C. S. SESHADRI

Diviseurs en géométrie algébrique (suite)

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 5, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A5_0>

DIVISEURS EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE (suite)

par C. S. SESHADRI

On va exposer la théorie des familles algébriques de diviseurs et de classes de diviseurs d'après des papiers inédits de CHEVALLEY.

1. Image réciproque d'un diviseur.

Soit φ un morphisme d'une variété Y dans une variété X. Le cohomomorphisme φ^* de φ, est un homomorphisme de l'anneau local $O_{\varphi(Y)}$ de $\varphi(Y)$ dans le corps des fonctions rationnelles $R(X)$ de X (Chap. II, II, [2]). Donc, si f est une fonction rationnelle sur X, définie et non-nulle en au moins un point de $\varphi(Y)$ (i.e. si $\varphi(Y) \not\subset \operatorname{supp} \operatorname{div} f$), $\varphi^*(f) = f \odot \varphi$ est une fonction rationnelle non-nulle sur Y.

Soit D un diviseur sur X, tel que $\varphi(Y) \not\subset \operatorname{supp} D$. D'après ce qui précède si f est une fonction de définition de D en $\varphi(y)$, $y \in Y$, $f \odot \varphi$ est une fonction rationnelle non-nulle sur Y. Si on désigne par $D(x) \odot \varphi$, l'élément de $R^*(Y)/O_y^*$ déterminé par $f \odot \varphi$, on vérife facilement que l'application $y \to D(\varphi(y)) \odot \varphi$ <u>définit bien un diviseur</u> $\varphi^*(D)$ <u>sur</u> Y, <u>qu'on appelle image réciproque de</u> D <u>par</u> φ. <u>L'image réciproque</u> $\varphi^*(D)$ <u>de</u> D <u>par</u> φ <u>est définie si</u> $\varphi(Y) \not\subset \operatorname{supp} D$. On voit que le faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires associé à $\varphi^*(D)$, considéré comme faisceau de $O(Y)$-modules, est l'image réciproque (au sens de la théorie des faisceaux de modules) du faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires associé à D, considéré comme faisceau de $O(X)$-modules. Dans le cas où Y est une sous-variété de X, et φ l'application identique de Y dans X, l'image réciproque de D par φ est appelée <u>diviseur induit par</u> D <u>sur</u> Y.

Les diviseurs D sur X tels que $\varphi(Y) \not\subset \operatorname{supp} D$ forment un sous-groupe du groupe des diviseurs sur X et φ^* est un homomorphisme de ce sous-groupe dans le groupe des diviseurs sur Y.

Soit $\psi : Z \to Y$ un morphisme d'une variété Z dans Y et supposons que $(\varphi \circ \psi)^*(D)$ est défini. Alors $\psi^*(\varphi^*(D))$ est défini et

$$\psi^*(\varphi^*(D)) = (\varphi \circ \psi)^*(D) .$$

C'est une conséquence immédiate du fait : si f est une fonction rationnelle sur X telle que $f \odot (\varphi \circ \psi)$ soit définie $(f \odot \varphi) \odot \psi$ est définie et $f \odot (\varphi \circ \psi) = (f \odot \varphi) \odot \psi$ (Chap. II, I, [2]).

On peut définir de façon analogue l'image réciproque d'un diviseur additif, etc.

2. Familles algébriques de diviseurs.

Une application $f : T \to \mathfrak{D}(X)$ d'une variété T dans le groupe des diviseurs $\mathfrak{D}(X)$ sur une variété X (noté par $(D_t)_{t \in T}$) est appelée algébrique ou famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par T, s'il existe un diviseur D sur $X \times T$, tel que pour tout $t \in T$, D_t soit l'image réciproque de D par le morphisme $j_t : X \to X \times T$ défini par $x \to (x, t)$. On dit alors que D est un diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t \in T}$. On dit aussi que le diviseur D définit la famille algébrique $(D_t)_{t \in T}$ paramétrée par T.

Pour qu'un diviseur D sur $X \times T$ définisse une famille algébrique de diviseurs sur X, paramétrée par T, il faut et il suffit que $\operatorname{supp} D$ ne contienne aucun ensemble de la forme $X \times \{t\}$, $t \in T$. Les familles algébriques de diviseurs sur X paramétrées par une variété donnée T, forment un groupe de façon évidente.

PROPOSITION 1. - Soit D une famille algébrique de diviseurs sur une variété X, paramétrée par une variété T. Soit $g : T' \to T$ un morphisme d'une variété T' dans T ; alors l'application $t' \to D_{g(t')}$, $(t' \in T')$ est une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par T'. D'ailleurs si $h : X \times T' \to X \times T$ est le morphisme défini par $(x, t') \to (x, g(t'))$ et si D est un diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t \in T}$ l'image réciproque $h^*(D)$ est défini, et est un diviseur de définition de la famille algébrique $D_{g(t')}$ $t' \in T'$.

On démontre d'abord que l'image réciproque $h^*(D)$ est définie. Il faut vérifier $h(X \times T') \not\subset \operatorname{supp} D$. On a $h(X \times T') = X \times g(T')$; donc si $h(X \times T') \subset \operatorname{supp} D$, on en déduit $X \times t \subset \operatorname{supp} D$ pour un $t \in T$, qui donne une contradiction.

Donc $h^*(D)$ est défini, et définit une famille algébrique de diviseurs $\{(h^*(D))_{t'}\}_{t' \in T'}$ sur X paramétrée par T'. Pour terminer la démonstration, il faut montrer $(h^*(D))_{t'} = D_{g(t')}$.

Si j et $j_{t'}$ sont les applications $j : X \to X \times T$, $j_{t'} : X \to X \times T'$ définies respectivement par $x \to (x, g(t'))$ et $x \to (x, t')$, on a, $j = h \circ j'_t$; d'où $D_{g(t')} = j^*(D) = j^*_{t'}(D) = (h^*(D))_{t'}$.

PROPOSITION 2. - Soit $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété X paramétrée par une variété T. Soit $g : X' \to X$ un morphisme dominant d'une variété X' dans X ; alors l'application $t \to g^*(D_t)$ est une famille algébrique de diviseurs sur X' paramétrée par T. D'ailleurs si h est le morphisme $h : X' \times T \to X \times T$ défini par $(x', t) \to (g(x'), t)$ et si D est un diviseur de définition de la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$, l'image réciproque $h^*(D)$ est définie et est un diviseur de définition de la famille algébrique $\{g^*(D_t)\}_{t \in T}$.

Le morphisme h est aussi dominant et par conséquent $h(X' \times T)$ contient un ouvert non-vide U dans $X \times T$ (paragraphe V, chap. II, [2]). Comme supp D dans $X \times T$ est fermé, $h(X' \times T) \not\subset$ supp D. Donc $h^*(D)$ est défini et de même $g^*(D_t)$ est définie pour chaque $t \in T$. Ensuite on montre que $h^*(D)$ définit une famille algébrique de diviseurs $\{(h^*(D))_t\}_{t \in T}$ sur X' paramétrée par T et que $(h^*(D))_t = g^*(D_t)$: si j'_t et j_t sont respectivement les morphismes $j'_t : X' \to X' \times T$, $j_t : X \to X \times T$ définis par $x' \to (x', t)$, $x' \in X'$ et $x \to (x, t)$, $x \in X$, on a $h \circ j'_t = j_t \circ g$ et $(j_t \circ g)(X') = g(X') \times \{t\}$. D'après l'hypothèse $X \times \{t\} \not\subset$ supp D. Donc $(h \circ j'_t)^*(D)$ et $(j_t \circ g)^*(D)$ sont définis, ce qui implique que $h^*(D)$ est définie et

$$(h \circ j'_t)^*(D) = j'^*_t(h^*(D)) = (h^*(D))_t = (j_t \circ g)^*(D) = g^*(j^*_t(D)) = g^*(D_t)$$

et la démonstration est terminée.

PROPOSITION 3. - Soit $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété X paramétrée par une variété T. Soient $g_1 : X' \to X$ un morphisme dominant d'une variété X' dans X et $h_1 : T' \to T$ un morphisme d'une variété T' dans T. Alors l'application $t' \to g_1^*(D_{h_1(t')})$ est une famille algébrique de diviseurs sur X' paramétrée par T'. D'ailleurs si D est un diviseur de définition de la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ et si $h : X' \times T' \to X \times T$ le morphisme défini par $(x', t') \to (g_1(x'), h_1(t'))$, $h^*(D)$ est définie, et définit la famille algébrique $\{g_1^*(D_{h_1(t')})\}_{t' \in T'}$.

C'est une conséquence immédiate des propositions 1 et 2.

REMARQUE. - Dans les paragraphes suivants on utilise assez souvent la famille algébrique $\{D_{g(t')}\}_{t' \in T}$, définie comme dans la proposition 1. On l'appelle <u>l'image réciproque de la famille algébrique</u> $\{D_t\}_{t \in T}$ <u>par le morphisme</u> $g : T' \longrightarrow T$.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> $\{D_t\}_{t \in T}$ <u>une famille algébrique de diviseurs sur une variété</u> X, <u>paramétrée par une variété</u> T <u>et</u> D <u>un diviseur de définition de la famille</u> $\{D_t\}_{t \in T}$. <u>Si on a</u> $D_t \geqslant 0$ (resp. $D_t = 0$) <u>pour tous les points</u> t <u>d'une partie dense de</u> T, <u>on a</u> $D \geqslant 0$ (resp. $D = 0$), <u>et par conséquent</u> $D_t \geqslant 0$ (resp. $D_t = 0$) <u>pour tous les points</u> t <u>de</u> T.

Les assertions relatives au cas où $D_t = 0$ pour t appartenant à une partie dense de T se déduisent du cas où $D_t \geqslant 0$ en observant que $D_t = 0$ équivaut à $D_t \geqslant 0$ et $-D_t \geqslant 0$. Donc il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $D_t \geqslant 0$ pour t appartenant à une partie dense de T.

On montre d'abord qu'on peut se ramener au cas où X et T sont affines. Soit (x_o, t_o) un point de $X \times T$; on veut montrer que D est positif en ce point. Soient X_o et T_o des ouverts affines de X et T contenant x_o et t_o respectivement. Si $i : X_o \longrightarrow X$ est l'application identique de X_o dans X d'après la proposition 3, la famille de diviseurs $\{i^*(D_t)\}_{t \in T_o}$ est une famille algébrique de diviseurs sur X_o paramétrée par T_o et si D' est la restriction de D à $X_o \times T_o$, D' est un diviseur de définition de la famille algébrique $\{i^*(D_t)\}_{t \in T_o}$. Si D' est positif en (x_o, t_o), D est positif en (x_o, t_o) et d'ailleurs $\{i^*(D_t)\}_{t \in T_o}$ est positif pour t appartenant à une partie dense de T_o (comme l'intersection d'une partie dense avec un ouvert est dense dans cet ouvert). Donc on est ramené au cas où X et T sont affines et à partir de maintenant on fait cette hypothèse.

On montre ensuite qu'on peut se ramener au cas où D est principal (i. e. diviseur d'une fonction rationnelle sur $X \times T$). Soit f une fonction de définition de D en un point $(x_o, t_o) \in X \times T$. Soit $\operatorname{div} f = D + D'$; $\operatorname{supp} D'$ ne rencontre pas (x_o, t_o). Comme $X \times T$ est affine, il existe une fonction régulière z sur $X \times T$, qui ne s'annule pas en (x_o, t_o), telle que $\operatorname{div} z + \operatorname{div} D' \geqslant 0$ sur $X \times T$. La fonction $\omega = fz$ est aussi une fonction de définition de D en (x_o, t_o) et $\operatorname{div} \omega = D + D''$, où $D'' \geqslant 0$. Pour démontrer le théorème, il s'agit de montrer que ω est régulière en (x_o, t_o). Il y a un ouvert affine T_o contenant t_o, tel que la restriction de div ω à $X \times T_o$ définit une famille algébrique de diviseurs paramétrée par T_o. On a pour tous les points $t \in T_o$ où $D_t \geqslant 0$, $(\text{div } \omega)_t \geqslant 0$; d'après l'hypothèse c'est une partie dense de T_o. On est ainsi ramené au cas : D principal, et on fait cette hypothèse.

On démontre maintenant le théorème pour le cas où X et T sont normales. Il s'agit de montrer que, si ω est une fonction rationnelle sur $X \times T$ telle que, pour t appartenant à une partie dense de T, $j_t \odot \omega$ soit régulière sur X, (j_t est le morphisme $X \rightarrow X \times T$ défini par $x \rightarrow (x, t)$), alors ω est une fonction régulière sur $X \times T$.

Supposons que ω n'est pas régulière en tous les points de $X \times T$. Comme $X \times T$ est normale, il existe une variété polaire P de ω. Alors l'ensemble des points de P où ω prend la valeur ∞, est un ouvert non-vide P_o de P. Comme P est de codimension 1 dans $X \times T$ et comme, pour chaque $t \in T$, $X \times t \not\subset P$, on démontre facilement que la projection de P sur T est dominante et par suite (cf. paragraphe V, chap. II, [2]), la projection de P_o sur T contient un ouvert non-vide T_o de T. Maintenant pour chaque $t \in T_o$, la fonction $\omega \odot j_t$ possède un point où elle prend la valeur ∞, ce qui contredit l'hypothèse : $\omega \odot j_t$ régulière pour t appartenant à une partie dense de T. Donc on a démontré le théorème pour le cas où X et T sont normales.

On va passer maintenant au cas général. Soient (X', g) et (T', h) les revêtements normaux de X et T respectivement. Comme X et T sont affines, X' et T' le sont aussi. Soit r le morphisme $r : X' \times T' \rightarrow X \times T$ défini par $r(x', t') = (g(x'), h(t'))$. Comme le morphisme g est surjectif, d'après la proposition 3, l'application $t' \rightarrow g^*(D_{h(t')})$ est une famille algébrique de diviseurs sur X' paramétrée par T' et $r^*(D)$ est un diviseur de définition pour la famille algébrique $\{g^*(D_{h(t')})\}_{t' \in T'}$.

Soit A l'ensemble des points $t \in T$ tels que $D_t \geqslant 0$. Comme le morphisme h est surjectif, l'image réciproque $h^{-1}(A)$ de A par h est dense dans T'. On a aussi $g^*(D_{h(t')}) \geqslant 0$ pour $t' \in T'$ et comme le théorème est démontré pour le cas où les variétés sont normales, on en déduit $r^*(D) \geqslant 0$. Donc si $D = \text{div } \omega$, $\omega \odot r$ est régulière sur $X' \times T'$. On a supposé aussi $j_t^*(\text{div } \omega) \geqslant 0$ pour $t \in A$ (i.e. $\omega \odot j_t$ régulière sur X). On va montrer que l'espace vectoriel V sur K engendré par les fonctions régulières $\omega \odot j_t$

sur X pour $t \in A$ est de dimension finie. Comme le cohomomorphisme de g (i.e. l'application $u \to u \odot g$, $u \in R(X)$ (corps de fonctions rationnelles sur X)) établit un isomorphisme de $R(X)$ sur $R(X')$, il suffit de montrer que les fonctions régulières $\omega \odot j_t \odot g$ sur X', $t \in A$, engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur K . Si $t' \in T'$ est tel que $h(t') = t$, on a $\omega \odot j_t \odot g = (\omega \odot r) \odot j'_{t'}$ où j'_t est le morphisme $X' \to X' \times T'$ défini par $x' \to (x' , t')$. Donc il suffit de montrer que les fonctions rationnelles $(\omega \odot r) \odot j'_{t'}$ pour $t' \in T'$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur K . Mais comme $\omega \odot r$ est une fonction de définition de $r^*(D)$ qui est positif, $\omega \odot r$ est régulière sur $X' \times T'$ et peut s'exprimer sous la forme $\sum_{i=1}^{h} \theta'_i(t')\, u'_i(x')$, où $\theta'_i(t')$ et $u'_i(x')$ sont des fonctions régulières sur T' et X' respectivement, ce qui montre que l'espace vectoriel engendré par $\omega \odot r \odot j'_{t'}$ est contenu dans l'espace vectoriel de dimension finie engendré par $u'_i(x')$, $i = 1 , \ldots , h$. Soit donc $u_1 , \ldots , u_m$ une base de V ; alors $\omega \odot j_t = \sum_{i=1} \theta_i(t)\, u_i$, $t \in A$, $\theta_i(t) \in K$. On démontre d'abord que les $\theta_i(t)$ peuvent s'étendre à T comme fonctions régulières. Soit t_1 un point de T ; comme $j^*_{t_1}$ (div ω) est défini, l'ensemble X_1 des points $x \in X$ tels que ω soit définie en (x , t_1) est un ouvert non-vide de X . Comme $u_1 , \ldots , u_m$ sont linéairement indépendants il est facile de voir qu'il existe $x_1 , \ldots , x_m$ de X_1 tels que $\det(u_i(x_j)) \neq 0$. Il existe un voisinage ouvert T_1 de t_1 , tel que ω soit définie en chaque point de l'ensemble $\{x_j\} \times T_1$ pour $j = 1 , \ldots , m$. Si $t \in T_1 \cap A$, les $\theta_i(t)$ peuvent s'obtenir par la résolution du système d'équations linéaires $\sum_{=1}^{m} \theta_i(t)\, u_i(x_j) = \omega(t , x_j)$. Comme les applications $t \to \omega(t , x_j)$, $(t \in T , j = 1 , \ldots , m)$ sont des fonctions régulières sur T , on en déduit tout de suite que les restrictions des θ_i à $A \cap T_1$ peuvent se prolonger en des fonctions régulières sur T_1 , et deux tels prolongements sont identiques puisqu'ils coïncident pour une partie dense de T_1 . Comme t_1 est un point arbitraire de T , les $\theta_i(t)$ peuvent se prolonger en des fonctions régulières sur T tout entier, que nous désignons encore par θ_i . Soit ω_0 la fonction régulière $\sum_{i=1}^{m} \theta_i(t)\, u_i(x)$ sur $X \times T$. Si V est l'ensemble de définition de ω, $\omega - \omega_0$ prend la valeur 0 sur l'ensemble $(X \times A) \cap V$ qui est dense dans V ; donc $\omega = \omega_0$. Ceci démontre que ω est régulière sur $X \times T$ et la démonstration du théorème est terminée.

REMARQUE. - On observe que si X est normale, la démonstration du théorème se simplifie notablement.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour une famille algébrique de diviseurs sur une variété</u> X <u>paramétrée par une variété</u> T, <u>il n'y a qu'un seul diviseur de définition sur</u> $X \times T$.

La démonstration est immédiate.

COROLLAIRE 2. (<u>Théorème de continuité pour une famille algébrique de diviseurs</u>). <u>Soit</u> $\{D_t\}_{t \in T}$ <u>une famille algébrique de diviseurs sur une variété</u> X <u>paramétrée par une variété</u> T. <u>Alors l'ensemble des points</u> $t \in T$, <u>où</u> $D_t \geqslant 0$ <u>est fermé, et il en est de même de l'ensemble des points</u> $t \in T$, <u>où</u> $D_t = 0$.

Comme dans la démonstration du théorème 1, il suffit de démontrer que l'ensemble E des points $t \in T$ où $D_t \geqslant 0$ est fermé. Soit $\overline{E}$ l'adhérence de E dans T et E_1 une composante irréductible de $\overline{E}$. Alors $E \cap E_1$ est dense dans E_1 et la restriction de la famille $\{D_t\}_{t \in T}$ à E_1 est une famille algébrique de diviseurs paramétrée par E_1 et pour $t \in E \cap E_1$, $D_t \geqslant 0$. Donc d'après le théorème, $D_t \geqslant 0$ pour $t \in E_1$, ce qui implique $E \supset E_1$. Par conséquent E contient toutes les composantes irréductibles de $\overline{E}$. Donc $E = \overline{E}$ et le corollaire est démontré.

De la même manière, on peut définir les <u>familles algébriques de diviseurs additifs</u> et démontrer des propositions analogues.

Les familles algébriques de diviseurs sont reliées avec les diviseurs définis sur une extension du corps de base K. D'après le théorème 1, le groupe des familles algébriques de diviseurs sur X paramétrées par une variété donnée T s'identifie avec un sous-groupe du groupe des diviseurs sur $X \times T$. Disons que deux diviseurs D_1 et D_2 sur $X \times T$ sont équivalents si $D_1 - D_2$ provient d'un diviseur de T ; alors une classe pour cette relation d'équivalence est un diviseur sur X défini sur le corps $R(T)$ de fonctions rationnelles sur T. Pour ce point de vue, voir (Chap. III, [1]).

3. <u>Diviseurs additifs associés à une famille algébrique de diviseurs</u> (<u>multiplicatifs</u>).

Soit $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs (multiplicatifs) sur une variété X, paramétrée par une variété T et soit D son diviseur de définition sur $X \times T$. Pour chaque vecteur tangent L sur T en un point t_0

de T, on va définir un diviseur additif sur X. Désignons par L_x le vecteur tangent sur $X \times T$ en (x, t_o) qui est l'image de L par la différentielle du morphisme $j_x : T \longrightarrow X \times T$ défini par $t \longrightarrow (x, t)$. Soient u une fonction de définition de D en (x_o, t_o) et U l'ouvert non-vide des points $x \in X$, tels que u soit régulière et inversible en (x, t_o). Considérons l'application $x \rightarrow \frac{L_x(u)}{u(x,t_o)}$ pour $x \in U$. C'est une fonction régulière dans U ; en effet pour démontrer ceci on peut supposer que X et T sont affines et alors, étant donné $y \in U$, u peut se mettre sous la forme $u = \frac{u_1}{u_2}$ où u_1 et u_2 sont des fonctions régulières sur $X \times T$, $u_2(y, t_o) \neq 0$. On a

$$L_x(\frac{u_1}{u_2}) = \frac{L_x(u_1)\, u_2(x,t_o) - u_1(x,t_o)\, L_x(u_2)}{u_2(x,t_o)^2}$$

Donc pour montrer que $\frac{L_x(u)}{u(x,t_o)}$ est régulière dans U, il est suffisant de montrer que $L_x(u)$ est régulière dans X, pour une fonction régulière u sur $X \times T$. Dans ce cas, u s'exprime sous la forme $\sum_{i,j} p_i(x)\, q_j(t)$ où $p_i(x)$ et $q_j(t)$ sont des fonctions régulières sur X et T respectivement. Alors

$$L_x(u) = \sum_{i,j} p_i(x)\, L(q_j(t))$$

où $L(q_j(t))$ sont des constantes et donc $L_x(u)$ est une fonction régulière sur $X \times T$.

Puisque $\frac{L_x(u)}{u(x,t_o)}$ est une fonction régulière dans U, on peut la compléter comme fonction rationnelle sur X, et on la désigne par la même notation. Si v est une autre fonction de définition de D en (x_o, t_o), $\frac{u}{v}$ est régulière et inversible en (x_o, t_o) et d'après ce qui précède,

$$\frac{L_x(u)}{u(x,t_o)} - \frac{L_x(v)}{v(x,t_o)} = \frac{L_x(u/v)}{\frac{u(x,t_o)}{v(x,t_o)}}$$

est régulière en (x_o, t_o).

Donc $\frac{L_x(u)}{u(x,t_o)}$ détermine un élément $\varphi(x_o)$ de R/O_{x_o} et l'application $\varphi : X \longrightarrow R/O$ ainsi obtenue définit une section du faisceau R/O, donc un diviseur additif qui s'écrit sous la forme $\langle \{D_t\}_{t \in T}, L \rangle$.

Supposons de plus T non-singulière. Soit $\hat{T}$ l'espace fibré des vecteurs tangents sur T. Alors on peut démontrer facilement que l'application $L \to A_L$, où $L \in \hat{T}$, et $A_L = \langle \{D_t\}_{t \in T}, L \rangle$ est une famille algébrique de diviseurs additifs sur X paramétrée par $\hat{T}$. Il en résulte que, si δ est une section régulière de $\hat{T}$ (i.e. un champ de vecteurs tangents), on peut associer à δ, une famille algébrique de diviseurs addtifs $\{A_t\}_{t \in T}$ paramétrée par T de la façon suivante ; on pose $A_t = \langle \{D_t\}_{t \in T}, \delta(t) \rangle$. On obtient ainsi pour chaque champ de vecteurs tangents sur T, un homomorphisme du groupe des familles algébriques de diviseurs (multiplicatifs) sur X paramétrées par T dans le groupe des familles algébriques de diviseurs additifs sur X paramétrées par T. Cet homomorphisme est relié avec celui de CARTIER dans sa thèse, où il définit pour chaque dérivation d'un corps k' sur k, un homomorphisme du groupe de diviseurs (multiplicatifs) définis sur k' dans le groupe de diviseurs additifs définis sur k' (Chap. III, [1]).

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> $\{D_t\}_{t \in T}$ <u>une famille algébrique de diviseurs sur une variété</u> X <u>paramétrée par une variété</u> T <u>et</u> $g : T' \to T$ <u>un morphisme de</u> T' <u>dans</u> T. <u>Alors pour la famille algébrique de diviseurs</u> $\{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}$ (cf. prop. 1) <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> T', <u>on a</u>

$$\langle \{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}, L' \rangle = \langle \{D_t\}_{t \in T}, L \rangle$$

<u>où</u> L' <u>est un vecteur tangent à</u> T' <u>en</u> t' <u>et</u> L <u>le vecteur tangent à</u> T <u>en</u> $g(t')$, <u>qui est l'image de</u> L' <u>par la différentielle du morphisme</u> g.

Soit D le diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t \in T}$. Si $h : X \times T' \to X \times T$ est le morphisme défini par $(x, t') \to (x, g(t'))$ d'après la proposition 1, $h^*(D)$ est le diviseur de définition de la famille $\{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}$. Si j_x et j'_x sont les morphismes $j_x : T \to X \times T$ et $j'_x : T' \to X \times T'$ définis respectivement par $t \to (x, t)$ et $t' \to (x, t')$ et si on pose $L_x = dj_x(L)$, $L'_x = dj'_x(L')$, on a $dh(L'_x) = L_x$. Donc si v est une fonction rationnelle sur $X \times T$ qui est régulière en $(x, g(t'))$, on a $L'_x(v \odot h) = L_x(v)$. Soit u une fonction de définition de D en $(x_0, g(t'))$, alors $u \odot h$ est une fonction de définition de D' en (x_0, t'). D'après ce qui précède $L'_x(u \odot h) = L_x(u)$ pour chaque $x \in X$ tel que u soit régulière en $(x, g(t'))$ et l'ensemble de ces points est un ouvert non-vide de X. Donc $L'_x(u \odot h) = L_x(u)$ comme fonctions rationnelles sur X. Ceci entraîne immédiatement

$$< \{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}, L' > = < \{D_t\}_{t \in T}, L > .$$

Une famille algébrique de diviseurs $\{D_t\}_{t \in T}$ sur une variété X paramétrée par une variété T, est dite injective si, pour tous $(t_1, t_2) \in T \times T$, $t_1 \neq t_2$, on a $D_{t_1} \neq D_{t_2}$. La famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est dite infinitésimalement injective en un point $t_o \in T$ si, pour tout vecteur tangent non-nul L à T en t_o, le diviseur additif $<\{D_t\}_{t \in T}, L>$ est non-nul. La famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est dite infinitésimalement injective si elle est infinitésimalement injective en tout point de T. Si T est non-singulière et si la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est infinitésimalement injective en un point $t_o \in T$, on peut démontrer d'après le théorème de continuité pour les diviseurs additifs (l'analogue du corollaire 2, théorème 1 pour diviseurs additifs) que cette famille est aussi infinitésimalement injective en chaque point d'un voisinage de t_o dans T.

PROPOSITION 5. - Soient $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété X paramétrée par une variété T et $g : T' \to T$ un morphisme qui est non-ramifié en un point $t' \in T'$. (Voir chap. VI, [2] pour les morphismes non-ramifiés). Si la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est infinitésimalement injective en $g(t')$, la famille algébrique $\{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}$ est aussi infinitésimalement injective en t'. En particulier si $\{D_t\}_{t \in T}$ est infinitésimalement injective et si (T', g) est un revêtement non-ramifié sur T, la famille algébrique $\{D_{g(t')}\}_{t' \in T'}$ est aussi infinitésimalement injective.

Comme la différentielle dg de g est une application linéaire injective de l'espace tangent à T' en t' dans l'espace tangent à T en $g(t')$, la démonstration est immédiate d'après la proposition 4.

THÉORÈME 2. - Soient $\{D_t\}_{t \in T}$ et $\{E_s\}_{s \in S}$ deux familles algébriques de diviseurs sur une variété X paramétrées par deux variétés T et S respectivement. Supposons que

i. S est complète

ii. la famille algébrique $\{E_s\}_{s \in S}$ est injective et infinitésimalement injective.

iii. <u>pour</u> t <u>appartenant à une partie dense</u> A <u>de</u> T, <u>le diviseur</u> D_t <u>est égal à un</u> E_s. <u>Alors il existe un morphisme</u> $g : T \rightarrow S$ <u>tel que la famille algébrique</u> $\{D_t\}_{t \in T}$ <u>soit égale à la famille</u> $\{E_{g(t)}\}_{t \in T}$, <u>l'image réciproque de</u> $(E_s)_{s \in S}$ <u>par le morphisme</u> g (cf. prop. 1).

L'application $(t, s) \rightarrow D_t - E_s$ est une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par $T \times S$. Donc, d'après le théorème de continuité pour les familles algébriques de diviseurs (Corollaire 2, théorème 1), l'ensemble Γ des points $(t, s) \in T \times S$ tels que $D_t - E_s = 0$ est fermé. Soient p, q les projections de $T \times S$ sur T et S respectivement. D'après l'hypothèse, $p(\Gamma)$ est dense dans T ; par conséquent il existe une composante irréductible Γ_1 de Γ telle que $p(\Gamma_1)$ soit dense dans T. Puisque S est complète, la projection p est une application fermée ; donc $p(\Gamma_1) = T$. Maintenant comme la famille $\{E_s\}_{s \in S}$ est injective, pour chaque $t \in T$ il y a un et un seul $s \in S$ tel que $D_t = E_s$, donc l'application de Γ sur T induite par la projection p est bijective et comme $p(\Gamma_1) = \Gamma$, on a $\Gamma = \Gamma_1$. Soient $p_1 : \Gamma \rightarrow T$ et $q_1 : \Gamma \rightarrow S$ les morphismes induits sur Γ par p et q respectivement. Le morphisme p_1 est propre et bijectif, donc (Γ, p_1) est un revêtement sur T. On va montrer que (Γ, p_1) est un revêtement non-ramifié sur T ; ceci entraînera que p_1 est un isomorphisme (en vertu du paragraphe 1, exposé 1, [4]) et en posant $g = q_1 \circ p_1^{-1}$ on obtient le morphisme $g : T \rightarrow S$ avec la propriété requise (1).

On remarque d'abord que les deux familles algébriques de diviseurs sur X $\{E_{q_1(\theta)}\}_{\theta \in \Gamma}$ et $\{D_{p_1(\theta)}\}_{\theta \in \Gamma}$, les images réciproques par les morphismes p_1 et q_1 respectivement, sont identiques, en effet elles sont identiques pour θ appartenant à une partie dense de Γ (l'image réciproque de A par p_1) et par conséquent elles sont identiques d'après le théorème 1. Soit (t, s) un point de Γ et supposons qu'il existe un vecteur tangent non-nul L en (t, s) tel que $(dp_1)(L) = 0$; grâce à cette condition, L peut s'écrire sous la forme $(dj_t)(L_1) = L$ où L_1 et un vecteur tangent non-nul sur S en s ($j_t : S \rightarrow T \times S$ est le morphisme défini par $s \rightarrow (t ; s)$). Maintenant, en appliquant la proposition 4, on a

$$\langle L, \{E_{q_1(\theta)}\}_{\theta \in \Gamma} \rangle = \langle L_1, \{E_s\}_{s \in S} \rangle$$

(1) Voir l'appendice à la fin de cet exposé.

et

$$< L , \{D_{p_1}(\theta)\}_{\theta \in \Gamma} = < 0 , \{D_t\}_{t \in T} > \quad .$$

Il s'ensuit que $< L_1 \{E_s\}_{s \in S} > = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que la famille $\{E_s\}_{s \in S}$ est infinitésimalement injective. Donc $(dp_1)(L) \neq 0$, et on obtient que le morphisme p_1 est non-ramifié. Comme expliqué plus haut ceci termine la démonstration du théorème.

4. Famille algébrique de diviseurs principaux.

Pour étudier les familles algébriques de diviseurs principaux on a besoin d'étudier les familles algébriques de diviseurs paramétrées par les espaces projectifs.

Soit P^d l'espace projectif de dimension d sur K . On peut représenter chaque point de P^d par un vecteur $(\lambda_0 , \dots , \lambda_d) \in K^{d+1} - (0)$, à une homothétie près. Soient X une variété et $f_0 , \dots , f_d$, $(d + 1)$ fonctions rationnelles sur X , qui sont linéairement indépendantes sur K . Alors l'application $(\lambda_0 , \dots , \lambda_d) \to \operatorname{div} (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_d f_d)$ définit une application de P^d dans le groupe de diviseurs sur X .

PROPOSITION 6. - L'application $(\lambda_0 , \dots , \lambda_d) \to \operatorname{div} (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_d f_d)$ définie ci-dessus, est une famille algébrique de diviseurs principaux sur X paramétrée par P^d .

Soit U_i l'ouvert affine de P^d défini par $\lambda_i \neq 0$. Les U_i , $i = 0 , \dots ,d$ forment un recouvrement canonique de P^d par des ouverts affines. Si F_i désigne la fonction rationnelle

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i} f_0 + \dots + \frac{\lambda_d}{\lambda_i} f_d\right)$$

sur $X \times P^d$, on a $F_i / F_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}$ qui est régulière et inversible dans $X \times (U_i \cap U_j)$. Donc il y a un diviseur D sur $X \times P^d$, pour lequel, la fonction F_i est une fonction de définition dans $X \times U_i$ et la famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par P^d pour laquelle D est le diviseur de définition est exactement la famille définie par l'application

$$(\lambda_0 , \dots , \lambda_d) \longrightarrow \operatorname{div} (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_d f_d) \quad .$$

Si $f_o, \dots, f_d$ sont $(d+1)$ fonctions rationnelles sur une variété X, linéairement indépendantes sur K, la famille algébrique paramétrée par P^d, définie comme ci-dessus, est appelée <u>la famille linéaire définie par</u> $f_o, \dots, f_d$.

PROPOSITION 7. - <u>Si</u> X <u>est une variété complète et si</u> $f_o, \dots, f_d$ <u>sont</u> $(d+1)$ <u>fonctions rationnelles sur</u> X, <u>linéairement indépendantes sur</u> K, <u>la famille linéaire définie par</u> $f_o, \dots, f_d$ <u>est injective et infinitésimalement injective.</u>

Pour une fonction rationnelle non-nulle f sur X, $\operatorname{div} f = 0$ si et seulement si f est régulière et non-nulle sur X. Puisque X est complète, ceci équivaut à dire que f se réduit à une constante non-nulle. Donc

$$\operatorname{div}(\lambda_o f_o + \dots + \lambda_d f_d) = \operatorname{div}(\mu_o f_o + \dots + \mu_d f_d)$$

implique que $(\lambda_o, \dots, \lambda_d)$ et $(\mu_o, \dots, \mu_d)$ diffèrent par une homothétie, ce qui démontre la première assertion.

Soit L un vecteur tangent non-nul à P^d en un point $t_o \in P^d$. On peut choisir les coordonnées de P^d de telle façon que $t_o \in U_o$ et est défini par $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$. Donc les fonctions rationnelles

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_o}, \dots, \frac{\lambda_d}{\lambda_o}$$

sur P^d forment un système de paramètres en t_o. Soient

$$L\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_o}\right) = \alpha_1, \dots, L\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_o}\right) = \alpha_d .$$

Comme pour la famille algébrique en question, $\operatorname{div}\left(f_o + \frac{\lambda_1}{\lambda_o} f_1 + \dots + \frac{\lambda_d}{\lambda_o} f_d\right)$ est le diviseur de définition dans $X \times U_o$, le diviseur additif $\left\langle \{\operatorname{div}(\lambda_o f_o + \dots + \lambda_d f_d)\}_{(\lambda_o, \dots, \lambda_d) \in P^d}, L \right\rangle$ sur X est défini par la fonction $\frac{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_d f_d}{f_o}$. Puisque $f_o, \dots, f_d$ sont linéairement indépendantes, la fonction $\frac{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_d f_d}{f_o}$ n'est pas constante, et comme X est complète, possède au moins une singularité sur X. Donc le diviseur additif sur X défini par $\frac{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_d f_d}{f_o}$ est non-nul, ce qui démontre que la famille algébrique en question est infinitésimalement injective.

COROLLAIRE. - Soient X une variété complète, D un diviseur sur X et $f_o, \dots, f_d$, $(d+1)$ fonctions rationnelles sur X, linéairement indépendantes sur K. Alors l'application

$$(\lambda_o, \dots, \lambda_d) \to D + \operatorname{div}(\lambda_o f_o + \dots + \lambda_d f_d)$$

est infinitésimalement injective.

La démonstration est immédiat d'après la proposition 7.

On va démontrer maintenant que deux diviseurs appartenant à une famille algébrique de diviseurs sur une variété normale paramétrée par la droite affine ou un ouvert de la droite projective sont toujours équivalents. Pour cela, on a besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 8. - Soient X une variété et T une variété normale. Si D est un diviseur sur X, tel que $\operatorname{supp} D \subset X \times S$, où S est une partie fermée $\neq T$ de T, on a $D = p^*(C)$, où C est un diviseur sur T et $p : X \times T \to T$ est la projection de $X \times T$ sur T.

On observe d'abord que D détermine une famille algébrique de diviseurs $\{D_x\}_{x \in X}$ sur T paramétrée par X. Si on désigne par $\mathcal{F}(D)$ le faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires associé à D (voir exposé 4, paragraphe 3), (grâce à prop. 6, paragraphe 1, exposé 4) il existe des entiers positifs k et ℓ, tels que $(I_{X\times S})^k . \mathcal{F}(D) \subset O(X \times T)$ et $(I_{X\times S})^\ell . \mathcal{F}(-D) \subset O(X \times T)$ ($I_{X\times S}$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux de $O(X \times T)$ défini par $X \times S$). Donc pour chaque $x \in X$, on a $I_S^k . \mathcal{F}(D_x) \subset O(X)$ et $I_S^\ell \mathcal{F}(-D_x) \subset O(X)$.

On a aussi $\operatorname{supp} D_x \subset S$ pour chaque $x \in X$ et par conséquent on peut supposer que S est de codimension 1 dans T ; en effet si S est de codimension >1, puisque T est normale, $D_x = 0$ pour chaque $x \in X$, donc d'après le théorème 1, $D = 0$ et il n'y a rien à démontrer dans ce cas. Soient $S_1, \dots, S_r$ les composantes irréductibles de S et $\sum_{i=1}^{r} n_i(x) S_i$ le cycle associé à D_x. D'après la propriété $I_S^k F(D_x) \subset O(X)$ et $I_S^\ell F(-D_x) \subset O(X)$ qu'on vient de démontrer, il n'est pas difficile de démontrer que $|n_i(x)| < a$ où a est un entier positif qui ne dépend pas de x. Ceci implique d'après la proposition 9, paragraphe 3, exposé 4, qu'il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs distincts $D_{x_1}, \dots, D_{x_k}$, $x_i \in X$ parmi la famille $\{D_x\}_{x \in X}$. Soit E_i, l'ensenble des points $x \in X$, tels que $D_x = D_{x_i}$; d'après le corollaire 2, théorème 1, E_i est fermé pour $i = 1, \dots, k$. On a $X = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$; donc $X = E_{j_o}$ pour un j_o parmi $1, \dots, k$; ce qui démontre $D_x = D_{x_{j_o}}$ pour chaque $x \in X$. En posant $D_{x_{j_o}} = C$, on obtient $D = p^*(C)$ et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 9. - Soient X une variété normale et V un ouvert de la droite projective. Si $\{D_t\}_{t \in V}$ est une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par V, on a pour chaque $(t_1, t_2) \in V \times V$, $D_{t_1} \sim D_{t_2}$.

REMARQUE. - La proposition 9 n'est plus vraie si X n'est pas normale, mais on verra (prop. 13) que dans le cas où V est la droite projective toute entière, elle est vraie sans supposer X normale.

Etant donnés deux points de V, il y a un ouvert affine qui les contient ; donc on peut supposer que V est un ouvert de K. Soit D le diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t \in V}$ et $\mathfrak{F}$ un espace fibré vectoriel de rang 1 associé à D (paragraphe 3, exposé 4).

Si on localise par rapport au corps des fonctions rationnelles sur X, on obtient un espace fibré vectoriel $\mathfrak{F}'$ de rang 1 sur V mais défini sur le corps de fonctions rationnelles $R(X)$ de X.

On sait que $\mathfrak{F}'$ est trivial ; ceci veut dire qu'il y a une section rationnelle f de l'espace fibré vectoriel $\mathfrak{F}$ sur $X \times V$, telle que f soit régulière et non-nulle en chaque point en dehors de $Y \times V$ où Y est une partie fermée de X, $Y \neq X$. Soit E le diviseur représenté par la section f (2). On a $E \sim D$ et $\operatorname{supp} E \subset Y \times V$. Donc d'après le proposition 9, $E = q^*(C)$ où C est un diviseur sur X et q est la projection $q : X \times V \to X$. Ceci implique : si $\{E_t\}_{t \in V}$ est la famille algébrique sur X paramétrée par T pour laquelle E est le diviseur de définition, on a $E_t \sim E_s$ pour chaque couple d'éléments $t, s \in V$. On a aussi $E_t \sim D_t$. Donc $D_t \sim D_s$ pour chaque couple d'éléments $t, s \in V$ et la proposition est démontrée.

---

(2) Il est facile de voir qu'un diviseur D représente une section rationnelle non-nulle d'un espace fibré vectoriel associé à D. Réciproquement une section rationnelle non-nulle d'un espace fibré vectoriel $\mathfrak{F}$ de rang 1 représente un diviseur D tels que la classe des espaces fibrés vectoriels équivalents associée à D contienne $\mathfrak{F}$. Deux sections rationnelles non-nulles de $\mathfrak{F}$ définissent les diviseurs qui sont équivalents.

Avant de donner le théorème principal de ce paragraphe, on va démontrer une proposition que peut-être on a utilisé dans des situations bien particulières.

PROPOSITION 10. - Soient Z une variété affine et $\mathcal{V}$ un espace fibré vectoriel de rang 1 sur Z. Alors, étant donné un ensemble fini Y de points $y_1, \dots, y_r$ de Z, il existe une section régulière de $\mathcal{V}$ qui est non-nulle en chaque point de Y.

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ le faisceau des germes de sections régulières de $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{J}_Y$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}(Z)$ défini par Y. On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})/\mathcal{J}_Y . F(\mathcal{V}) \to 0$$

et comme Z est affine on en déduit la suite exacte suivante (exposé 2, ou paragraphe 3, chap. II, [4]).

$$0 \to H^0(Z, \mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V})) \to H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V})) \to H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V})/\mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V})) \to 0$$

Donc chaque élément de $H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V})/\mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V}))$ peut être relevé comme un élément de $H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V}))$. Le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{V})/\mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V})$ peut être identifié avec un faisceau cohérent sur Y et c'est en effet le faisceau des germes des sections régulières de l'espace fibré vectoriel $\mathcal{W}$ induit par $\mathcal{V}$ sur Y. Comme $\mathcal{W}$ s'identifie avec la somme de r-espaces vectoriels (r, le nombre de points de Y), chacun de dimension 1 sur K, on peut trouver un élément θ de $H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V})/\mathcal{J}_Y . \mathcal{F}(\mathcal{V}))$, qui correspond à une section régulière non-nulle de $\mathcal{W}$. Si $\overline{\theta}$ est l'élément de $H^0(Z, \mathcal{F}(\mathcal{V}))$ qui relève θ, la section régulière de $\mathcal{V}$ qui correspond à $\overline{\theta}$, est régulière et non-nulle en chaque point de Y, et la proposition est démontrée.

THÉORÈME 3. - Soient X une variété complète et $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par une variété T, et D le diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t \in T}$. Supposons que $D_t \sim 0$ pour chaque t appartenant à une partie dense A de T ; alors il existe pour chaque t un voisinage ouvert T_0, tel que la restriction de D à $X \times T_0$ soit principale. En particulier, $D_t \sim 0$ pour chaque $t \in T$.

Soient t_0 un point de T, X_1 un ouvert affine de X et T_1 un ouvert affine de T contenant t_0. D'après la proposition 10, $D \sim D_1$, où D_1 induit un diviseur positif sur $X_1 \times T_1$ et supp D_1 ne contient pas un point de la forme (x, t_0), $x \in X$. Donc il existe un voisinage ouvert T_2 de t_0

contenu dans T_1 de telle sorte que D_1 définit une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par T_2 pour lequel D_1 est un diviseur de définition. Donc pour démontrer ce théorème, on peut supposer $D_1 = D$ et $T_2 = T$ (i.e. il existe un ouvert non-vide X_1 de X tel que la restriction de D à $X_1 \times T$ est positive). On suppose dans ce qui suit que D possède cette propriété.

Soient Y le complémentaire de X_1 dans X et $\mathcal{F}(D)$ le faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires associé à D (paragraphe 3, exposé 4). D'après la propriété précédente, $(\mathcal{F}(D))_z$ est un idéal de O_z pour $z \notin Y \times T$. Donc (d'après proposition 6, exposé 4) il existe un entier k, tel que $\mathcal{J}^k_{Y\times T}.(\mathcal{F}(D)) \subset$ $\subset O(X \times T)$. Donc si $\mathcal{F}(D_t)$ est le faisceau d'idéaux fractionnaires associé à D_t, $t \in T$, on a $\mathcal{J}^k_Y . \mathcal{F}(D_t) \subset O(X)$. Par conséquent, $\mathcal{F}(D_t) \subset (0 : \mathcal{J}^k_Y) = \mathcal{G}$ pour chaque $t \in T$, où $(0 : \mathcal{J}^k_Y)$ représente le faisceau d'idéaux fractionnaires défini de la façon suivante : pour $x \in X$, $\theta_x \in \mathcal{G}_x$ équivaut à $\theta_x (\mathcal{J}^k_Y)_x \subset O_x$.

On a supposé que pour $t \in A$, le diviseur D_t est le diviseur d'une fonction qui est donc un élément de $H^o(X , \mathcal{F}(D_t))$. Comme $\mathcal{F}(D_t) \subset \mathcal{G}$ pour tout $t \in T$, chaque D_t, $t \in A$, est le diviseur d'un élément de $H^o(X , \mathcal{G})$. Puisque X est complète, $H^o(X , \mathcal{G})$ est de dimension finie (corollaire au théorème de dévissage, exposé 4). Donc il existe un nombre fini de fonctions rationnelles $f_o , \dots , f_d$ sur X telles que la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est contenue dans la famille linéaire $\{L_s\}_{s \in P^d}$ définie par $f_o , \dots , f_d$ (i.e. pour chaque $t \in T$, il existe un $s \in S$ tel que $D_t = L_s$). D'après la proposition 7, la famille algébrique $\{L_s\}_{s \in P^d}$ est injective et infinitésimalement injective. Donc on peut appliquer le théorème 2 et on trouve, comme P^d est complète, qu'il existe un morphisme $g : T \to P^d$, tel que la famille algébrique $\{L_{g(t)}\}_{t \in T}$ soit identique à la famille $\{D_t\}_{t \in T}$. Le point $g(t_o)$ appartenant à un ouvert canonique U_i de P^d. On sait que pour la famille linéaire $\{L_t\}_{t \in P^d}$, le diviseur de définition est principal dans $X \times U_i$. D'après la proposition 1, pour la famille algébrique $\{L_{g(t)}\}_{t \in T} = \{D_t\}_{t \in T}$ le diviseur de définition est le diviseur D. Donc D est principal dans $X \times T_o$ où $T_o = g^{-1}(U_i)$. Ceci termine la démonstration du théorème.

REMARQUE. - Soient $\{D_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété complète X, paramétrée par une variété T, et D le diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t \in T}$; Soit $g : S \to T$ un morphisme dominant d'une variété S dans T et supposons que pour la famille algébrique $\{D_{g(s)}\}_{s \in S}$ le diviseur de définition est principal. Par conséquent $D_{g(s)}$ est principal pour chaque $s \in S$ et comme g est dominant, D_t est principal pour t appartenant à une partie dense de T. Donc pour la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$, les hypothèses du théorème 3, sont satisfaites et il en résulte qu'il existe un ouvert non-vide T_o de T tel que D est principal sur $X \times T_o$. Dans le langage de la théorie des diviseurs définis sur les corps (voir la fin du paragraphe 2) ce résultat veut dire : si un diviseur D sur une variété complète X, défini sur un corps L devient principal pour une extension L' de L, il est principal pour L lui-même. Ce résultat s'appelle "le dernier théorème des Foundations" (cf. proposition 8, chap. III, [1] ; et [6]). Bien entendu on a supposé ici implicitement que tous les corps qui interviennent contiennent un corps algébriquement clos, mais ce n'est pas nécessaire pour que ce résultat soit valable (cf. loc. cit.).

5. Familles algébriques de classes de diviseurs.

Soient X une variété et $\mathfrak{G}(X)$ le groupe des classes de diviseurs sur X. Une application $t \to F_t$ de T dans $\mathfrak{G}(X)$ est dite algébrique, si pour chaque $t_o \in T$, il existe un voisinage ouvert U, tel qu'on puisse relever cette application comme une famille algébrique de diviseurs sur X paramétrée par U (i.e. s'il existe un diviseur D_U dans $X \times U$ tel que $j_t^*(D_U)$ soit défini pour tout $t \in U$, j_t est le morphisme de X dans $X \times T$ défini par $x \to (x, t)$, et appartient à la classe de diviseurs F_t). Alors la famille $\{F_t\}_{t \in T}$ est dite une famille algébrique de classes de diviseurs sur X paramétrée par T, et le diviseur D_U s'appelle un diviseur de définition de la famille $\{F_t\}_{t \in T}$ dans $X \times U$. (Le diviseur de définition D_U n'est évidemment pas unique).

Soit $f : Y \to X$ un morphisme d'une variété Y dans une variété X. Si $\varphi \in \mathfrak{G}(X)$, on peut toujours prendre un diviseur D dans la classe φ tel que $f^*(D)$ est définie ; en effet si $\mathcal{Y}$ est l'espace fibré vectoriel de rang 1 sur X défini par D à une équivalence près, d'après la proposition 10, on peut prendre une section rationnelle λ de $\mathcal{Y}$ qui est régulière et non-nulle en un point de la forme $f(y)$, $y \in Y$. Donc si on prend le diviseur D_1 représenté par la section λ, $D_1 \sim D$ et $f(Y) \not\subset D_1$. Donc $f^*(D)$ est définie. La classe de diviseurs sur Y, qui contient $f^*(D)$, s'appelle l'image réciproque de φ par f et s'écrit $f^*(\varphi)$. Si $f^*(\mathcal{Y})$ est l'image réciproque de l'espace fibré vectoriel $\mathcal{V}$ par f , $f^*(\mathcal{V})$ est un espace fibré vectoriel associé à la classe de diviseurs $f^*(\varphi)$.

Soit Θ un élément de $\mathfrak{G}(X \times T)$; Θ définit une famille algébrique de classes de diviseurs $\{\Theta_t\}_{t \in T}$ sur X paramétrée par T : on prend pour Θ_t l'image réciproque $j_t^*(\Theta)$; d'après ce qui précède étant donné $t_0 \in T$, on peut prendre un diviseur D dans la classe Θ tel que $j_{t_0}^*(D)$ soit définie. Donc $j_t^*(D)$ est définie pour t appartenant à un voisinage U de t_0 et évidemment pour t dans U , $j_t^*(D)$ appartient à la classe Θ_t . Ceci démontre que $\{\Theta_t\}_{t \in T}$ est une famille algébrique de classes de diviseurs, et on appelle cette famille : <u>famille algébrique de classes de diviseurs</u> (paramétrée par T) <u>définie par</u> $\Theta \in \mathfrak{G}(X \times T)$.

La définition d'une famille algébrique de classes de diviseurs est locale (i.e. si une application $T \to \mathfrak{G}(X)$ est algébrique pour un voisinage ouvert de chaque $t \in T$, alors cette application est algébrique). En plus une famille $\{F_t\}_{t \in T}$ de classes de diviseurs sur X est algébrique si et seulement si pour chaque $t \in T$, il existe un voisinage ouvert U tel que, $\{F_t\}_{t \in U}$ est défini par un élément de $\mathfrak{G}(X \times U)$. Ceci est évident d'après la remarque précédente et le fait qu'une famille algébrique de classes de diviseurs est définie dans un voisinage ouvert U de chaque point $t \in T$ par une famille algébrique de diviseurs donc a fortiori par un élément de $\mathfrak{G}(X \times U)$. On verra (théorème 5) que si X est complète, une famille algébrique de classes de diviseurs sur X paramétrée par T est toujours définie par un élément de $\mathfrak{G}(X \times T)$.

PROPOSITION 11. - <u>Soient</u> $g_1 : X' \to X$, $h_1 : T' \to T$ <u>des morphismes de variétés et</u> $\{F_t\}_{t \in T}$ <u>une famille algébrique de classes de diviseurs sur</u> X <u>paramétrée par</u> T . <u>Alors la famille</u> $\{g_1^*(F_{h_1(t')})\}_{t' \in T'}$ <u>est une famille algébrique de classes de diviseurs sur</u> X' <u>paramétrée par</u> T' .

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3 et en fait plus simple car l'image réciproque d'une classe de diviseurs est toujours définie.

REMARQUE. - On utilise la terminologie : <u>l'image réciproque d'une famille algébrique des classes de diviseurs</u> $\{F_t\}_{t \in T}$ sur X , paramétrée par T , par un morphisme $g : T' \to T$ d'une variété T' dans T pour désigner la famille algébrique des classes de diviseurs $\{F_{g(t')}\}_{t' \in T'}$ sur X paramétrée par T' (voir la remarque à la fin de la proposition 3).

THÉORÈME 4. - Soient X une variété complète et $\{F_t\}$ une famille algébrique de classes de diviseurs paramétrée par une variété T. Supposons $F_t = 0$ pour t appartenant à une partie dense de T, alors $F_t = 0$ pour tout $t \in T$.

Pour démontrer ce théorème on peut supposer qu'on peut relever $\{F_t\}_{t \in T}$ comme une famille algébrique de diviseurs $\{D_t\}_{t \in T}$, puisqu'on sait qu'on peut relever $\{F_t\}_{t \in T}$ comme une famille algébrique de diviseurs pour un voisinage ouvert U de chaque $t \in T$. D'après l'hypothèse faite sur $\{F_t\}_{t \in T}$, $D_t \sim 0$ pour t appartenant à une partie dense de T. Donc d'après le théorème 3, $D_t \sim 0$ pour chaque $t \in T$, ce qui implique $F_t = 0$ pour chaque $t \in T$ et le théorème est démontré.

COROLLAIRE (Théorème de continuité pour une famille algébrique de classes de diviseurs). - Soient X une variété complète et $\{F_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de classes de diviseurs sur X paramétrée par T. Alors l'ensemble des points $t \in T$, tels que $F_t = 0$ est fermé.

La démonstration est le même que dans le corollaire au théorème 1.

PROPOSITION 12. - Soient X une variété complète, T une variété et $\{\Theta_t\}_{t \in T}$ une famille algébrique de classes de diviseurs définie par un élément $\Theta \in \mathfrak{G}(X \times T)$. Alors pour que $\Theta_t = 0$ pour chaque $t \in T$ (ou, à cause du théorème, pour t appartenant à une partie dense de T), il faut et il suffit que $\Theta = p^*(\lambda)$ où $\lambda \in \mathfrak{G}(T)$ et $p : X \times T \to T$ est la projection de $X \times T$ sur T.

Supposons $\Theta = p^*(\lambda)$ où $\lambda \in \mathfrak{G}(T)$. Alors on peut construire un espace fibré vectoriel $\mathcal{V}$ associé à Θ à l'aide de la donnée suivante : Un recouvrement de $X \times T$ de la forme $\{X \times U_i\}$ où $\{U_i\}$ est un recouvrement de T par des ouverts et des fonctions régulières inversibles g_{ij} dans $X \times (U_i \cap U_j)$ telles que $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$ dans $X \times (U_i \cap U_j \cap U_k)$, avec $g_{ij} = f_{ij} \circ p$, f_{ij} étant une fonction régulière inversible dans $U_i \cap U_j$. Si $t \in U_i \cap U_j$ (où U_i et U_j sont non-vides), il est bien évident que l'image réciproque $j_t^*(\mathcal{V})$ est triviale. Donc pour t appartenant à un ouvert non-vide, $\Theta_t = 0$ et d'après le théorème 4, $\Theta_t = 0$ pour tout t.

Réciproquement supposons $\Theta_t = 0$, pour chaque $t \in T$. Il existe un recouvrement $\{T_i\}$ de T par des ouverts tels qu'on puisse relever $\{\Theta_t\}_{t \in T}$ dans chaque T_i comme une famille algébrique de diviseurs $\{D_t\}_{t \in T_i}$. D'après l'hypothèse, on a $D_t \sim 0$ pour chaque $t \in T_i$. En vertu du théorème 3, on peut trouver un recouvrement plus fin $\{S_j\}_{j \in J}$ de T par des ouverts tels que la restriction de Θ à $X \times S_j$ est nulle. Ceci implique qu'on peut définir un espace fibré vectoriel associé à Θ par des fonctions g_{ij} régulière et inversible dans $X \times (S_i \cap S_j)$, telles que $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$ dans $X \times (S_i \cap S_j \cap S_k)$ Comme X est complète, la fonction régulière g_{ij} dans $X \times (S_i \cap S_j)$ est constante sur $X \times t$ pour chaque $t \in S_i \cap S_j$ et donc $g_{ij} = f_{ij} \circ p$ où f_{ij} est une fonction régulière et inversible dans $S_i \cap S_j$. On a aussi $f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} = 1$ dans $S_i \cap S_j \cap S_k$. Donc les $\{f_{ij}\}$ définissent un espace fibré vectoriel sur T qui détermine un élément $\lambda \in \mathfrak{G}(T)$ et on a $p^*(\lambda) = \Theta$.

REMARQUE. - Si la variété T est normale, on pourrait donner une démonstration différente de la dernière partie de la proposition 12, en utilisant la proposition 8 : soit D un diviseur appartenant à la classe représentée par $\Theta \in \mathfrak{G}(X \times T)$. Alors il existe un ouvert non-vide T_o de T tel que pour $t \in T_o$, $j_t^*(D)$ est définie. Maintenant si on applique le théorème, on obtient qu'il existe un ouvert non-vide T_1 de T_o (donc de T) tel que la restriction de D à $X \times T_1$ est principale. Donc le diviseur D est équivalent sur $X \times T$ à un diviseur E tel que $\operatorname{supp} D \subset X \times S$, où S est le complémentaire de T_1 dans T. D'après la proposition 8, il existe un diviseur C sur T, tel que $p^*(C) = E$ et par conséquent si λ est la classe qui contient C, on a $p^*(\lambda) = \Theta$.

PROPOSITION 13. - <u>Soient</u> X <u>une variété et</u> Θ <u>un élément de</u> $\mathfrak{G}(X \times P^1)$ <u>où</u> P^1 <u>est la droite projective. Alors on a</u> $\Theta = p^*(\lambda) + q^*(\mu)$ <u>où</u> $\lambda \in \mathfrak{G}(X)$, $\mu \in \mathfrak{G}(P^1)$ <u>et</u> p, q <u>sont les projections de</u> $X \times P^1$ <u>sur</u> X <u>et</u> P^1 <u>respectivement. En particulier si</u> $\{D_t\}_{t \in P^1}$ <u>est une famille algébrique de diviseurs sur</u> X <u>paramétrée par</u> P^1 <u>on a</u> $D_{t_1} \sim D_{t_2}$ <u>pour chaque couple</u> (t_1, t_2) <u>de points de</u> P^1.

Soit $\mathcal{V}$ un espace fibré vectoriel de rang 1 associé à Θ. En localisant au corps de fonctions rationnelles sur X, on démontre qu'il existe un ouvert affine X_1 de X tel que la restriction de $\mathcal{V}$ à $X_1 \times K$ (on identifie $P^1 - \infty$ avec le corps de base K) est triviale (i.e. il existe une section rationnelle u de $\mathcal{V}$ qui est régulière et non-nulle en chaque point de $X_1 \times K$).

Soient D le diviseur représenté par la section u et D_1 la restriction de D à $X_1 \times P^1$. On a $\operatorname{supp} D_1 \subset X_1 \times \{\infty\}$ et comme P_1 est normale, d'après la proposition 8, D_1 est la restriction à $X_1 \times P^1$ de $q^*(n_\infty)$ où n_∞ est un diviseur sur P^1 avec $\operatorname{supp} n_\infty = \infty$. Donc si $\mu \in \mathcal{C}(P_1)$ est la classe qui contient n_∞, pour la famille algébrique $\{F_x\}_{x \in X}$ de classes de diviseurs paramétrée par X et définie par $\theta - q^*(\mu) \in \mathcal{C}(X \times P^1)$, on a $F_x = 0$ pour $x \in X_1$. Donc, d'après la proposition 12 il existe un élément $\lambda \in \mathcal{C}(X)$ tel que $\theta - q^*(\mu) = p^*(\lambda)$ et la proposition est démontrée.

THÉORÈME 5. - <u>Soient</u> X <u>une variété complète et</u> T <u>une variété. Alors chaque famille algébrique de classes de diviseurs</u> $\{F_t\}_{t \in T}$ <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> T <u>est définie par un élément</u> $\theta \in \mathcal{C}(X \times T)$.

Il existe un recouvrement $\{T_i\}_{i \in I}$ de T par des ouverts tels que dans chaque $X \times T_i$, la famille algébrique de classes de diviseurs $\{F_t\}_{t \in T_i}$ soit définie par un élément $\theta_i \in \mathcal{C}(X \times T_i)$. Soient x_0 un point fixé de X, et j_{x_0} le morphisme $T_i \to X \times T_i$ défini par $t \to (x_0, t)$ (pour chaque $i \in I$). On peut choisir θ_i de telle sorte qu'il existe un diviseur D_i dans sa classe tel que $j_{x_0}^*(D_i)$ soit défini et nul. En effet, comme on a fait souvent, on peut choisir D_i dans la classe θ_i tel que $j_{x_0}^*(D_i)$ soit défini. Soit $C_i = j_{x_0}^*(D_i)$, $i \in I$ et $\lambda_i \in \mathcal{C}(T_i)$, la classe de diviseurs qui contient C_i. Maintenant d'après la proposition 12, l'élément $\theta_i - p^*(\lambda_i)$ (p est la projection $X \times T \to T$) définit la même famille de classes de diviseurs que θ_i et pour le diviseur $D_i - p^*(C_i)$ dans la classe $\theta_i - p^*(\lambda_i)$, $j_{x_0}^*(D_i - p^*(C_i))$ est défini et nul. Donc l'assertion est démontrée et nous supposons qu'un tel choix de θ_i, $i \in I$, est fait. Maintenant les restrictions de θ_i et θ_j à $X \times (T_i \cap T_j)$ définissent les mêmes familles algébriques de classes de diviseurs et donc d'après la proposition 12, $\theta_i - \theta_j = p^*(\lambda_{ij})$ dans $X \times (T_i \cap T_j)$ où λ_{ij} est un élément de $\mathcal{C}(X \times (T_i \cap T_j))$. Par conséquent on a $j_{x_0}^*(\theta_i - \theta_j) = j_{x_0}^*(p^*(\lambda_{ij})) = \lambda_{ij}$ dans $(T_i \cap T_j)$. Mais on a aussi, d'après le choix de $\{\theta_i\}_{i \in I}$, $j_{x_0}^*(D_i - D_j) = 0$ dans $T_i \cap T_j$. Comme $j_{x_0}^*(D_i - D_j) \sim j_{x_0}^*(\theta_i - \theta_j)$ dans $T_i \cap T_j$, il s'ensuit $\lambda_{ij} = 0$; donc dans l'intersection $X \times (T_i \cap T_j)$ les restrictions de θ_i et θ_j sont égales (i.e. les restrictions de D_i et D_j à $X \times (T_i \cap T_j)$ sont équivalentes).

Soit f_{ij} une fonction rationnelle dans $X \times (T_i \cap T_j)$ telle que $D_i - D_j = \mathrm{div}\, f_{ij}$ dans $X \times (T_i \cap T_j)$. Comme $j^*_{x_0}(D_i)$ et $j^*_{x_0}(D_j)$ sont nuls dans $X \times T_i$ et $X \times T_j$ respectivement, $f_{ij} \odot j_{x_0}$ est régulière et inversible dans $T_i \cap T_j$. On peut choisir f_{ij} de telle sorte que $f_{ij} \odot j_{x_0}$ soit la constante 1, sinon on prend au lieu de f_{ij}, $f_{ij}/(f_{ij} \odot j_{x_0}) \circ p$. Avec ce choix de f_{ij} pour chaque $(i, j) \in I \times I$, on a dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$, $(D_i - D_j) + (D_j - D_k) + (D_k - D_i) = 0$, donc $g_{ijk} = f_{ij} . f_{jk} . f_{ki}$ est une fonction régulière et inversible dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$ avec la propriété, $g_{ijk} \odot j_{x_0} = 1$ Mais comme X est complète, g_{ijk} est constant sur chaque $X \times t$, $t \in T_i \cap T_j \cap T_k$. Par conséquent $g_{ijk} = h_{ijk} \circ p$ où h_{ijk} est une fonction régulière dans $T_i \cap T_j \cap T_k$. On a $(g_{ijk} \odot j_{x_0}) \circ p = g_{ijk} = 1$; donc $f_{ij}\, f_{jk}\, f_{ki} = 1$ dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$ pour chaque $(i, j, k) \in I \times I \times I$. Maintenant il est facile de trouver des fonctions rationnelles $\{f_i\}_{i \in I}$ sur $X \times T$ telles que $f_{ij} = f_i/f_j$ dans $X \times (T_i \cap T_j)$. Si on pose $D'_i = D_i - \mathrm{div}\, f_i$ dans $X \times T_i$, D'_i est un diviseur dans la classe θ_i et les diviseurs D'_i se recollent en un diviseur sur $X \times T$ tout entier et donc déterminent $\theta \in \mathcal{C}(X \times T)$ qui définit la famille algébrique de classes de diviseurs $\{F_t\}_{t \in T}$. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE. - Si X et T sont non-singulières, le théorème est bien évident, puisqu'on peut prolonger le diviseur D_i dans $X \times T_i$ en un diviseur D sur $X \times T$ tout entier (c'est une conséquence facile de la proposition 10, exposé 4). Si θ est la classe qui contient D, d'après le théorème de continuité (corollaire, théorème 4), la famille algébrique de classes de diviseurs définie par θ coïncide avec la famille $\{F_t\}_{t \in T}$.

6. Un théorème de descente.

Soit $\{D_{t'}\}_{t' \in T'}$ (resp. $\{F_{t'}\}_{t' \in T'}$) une famille algébrique de diviseurs (resp. famille algébrique de classes de diviseurs) sur une variété X paramétrée par une variété T'. Soit $g : T' \to T$ un morphisme de T' dans une variété T. Les théorèmes qui donnent les conditions sur la famille $\{D_{t'}\}_{t' \in T'}$ (resp. $\{F_{t'}\}_{t' \in T'}$) pour que ce soit l'image réciproque par g d'une famille algébrique de diviseurs paramétrée par T (resp. une famille algébrique de classes de diviseurs) s'appellement les "théorèmes de descente". Dans le langage de diviseurs définis sur les corps, ces théorèmes sont reliés avec les théorèmes qui donnent les "Crtères de rationnalités" (Chap. III, [1]). Ici on va donner un théorème de descente pour les cas où T' est un revêtement séparable sur T.

THÉORÈME 6. - Soient $\{D_t\}_{t\in T}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété X paramtrée par une variété T et (T, g) un revêtement non-ramifié (3) sur une variété normale S. Supposons $D_{t_1} = D_{t_2}$ si $g(t_1) = g(t_2)$; alors il existe une famille algébrique de diviseurs $\{E_s\}_{s\in S}$ sur X paramétrée par S telle que, la famille $\{D_t\}_{t\in T}$ soit l'image réciproque de la famille $\{E_s\}_{s\in S}$ par le morphisme g.

On peut se ramener au cas où (T, g) est un revêtement non-ramifié galoisien sur S. En effet soit (T', h) le revêtement galoisien non-ramifié associé à (T, g) (cf. paragraphe 1, exposé 1, [4]) ; alors on peut mettre h sous la forme $h = g \circ p$, où (T', p) est un revêtement non-ramifié sur T (cf. loc. cit.). Si $\{D_{p(t')}\}_{t'\in T'}$ est l'image réciproque de la famille $\{D_t\}_{t\in T}$ par le morphisme p, on a $D_{p(t'_1)} = D_{p(t'_2)}$ si $h(t'_1) = h(t'_2)$.

Donc la famille $\{D_{p(t')}\}_{t'\in T'}$ satisfait aux hypothèses du théorème et si cette famille est l'image réciproque par h d'une famille algébrique $\{E_s\}_{s\in S}$ paramétrée par S on voit que la famille $\{D_t\}_{t\in T}$ est l'image réciproque de la famille $\{E_s\}_{s\in S}$ par le morphisme g. Donc on suppose que (T, g) est un revêtement non-ramifié galoisien sur S.

Soit G le groupe de galois du revêtement (T, g). Si $g_1 : X \times T \to X \times S$ est le morphisme défini par $(x, t) \to (x, g(t))$, $(X \times T, g_1)$ est aussi un revêtement non-ramifié galoisien et on peut identifier G avec son groupe de Galois. Donc G opère sur $X \times T$ sans point fixe et la variété quotient est $X \times S$; en particulier si une fonction rationnelle sur $X \times T$ est invariante par G, elle vient d'une fonction rationnelle sur $X \times S$ (paragraphe 1, exposé 1, [4]). Le groupe G opère aussi sur les diviseurs sur $X \times T$. Soit D le diviseur de définition de la famille $\{D_t\}_{t\in T}$. Pour chaque $\sigma \in G$, $\sigma(D)$ définit aussi une famille algébrique de diviseurs $\{(\sigma(D))_t\}_{t\in T}$ paramétrée par T et d'après l'hypothèse, $\sigma(D)_t = D_t$ pour chaque $t \in T$. Donc d'après le théorème 1, $\sigma(D) = D$ pour chaque $\sigma \in G$.

---

(3) Voir l'appendice à la fin de cet exposé.

Soient (x_o, s) un point de $X \times S$ et $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$ les points de $X \times T$ qui sont au-dessus de (x_o, s). Pour chaque (x_o, t_i) il y a un $\sigma_i \in G$ tel que $\sigma_i(x_o, t_1) = (x_o, t_i)$. L'image réciproque d'un ouvert affine par g est affine (paragraphe 1, exposé 1, [4]) et par conséquent tous les points $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$ appartiennent à un ouvert affine. Donc d'après la proposition 10, il existe une fonction rationnelle U sur $X \times T$, telle que u soit une fonction de définition de D, en chaque point $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$. Comme $\sigma(D) = D$, $\sigma(u)/u$ est régulière et inversible dans un voisinage de l'ensemble fini $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$. On va trouver une fonction rationnelle v sur $X \times T$ telle que $\sigma(v) = v$ et v est une fonction de définition de D en chaque $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$. On cherche v sous la forme $v = \mathrm{Trace}(u \circ z)$, où z est une fonction rationnelle sur $X \times T$. D'après la proposition 10, on peut trouver une fonction rationnelle z telle que z soit régulière dans un voisinage affine contenant $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$ et prenne la valeur 1 en (x_o, t_1) et 0 en $(x_o, t_2), \ldots, (x_o, t_n)$. Maintenant

$$\frac{\mathrm{Tr}(uz)}{u} = \sum \frac{\sigma(u)}{u} \cdot \sigma(z) = z + \sum_{\sigma \neq \text{identité}} \left(\frac{\sigma(u)}{u} \cdot \sigma(z)\right)$$

On a $z(x_o, t_1) = 1$ et $\sigma(z)\ (x_o, t_1) = 0$ pour $\sigma \neq$ identité d'après le choix de z. De plus $\frac{\sigma(u)}{u}$ est régulière en chaque $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$. Donc $\frac{\mathrm{Tr}(uz)}{u}$ est régulière et inversible en (x_o, t_1) ; de même façon elle est régulière et inversible en $(x_o, t_2), \ldots, (x_o, t_n)$. Donc si on pose $v = \mathrm{Tr}(uz)$, $\sigma(v) = v$ pour tout $\sigma \in G$ et v est une fonction de définition de D en chaque $(x_o, t_1), \ldots, (x_o, t_n)$. Comme la variété $X \times S$ est la variété quotient de $X \times T$ par G, v s'identifie avec une fonction rationnelle sur $X \times S$. Donc on peut trouver pour chaque point $(x, s) \in X \times S$ une fonction rationnelle v sur $X \times S$ telle que $v \odot g_1$ est une fonction de définition de D en tous les points de $X \times T$ qui sont au-dessus de (x, s) ; et il est évident qu'il existe un diviseur E sur $X \times S$ pour lequel en chaque point $(x, s) \in X \times S$ la fonction v est une fonction de définition. On a $g_1^*(E) = D$ et si $\{E_s\}_{s \in S}$ est la famille algébrique définie par E, la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T}$ est l'image réciproque de la famille $\{E_s\}_{s \in S}$ par le morphisme $g : T \longrightarrow S$.

REMARQUE. - Soient (Z', g) un revêtement non-ramifié galoisien sur une variété normale Z et D un diviseur sur Z' invariant par le groupe de Galois de (Z', g). Dans la démonstration du théorème, on a prouvé en fait que D provient d'un diviseur de Z.

COROLLAIRE. - Soient $\{D_t\}$ une famille algébrique de diviseurs sur une variété X paramétrée par une variété T et (T, g) un revêtement séparable sur une variété S. Supposons que $D_{t_1} = D_{t_2}$ si $g(t_1) = g(t_2)$. Alors il existe un ouvert non-vide S_0 de S et une famille algébrique de diviseurs $\{E_s\}_{s \in S_0}$ sur X paramétrée par S_0 tels que la famille algébrique $\{D_t\}_{t \in T_0}$ (T_0 l'image de S_0 par g) soit l'image réciproque de $\{E_s\}_{s \in S_0}$ par le morphisme $g' : T_0 \to S_0$, g' étant la restriction de g à T_0.

Si (T, g) est un revêtement séparable de S, on voit qu'il existe un ouvert normal non-vide S_0 de S tel que la "restriction" de (T, g) à S_0 soit non-ramifiée (cf. II, Chap. VI, [2]). Donc, d'après le théorème 6, le corollaire s'ensuit immédiatement.

THÉORÈME 7. - Soient X une variété complète, $\{F_t\}$ une famille algébrique de classes de diviseurs sur X paramétrée par une variété T et (T, g) un revêtement non-ramifié sur une variété normale S. Supposons que $F_{t_1} = F_{t_2}$ si $g(t_1) = g(t_2)$; alors il existe une famille algébrique de classes de diviseurs $\{G_s\}_{s \in S}$ sur X paramétrée par S, telle que la famille algébrique $\{F_t\}_{t \in T}$ soit l'image réciproque de la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ par le morphisme g.

On a une famille $\{G_s\}_{s \in S}$ des classes de diviseurs sur X paramétrée par S telle que $F_t = G_{g(t)}$. Il s'agit de montrer que la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ est algébrique. Comme dans le théorème précédent on peut supposer que (T, g) est galoisien sur S ; soit G le groupe de Galois de (T, g). Si $g_1 : X \times T \to X \times S$ désigne le morphisme défini par $g_1(x, t) = (x, g(t))$, $(X \times T, g_1)$ est un revêtement non-ramifié galoisien sur $X \times S$ et son groupe de Galois peut être identifié avec G. Soit s_0 un point de S et t_0 un point de T au-dessus de s_0. Alors on peut trouver un voisinage ouvert T_0 de t_0 avec la propriété suivante : si Θ est un élément de $\mathfrak{S}(X \times T_0)$ qui définit la famille algébrique $f(t)$, $t \in T_0$, il existe un diviseur D

dans la classe θ telle que $\operatorname{supp} \sigma(D) \cap (x_0 \times T_0) = \emptyset$ pour chaque $\sigma \in G$ et un $x_0 \in X$. D'ailleurs en utilisant le théorème 3, on peut supposer que T_0 est choisi de telle sorte que $\sigma(D) - D$ est principal dans $X \times T_0$ pour chaque $\sigma \in G$. On pose $\sigma(D) - D = \operatorname{div}(u_\sigma)$, $\sigma \in G$.

Vu la propriété $\operatorname{supp} \sigma(D) \cap (x_0 \times T_0) = \emptyset$, $\sigma \in G$, u_σ est régulière et non nulle en chaque point de $x_0 \times T_0$ et on normalise u_σ de tel façon qu'elle prenne la valeur 1 sur $x_0 \times T_0$. Comme X est complète, cette normalisation est unique. On vérifie que $u_{\sigma\tau} = \sigma(u_\tau).u_\sigma$ à cause de la propriété

$$(\sigma\tau(D) - \sigma(D)) + (\sigma(D) - D) = \sigma(u_\tau).u_\sigma \quad .$$

Donc, en vertu du théorème 90 de Hilbert, il existe une fonction rationnelle v sur $X \times T_0$ telle que $\dfrac{\sigma(v)}{v} = u$ et si on prend $D' = D - \operatorname{div} v$, on a $\sigma(D') = D$ pour chaque $\sigma \in G$. Maintenant (T_0, g_0) (g_0 restriction de g à T_0) est un revêtement non-ramifié galoisien sur $g(T_0)$ qui est un voisinage ouvert de s_0. Donc d'après le théorème précédent, D' est l'image réciproque d'un diviseur E sur $X \times S_0$. La famille algébrique de classes de diviseurs définie par l'élément de $\mathfrak{G}(X \times S_0)$ qui contient E coïncide avec $\{G_s\}_{s \in S_0}$. Donc la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ est algébrique dans S_0 et de même façon pour un voisinage ouvert de chaque $s \in S$. Par conséquent la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ est algébrique et le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> X <u>une variété complète,</u> F_t <u>une famille algébbique de classes de diviseurs sur</u> X <u>paramétrée par une variété</u> T <u>et</u> (T, g) <u>un revêtement séparable sur une variété</u> S. <u>Supposons</u> $F_{t_1} = F_{t_2}$ <u>si</u> $g(t_1) = g(t_2)$; <u>alors il existe un ouvert non-vide</u> S_0 <u>de</u> S <u>et une famille algébrique</u> $\{G_s\}_{s \in S_0}$ <u>de classes de classes de diviseurs sur</u> X <u>paramétrée par</u> S_0 <u>telle que la famille algébrique</u> $\{F_t\}_{t \in T_0}$ <u>soit l'image réciproque de</u> $\{G_s\}_{s \in S_0}$ <u>par</u> g_0 (T_0 <u>est l'image réciproque de</u> S_0 <u>par</u> g <u>et</u> g_0 <u>est la restriction de</u> g <u>à</u> T_0 .

Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème comme il existe un ouvert non-vide S_0 de S tel que la restriction de (T, g) à S_0 soit un revêtement non-ramifié.

COROLLAIRE 2. – *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans le corollaire 1, supposons en plus que X et S sont non-singulières. Alors on peut prendre* $S_0 = S$.

Comme on peut prolonger un diviseur dans un ouvert de $X \times S$ à un diviseur sur $X \times S$ tout entier, on en déduit immédiatement que la famille algébrique $\{G_s\}_{s \in S_0}$ peut être prolongée comme une famille algébrique des classes de diviseurs $\{G_s\}_{s \in S}$ sur $X \times S$ tout entier. En appliquant le théorème 4, on obtient que la famille $\{F_t\}_{t \in T}$ est l'image réciproque de la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ par la morphisme g .

APPENDICE

La définition des morphismes non ramifiés donnée dans [5] n'est pas équivalente à celle de [2] : un morphisme qui est non ramifié au sens de [5] l'est aussi au sens de [2] , comme on le voit immédiatement, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Dans la démonstration du théorème 2 du présent exposé, on établit que p_1 est non ramifié au sens de [2] ; sachant que p_1 est un *revêtement* bijectif, il en résulte encore que p_1 en un isomorphisme au moyen du résultat suivant :

Soient X une variété, (Y , f) un revêtement de X et y un point de Y tel que f soit non ramifié (au sens de [2]) en y ; soit $X = f(y)$. Si $f^{-1}(x) = \{y\}$, il y a un voisinage ouvert V de y dans Y tel que f induise un isomorphisme de V sur un voisinage ouvert de x .

Le cohomomorphisme φ de f induit un isomorphisme de l'anneau local $\mathcal{O}(x)$ sur un sous-anneau $\mathcal{O}'(x)$ de l'anneau local $\mathcal{O}(y)$ de y ; il suffit de montrer que $\mathcal{O}'(x) = \mathcal{O}(y)$. Comme y est isolé dans $f^{-1}(x)$, on sait, par le théorème principal de Zariski, que $\mathcal{O}(y)$ est l'anneau local d'un idéal premier maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau $\mathfrak{r}$ qui contient $\mathcal{O}'(x)$ et qui est entier sur $\mathcal{O}'(x)$. Or $\mathfrak{m}$ est le seul idéal premier maximal de $\mathfrak{r}$. En effet, si $\mathfrak{m}'$ est un idéal premier maximal de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{m}'$ contient l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}'(x)$ de $\mathcal{O}'(x)$. On a $\mathfrak{r}/\mathfrak{m}' = K$, et il y a une assignation ζ du corps des fonctions sur Y qui prolonge immédiatement l'application $\mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{m}'$. Comme f est propre, il y a au moins un $y' \in Y$ tel que ζ soit compatible avec l'assignation associée à y' ([2] , théorème 5, chap. IV, paragraphe III). Comme le noyau de ζ contient $\mathfrak{p}'(x)$, on a $f(y') = x$, d'où $y' = y$. Comme $\mathcal{O}(y)$ est l'anneau local de $\mathfrak{m}$ et comme ζ prolonge l'application $\mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{m}'$, il en résulte que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. Il résulte de là que $\mathfrak{r}$ est déjà un anneau local, donc que $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}(y)$. Comme f est non-ramifié, $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\mathfrak{r}$ engendré par $\mathfrak{p}'(x)$; comme $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}'(x) + \mathfrak{m}\,\mathfrak{o}'(x)$, il résulte du lemme de Nakayama que $\mathfrak{o}(y) = \mathfrak{o}'(x)$.

Si (T , f) est un revêtement non ramifié d'une variété normale S, il y a un revêtement (T' , g) de T tel que $(T' , f \circ g)$ soit un revêtement galoisien non ramifié de S. Pour le voir, on applique la construction de Serre donnée dans [5] : n étant le degré de f, on considère l'application

$$F : (t_1 , \ldots , t_n) \longrightarrow (f(t_1) , \ldots , f(t_n))$$

de T^n dans S^n ; c'est un revêtement non ramifié. Soient D la diagonale de S^n et E une composante irréductible de $\overset{-1}{F}(D)$ qui contient au moins un point $(t_1 , \ldots , t_n)$ à coordonnées toutes distinctes. Utilisant [2], chapitre VI, par. II, proposition 5, on voit que E est aussi une composante connexe de $\overset{-1}{F}(D)$; si H est la restriction de F à E, (E , H) est un revêtement galoisien non ramifié de D (on le voit comme dans [5]), d'où le résultat annoncé découle immédiatement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (Pierre). - Diviseurs et dérivations en géométrie algébrique (Thèse Sc. math. Paris. 1958) ; Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958 (à paraître).

[2] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958, multigraphié (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1957/58).

[3] GODEMENT (Roger). - Topologie et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications, exposé n° 1.

[6] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).