variété irréductible au sens de FAC [12], ou une variété au sens de [3], définie sur un corps K algébriquement clos. Si l'on considère des diviseurs, etc. sur U rationnels sur un sous-corps $R \subset K$, on suppose que K est en plus un domaine universel et que R contient un corps de définition de U (cf. chapitre 0, [1], ou Foundations [15]). On aura besoin de considérer l'extension de U à une variété $\mathfrak{U}$ définie sur un corps Ω algébriquement clos $\Omega \supset K$; par exemple, si U est affine et $A_K(U)$ désigne l'algèbre affine de U, l'algèbre affine $A_\Omega(\mathfrak{U})$ de $\mathfrak{U}$ est $A_K(U) \otimes_K \Omega$. Les "objets" (diviseurs, etc.) sur U peuvent être considérés comme des "objets" sur $\mathfrak{U}$ rationnels sur K.

Chapitre 1 : Existence.

1. Préliminaires.

Soit U une variété. On dit qu'un diviseur D sur U (resp. une classe de diviseurs sur U) est algébriquement équivalent à zéro, s'il existe une application algébrique (i. e. famille algébrique) $f : T \to \mathfrak{D}(U)$ (resp. $\mathfrak{C}(U)$) telle que T soit une variété et que $f(t_1) = D$, $f(t_2) =$ l'élément neutre de $\mathfrak{D}(U)$ (resp. $\mathfrak{C}(U)$), t_1, t_2 étant deux points de T (cf. l'exposé 5, pour la définition d'une application algébrique). On vérifie facilement que les diviseurs (resp. classes de diviseurs) sur U algébriquement équivalents à zéro forment un sous-groupe de $\mathfrak{D}(U)$ (resp. de $\mathfrak{C}(U)$) qu'on note $\mathfrak{D}^a(U)$ (resp. $\mathfrak{C}^a(U)$).

Soit $f : T \to \mathfrak{C}(U)$ une application algébrique, T, U étant des variétés. Si $(\mathfrak{t}(T))_{t_0}$ désigne l'espace tangent de Zariski en $t_0 \in T$, on note $\sigma(f)$ l'application canonique linéaire de $(\mathfrak{t}(T))_{t_0}$ dans $H^1(U, \mathcal{O})$ (cf. l'exposé 6). Si T est en plus une variété de groupe, f un homomorphisme algébrique (i. e. une application algébrique qui est en même temps un homomorphisme de groupes) et U complète, on a démontré (cf. l'exposé 6) que $\sigma(f)$ est en fait une application linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T)$ de T, dans $H^1(U, \mathcal{O})$; ceci veut dire que si Θ est un champ de vecteurs invariants sur G, $(\sigma(f)(\Theta(s))$ est indépendant de s $(s \in G)$.

On a l'habitude de désigner par $\langle L , f \rangle$ l'élément $\sigma(f)(L)$ de $H^1(U , \mathcal{O})$.

Si G et H sont deux variétés de groupes, on appelle une application $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme algébrique si f est en même temps un morphisme de variétés et un homomorphisme de groupes. On réserve le mot "homomorphisme" pour un homomorphisme de groupes.

2. Définition de la variété de Picard, conditions pour son existence (cf. [4], chapitre III, paragraphe I).

Soient U une variété complète et $f : G \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, un homomorphisme algébrique, G étant une variété de groupe. Soit N le noyau de f ; en vertu du théorème de continuité (cf. théorème 2, paragraphe IV, chapitre I, [4], ou théorème 4, exposé 5) N est un sous-groupe fermé (invariant) de G. Par conséquent il existe une structure canonique de variété de groupe sur le quotient G/N (cf. théorème 4 et proposition 8, exposé 8, [10]). Soient $\omega : G \longrightarrow G/N$ l'homomorphisme canonique et $f_1 : G/N \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ l'application définie par la condition $f_1 \circ \omega = f$.

PROPOSITION 1. - L'homomorphisme (injectif) $f_1 : G/N \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ défini ci-dessus est un homomorphisme algébrique.

Cette proposition serait triviale si (G , ω) était un espace fibré localement trivial sur G/N ; mais ce n'est pas vrai en général. Toutefois, on sait que (G , ω) est un espace fibré isotrivial au sens de SERRE (cf. exposé 1, proposition 3, [11]), c'est-à-dire que pour tout point y de G/N, il existe un voisinage ouvert X et un revêtement non ramifié (T , p) au-dessus de X, tels que l'image réciproque de (G , ω) par p soit un espace fibré trivial au-dessus de T. Maintenant la proposition résulte du théorème de descente pour un revêtement non ramifié (cf. théorème 2, exposé 5, ou proposition 1, paragraphe V, chapitre I, [4]).

C. Q. F. D.

Soit U une variété complète. Un couple (G , π) où G est une variété de groupe et $\pi : G \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ un homomorphisme algébrique s'appelle une variété de Picard de U si pour tout couple (H , ψ) où H est une variété de groupe et $\psi : H \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ un homomorphisme algébrique, il existe un homomorphisme algébrique $f : H \longrightarrow G$ et un seul, tel que $\pi \circ f = \psi$.

PROPOSITION 2. - S'il existe une variété de Picard (G , π) d'une variété complète U, l'homomorphisme algébrique π est injectif.

Soit N le noyau de l'homomorphisme π ; c'est un sous-groupe distingué de G qui est en plus fermé en vertu du théorème de continuité (cf. théorème 2, paragraphe IV, chapitre I, [4], ou exposé 5, théorème 4). Donc il existe une structure canonique de variété de groupe sur le quotient G/N (cf. théorème 4 et proposition 8, exposé 8, [10]) et en vertu de la proposition 1, l'homomorphisme algébrique π se descend en un homomorphisme algébrique $\pi_1 : G/N \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, c'est-à-dire, $\pi = \pi_1 \circ \omega$, $\omega : G \longrightarrow G/N$ étant l'homomorphisme canonique de G sur G/N. D'après la définition de la variété de Picard, il existe un homomorphisme algébrique $\theta : G/N \longrightarrow G$ tel que $\pi_1 = \pi \circ \theta$; l'unicité de π entraîne que l'application $\theta \circ \omega : G \longrightarrow G$ est l'identité et on obtient par conséquent $N = 0$,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - *S'il existe une variété de Picard* (G , π) *d'une variété complète* U , *elle est unique à un isomorphisme près et le groupe* G *est commutatif.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.

PROPOSITION 3. - *Soit* U *une variété complète ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La variété de Picard* (G , π) *de* U *existe ;*

(2) *Soient dans un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\eta_n"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\eta_{n+1}"] & G_{n+2} \arrow[r] \arrow[dl, "\eta_{n+2}"] & \cdots \\
& & \mathcal{G}(U) & &
\end{tikzcd}$$

les G_i *des variétés de groupes et les* θ_i , η_i *des homomorphismes algébriques injectifs ; il existe alors un entier* n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *les* θ_n *soient des isomorphismes.*

Il est évident que (1) entraîne (2). Supposons (2) satisfaite. Si H , H^1 sont des groupes algébriques et φ , φ^1 des homomorphismes algébriques injectifs de H et H^1 dans $\mathcal{G}(U)$, nous écrirons $(H , \varphi) < (H^1 , \varphi^1)$ s'il existe un homomorphisme algébrique $f : H \longrightarrow H^1$ qui n'est pas un isomorphisme tel que $\varphi^1 \circ f = \varphi$. Il n'existe aucune suite infinie (H_n , φ_n) telle que $(H_n , \varphi_n) < (H_{n+1} , \varphi_{n+1})$ pour tout n . Il existe donc un groupe algébrique G et un homomorphisme algébrique injectif $\pi : G \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ tels qu'il n'existe aucun couple (H , φ) tel que $(H , \varphi) > (G , \pi)$.

On montre maintenant que (G, π) est la variété de Picard de U. Soit H une variété de groupe et $\psi : H \to \mathcal{G}(U)$ un homomorphisme algébrique. Considérons l'homomorphisme algébrique $\theta : G \times H \to \mathcal{G}(U)$, $\theta = \pi + \psi$ et soit N le noyau de θ. Comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 1, N est un sous-groupe invariant fermé de $G \times H$ et l'homomorphisme $\theta_1 : (G \times H)/N \to \mathcal{G}(U)$ induit par θ est un homomorphisme algébrique injectif. Soit $\mu_1 : G \to (G \times H)/N$ l'homomorphisme algébrique défini par l'identité $\mu_1(g) = (g, e_H) \bmod N$, e_H étant l'élément neutre de H. On a $\theta_1 \circ \mu_1 = \pi$; comme π est injectif, μ_1 l'est aussi ; or puisque (G, π) est maximal, il en résulte que μ_1 est un isomorphisme. Soit $\mu_2 : H \to (G \times H)/N$ l'homomorphisme algébrique défini par la relation $\mu_2(h) = (e_G, h) \bmod N$, e_G étant l'élément neutre de G. Posons $f = \mu_1^{-1} \circ \mu_2$; alors f est un homomorphisme algébrique et on a $\psi = \pi \circ f$; d'ailleurs f est uniquement déterminé par cette propriété puisque π est injectif. Donc (G, π) est la variété de Picard de U,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - *La variété de Picard d'une variété complète U existe si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites* :

1° *Soit* $f : G \to \mathcal{G}(U)$ *un homomorphisme algébrique*, G *étant une variété de groupe ; alors on a, si f est injectif*,

$$\dim G \leq h \quad ,$$

où h *est un entier indépendant de* G.

2° *Si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\gamma_n"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & G_{n+2} \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma_{n+2}"] & \cdots \\
& & \mathcal{G}(U) & &
\end{tikzcd}$$

où les G_i *sont de variétés de groupes, et les* γ_n *des homomorphismes algébriques injectifs et les* θ_n *des homomorphismes de revêtements radiciels, il existe un entier* n_0 *tel que pour* $n \geq n_0$, *les* θ_n *soient des isomorphismes*.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.

REMARQUE. - En caractéristique 0, il n'y a que la condition 1 dans le corollaire ci-dessus.

3. Existence de la variété de Picard en caractéristique 0 .

L'existence de la variété de Picard en caractéristique 0 résulte du théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soient U une variété complète et $f : G \longrightarrow \mathcal{C}(U)$ un homomorphisme algébrique injectif d'une variété de groupe dans $\mathcal{C}(U)$, le corps de base étant supposé de caractéristique 0 . Alors l'application canonique linéaire

$$\sigma(f) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$$

est injective.

Pour la démonstration, on renvoie au théorème , exposé 6.

COROLLAIRE. - La variété de Picard d'une variété complète existe (la caractéristique du corps de base étant 0).

Comme $H^1(U , \mathcal{O})$ est de dimension finie (cf. [6]), le corollaire résulte du théorème 1 et du corollaire à la proposition 3.

4. Existence de la variété de Picard en caractéristique $p > 0$.

On a besoin du théorème fondamental suivant de CARTIER :

THÉORÈME 2. - Soit $f : G \longrightarrow \mathcal{C}(U)$ un homomorphisme algébrique, G étant une variété de groupe et U une variété complète (la caractéristique du corps de base étant > 0). Alors on peut construire une variété de groupe H et un homomorphisme $q : G \longrightarrow H$ de revêtement radiciel tels que

1° Si $\mathfrak{n}$ est le noyau de l'application linéaire $\sigma(f) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$ (cf. paragraphe 1 pour la définition de $\sigma(f)$), $\mathcal{L}(G)$ étant l'algèbre de Lie de G , $\mathfrak{n}$ coïncide avec le noyau de l'application différentielle $dq : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$.

2° L'homomorphisme algébrique f se descend en un homomorphisme algébrique $f' : H \longrightarrow \mathcal{C}(U)$; c'est-à-dire, on a $f = f' \circ q$.

C'est le théorème 5, exposé 6, (voir aussi [2]).

COROLLAIRE. - Soit U une variété complète qui admet une variété de Picard (G , π) . L'application linéaire

$$\sigma(\pi) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$$

est injective.

Soit $\mathfrak{n}$ le noyau de $\sigma(\pi)$. Construisons H et $q : G \longrightarrow H$ comme dans le théorème 2. Comme l'homomorphisme algébrique π se descend en un homomorphisme algébrique de H dans $\mathcal{C}(U)$ et comme G est la variété de Picard de U , q est un isomorphisme. Par conséquent $\mathfrak{n} = 0$, i. e. $\sigma(\mathfrak{T})$ est injective,

C. Q. F. D.

Soient U une variété complète (ou au moins semi-complète, c'est-à-dire, pour tout faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires A sur U , la dimension de l'espace K-vectoriel $H^{0}(U , A)$ est finie, cf. I , chapitre I, [4]) et f un homomorphisme algébrique d'une variété T dans $\mathfrak{G}(U)$. Soit $\mathfrak{U}$ l'extension de U à un domaine universel Ω contenant K (il suffit même de prendre un corps Ω algébriquement clos qui contient le corps des fonctions rationnelles R(T) de T). L'application algébrique f correspond alors à une classe de diviseurs θ sur $\mathfrak{U}$ rationnelle sur R(T) .

PROPOSITION 4. - Dans l'ensemble des sous-corps de R(T) contenant K et sur lesquels la classe de diviseurs θ est rationnelle, il y a un plus petit corps L (appelé le plus petit corps de rationalité de θ).

Comme $\mathfrak{U}$ admet des points rationnels sur K , et est complète, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1, exposé 7.

PROPOSITION 5. - Soit U une variété complète (caractéristique $p > 0$) . Alors la condition 2 du corollaire à la proposition 3 est satisfaite pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & G_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\eta_n"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\eta_{n+1}"] & G_{n+2} \arrow[r] \arrow[dl, "\eta_{n+2}"] & \cdots \\
& & \mathfrak{G}(U) & &
\end{tikzcd}$$

où les G_i sont de variétés de groupes, les η_i des homomorphismes algébriques injectifs et les θ_i des homomorphismes de revêtement radiciels, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, les θ_n soient les isomorphismes.

Soit $\mathfrak{U}$ l'extension de U à un domaine universel Ω qui contient K ; $\mathfrak{U}$ est complète. On peut identifier le corps des fonctions rationnelles $R(G_1)$ de G_1 à un sous-corps de Ω et aussi identifier $R(G_{i+1})$ à un sous-corps de $R(G_i)$. Soit λ_i une classe de diviseurs sur $\mathfrak{U}$ rationnelle sur $R(G_i)$ et qui correspond à l'application algébrique $\eta_i : G_i \to \mathfrak{G}(U)$. L'hypothèse (i. e. le diagramme ci-dessus) implique que λ_1 est rationnelle sur tout sous-corps $R(G_i)$ $(i \geqslant 1)$ de $R(G_1)$. D'après la proposition 4, il existe un plus petit corps de rationalité L de λ_1, contenant K . On peut écrire L = R(T) , T étant une variété définie sur K . Comme λ_1 est rationnelle sur L , il y a une application algébrique $\tilde{\eta}$ d'un ouvert $T_0 \neq \emptyset$ de T dans $\mathcal{G}(U)$ telle que λ_1 soit la classe définie par cette application. Par ailleurs, l'injection canonique $L \to R(G_1)$ peut se définir comme étant le cohomomorphisme d'un morphisme $\tilde{\theta}$ d'un ouvert G_1' de G_1 dans T_0 ; $\tilde{\eta} \circ \tilde{\theta}$ est alors la restriction de η_1 à G_1'. Comme η_1 est injectif, il en est de même de $\tilde{\theta}$; donc l'extension $R(G_1)/L$ est radicielle. Comme $R(G_1)/K$ est de type fini, $R(G_1)/L$ est de degré fini. Il y a donc un n_0 tel que les $R(G_n)$, qui contiennent tous L_1 soient identiques pour $n \geqslant n_0$, ce qui entraîne que θ_n est un isomorphisme si $n \geqslant n_0$.

THÉORÈME 3. - <u>La variété de Picard</u> (G , π) <u>d'une variété complète</u> U <u>existe et l'application canonique linéaire</u> $\sigma(\pi) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$ <u>est injective</u>.

La dernière assertion résulte du corollaire au théorème 2. Il suffit donc de prouver l'existence de la variété de Picard de U. Pour ceci, on vérifie que les conditions (1) et (2) du corollaire à la proposition 3, sont satisfaites. La condition 2 de ce corollaire a été déjà vérifiée dans la proposition 5. Pour la condition (1), on montre maintenant que si $\varphi : H \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est un homomorphisme algébrique <u>injectif</u>, H étant une variété de groupe, on a $\dim H \leqslant$ dimension de l'espace K-vectoriel $H^1(U , \mathcal{O})$ (finie d'après [6]).

Soit $\mathfrak{n}$ le noyau de l'application $\sigma(\varphi) : \mathcal{L}(H) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$. D'après le théorème 1, on peut construire une variété de groupe H_1 et un homomorphisme $q : H \longrightarrow H_1$ de revêtement radiciel, tels que, φ se descende en un homomorphisme algébrique $\varphi_1 : H_1 \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ et que $\mathfrak{n}$ soit égal au noyau de l'application différentielle dq. On peut maintenant prendre le noyau $\mathfrak{n}_2$ de $\sigma(\varphi_1)$, construire la variété H_2, et continuer ainsi. Vu la proposition 5, on s'arrête après un nombre fini d'étapes ; c'est-à-dire, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & H_i \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ & \mathcal{G}(U) & \end{tikzcd}$$

où H_i est une variété de groupe, θ un homomorphisme de revêtement radiciel, et φ_i un homomorphisme algébrique tel que $\sigma(\varphi_i) : \mathcal{L}(H_i) \longrightarrow H^1(U , \mathcal{O})$ soit injectif. Comme $\dim H = \dim H_i$, on obtient que $\dim H \leqslant$ dimension de l'espace K-vectoriel $H^1(U , \mathcal{O})$. Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Une proposition.

La proposition suivante, bien que triviale, jouera un rôle important.

Soit $p : V \longrightarrow U$ un morphisme dominant d'une variété complète V dans une variété complète U. Désignons respectivement par $\mathfrak{C}(V/U)$ et $\mathfrak{h}(V/U)$ les noyaux des applications canoniques $p^* : \mathfrak{D}(U) \longrightarrow \mathfrak{D}(V)$ et $p^* : \mathfrak{C}(U) \longrightarrow \mathfrak{C}(V)$. Soit ε l'homomorphisme canonique $\varepsilon : \mathfrak{C}(V/U) \longrightarrow \mathfrak{h}(V/U)$. Notons $\mathfrak{D}_k(U)$, $\mathfrak{h}_k(U)$, etc. les sous-groupes de $\mathfrak{D}(U)$, $\mathfrak{h}(U)$, etc., qui sont rationnels sur un sous-corps $k \subset K$ (quand on considère $\mathfrak{C}_k(V/U)$ ou $\mathfrak{h}_k(V/U)$, on suppose le morphisme $p : V \longrightarrow U$ défini sur le corps k).

PROPOSITION 6. - Supposons que le morphisme $p : V \longrightarrow U$ soit birationnel (V, U complètes), alors l'homomorphisme canonique $\varepsilon : \mathfrak{C}(V/U) \longrightarrow \mathfrak{h}(V/U)$ est un isomorphisme. Le même résultat est vrai si l'on prend l'homomorphisme $\varepsilon_k : \mathfrak{C}_k(V/U) \longrightarrow \mathfrak{h}_k(V/U)$ induit par ε.

Il suffit de prouver la proposition dans le dernier cas. Soient θ un élément de $\mathfrak{h}_k(V/U)$ et D un diviseur rationnel sur k dans la classe θ. On a $p^*(\theta) = 0$; par conséquent $p^*(D)$ est un diviseur principal sur V. Comme $p^*(D)$ est aussi rationnel sur k, il résulte du dernier théorème de Foundations (corollaire 1, théorème 10, [15] ou proposition 8, chapitre 4, [1]) que $p^*(D)$ est le diviseur d'une fonction f sur V rationnelle sur k. Comme p est birationnel, f s'identifie (par le cohomomorphisme de p) avec une fonction sur U rationnelle sur k. Maintenant si l'on pose $D_1 = D - \operatorname{div} f$, D_1 est un diviseur sur U dans la classe θ et rationnel sur k et on a $p^*(D_1) = 0$. Ceci prouve que ε_k est surjectif. D'autre part, soit D le diviseur d'une fonction (non nulle) f rationnelle sur k et soit $p^*(D) = 0$. Ceci veut dire que le diviseur $\operatorname{div} f$ sur V (f identifiée avec une fonction rationnelle sur V) est trivial. Comme V est complète, il en résulte que f se réduit à une constante. Donc D est l'élément zéro de $\mathfrak{C}_k(V/U)$, ce qui implique que ε_k est aussi injectif,

C. Q. F. D.

REMARQUE. - Si $\theta \in \mathfrak{h}(V/U)$, le diviseur $\varepsilon^{-1}(\theta)$ est appelé le diviseur canonique dans la classe θ ; on observe que si un élément $\theta \in \mathfrak{h}(V/U)$ est rationnel sur k, son diviseur canonique est aussi rationnel sur k.

Chapitre 2 : L'identité $\mathfrak{T}(G) = \mathfrak{C}^a(U)$.

Soient U une variété et (V , p) un revêtement birationnel sur U . On note $\mathcal{O}(V/U)$, l'image directe $(R^0 p)(\mathcal{O}(V))$ (cf. [5]) du faisceau cohérent d'anneaux locaux $\mathcal{O}(V)$ de V par p ; $\mathcal{O}(V/U)$ est alors un faisceau cohérent de $\mathcal{O}(U)$-algèbres sur U . Soient $\mathfrak{M}(V/U)$ le faisceau cohérent de $\mathcal{O}(U)$-modules $\mathcal{O}(V/U)/\mathcal{O}(U)$ et $\mathfrak{C}(V/U)$ le faisceau cohérent des idéaux Ann. $\mathcal{O}(V/U)/\mathcal{O}(U)$ (conducteur de $\mathcal{O}(V/U)$ sur $\mathcal{O}(U)$). Lorsque (V , p) est le revêtement normal de U , on note quelquefois Cl.$(\mathcal{O}(U))$ le faisceau $\mathcal{O}(V/U)$; aussi dans ce cas on écrit $\mathfrak{M}(U)$, $\mathfrak{C}(U)$, etc. (ou simplement $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{C}$, etc.) au lieu de $\mathfrak{M}(V/U)$, $\mathfrak{C}(V/U)$, etc.

1. Une décomposition des revêtements birationnels.

On dit qu'une variété U possède une singularité du type (a) en un point $x \in U$, relative à un revêtement birationnel (V , p) de U si l'idéal maximal m_x de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ en x est contenu dans l'ensemble des idéaux premiers associés à une décomposition du sous-module nul de $(\mathfrak{M}(V/U))_x$, comme intersection de sous-modules primaires de $(\mathfrak{M}(V/U))_x$ (cf. chapitre I, [14]), c'est-à-dire, si l'ensemble des idéaux premiers associés à une représentation de l'idéal $(\mathfrak{C}(V/U))_x$ comme intersection d'idéaux primaires contient l'idéal maximal m_x en x . On dit que la variété U ne possède pas de singularité du type (a) relative à (V , p) , si elle n'a de singularité du type (a) relative à V en aucun point de U . On dit simplement que la variété U possède une singularité du type (a) en $x \in U$, si elle possède une singularité du type (a) en $x \in U$, relative au revêtement normal de U , et de même, on dit que la variété U n'a pas de singularité du type (a) , si elle n'a pas de singularité du type (a) relative au revêtement normal de U .

PROPOSITION 1. - *Soit (V , p) un revêtement birationnel d'une variété U . Il existe alors des variétés $V_0 = U$, V_1 , ... , $V_{n+1} = V$ et des morphismes $q_i : V_i \longrightarrow V_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n+1)$ qui possèdent les propriétés suivantes :*

1° *On a* $p = q_1 \circ \dots \circ q_{n+1}$;

2° *Si* $1 \leq i \leq n$, *il y a un point* $y \in V_{i-1}$ *tel que* q_i *induise un isomorphisme de* $V_i - \bar{q}_i^1(y)$ *sur* $V_{i-1} - \{y\}$, *et* $\mathfrak{C}(V_i/V_{i-1})_y$ *est l'idéal premier maximal de* $(\mathcal{O}(V_{i-1}))_y$; *de plus* $\bar{q}_i^1(y)$ *est contenu dans un morceau affine de* V_i ;

3° V_n *n'a pas de singularité de type (a) relativement au revêtement* (V , q_{n+1}).

Il est facile de voir que, si on a une suite (V_n) de variétés de premier terme $V_0 = U$ et s'il existe des morphismes de revêtement

$$r_n : V \to V_n , \quad s_n : V_n \to V_{n-1} \quad (n > 0)$$

tels que $s_n \circ r_n = r_{n-1}$, les s_n sont tous des isomorphismes à partir d'un certain rang. Il suffira donc d'établir ce qui suit : si U a une singularité de type (a) en un point x relativement à (V, p), il existe une variété V' et des morphismes de revêtement $p' : V \to V'$, $q : V' \to U$ qui possèdent les propriétés suivantes : q induit un isomorphisme de $V' - q^{-1}(x)$ sur $U - \{x\}$ mais n'est pas un isomorphisme de V' sur U ; $\mathfrak{C}(V'/U)_x$ est l'idéal premier maximal de $(\mathcal{O}(U))_x$; $q^{-1}(x)$ est contenu dans un morceau affine de V' ; on a $p = q \circ p'$. Soit m_x l'idéal premier maximal de $\mathcal{O}_x = (\mathcal{O}(U))_x$; puisque m_x est un idéal premier associé au module $(\mathfrak{M}(V/U))_x$, il y a un élément $e \in (\mathcal{O}(V/U))_x$, $e \notin \mathcal{O}_x$ tel que $m_x e \subset \mathcal{O}_x$. Soit $\mathcal{O}'_x$ le sous-anneau de $(\mathcal{O}(V/U))_x$ engendré par les éléments e tels que $m_x e \subset \mathcal{O}_x$. On voit facilement qu'il y a un entier $k > 0$ tel que $m_x^k \mathcal{O}'_x \subset \mathcal{O}_x$; soit k le plus petit entier ayant cette propriété ; on a alors $k \geqslant 1$; posons $\mathcal{O}''_x = \mathcal{O}_x + m_x^{k-1} \mathcal{O}'_x$; on a alors $m_x \mathcal{O}''_x \subset \mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}''_x \neq \mathcal{O}_x$. Soient U_1 un morceau affine de U contenant x et P_1 son algèbre affine ; soit P''_1 la fermeture entière de P_1 dans $\mathcal{O}''_x$. Comme $\mathcal{O}_x$ est l'anneau local d'un idéal premier $\mathfrak{M}_x$ de P_1 et comme $\mathcal{O}''_x$ est entier sur $\mathcal{O}_x$, on a $\mathcal{O}''_x = \mathcal{O}_x[P''_1]$. On a $\mathfrak{M}_x P''_1 \subset \mathcal{O}_x$; comme $\mathfrak{M}_x$ a un nombre fini de générateurs en tant qu'idéal de P_1 et comme P''_1 a un nombre fini de générateurs en tant qu'algèbre sur K, il y a un voisinage U_0 de x dans U_1 tel que les fonctions de $\mathfrak{M}_x P''_1$ soient définies en tout point de U_0 ; on peut de plus supposer que U_0 est un morceau affine. Soit P son algèbre affine, et soit $P'' = P[P''_1]$; P'' est alors l'algèbre affine d'une variété affine V'_0 et l'injection $P \to P''$ définit un morphisme de revêtement $q_0 : V'_0 \to U_0$. Il est clair que $(\mathcal{O}(V'_0/U_0))_x = \mathcal{O}''_x$ et que q_0 induit un isomorphisme de $V'_0 - q_0^{-1}(x)$ sur $U_0 - \{x\}$. Il est facile de voir qu'on peut trouver un recouvrement $(U_0, U'_1, \ldots, U'_r)$ de U par des morceaux affines dont l'un est U_0 et dont aucun des autres ne contient x. Si $i > 0$, posons $V'_i = U'_i$; on voit facilement que les variétés $V'_0, V'_1, \ldots, V'_r$ peuvent se recoller en une variété V' pour laquelle il y a un morphisme de revêtement $q : V' \to U$ qui prolonge q_0 ainsi que les applications identiques $V'_i \to U'_i$ $(i > 0)$. On a $(\mathcal{O}(V'/U))_x = \mathcal{O}''_x \subset (\mathcal{O}(V/U))_x$, $(\mathcal{O}(V'/U))_{x'} = (\mathcal{O}(U))_{x'}$ pour tout $x' \neq x$; il en résulte qu'il y a un morphisme $p' : V \to V'$ tel que $p = q \circ p'$. La proposition 1 est donc établie.

2. Connexion entre la propriété $\pi(G) = \mathcal{G}^a(U)$ et la propriété universelle de la variété de Picard pour les applications algébriques de variétés quelconques.

On a défini la variété de Picard (G, π) d'une variété complète U par une propriété universelle relative aux homomorphismes algébriques ; on peut se demander si la variété de Picard dont l'existence a été démontrée dans le chapitre 1, possède aussi la propriété analogue relative aux applications algébriques, c'est-à-dire si $f : T \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est une application algébrique, T étant une variété (avec $f(t_0) =$ l'identité pour un point t_0 de T), f provient-il d'un morphisme de T dans G ? On voit tout de suite que $\pi(G) \neq \mathcal{G}^a(U)$ si cette condition est satisfaite. Réciproquement, si $\pi(G) = \mathcal{G}^a(U)$, G possède la propriété universelle relative à toutes les applications algébriques comme il résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Soient U une variété complète, (G, π) sa variété de Picard et $f : T \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ une application algébrique telle que $f(T) \subset \pi(G)$ (on suppose que T est une variété). Alors l'application $f_1 : T \longrightarrow G$ définie par la relation $\pi \circ f_1 = f$, est un morphisme de variétés.

Soit Γ l'ensemble des points $(t, g) \in T \times G$ tel que l'on ait $f(t) = \pi(g)$. D'après le théorème de continuité (théorème 2, paragraphe IV, chapitre I, [4] ou corollaire théorème 4, exposé 5), Γ est fermé dans $T \times G$. Il s'agit de montrer que le morphisme $p_1 : \Gamma \longrightarrow T$ induit par la projection sur T , est un isomorphisme. En vertu de l'hypothèse, p_1 est bijectif (ceci implique que (Γ, p_1) est un revêtement radiciel sur T). Donc il suffit de montrer que l'application p_1 est non ramifiée, c'est-à-dire, que l'application différentielle dp_1 est injective.

Soit L un vecteur tangent à $T \times G$ en (t_0, g_0) tel que $dp_1(L) = 0$; L est alors de la forme $(0, L_1)$, L_1 étant un vecteur tangent à G en g_0 (cf. chapitre VI, [3]). Si p_2 désigne la projection sur G , les applications algébriques $f \circ p_1$ et $\pi \circ p_2$ de Γ dans $\mathcal{G}(U)$ coïncident. Il en résulte que

$$\langle L, f \circ p_1 \rangle = \langle L, \pi \circ p_2 \rangle$$

(cf. paragraphe 1, chapitre I pour la définition de $\langle L, f \circ p_1 \rangle$ etc.). On a

$$\langle L, f \circ p_1 \rangle = \langle dp_1(L), f \rangle = 0 .$$

Comme on a aussi

$$\langle L, \pi \circ p_2 \rangle = \langle dp_2(L), \pi \rangle = \langle L_1, \pi \rangle ,$$

il en résulte que $\langle I_1 , \pi \rangle = 0$. Considérons l'élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ de G engendré par L_1 ; comme l'application linéaire canonique $\sigma(\pi) : \mathcal{L}(G) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O})$ est injective (théorème 1 et théorème 3, chapitre I), il s'ensuit que $L_1 = 0$, ce qui prouve que dp_1 est injective. Par conséquent p_1 est un isomorphisme et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE. - Soient U une variété complète, (G , π) sa variété de Picard et $f : T \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ une application algébrique d'une variété T dans $\mathfrak{G}(U)$ telle que pour un point t_0 de T , $f(t_0) \in \mathfrak{G}^a(U)$. Supposons que $\pi(G) = \mathfrak{G}^a(U)$; alors l'application $f_1 : T \longrightarrow G$ définie par la relation $\pi \circ f_1 = f$, est un morphisme de variétés.

C'est immédiat.

3. Le comportement de la variété de Picard par rapport à un morphisme de revêtement birationnel, inversible sauf pour un nombre fini de points.

Soit (V , p) un revêtement birationnel d'une variété complète U , supposons que p soit inversible sauf pour un point x de U , et que $\mathrm{Ann.}(\mathfrak{M}(V/U))_x$ soit l'idéal maximal m_x de $\mathcal{O}_x$ et que $p^{-1}(x)$ soit contenu dans un morceau affine de V . Soient (G , π) et (H , ψ) les variétés de Picard de U et V respectivement. L'homomorphisme canonique $p^* : \mathfrak{G}(U) \longrightarrow \mathfrak{G}(V)$ induit un homomorphisme algébrique de G dans H qu'on désigne par le symbole p^*_G . On a alors les lemmes suivants.

LEMME 1. - On a $\eta(V/U) \subset \pi(G)$.

Nous poserons $A = (\mathcal{O}(U))_x$, $B = (\mathcal{O}(V/U))_x$ et nous désignerons par m l'idéal premier maximal de A . Soit B^* l'ensemble des éléments inversibles de B , i. e. des fonctions $f \in B$ telles que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in p^{-1}(x)$. Si $f \in B^*$, le diviseur de f sur V a un support qui ne rencontre pas $f^{-1}(x)$. Par ailleurs, on sait que p induit un isomorphisme de la variété $V - p^{-1}(x)$ sur $U - \{x\}$; il en résulte que, si x appartient au support du diviseur $\mathrm{div}_U f$ de f sur U , il en est un point isolé ; soit alors $\delta(f)$ le diviseur qui admet f comme fonction de définition en x et dont le support est $\{x\}$ ou $\emptyset$. Il est clair que δ est un homomorphisme de B^* dans $\mathcal{E}(V/U)$. Cet homomorphisme est surjectif, car, si $d \in \mathcal{E}(V/U)$, toute fonction de définition f de d en x doit appartenir à B^*.

Puisque $m(B/A) = \{0\}$, on a $mB \subset A$, d'où il résulte que m est un idéal de B . Soit ω l'application canonique de B sur B/m ; il est clair que $\omega(B^*)$ est l'ensemble $(B/m)^*$ des éléments inversibles de B/m . Le noyau de ω est $1 + m$, qui est contenu dans l'ensemble des éléments inversibles de A ; il en résulte que ce noyau est contenu dans celui de δ , donc qu'il y a un homomorphisme $\delta_1 : (B/m)^* \longrightarrow \mathcal{C}(V/U)$ tel que $\delta_1 \circ \omega = \delta$.

D'autre part, il est clair que m contient une puissance du radical de l'anneau semi-local B , donc que B/m est un espace vectoriel de dimension finie sur K . Il est clair que $(B/m)^*$ est un ouvert de Zariski de B/m , et que, muni de la structure de variété induite par B/m , c'est un groupe algébrique. Montrons que δ_1 est une application algébrique. Soit Φ un sous-espace vectoriel de B tel que ω induise un isomorphisme de Φ sur B/m , et soit $\Phi^* = \Phi \cap B^*$. Prenant une base de Φ , on voit facilement qu'il existe un ensemble ouvert V_0 de V contenant $p^{-1}(x)$ qui est contenu dans les ensembles de définition de toutes les fonctions de Φ . Soit U_0 l'ensemble ouvert $p(V_0)$ de U . Il y a une fonction numérique F sur $\Phi^* \times U$ qui est définie en tout point $(f , x') \in \Phi^* \times (U_0 - \{x\})$ et y prend la valeur $f(x')$. On peut aussi considérer F comme une fonction numérique sur $\Phi^* \times V$, définie en tout point de $\Phi^* \times V_0$ et $\neq 0$ en tout point de $\Phi^* \times p^{-1}(x)$. L'ensemble E composé de $\Phi^* \times (V - V_0)$ et des points de $\Phi^* \times V_0$ en lesquels F prend la valeur 0 est fermé et ne rencontre pas $\Phi^* \times p^{-1}(x)$. Comme p est propre, l'image de E par l'application $(f , v') \longrightarrow (f , x')$ de $\Phi^* \times V$ dans $\Phi^* \times U$ est fermée. On en conclut qu'il y a un diviseur Δ de $\Phi^* \times U$ dont le support est contenu dans $\Phi^* \times \{x\}$ et qui admet F comme fonction de définition en tout point de $\Phi^* \times \{x\}$. Il est clair que, pour tout $f \in \Phi^*$, l'image réciproque de Δ par l'application $x' \longrightarrow (f , x')$ est définie et égale à $\hat{\delta}(f)$. Ceci montre que la restriction de $\hat{\delta}$ à Φ^* est algébrique, donc que $\hat{\delta}_1$ est algébrique. Si $f^* \in (B/m)^*$, soit $\bar{\delta}_1(f^*)$ la classe de $\delta_1(f^*)$. Il résulte alors de la définition de la variété de Picard qu'il y a un homomorphisme algébrique $\delta_2 : (B/m)^* \longrightarrow G$ tel que $\bar{\delta}_1 = \bar{\pi} \circ \delta_2$. Comme toute classe de $\mathcal{H}(V/U)$ contient un élément de $\mathcal{C}(V/U)$, $\bar{\delta}_1$ est une application surjective de $(B/m)^*$ dans $\mathcal{H}(V/U)$, ce qui démontre le lemme.

Comme $\bar{\pi}$ est injectif, il y a un sous-groupe de G sur lequel $\bar{\pi}$ induit un isomorphisme sur $\mathcal{H}(V/U)$; nous désignerons ce groupe par $\mathcal{H}_G(V/U)$. Il est clair que c'est le noyau de p^* , ce qui montre que c'est un sous-groupe fermé de G . Par ailleurs, la démonstration précédente a montré que $\mathcal{H}_G(V/U)$ est l'image d'un groupe algébrique affine $(B/m)^*$ par un homomorphisme algébrique ; on peut en déduire que c'est un groupe algébrique affine ; on peut même montrer que l'application δ_2 définit un isomorphisme d'un groupe quotient de $(B/m)^*$ sur $\mathcal{H}_G(V/U)$.

LEMME 2. - <u>L'homomorphisme canonique</u> $p^* : G \longrightarrow H$ <u>est surjectif, et</u> (G, p^*) <u>est un espace fibré localement trivial de base</u> H .

L'application $\varphi : H \to \mathcal{G}(V)$ est définie par une classe λ de diviseurs sur $H \times V$. Si h_0 est un point de H , il y a dans la classe λ un diviseur D dont le support ne rencontre pas $\{h\} \times p^{-1}(x)$; cela résulte de la proposition 10, exposé 5, compte tenu du fait que $p^{-1}(x)$ est contenu dans un morceau affine de V . Il existe donc un voisinage H_0 de h_0 dans H tel que

$$(\mathrm{Supp}\ D) \cap (H_0 \times p^{-1}(x)) = \emptyset \quad .$$

Le diviseur D_0 induit par D sur $H_0 \times V$ est donc l'image réciproque d'un diviseur de $H_0 \times U$ par l'application $(h, y) \to (h, p(y))$; il y a donc une application algébrique $\eta_0 : H_0 \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ telle que $p^* \circ \eta_0$ soit la restriction de φ à H_0 . Recouvrons H par des ouverts H_i en nombre fini tels que, pour chaque i , la restriction de φ à H_i puisse se mettre sous la forme $p^* \circ \eta_i$, η_i étant une application algébrique de H_i dans $\mathcal{G}(U)$. Si on pose

$$\eta_{ij}(h) = \eta_i(h) - \eta_j(h)$$

pour $h \in H_i \cap H_j$; η_{ij} est une application algébrique de $H_i \cap H_j$ dans $\mathfrak{h}(V/U)$, et, si i , j , k sont des indices quelconques, on a

$$(\eta_{ij} + \eta_{jk} + \eta_{ki})(h) = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \in H_i \cap H_j \cap H_k \quad .$$

Nous avons vu que $\mathfrak{h}(V/U)$ est l'image par ψ d'un sous-groupe $\mathfrak{h}_G(V/U)$. Tenant compte de la proposition 2 ci-dessus, on voit qu'il y a des morphismes

$$\eta'_{ij} : H_i \cap H_j \longrightarrow \mathfrak{h}_G(V/U)$$

tels que $\eta_{ij} = \pi \circ \eta'_{ij}$; de plus, si $h \in H_i \cap H_j \cap H_k$, on a

$$\eta'_{ij}(h) + \eta'_{jk}(h) + \eta'_{ki}(h) = 0 \quad .$$

Les η'_{ij} sont les fonctions de transition d'un espace fibré principal localement trivial (G_1, q) de base H et de groupe $\mathfrak{h}_G(V/U)$. Pour tout i , il y a un isomorphisme

$$\alpha_i : H_i \times \mathfrak{h}_G(V/U) \longrightarrow q^{-1}(H_i)$$

tel que $q \circ \alpha_i$ soit la projection $H_i \times \mathfrak{h}_G(V/U) \longrightarrow H_i$; si $h \in H_i \cap H_j$ une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha_i(h, g_1) = \alpha_j(h, g_2)$ (où g_1 , $g_2 \in \mathfrak{h}_G(V/U)$) est que $g_1 - g_2 = \eta'_{ij}(h)$. Si $h \in H_i$, $g \in \mathfrak{h}_G(V/U)$, posons

$$\rho_i(h\ ,\ g) = \eta_i(h) - \Pi(g) \qquad ;$$

les applications

$$\rho_i\ :\ H_i \times \mathfrak{h}_G(V/U) \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$$

sont alors injectives, et, si

$$h_1\ ,\ h_2 \in H_i \cap H_j\ ,\quad g_1\ ,\ g_2 \in \mathfrak{h}_G(V/U) \qquad ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que $\rho_i(h_1\ ,\ g_1) = \rho_i(h_2\ ,\ g_2)$ est que l'on ait $h_1 = h_2$, $g_1 - g_2 = \eta'_{ij}(h_1)$. Il y a donc une application $\rho\ :\ G_1 \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ telle que $\rho_i = \rho \circ \alpha_i$ pour tout i , et ρ est injective. Il est clair que ρ est une application algébrique.

Nous allons montrer que $\rho(G_1)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}(U)$ et que, si on munit G_1 de la structure de groupe telle que ρ soit un homomorphisme, G_1 est un groupe algébrique. Soient x un point de H_i , y un point de H_j ; il y a alors un indice k tel que $x - y \in H_k$. Soient g_1^o et g_2^o des éléments de $\mathfrak{h}_G(V/U)$; on a

$$\rho_i(x\ ,\ g_1) - \rho_j(y\ ,\ g_2) = \eta_i(x) - \eta_j(y) - \Pi(g_1 - g_2) \qquad .$$

Or, on a $p^*(\eta_i(x) - \eta_j(y)) = \varphi(x - y)$, d'où

$$\eta_i(x) - \eta_j(y) - \eta_k(x - y) \in \mathfrak{h}(V/U) \qquad ,$$

ce qui montre que $\rho_i(x\ ,\ g_1) - \rho_j(x\ ,\ g_2) \in \rho(G_1)$ et montre que $\rho(G_1)$ est un groupe. Il y a un voisinage ouvert Γ de $(x\ ,\ y)$ dans $H_i \times H_j$ tel que $(h_1\ ,\ h_2) \in \Gamma$ entraîne $h_1 - h_2 \in H_k$. Si $(h_1\ ,\ h_2) \in \Gamma$, $g_1\ ,\ g_2 \in \mathfrak{h}_G(V/U)$, on a :

$$\rho_i(h_1\ ,\ g_1) - \rho_j(h_2\ ,\ g_2)$$
$$= \eta_k(h_1 - h_2) + \eta_i(h_1) - \eta_j(h_2) - \eta_k(h_1 - h_2) + \Pi(g_1 - g_2) \qquad .$$

Or l'application $(h_1\ ,\ h_2) \longrightarrow \eta_i(h_1) - \eta_j(h_2) - \eta_k(h_1 - h_2)$ est une application algébrique de Γ dans $\mathfrak{G}(U)$ qui applique Γ dans $\mathfrak{h}(V/U)$. Il y a donc un morphisme γ de Γ dans $\mathfrak{h}_G(V/U)$ tel que l'on ait

$$\eta_i(h_1) - \eta_j(h_2) - \eta_k(h_1 - h_2) = \Pi(\gamma(h_1\ ,\ h_2))$$

pour $(h_1\ ,\ h_2) \in \Gamma$ (proposition 2), d'où

$$\rho_i(h_1\ ,\ g_1) - \rho_j(h_2\ ,\ g_2) - \rho_k(h_1 - h_2\ ,\ g_1 - g_2 - \gamma(h_1\ ,\ h_2)) \qquad .$$

Cette formule montre que l'application $(u , v) \to u - v$ $(u , v \in G_1)$ induit un morphisme d'un voisinage de $(\alpha_i(x , g_1^0) , \alpha_j(y , g_2^0))$ dans $G_1 \times G_1$; G_1 est donc bien un groupe algébrique.

Il résulte alors de la définition de la variété de Picard qu'il y a un homomorphisme algébrique $\sigma : G_1 \longrightarrow G$ tel que $\rho = \pi \circ \sigma$. Il est clair que σ est injectif. On a $p_G^* \circ \sigma = q$. En effet, φ étant injectif, il suffit de montrer que $\varphi \circ p_G^* \circ \sigma = \varphi \circ q$. Or on a $\varphi \circ p_G^* = p^* \circ \pi$, d'où $\varphi \circ p_G^* \circ \sigma = p^* \circ \rho$; or, si $h \in H_i$, $g \in \mathfrak{H}_G(V/U)$, on a $\rho(\alpha_i(h , g)) = \rho_i(h , g) = \gamma_i(h) - \pi(g)$; l'image de cet élément par p^* est

$$(p^* \circ \gamma_i)(h) = \varphi(h) = \varphi(q(\alpha_i(h , g))) \qquad ,$$

ce qui démontre notre formule. Comme $q(G_1) = H$, on voit que p_G^* est surjectif. Par ailleurs, $\sigma(G_1)$ contient $\mathfrak{H}_G(V/U)$, qui est le noyau de p_G^* ; comme $p_G^*(\sigma(G_1)) = p_G^*(G)$, on voit que $\sigma(G_1) = G$, σ est donc une bijection de G_1 sur G. De plus, comme G_1 est un espace fibré principal de groupe $\mathfrak{H}_G(V/U)$, on voit que, pour tout $h \in H$, σ induit un isomorphisme de $\overset{-1}{q}(h)$ sur $\overset{-1}{p_G^*}(H)$. Il en résulte que σ est un isomorphisme. En effet, soit L un vecteur tangent à G_1 tel que $(d\sigma)(L) = 0$. On a alors $(dq)(\sigma) = (dp_G^*)((d\sigma)(L)) = 0$; L est donc tangent à une fibre de l'espace fibré (G_1 , q), d'où $L = 0$ puisque σ induit sur chaque fibre un isomorphisme. Le lemme 2 est donc établi.

Ceci étant, soit maintenant (V , p) un revêtement birationnel quelconque d'une variété complète U. Utilisons les notations de la proposition 1 ; soit (H_i , φ_i) une variété de Picard de V_i $(0 \leq i \leq n + 1)$, (H_0 , φ_0) est donc une variété de Picard de U. Les morphismes q_i définissent des homomorphismes algébriques $q_i^* : H_{i-1} \longrightarrow H_i$. Il résulte du lemme 2 que $q_1^* , \dots , q_n^*$ sont surjectifs. Si donc on pose $p_n = q_1 \circ \dots \circ q_n$, le morphisme $p_n^* : H_0 \longrightarrow H_n$ est surjectif. De plus, si $1 \leq i \leq n$, $\mathfrak{H}(V_i/V_{i-1})$ est contenu dans $\varphi_{i-1}(H_{i-1})$; il en résulte que $\mathfrak{H}(V_n/U) \subset \varphi_0(H_0)$. Si on a $\mathfrak{G}^a(V_n) = \varphi_n(H_n)$, on peut en déduire que $\mathfrak{G}^a(U) = \varphi_0(H_0)$. En effet, soit c un élément de $\mathfrak{G}^a(U)$; il est clair que

$$p_n^*(c) \in \mathfrak{G}^a(V_n) = \varphi_n(H_n) \qquad ,$$

et, comme p_n^* est surjectif, il y a un élément $c^1 \in \varphi_0(H_0)$ tel que $c - c^1 \in \mathfrak{H}(V_n/U)$, d'où $c - c^1 \in \varphi_0(H_0)$ et $c \in \varphi_0(H_0)$.

Pour démontrer que, pour toute variété complète U , et toute variété de Picard (G , π) de U, on a $\pi(G) = \mathfrak{G}^a(U)$; nous sommes donc ramenés à montrer qu'il en est ainsi si U ne possède pas de singularité de type (a) .

4. L'identité $\Pi(G) = \mathfrak{G}^a(U)$ dans le cas normal.

Soit U une variété complète normale et (G , Π) sa variété de Picard. Indiquons brièvement la démonstration du fait $\Pi(G) = \mathfrak{G}^a(U)$ (cf. paragraphe II, chapitre II, [4] pour les détails).

PROPOSITION 3. - *Soient U une variété complète normale et (G , Π) sa variété de Picard. Alors on a* $\Pi(G) = \mathfrak{G}^a(U)$.

Soient T une variété et $f : T \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ une application algébrique telle que $f(t_0) \in \Pi(G)$ pour un $t_0 \in T$; il s'agit de montrer que $f(t) \in \Pi(G)$ pour tout $t \in T$. Comme on peut joindre deux points d'une variété par un nombre fini de courbes formant un ensemble algébrique connexe (cf. lemme 6, [17] ; d'après NAKAI il est même vrai qu'il y a une seule courbe joignant deux points d'une variété), on peut supposer que T est une courbe. On peut aussi supposer que T est non singulière, car si (S , p) est la normalisée de T , il suffit de prouver que l'application algébrique $f \circ p : S \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ possède la propriété $(f \circ p)(S) \subset \Pi(G)$. Soit C la courbe complète non singulière qui contient T et soit J la jacobienne de C . Si χ est l'application canonique de C dans J définie par la relation $\chi(t) =$ l'élément de J défini par le diviseur $1.t - 1.t_0$, on sait qu'il existe un homomorphisme algébrique $g : J \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "f_1"'] & J \arrow[d, "g"] \\ & \mathfrak{G}(U) \end{tikzcd}$$

où $f_1 : C \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ est l'application algébrique $f_1(t) = f(t) - f(t_0)$. (Cf proposition 3, paragraphe II, chapitre II, [4]). Comme (G , Π) est la variété de Picard de U et g est un homomorphisme algébrique, on a $g(J) \subset \Pi(G)$, ce qui prouve que $f_1(C) \subset \Pi(G)$, d'où $f(C) \subset \Pi(G)$.

C. Q. F. D.

Chapitre 3 : L'identité $\Gamma(G) = \mathfrak{C}^a(U)$ (suite)

1. Rappel des résultats de Rosenlicht ([7], [9] ou [13]).

Soit C une courbe complète non singulière. Soit f une application d'un ouvert C' de C dans un groupe commutatif G. Si D est un diviseur $\sum n_i P_i$, $P_i \in C'$, sur C', on définit $f(D)$ par la relation $f(D) = \sum n_i f(P_i)$. L'application $f : \mathcal{D}(C') \to G$ ainsi définie est un homomorphisme.

Soit S un ensemble fini de points de C. Un module $\mathfrak{m}$ porté par S est par définition un diviseur positif de support S. Si f est une fonction rationnelle sur C, on écrit $f \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ si $f - 1$ est un multiple du diviseur $\mathfrak{m}$ dans un voisinage ouvert de S. Soit f une application d'un ouvert de C dans un groupe commutatif G ; par conséquent f est une application de $C - S$ dans G, S étant un ensemble fini de points de C. On dit que f possède un module s'il existe un module $\mathfrak{m}$ porté par S, tel que pour toute fonction rationnelle g sur C, $g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, on ait $f(\operatorname{div} g) =$ l'élément neutre de G. On a maintenant le résultat suivant dû à ROSENLICHT :

THÉORÈME 1. - Soit f un morphisme de $C - S$ dans un groupe algébrique commutatif G ; alors f possède un module.

Pour la démonstration, on renvoie au chapitre III, [9] ou [13].

Soit $\mathfrak{m}$ un module sur C porté par S. On note $H_{\mathfrak{m}}$ le groupe des classes de diviseurs étrangers à S modulo ceux qui s'écrivent $D = \operatorname{div} \varphi$, $\varphi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, φ étant une fonction rationnelle sur C. On peut interpréter $H_{\mathfrak{m}}$ comme le groupe des classes de diviseurs $\mathfrak{C}(C_{\mathfrak{m}})$ d'une courbe complète singulière $C_{\mathfrak{m}}$ associée à $\mathfrak{m}$ (cf. paragraphe 1, chapitre IV, [13]) ; en fait C est la normalisée de $C_{\mathfrak{m}}$ et si p est la projection canonique C sur $C_{\mathfrak{m}}$, p est inversible dans $C - S$, $p(S)$ se compose d'un seul point Q de $C_{\mathfrak{m}}$ et l'idéal maximal en Q de $C_{\mathfrak{m}}$ est l'ensemble de toutes les fonctions rationnelles f sur C régulières dans un voisinage de S telles que $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. On note $H^0_{\mathfrak{m}}$ (ou $\mathfrak{C}^0(C_{\mathfrak{m}})$) le sous-groupe de $H_{\mathfrak{m}}$ formé des classes de diviseurs de degré 0. D'après les travaux de ROSENLICHT, il y a une structure canonique de variété de groupe sur $H^0_{\mathfrak{m}}$ et on note cette variété $J_{\mathfrak{m}}$ et on l'appelle la jacobienne généralisée de C associée à $\mathfrak{m}$. (Cf. paragraphe 1, chapitre V, [7] ou [13]). Soit P_0 un point de C étranger à S ; alors on peut définir une application (dite canonique) θ de $C - S$ dans $J_{\mathfrak{m}}$ par la relation $\theta(P) =$ la classe de diviseurs de $H^0_{\mathfrak{m}}$ définie par le diviseur $1.P - 1.P_0$, $P \in C - S$. L'application canonique θ est un morphisme (cf. proposition 4, paragraphe 2, chapitre V, [13]).

On a maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $f : C - S \to G$ un morphisme de $C - S$ dans un groupe algébrique commutatif G (resp. $f : C - S \to \mathfrak{C}(U)$ une application algébrique de $C - S$ dans le groupe des classes de diviseurs d'une variété complète U) admettant un module $\mathfrak{m}$ porté par S. Il existe alors un homomorphisme algébrique $F : J_{\mathfrak{m}} \to G$ (resp. $F : J_{\mathfrak{m}} \to \mathfrak{C}(U)$) tel qu'on ait

$$f = F \circ \theta + f(P_0)$$

où $\theta : C - S \to J_{\mathfrak{m}}$ est l'application canonique de $C - S$ dans $J_{\mathfrak{m}}$ définie par la relation $\theta(P) =$ la classe définie par le diviseur $1.P - 1.P_0$.

Pour la démonstration, on renvoie au théorème 2, paragraphe 2, chapitre V, [13]. Il faut signaler que dans l'ouvrage cité, la démonstration est faite seulement pour le cas d'un morphisme dans un groupe algébrique G, mais on voit facilement que la même démonstration marche à l'aide du théorème de continuité et du théorème de descente pour un revêtement non ramifié (cf. théorème 4 et théorème 7, exposé numéro 5) lorsque f est une application algébrique de $C - S$ dans $\mathfrak{C}(U)$ (U complète).

On observe qu'en prenant $\mathfrak{m} = 0$, on obtient la jacobienne habituelle.

2. L'identité $\mathfrak{T}(G) = \mathfrak{C}^a(U)$ dans le cas général.

Soit U une variété ; on note X l'ensemble fermé des points non normaux de U ; c'est le support du faisceau cohérent $\mathfrak{M}(V/U)$, (V, p) étant le revêtement normal de U. Rappelons qu'on note $\mathfrak{E}(U)$ et $\mathfrak{H}(U)$ respectivement les noyaux de

$$p^* : \mathfrak{D}(U) \to \mathfrak{D}(V)$$

et

$$p^* : \mathfrak{C}(U) \to \mathfrak{C}(V) \quad ;$$

c'est-à-dire, respectivement le groupe des diviseurs de U qui deviennent triviaux sur V et le groupe des classes de diviseurs de U qui deviennent triviales sur V.

PROPOSITION 1. - Soient U une variété et W une sous-variété de U qui n'est pas contenue dans X. Alors la restriction (désignée par i^*, i étant le morphisme d'inclusion de W dans U) d'un élément de $\mathfrak{E}(U)$ à W est définie et c'est un élément de $\mathfrak{E}(W)$; la restriction d'un élément de $\mathfrak{H}(U)$ à W est un élément de $\mathfrak{H}(W)$.

Comme l'application canonique $\mathfrak{E}(U) \to \mathfrak{H}(U)$ est toujours surjective, il suffit de montrer que la restriction d'un élément de $\mathcal{E}(U)$ à W est définie et qu'elle est un élément de $\mathcal{E}(W)$. Soit donc D un diviseur de $\mathcal{E}(U)$ et soit f une fonction de définition de D en un point $x \in W$; par hypothèse f est régulière et non nulle sur la normalisée V de U au-dessus de x (on identifie f à une fonction sur V par le cohomomorphisme de p). D'après l'hypothèse faite sur W, la restriction f' de f à W est définie. Il s'agit de montrer que f' est régulière et non nulle sur la normalisée de W au-dessus de x. L'ensemble des valeurs d'adhérence de f' en x est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en x et il en résulte qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence de f' en x et qu'elles sont toutes non nulles. Ceci entraîne que f' est régulière et non nulle sur la normalisée de W au-dessus de x (par exemple, en vertu du Main theorem de Zariski).

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - Soient U une variété affine qui ne possède pas de singularité du type (a) (relative au revêtement normal (V, p) de U) et f une fonction rationnelle qui devient régulière sur la normalisée (V, p) de U et qui n'est pas partout régulière sur U. Alors toute composante irréductible de l'ensemble fermé des points de U où f n'est pas régulière est de dimension $\geqslant 1$.

La proposition est de nature locale. Soit x un point de U tel que $f \notin (\mathcal{O}(U))_x$. Soit $(\mathfrak{N}(U))_x$ le sous-module de $(\mathfrak{M}(U))_x$ engendré par l'image de f dans $(\mathfrak{M}(U))_x$. Il s'agit de montrer que tout germe de variété passant par x et défini par un idéal premier associé au sous-module $\{0\}$ de $(\mathfrak{N}(U))_x$ est de dimension $\geqslant 1$. Or, comme $(\mathfrak{N}(U))_x$ est un sous-module de $(\mathfrak{M}(U))_x$, l'ensemble des idéaux premiers associés au sous-module $\{0\}$ de $(\mathfrak{N}(U))_x$ est contenu dans l'ensemble des idéaux premiers associés au sous-module $\{0\}$ de $(\mathfrak{M}(U))_x$ (cf. chapitre I, [14]). La proposition résulte alors de l'hypothèse faite sur U.

PROPOSITION 3. - Soit U une variété de dimension > 1 qui ne possède pas de singularité du type (a). Alors toute composante irréductible de supp D, D étant un diviseur sur U, est de dimension $\geqslant 1$.

Supposons que x soit un point isolé de supp D. Alors si f est une fonction de définition de D en x, f devient régulière sur la normalisée de U en tout point au-dessus de x ; de plus f est règulière en tous les points $\neq x$ d'un voisinage de x dans U ; f est donc régulière en x (proposition 2). Comme l'ensemble des zeros de f n'a aucun point isolé (puisque $\dim U > 1$), la proposition 3 est établie.

PROPOSITION 4. - Soient U une variété affine et $\mathfrak{U}$ son extension à un domaine universel $\Omega \supset K$. Il existe une section hyperplane $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ telle que, pour tout diviseur K-rationnel D sur $\mathfrak{U}$ (que l'on peut identifier à un diviseur sur U) tel que $\operatorname{supp} D$ n'ait pas de point isolé, la restriction de D à $\mathfrak{W}$ soit définie et soit $\neq 0$ si $D \neq 0$.

On peut supposer que U est une sous-variété fermée de K^r qui n'est contenue dans aucun hyperplan. L'ensemble Q des hyperplans de K^r s'identifie au complémentaire d'un point dans l'espace projectif P^r de dimension r. On voit facilement que l'ensemble Γ des points $(x, h) \in U \times Q$ tels que $x \in h$ est une sous-variété de $U \times Q$ qui est fibrée de manière localement triviale au-dessus de U. Soient p_1 et p_2 les morphismes $\Gamma \to U$ et $\Gamma \to Q$ induits par les projections de $U \times Q$; pour qu'une fonction rationnelle g sur U soit régulière en un point u, il faut et il suffit que $g \odot p_1$ soit régulière sur Γ en au moins un point de $p^{-1}(u)$.

Comme p_2 est dominant, son cohomomorphisme permet d'identifier le corps $R(Q)$ des fonctions numériques sur Q à un sous-corps du corps $R(\Gamma)$ des fonctions numériques sur Γ. Nous désignerons par A l'algèbre affine sur $R(Q)$ engendrée par les $f \circ p_1$ pour toutes les fonctions f partout régulières sur U. Par ailleurs, il y a au moins un K-isomorphisme j de $R(Q)$ sur un sous-corps de Ω. Cet isomorphisme définit un hyperplan de l'espace Ω^r générique par rapport à K ; soit $\mathfrak{W}$ la section hyperplane correspondante de $\mathfrak{U}$. C'est une variété rationnelle sur $j(R(Q))$; l'isomorphisme j se prolonge en un isomorphisme, que nous noterons encore j, de $R(\Gamma)$ sur le corps des fonctions numériques sur $\mathfrak{W}$ qui sont rationnelles sur $j(R(Q))$; $j(A)$ n'est autre que l'algèbre des fonctions partout régulières sur $\mathfrak{W}$ qui sont rationnelles sur $j(R(Q))$.

Soit maintenant D un diviseur de U tel que $\operatorname{Supp} D$ n'ait aucun point isolé ; supposons $D \neq 0$ et choisissons un point $y \in \operatorname{Supp} D$. Soit f une fonction de définition de D en y ; elle est encore fonction de définition de D en tout point d'un ouvert affine U_0 de U contenant y ; on peut supposer qu'il y a une fonction h partout définie sur U telle que U_0 soit l'ensemble des points de U en lesquels h prend une valeur $\neq 0$. Nous pouvons aussi considérer f comme une fonction numérique sur $\mathfrak{U}$, rationnelle sur K. Elle induit sur $\mathfrak{W}$ une fonction numérique $\neq 0$ qui n'est autre que $j(f \odot p_1)$. Si $\mathfrak{U}_0$ est l'ouvert affine de $\mathfrak{U}$ obtenu par extension à partir de U_0, f est fonction de définition de D (considéré comme diviseur sur $\mathfrak{U}$) en tout point de $\mathfrak{U}_0$. Puisque

f induit une fonction $\neq 0$ sur $\mathfrak{W}$, D admet une restriction à $\mathfrak{W}$. Pour montrer que cette restriction est $\neq 0$, il suffira de montrer qu'il est impossible que $j(f \odot p_1)$ soit partout régulière et $\neq 0$ sur $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{U}_0$. Supposons pour un moment qu'il en soit ainsi. Comme $\mathfrak{U}_0$ est l'ensemble des points de $\mathfrak{U}$ en lesquels h prend une valeur $\neq 0$, il y a un exposant k tel que $h^k f \odot p_1$ et $h^k f^{-1} \odot p_1$ appartiennent à A. Il en résulte qu'il existe une fonction $Z \neq 0$ de $R(Q)$ telle que $(h^k f \odot p_1)(Z \odot p_2)$ et $(h^k f^{-1} \odot p_1)(Z \odot p_2)$ soient partout définis sur Γ. Or, comme $(\mathrm{Supp}\ D) \cap U_0$ n'a pas de point isolé, on voit facilement qu'il existe un ouvert non vide Q_0 de Q tel que tout $h \in Q_0$ rencontre $(\mathrm{Supp}\ D) \cap U_0$. Il y a alors au moins un point $h \in Q_0$ tel que Z soit définie et prenne une valeur non nulle en h. Si $u \in h \cap (\mathrm{Supp}\ D) \cap U_0$, on a $(u, h) \in \Gamma$ et $h^k f \odot p_1$, $h^k f^{-1} \odot p_1$ sont définies en (u, h), d'où il résulte que $h^k f$ et $h^k f^{-1}$ sont définies en u. Comme $u \in U_0$, on a $h(u) \neq 0$, et f, f^{-1} sont définies en u, ce qui est impossible puisque $u \in (\mathrm{Supp}\ D) \cap U_0$.

PROPOSITION 5. - Soit U une variété complète de dimension ≥ 1, qui ne possède pas de singularité du type (a). Alors il existe un nombre fini de sous-variétés fermées $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_r$ de l'extension $\mathfrak{U}$ de U à un domaine universel $\Omega \supset K$ tel que pour tout élément $\theta \in \mathfrak{h}(U)$ (identifié à un élément de $\mathfrak{h}_K(\mathfrak{U})$), $\theta \neq 0$ la restriction de θ à l'une au moins des $\mathfrak{W}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ soit aussi non nulle.

D'après la proposition 6 du chapitre 1, on peut identifier $\mathfrak{h}(U)$ à $\mathfrak{C}(U)$, le groupe de diviseurs de U qui deviennent triviaux sur la normalisée de U ; il suffit donc de démontrer qu'il existe un nombre fini de sous-variétés fermées $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_r$ de $\mathfrak{U}$ telles que la restriction d'un élément $\theta \neq 0$ de $\mathfrak{C}(U)$ à $\mathfrak{W}_i$ soit définie et $\neq 0$ pour au moins un i. D'après la proposition 3, toute composante irréductible de $\mathrm{Supp}\ \theta$ est de dimension ≥ 1. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement affine de U. On peut identifier l'extension $\mathfrak{U}_i$ de U_i à Ω à un ouvert affine de $\mathfrak{U}$ et alors les $\mathfrak{U}_i$ forment un recouvrement affine de $\mathfrak{U}$. Pour chaque $\mathfrak{U}_i$, on choisit une section générique comme dans la proposition précédente et on note $\mathfrak{W}_i$ son adhérence dans $\mathfrak{U}$. Maintenant la proposition est une conséquence immédiate de la précédente.

REMARQUE. - Si dans la proposition, la variété U est projective, il est facile de voir que l'on peut choisir une section hyperplane $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$, générique sur K, en lieu de r-sous-variétés $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_r$.

THÉORÈME 3. - Soient U une variété complète et (G, π) sa variété de Picard ;

on a $\mathfrak{T}(G) = \mathfrak{G}^a(U)$.

Soient T une variété et $f : T \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ une application algébrique telle que $f(t_0) \in \mathfrak{T}(G)$ pour un $t_0 \in T$. Il s'agit de montrer que $f(t) \in \mathfrak{T}(G)$ pour tout $t \in T$. Comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 3, chapitre 2, on peut supposer que T est une courbe non singulière (non nécessairement ~~complète~~) Soit C la courbe complète non singulière qui contient T . En vertu du théorème 2, pour qu'on ait $f(T) \subset \mathfrak{T}(G)$, il suffit de prouver l'existence d'un module $\mathfrak{m}$ pour l'application f (porté par les points à "l'infini" : $C - T = S$) ; en effet, dans ce cas, d'après le théorème 1, on aura un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "f_1"'] & J_{\mathfrak{m}} \arrow[d, "g"] \\ & \mathfrak{G}(U) \end{tikzcd}$$

où $J_{\mathfrak{m}}$ est la jacobienne généralisée de C associée au module $\mathfrak{m}$, g un homomorphisme algébrique (l'extension de f à $C_{\mathfrak{m}}$) , λ l'application canonique de T dans $J_{\mathfrak{m}}$ définie par la relation $\lambda(t)$ = l'élément de $J_{\mathfrak{m}}$ défini par le diviseur $1.t - 1.t_0$, et $f_1(t) = f(t) - f(t_0)$. Comme g est un homomorphisme algébrique, on a $g(J_{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{T}(G)$, ce qui entraîne que $f(T) \subset \mathfrak{T}(G)$.

On a vu dans le chapitre précédent qu'il suffit de démontrer que $\mathfrak{T}(G) = \mathfrak{G}^a(U)$ dans le cas où U n'a pas de singularité de type (a) . Nous procéderons alors par récurrence sur $n = \dim U$. Si $n = 0$ ou 1 , l'inexistence de singularités de type (a) entraîne, comme on le voit tout de suite, que U est normale, et le théorème est vrai dans ce cas. Supposons donc que $n > 1$ et que le théorème soit vrai pour les variétés de dimension $n - 1$ sans singularités de type (a) . Les réductions du chapitre précédent montrent alors que le théorème est vrai pour toute variété de dimension $n - 1$ (avec ou sans singularités de type (a)).

Soit Ω un domaine universel qui contient K et $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, ... ~~etc. les~~ extensions de U , C , f , ... etc. au domaine universel Ω . Soient $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_r$ des sous-variétés de $\mathfrak{U}$ de dimension $(n - 1)$ jouissant de la propriété de la proposition 5 et $i_j : \mathfrak{W}_j \longrightarrow \mathfrak{U}$ le morphisme d'inclusion des $\mathfrak{W}_j$ dans $\mathfrak{U}$. On peut identifier C à l'ensemble des points de $\mathfrak{C}$ rationnels sur K , et on a $\mathfrak{F}(T) = f(T)$. Soit (V , p) le revêtement normal de U . La restriction de l'homomorphisme

$$F : \mathfrak{G}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{V}) \times \mathfrak{G}(\mathfrak{W}_1) \times \ldots \times \mathfrak{G}(\mathfrak{W}_r)$$

définie par la relation

$$F(\theta) = (p^*(\theta) , i_1^*(\theta) , \ldots , i_r^*(\theta)) \qquad ,$$

au sous-groupe $\mathfrak{G}_K(U)$ est <u>injective</u> d'après la proposition 5. Considérons maintenant l'application

$$F \circ \mathfrak{F} : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{U}) \times \mathfrak{G}(\mathfrak{M}_1) \times \dots \times \mathfrak{G}(\mathfrak{M}_r) \quad .$$

L'hypothèse que $f(t_0) =$ l'élément neutre de $\mathfrak{G}(U)$ entraîne que

$$(F \circ \mathfrak{F})(\mathfrak{T}) \subset \mathfrak{G}^a(\mathfrak{U}) \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_1) \times \dots \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_r) \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la normalité de $\mathfrak{U}$, on peut identifier $\mathfrak{G}^a(\mathfrak{U})$ avec la variété de Picard de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_j)$ avec la variété de Picard de $\mathfrak{M}_j$, et en vertu de la proposition 2, chapitre 1, l'application $F \circ \mathfrak{F}$ est un <u>morphisme</u> de $\mathfrak{T}$ dans le groupe algébrique

$$\mathfrak{G}^a(\mathfrak{U}) \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_1) \times \dots \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_r) \quad .$$

Maintenant il résulte du théorème de Rosenlicht sur l'existence du module (cf. théorème 1) que l'application rationnelle $F \circ \mathfrak{F}$ de $\mathfrak{C}$ dans le groupe algébrique $\mathfrak{G}^a(\mathfrak{U}) \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_1) \times \dots \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_r)$ possède un module $\mathfrak{m}$ porté par les points à l'infini de $\mathfrak{C}$. On peut identifier les points à l'infini de $\mathfrak{C}$ avec les points à l'infini de C, car les points à l'infini de $\mathfrak{C}$ sont rationnels sur K ; par conséquent le module $\mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{C}$ provient d'un module sur C porté par les points $C - I$. Soit θ une fonction rationnelle sur C, $\theta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, on a $(F \circ \mathfrak{F})(\operatorname{div} \theta) =$ l'élément neutre de

$$\mathfrak{G}^a(\mathfrak{U}) \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_1) \times \dots \times \mathfrak{G}^a(\mathfrak{M}_r)$$

puisque $\mathfrak{m}$ est un module pour l'application $F \circ \mathfrak{F}$; or comme la restriction de F à $\mathfrak{G}_K(\mathfrak{U})$ est injective, il en résulte que $\mathfrak{F}(\operatorname{div} \theta) = f(\operatorname{div} \theta) =$ l'élément neutre de $\mathfrak{G}(U)$, i. e. le module $\mathfrak{m}$ sur C est un module (on désigne encore par $\mathfrak{m}$ le module sur C qu'on vient de définir) pour l'application algébrique $f : T \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$. Ceci entraîne que $f(T) \subset \pi(G)$ comme on l'a déjà remarqué, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> U <u>une variété complète</u>, (G, π) <u>sa variété de Picard et</u> $f : T \longrightarrow \mathfrak{G}(U)$ <u>une application algébrique avec</u> $f(t_0) =$ <u>l'élément neutre de</u> $\mathfrak{G}(U)$ (T <u>est une variété). Il existe alors un morphisme</u> $g : T \longrightarrow G$ <u>tel que le diagramme suivant soit commutatif</u>

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \mathfrak{G}(U) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \pi} & \\ G & & \end{array}$$

Ceci résulte du théorème en appliquant la proposition 2, chapitre II.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (Pierre). - Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958 (Thèse Sc. math. Paris. 1958).

[2] CARTIER (Pierre). - Dualité des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58, n° 164 ; et Isogénies des variétés de groupes, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959 (à paraître).

[3] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958, multigraphié (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, 1957/58).

[4] CHEVALLEY (Claude). - La variété de Picard (à paraître).

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, Séminaire Cartan, t. 9, 1956/57 : Quelques questions de topologie, n° 2.

[7] ROSENLICHT (Maxwell). - Generalized Jacobian varieties, Annals of Math., t. 59, 1954, p. 505-530.

[8] ROSENLICHT (Maxwell). - Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 401-443.

[9] ROSENLICHT (Maxwell). - A universal mapping property of generalized Jacobian varieties, Annals of Math., t. 66, 1957, p. 80-88.

[10] Séminaire CHEVALLEY, t. 1, 1956-1958 : Classification des groupes de Lie algébriques.

[11] Séminaire CHEVALLEY, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications.

[12] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[13] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1264 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 7).

[14] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale, Multiplicités. Cours professé au Collège de France, 1957/58 (multigraphié).

[15] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New-York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).

[16] WEIL (André). - Fibre spaces in algebraic geometry (Notes prises par A. Wallace, 1952). - Chicago, University of Chicago, 1955).

[17] WEIL (André). - Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique, Math. Annalen, t. 128, 1954, p. 95-127.