

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

CLAUDE CHEVALLEY

Le corps de rationalité d'une classe de diviseurs

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 7, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A7_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE CORPS DE RATIONALITÉ D'UNE CLASSE DE DIVISEURS

par Claude CHEVALLEY

Soit X une variété sur un corps K algébriquement clos ; soit R le corps des fonctions numériques sur X . Soit k un sous-corps de K , une structure de k -variété sur X est par définition constituée par la donnée d'un sous-corps R_k de R qui possède les propriétés suivantes :

1° R_k contient k ; R est engendré par K et R_k , et R_k est linéairement disjoint de K au-dessus de k ;

2° X peut se représenter comme réunion d'ouverts affines U possédant la propriété suivante : l'algèbre des fonctions régulières sur U est engendrée (sur K) par des éléments de R_k .

Nous supposerons désormais X munie d'une structure de k -variété. Pour tout sur-corps k' de k contenu dans K , nous noterons $R_{k'}$ le corps engendré par k' et R_k , les éléments de $R_{k'}$ seront dits rationnels sur k' . Un point $x \in X$ est dit rationnel sur k' si toute fonction de $R_{k'}$, qui est définie en x prend une valeur appartenant à k' . Un ouvert affine U de X est dit rationnel sur k' si l'algèbre des fonctions régulières sur U est engendrée par des éléments de $R_{k'}$; un ouvert quelconque est dit rationnel sur k' s'il est réunion d'ouverts affines rationnels sur k' . Soient U un ouvert affine rationnel sur k' , P l'algèbre des fonctions régulières sur U , F une partie relativement fermée de U et $U' = U - F$. Pour que U' soit rationnel sur k' , il faut et il suffit que F soit l'ensemble des zéros communs à certaines fonctions $f_\alpha \in P \cap R_{k'}$. En effet, pour montrer que la condition est nécessaire, on peut tout de suite se ramener au cas où U' est un ouvert affine rationnel sur k' ; soient alors f_j^1 ($1 \leq j \leq r$) des générateurs de l'algèbre des fonctions régulières sur U' ⁽¹⁾. Soit \mathcal{O} l'idéal de P composé des $f \in P$ tels que $ff_j^1 \in P$ ($1 \leq j \leq r$) ; on voit facilement que F est exactement l'ensemble des zéros communs aux fonctions de \mathcal{O} ; par ailleurs, P ayant une base composée d'éléments de $R_{k'}$, il est clair qu'il en est de même de \mathcal{O} . Pour montrer que la condition est suffisante, on se ramène tout de suite au cas où F est l'ensemble des zéros d'une fonction $f \in P \cap R_{k'}$, $f \neq 0$; or U' est alors un ouvert affine dont l'algèbre affine est $P[f^1]$, ce qui montre que U' est rationnel

(1) Qui soient des éléments de $R_{k'}$.

sur k' .

Un sous-espace vectoriel V de la structure d'espace vectoriel de R sur K est dit rationnel sur un sous-corps k' de K contenant k si V a une base composée d'éléments de $R_{k'}$. Si V, V' sont des sous-espaces de R rationnels sur k' , les espaces $V + V', V \cap V', VV'$ (l'espace engendré par les produits $vv', v \in V, v' \in V'$), et si $V' \neq \{0\}, V : V'$ (l'ensemble des w tels que $wv' \in V$ pour tout $v' \in V'$) sont rationnels sur k' . C'est évident en ce qui concerne $V + V', VV'$. En ce qui concerne $V \cap V'$ et $V : V'$, on observe que, si W est un espace rationnel sur K' et (ω_i) une base de K/k' , tout élément w de W se met d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_i \omega_i w_i, w_i \in R_{k'} \cap W$; ceci étant, pour qu'un sous-espace T de W soit rationnel sur K' , il faut et il suffit que la condition $w \in T$ entraîne $w_i \in T$ pour tout i .

Soient V un sous-espace vectoriel de R rationnel sur k et W un sous-espace de V ; parmi les sous-corps de K contenant k , sur lesquels W est rationnel, il y en a un, soit k' , qui est contenu dans tous les autres; on l'appelle le corps de rationalité de W . On peut l'obtenir comme suit: soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de V composée d'éléments de R_k , et soit I' un sous-ensemble de I tels que les $v_i, i \in I'$, forment une base de V/W ; si $i \in I - I'$, on peut écrire $v_i \equiv \sum_{j \in I'} a_{ji} v_j \pmod{W}$, avec $a_{ji} \in K$; k' est le corps engendré par les a_{ji} .

Dans ce qui suit, nous appellerons pour simplifier, "faisceau" tout faisceau d'idéaux fractionnaires $\neq \{0\}$ sur X . Si U est un ouvert de X , les sections d'un faisceau A sur U s'identifient aux éléments d'un sous-espace vectoriel de R , que nous désignerons par $\Gamma(U, A)$. Si U est un ouvert affine, $\Gamma(U, A)$ est un idéal fractionnaire pour l'algèbre affine de U , que nous désignerons par $P(U)$. Si $x \in U$, le module ponctuel de A , que nous noterons $A(x)$, est l'idéal fractionnaire pour l'anneau local $\mathcal{O}(x)$ de x engendré par $\Gamma(U, A)$. Un faisceau est uniquement déterminé par ses modules ponctuels; si on se donne pour chaque $x \in X$ un idéal fractionnaire $A_x \neq \{0\}$ pour $\mathcal{O}(x)$, une condition nécessaire et suffisante pour que les A_x soient les modules ponctuels d'un faisceau est que X puisse être recouvert par des ouverts affines U dont chacun possède la propriété suivante: il existe un idéal fractionnaire \mathfrak{A} pour $P(U)$ tel que, pour tout $x \in U$, A_x soit l'idéal fractionnaire pour $\mathcal{O}(x)$ engendré par \mathfrak{A} , on a alors

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{x \in U} A_x = \Gamma(U, A)$$

si A est le faisceau admettant les A_x comme modules ponctuels.

Soient P un domaine d'intégrité, S une partie de P ne contenant pas 0 et $Q = P[S^{-1}]$. Pour tout idéal fractionnaire \mathcal{A} pour P , soit \mathcal{A}^Q l'idéal fractionnaire pour Q engendré par \mathcal{A} . Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des idéaux fractionnaires pour P , on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})^Q &= \mathcal{A}^Q + \mathcal{B}^Q & (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^Q &= \mathcal{A}^Q \cap \mathcal{B}^Q \\ (\mathcal{A}\mathcal{B})^Q &= \mathcal{A}^Q \mathcal{B}^Q & (\mathcal{A} : \mathcal{B})^Q &= \mathcal{A}^Q : \mathcal{B}^Q \end{aligned} ,$$

comme on le voit facilement soit directement, soit en utilisant la théorie des modules plats. On déduit de là que, si A, B sont des faisceaux, il existe des faisceaux $A + B, A \cap B, AB, A : B$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} (A + B)(x) &= A(x) + B(x) & (A \cap B)(x) &= A(x) \cap B(x) \\ (AB)(x) &= A(x) B(x) & (A : B)(x) &= A(x) : B(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$, et aussi

$$\begin{aligned} \Gamma(U, A + B) &= \Gamma(U, A) + \Gamma(U, B) & \Gamma(U, A \cap B) &= \Gamma(U, A) \cap \Gamma(U, B) \\ \Gamma(U, AB) &= \Gamma(U, A) \Gamma(U, B) & \Gamma(U, A : B) &= \Gamma(U, A) : \Gamma(U, B) \end{aligned}$$

pour tout ouvert affine U .

Si A et B sont deux faisceaux et si $A(x) \subset B(x)$ pour tout x (ou, ce qui revient au même, $\Gamma(U, A) \subset \Gamma(U, B)$ pour tout ouvert affine U), on dit que A est multiple de B , et on écrit $A \subset B$.

On dit qu'un faisceau A est rationnel sur un sous-corps k' de K contenant k si, pour tout ouvert affine U rationnel sur k' , $\Gamma(U, A)$ est rationnel sur k' . S'il en est ainsi, pour tout ouvert U rationnel sur k' , $\Gamma(U, A)$ est rationnel sur k' puisque $\Gamma(U, A)$ est l'intersection des $\Gamma(U_i, A)$ pour les U_i d'un recouvrement (que l'on peut supposer fini) de U par des ouverts affines rationnels sur k' . De plus, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est engendré (comme idéal fractionnaire pour $\mathcal{O}(x)$) par des éléments de $R_{k'}$.

Si A, B sont des faisceaux rationnels sur k' , il en est de même de $A + B, A \cap B, AB, A : B$.

Pour tout faisceau A , on appelle ensemble porteur de A l'ensemble des x tels que $A(x) \neq \mathcal{O}(x)$. Cet ensemble est fermé et $\neq X$. Supposons que A soit rationnel sur un sous-corps k' de K contenant k ; si E est l'ensemble porteur de A et si U est un ouvert affine rationnel sur k' , $E \cap U$ est l'ensemble des zéros communs à certaines fonctions appartenant à $P(U) \cap R_{k'}$;

en effet, E est la réunion des ensembles porteurs de $A \cap \mathcal{O}$ et de $\mathcal{O} : (A + \mathcal{O})$ qui sont des faisceaux rationnels sur k' contenus dans \mathcal{O} ; on se ramène donc au cas où $A \subset \mathcal{O}$; mais alors $\Gamma(U, A)$ a une base composée d'éléments de $P(U) \cap R_{k'}$, ce qui établit l'assertion. Il résulte de là que $X - E$ est rationnel sur k' . Réciproquement, on a le résultat suivant :

LEMME 1. - Si Ω est un ouvert non vide rationnel sur k' , il existe un faisceau $A \subset \mathcal{O}$ tel que l'ensemble porteur de A soit $X - \Omega$.

Si A, B sont des faisceaux contenus dans \mathcal{O} , l'ensemble porteur de $A + B$ est l'intersection de ceux de A et B ; il suffira donc de démontrer le lemme dans le cas où Ω est un ouvert affine rationnel sur k' . Soit alors $P(\Omega) = P[u_1, \dots, u_h]$, les u_i étant des éléments $\neq 0$ de $R_{k'}$. Pour tout x , soit $A(x)$ l'ensemble des $v \in \mathcal{O}(x)$ tels que $vu_i \in \mathcal{O}(x)$ ($1 \leq i \leq h$); si on désigne par $u_i \mathcal{O}$ le faisceau dont les modules ponctuels sont les $u_i \mathcal{O}(x)$, on a $A(x) = (\bigcap_{i=1}^h (u_i \mathcal{O} : \mathcal{O})(x)) \cap \mathcal{O}(x)$, d'où il résulte que les $A(x)$ sont les modules ponctuels d'un faisceau A rationnel sur k' . On sait que Ω est l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels les fonctions u_i sont toutes définies; il en résulte que l'ensemble porteur de A est $X - \Omega$.

LEMME 2. - Soit x_0 un point de X rationnel sur k . Il existe alors une suite (B_n) de faisceaux contenus dans \mathcal{O} qui possède les propriétés suivantes : on a $B_0 = \mathcal{O}$, $B_{n+1} \subset B_n$; pour tout $n > 0$, l'ensemble porteur de B_n est $\{x_0\}$; $B_{n+1}(x_0)$ est un sous-espace vectoriel (sur K) de codimension 1 de $B_n(x_0)$; on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n(x_0) = \{0\}$.

Soit U un ouvert affine rationnel sur k' et soit \mathcal{M} l'idéal des fonctions de $P(U)$ nulles en x_0 . L'espace \mathcal{M} est rationnel sur k' ; il en est de même de \mathcal{M}^ν pour tout ν . De plus, $\mathcal{M}^{\nu+1}$ est de codimension finie dans \mathcal{M}^ν , et tout sous-espace vectoriel de \mathcal{M}^ν contenant $\mathcal{M}^{\nu+1}$ est un idéal. Il en résulte qu'il y a une suite décroissante (\mathcal{B}_n) d'idéaux de $P(U)$ commençant par $\mathcal{B}_0 = P(U)$ telle que chaque \mathcal{M}^ν figure parmi les \mathcal{B}_n et que, pour tout n , \mathcal{B}_{n+1} soit de codimension 1 dans \mathcal{B}_n et soit rationnel sur k' . Il est clair qu'il y a un faisceau $B_n \subset \mathcal{O}$ tel que $B_n(x) = \mathcal{O}(x)$ pour tout $x \neq x_0$, $\Gamma(U, B_n) = \mathcal{B}_n$. L'injection $P \rightarrow \mathcal{O}(x_0)$ définit pour tout n un isomorphisme de P/\mathcal{B}_n sur $\mathcal{O}(x_0)/B_n(x_0)$; $B_{n+1}(x_0)$ est donc de codimension 1 dans $B_n(x_0)$; toute puissance de l'idéal premier maximal de $\mathcal{O}(x_0)$ figurant parmi les $B_n(x_0)$, on a $\bigcap_n B_n(x_0) = \{0\}$. Enfin il est clair que les faisceaux B_n sont

rationnels sur k' .

A tout diviseur D sur X est attaché un faisceau que nous désignerons par A_D ; pour tout $x \in X$, $A_D(x)$ est un idéal fractionnaire principal. Nous dirons que D est rationnel sur un sous-corps k' de F contenant k si A_D est rationnel sur k' . S'il en est ainsi, et si x est un point quelconque de X , D possède une fonction de définition en x qui appartient à $R_{k'}$. Les diviseurs rationnels sur k' forment un sous-groupe du groupe des diviseurs.

LEMME 3. - Soit D un diviseur de X . Supposons qu'il existe un faisceau F rationnel sur k tel que $A_D \subset F$. Alors l'ensemble des sous-corps de K contenant k' sur lesquels D est rationnel a un plus petit élément.

Soit U un ouvert affine rationnel sur k ; on a $\Gamma(U, A_D) \subset \Gamma(U, F)$, et $\Gamma(U, F)$ est un espace vectoriel rationnel sur k . L'ensemble des sous-corps de K contenant k sur lesquels $\Gamma(U, A_D)$ est rationnel a donc un plus petit élément k_U . Soit k' le corps engendré par les k_U pour tous les ouverts affines U rationnels sur k ; il est clair que k' est le plus petit sous-corps de K contenant k sur lequel D soit rationnel.

On dit qu'une classe C de diviseurs de X est rationnelle sur un sous-corps $k' \supset k$ de F si C contient un diviseur rationnel sur k' .

La variété X est dite semi-complète si, pour tout faisceau F , $\Gamma(X, F)$ est de dimension finie. Il en est en particulier ainsi, si X est complète.

THEOREME 1. - Soit X une k -variété semi-complète qui possède un point x_0 rationnel sur k . Si C est une classe de diviseurs sur X , l'ensemble des sous-corps de F contenant k sur lesquels C est rationnelle a un plus petit élément.

Nous choisirons un ouvert affine U_0 rationnel sur k contenant x_0 et un faisceau $H \subset \mathcal{O}$ rationnel sur k' , dont l'ensemble porteur est $X - U_0$. Il existe un diviseur $D \in C$ tel que l'on ait $A_D(x) \subset \mathcal{O}(x)$ pour tout $x \in U_0$. En effet, soit D_0 un élément quelconque de C ; il y a un élément $f \in P(U_0)$ tel que $f \neq 0$, $f \Gamma(U_0, A_{D_0}) \subset P_{U_0}$; $D = D_0 + \text{div } f$ possède alors la propriété voulue. Soit D un diviseur ayant la propriété énoncée; alors

$\mathcal{O} : (\mathcal{O} + A_D)$ est un faisceau contenu dans \mathcal{O} dont l'ensemble porteur est contenu dans $X - U_0$. Ceci étant, il est bien connu qu'il existe un $m > 0$ tel que

$$H^m \subset \mathcal{O} : (\mathcal{O} + A_D) \quad ,$$

d'où

$$H^m A_D \subset 0 .$$

Nous choisirons des faisceaux B_n qui possèdent les propriétés du lemme 2, et nous désignerons par C_n l'ensemble des diviseurs $D \in C$ tels que $H^m A_D \subset B_n$. On a donc $D \in C_0$, d'où $C_0 \neq \emptyset$; on a $C_{n+1} \subset C_n$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$. Soit

$$\Phi_n = \Gamma(X, B_n : H^m A_D) ;$$

pour qu'un diviseur D appartienne à C_n , il faut et il suffit qu'il se mette sous la forme $D + \text{div } f$, avec un élément $f \neq 0$ de Φ_n . On a $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$; montrons que Φ_{n+1} est de codimension ≤ 1 dans Φ_n . Soit g une fonction de définition de D en x_0 . On a $f^m(x_0) = 0(x_0)$, si donc $\psi \in \Phi_n$, on a $\psi g \in B_n(x)$ et une condition nécessaire et suffisante pour que $\psi \in \Phi_{n+1}$ est que $\psi g \in B_{n+1}(x)$; comme $B_{n+1}(x)$ est de codimension 1 dans $B_n(x)$, notre assertion est établie. Par ailleurs, Φ_0 est de dimension finie > 0 (puisque X est semi-complète et $1 \in \Phi_0$); il y a donc un $\nu > 0$ tel que $\dim \Phi_\nu = 1$, $\dim \Phi_{\nu+1} = 0$. Cela implique que C_ν est un ensemble à un seul élément; soit Δ cet élément. Nous allons montrer que Δ est rationnel sur tout sous-corps k' de K contenant k sur lequel C est rationnelle. Soit D_1 un diviseur de C rationnel sur k' . Pour tout n , C_n est l'ensemble des diviseurs de la forme $D_1 + \text{div } \psi$, où ψ est un élément $\neq 0$ de l'espace

$$\Psi_n = \Gamma(X, C_n : H^m A_{D_1}) .$$

Comme $C_\nu = \{\Delta\}$, Ψ_ν est de dimension 1. Par ailleurs $B_n : H^m A_{D_1}$ est un faisceau rationnel sur k' , de sorte que Ψ_n a une base composée d'éléments rationnels sur k' . Si ψ est un élément $\neq 0$ de $\Psi_\nu \cap R_{k'}$, on a $\Delta = D_1 + \text{div } \psi$, ce qui montre que Δ est rationnel sur k' (car $\text{div } \psi$ l'est évidemment). Par ailleurs, on a $A_\Delta \subset 0 : H^m$, et $0 : H^m$ est rationnel sur k . L'ensemble des sous-corps de K contenant k sur lesquels Δ est rationnel a donc un plus petit élément k' ; il est clair que k' est aussi le plus petit sous-corps de K contenant k sur lequel C soit rationnelle.