PIERRE GABRIEL

Faisceaux quasi-cohérents

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A1_0>

FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS

par Pierre GABRIEL

On supposera connues les définitions et les propriétés élémentaires des faisceaux de modules sur un espace topologique, c'est-à-dire [2], chapitre I, paragraphe 1, et chapitre II paragraphe 1 et 2. On appellera préfaisceau P sur une base d'ouverts $\mathfrak{B}$ d'un espace topologique X, à valeurs dans une catégorie C, la donnée :

a. pour tout ouvert U de $\mathfrak{B}$, d'un objet $P(U)$ de C, que l'on pourra encore noter $\Gamma(U, P)$

b. pour tout couple U, V d'ouverts de $\mathfrak{B}$, tels que $U \subset V$ d'un morphisme $\rho_{UV} : P(V) \to P(U)$. Le morphisme ρ_{UV} sera nommé la restriction de V à U. On suppose en outre que si $U \subset V \subset W$ sont trois ouverts de $\mathfrak{B}$ alors $\rho_{UV} \circ \rho_{VW} = \rho_{UW}$.

La construction du faisceau associé $\tilde{P}$ à un préfaisceau P se généralise aisément au cas des préfaisceaux sur une base d'ouverts. Si $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de l'ouvert $U \in \mathfrak{B}$, où $U_i \in \mathfrak{B}$, et $U_i \cap U_j \in \mathfrak{B}$ et si P est un préfaisceau d'anneaux ou de modules sur la base $\mathfrak{B}$, on conviendra de noter $H^0(\mathfrak{U}, P)$ le sous-anneau (resp. le sous-module) de $\prod_{i \in I} P(U_i)$ formé des $(x_i)_{i \in I}$ tels que $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(x_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(x_j)$ pour tout couple $i, j \in I$. On a alors des applications canoniques :

$$P(U) \to H^0(\mathfrak{U}, P) \to \tilde{P}(U) \quad ;$$

si ces applications sont injectives pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ satisfaisant aux conditions précédentes, alors $\tilde{P}(U)$ est réunion des $H^0(\mathfrak{U}, P)$.

1. Préliminaire sur la localisation.

Soit A un anneau commutatif à élément unité. Un sous-monoïde S du monoïde multiplicatif de A (i.e. un sous-ensemble $\neq \emptyset$ de A qui avec s et t contient $s.t$) est dit complet s'il satisfait à la condition suivante : si $s.t \in S$, alors s et t appartiennent à S. A tout sous-monoïde multiplicatif

S, on associe un monoïde complet $\tilde{S}$ de la manière suivante : $s \in \tilde{S}$ si et seulement s'il existe un t dans A tel que $s.t \in S$. Les idéaux premiers qui rencontrent S rencontrent $\tilde{S}$ et réciproquement. En outre le complémentaire de $\tilde{S}$ dans A est réunion d'idéaux premiers (Montrer que les idéaux maximaux parmi ceux qui ne rencontrent pas $\tilde{S}$ sont premiers).

Si maintenant M désigne un A-module unitaire, S étant un sous-monoïde multiplicatif de A, on notera par M_S le groupe abélien suivant :

L'ensemble M_S est quotient de $M \times S$ par la relation d'équivalence

$$(m , s) = (n , t) \Longleftrightarrow \exists \; r \in S \quad \text{tel que} \quad r(mt - ns) = 0 \;.$$

L'addition dans $M \times S$ est définie par $(m , s) + (n , t) = (mt + ns , st)$; notre relation d'équivalence est compatible avec l'addition, d'où une structure de groupe abélien sur M_S. On notera par m/s la classe de (m , s) dans M_S.

On a une application bilinéaire $A_S \otimes_{\mathbb{Z}} M_S \to M_S$ définie par passage aux quotients à partir de l'application $((a , s) , (m , t)) \Rightarrow (am , st)$. Faisant $M = A$, on voit que A_S est un anneau et, plus généralement, M_S est un A_S-module. L'application $\psi : m \to m/1$ de M dans M_S est compatible avec l'homomorphisme d'anneaux $\varphi : a \to a/1$ de A dans A_S (i.e. c'est un homomorphisme de groupe abélien tel que $\psi(a.m) = \varphi(a).\psi(m)$).

On vérifie en outre aisément les assertions suivantes : la correspondance $M \Rightarrow M_S$ est fonctorielle (de façon évidente). Le foncteur $M \Rightarrow M_S$ est exact (i.e. si $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules, alors $0 \to M_S \to M'_S \to M''_S \to 0$ est une suite exacte de A-modules) et commute avec les limites inductives (i.e. si $(M_i)_{i \in I}$ est un système inductif de A-modules, et L une limite inductive de ce système, les $(M_i)_S$ forment un système inductif de A_S-modules, et les homomorphismes $(M_i)_S \to L_S$ déduits des $M_i \to L$ définissent L_S comme limite inductive du système $((M_i)_S)$). L'application canonique $M \otimes_A A_S \to M_S$ est bijective.

Si S et T sont deux sous-monoïdes, les groupes abéliens $(M_S)_T$, $(M_T)_S$ et $M_{S.T}$ sont canoniquement isomorphes, $S.T$ désignant le monoïde composé des produits $s.t$, $s \in S$, $t \in T$. Identifiant les anneaux $(A_S)_T$, $(A_T)_S$ et $A_{S.T}$, qui sont eux-mêmes canoniquement isomorphes entre eux, les isomorphismes entre $(M_S)_T$, $(M_T)_S$ et M_{ST} sont des isomorphismes de modules.

Si S est contenu dans un sous-monoïde S' du monoïde multiplicatif de A, il y a une application canonique de M_S dans $M_{S'}$ qui fait correspondre à l'élément m_s de M_S (avec $m \in M$, $s \in S$) l'élément de $M_{S'}$ désigné par le même symbole. L'application $A_S \to A_{S'}$ est un homomorphisme d'anneaux ; l'application $M_S \to M_{S'}$ est celle qui correspond à l'application $M \otimes_A A_S \to M \otimes_A A_{S'}$ déduite de $A_S \to A_{S'}$. Si $S' = \tilde{S}$ est le plus petit monoïde complet contenant S, l'application $M_S \to M_{\tilde{S}}$ est bijective. Enfin, si S est réunion d'une famille ordonnée filtrante croissante de monoïdes S_i, M_S d'identifie à $\varinjlim M_{S_i}$.

2. Le spectre premier d'un anneau commutatif.

Soient A un anneau commutatif avec élément unité, et $V(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on note $W(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$, et $U(\mathfrak{a}) = V(A) - W(\mathfrak{a})$.

Ainsi $W(\mathfrak{a}) \subset V(A)$, $U(\mathfrak{a}) \subset V(A)$, $W(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i W(\mathfrak{a}_i)$,

$W(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = W(\mathfrak{a}.\mathfrak{b}) = W(\mathfrak{a}) \cup W(\mathfrak{b})$, $U(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcup_i U(\mathfrak{a}_i)$,

$U(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = U(\mathfrak{a}.\mathfrak{b}) = U(\mathfrak{a}) \cap U(\mathfrak{b})$.

L'ensemble $U(\mathfrak{a})$ croît avec $\mathfrak{a}$ et $W(\mathfrak{a})$ décroît quand $\mathfrak{a}$ croît. Enfin $W(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{b})$ si et seulement si tout élément de $\mathfrak{a}$ a une puissance dans $\mathfrak{b}$ et réciproquement : En effet dire que $W(\mathfrak{a}) \subset W(\mathfrak{b})$ c'est dire que tout idéal premier qui contient $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{b}$, autrement dit que $\mathfrak{b}$ est contenu dans l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$ et il est classique que cette dernière intersection est formée des élements dont une puissance est dans $\mathfrak{a}$.

Les ensembles $U(\mathfrak{a})$ sont les ouverts d'une topologie de $V(A)$ et, muni de cette topologie, $V(A)$ aura le nom de <u>spectre premier de</u> A.

Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par les (f_i), alors $U(\mathfrak{a})$ est réunion des $U((f_i)) = U_{f_i}$; comme $U_f \cap U_g = U_{fg}$, les U_f forment donc une base d'ouverts quand f parcourt les éléments de A. Tout ouvert du type U_f sera dit <u>spécial.</u> Tout ouvert spécial est <u>quasi-compact</u> : En effet si U_f est réunion des $U(\mathfrak{a}_i)$, on a $U_f = \bigcup_i U(\mathfrak{a}_i) = U(\sum_i \mathfrak{a}_i)$ et une puissance f^n de f appartient à $\sum_i \mathfrak{a}_i$ et donc à la somme d'un nombre fini des $\mathfrak{a}_i$.

En particulier $V = U_1$ est quasi-compact. Enfin si l'anneau A est <u>noethérien</u> toute suite croissante d'idéaux est stationnaire et il en va de même de toute suite croissante d'ouverts. Le spectre premier est alors un espace topologique de Zariski.

3. Faisceaux quasi-cohérents sur $V(A)$.

Soit maintenant M un module unitaire sur l'anneau A. On va définir un préfaisceau $\mathcal{M}^*$ sur la base des ouverts spéciaux de $V(A)$. Associons pour cela à tout $f \in A$ le système multiplicativement stable S_f formé du complémentaire dans A de la réunion des idéaux premiers de U_f. Le système S_f est le système multiplicativement stable complet engendré par f. On a alors l'équivalence :

$$S_f \subset S_g \Rightarrow U_f \supset U_g$$

Ceci étant, nous définirons le préfaisceau $\mathcal{M}^*$, à l'aide des formules $\mathcal{M}^*(U_f) = M_{S_f}$, que nous noterons encore $\mathcal{M}_f$; si $U_f \supset U_g$, l'application de restriction $\rho^f_g : \mathcal{M}^*(U_f) \to \mathcal{M}^*(U_g)$ est l'application canonique de $\mathcal{M}_{S_f}$ dans $\mathcal{M}_{S_g}$. Ces définitions ne dépendent évidemment pas des éléments f et g qui définissent U_f et U_g ; en outre les axiomes des préfaisceaux sont satisfaits en vertu des propriétés de la localisation.

Nous noterons par $\mathcal{M}$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{M}^*$. Comme les A_f sont des anneaux et les M_f des A_f-modules, $\mathcal{A}^*$ est un préfaisceau d'anneaux, $\mathcal{M}^*$ un préfaisceau de $\mathcal{A}^*$-modules, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux et $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules. En outre les foncteurs qui à M associent $\mathcal{M}^*$ et $\mathcal{M}$ sont exacts car il en est ainsi des foncteurs qui à M associent les M_f. On appelle faisceau algébrique sur $V(A)$ tout faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$. On appelle faisceau quasi-cohérent sur $V(A)$ tout faisceau isomorphe à un faisceau $\mathcal{M}(M)$. Nous allons d'abord nous intéresser aux sections d'un tel faisceau sur un ouvert spécial U_f.

Pour cela on remarque d'abord que les idéaux premiers de A_f sont les images par l'application $A \to A_f$ des idéaux premiers de A qui ne continnent pas f. De plus l'application canonique ainsi définie du spectre $V(A_f)$ de A_f dans $V(A)$ est un homéomorphisme de $V(A_f)$ sur U_f. Enfin le faisceau sur $V(A_f)$ associé au module M_f s'identifie à la restriction de $\mathcal{M}$ à U_f.

Plus généralement, si S est un système multiplicativement stable (qu'on peut supposer complet) de A, soit E_S le sous-espace topologique de $V(A)$ formé des idéaux premiers qui ne rencontrent pas S. L'application canonique $A \to A_S$ induit un homéomorphisme de $V(A_S)$ sur E_S ; si S est engendré par les f_i,

E_S est intersection des U_{f_i} et réciproquement toute intersection d'ouverts spéciaux de $V(A)$ est du type E_S. Nous allons voir que la restriction de $\mathfrak{M}$ au sous-espace E_S s'identifie au faisceau $\mathfrak{M}_S$ associé au A_S-module M_S.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, on désigne par $A_{\mathfrak{p}}$ et $M_{\mathfrak{p}}$ l'anneau et le module obtenus par localisation à partir du système multiplicatif $S = A - \mathfrak{p}$.

THEOREME 1.

a. <u>Si $\mathfrak{p}$ est un point de $V(A)$, l'anneau ponctuel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ (fibre du faisceau $\mathfrak{A}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$) est canoniquement isomorphe à $A_{\mathfrak{p}}$; identifiant $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ à $A_{\mathfrak{p}}$, le module ponctuel $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ du faisceau $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{p}$ est canoniquement isomorphe à $M_{\mathfrak{p}}$, donc</u> à $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$.

b. <u>L'application canonique de $M_f = \mathfrak{M}^*(U_f)$ dans $\mathfrak{M}(U_f)$ est un isomorphisme</u>.

La première assertion de (a) résulte de ce que

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{U_f \ni \mathfrak{p}} \mathfrak{A}^*(U_f) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f = A_{\mathfrak{p}} \quad ;$$

la seconde assertion de (a) se démontre de la même manière.

Montrons mainteantn que l'application $M_f \to \mathfrak{M}(U_f)$ est <u>injective</u> : Comme $U_f = V(A_f)$, on peut toujours supposer que $f = 1$, $U_f = V(A)$. Le noyau de l'application $M \to \mathfrak{M}(V)$ est alors formé des m tels que $m \otimes_A 1_{A_{\mathfrak{p}}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire des m dont l'annulateur n'est contenu dans aucun idéal premier : le noyau est donc nul.

De même l'application $M_f \to \mathfrak{M}(U_f)$ est surjective : il suffit en effet de le démontrer quand $f = 1$, $U_f = V$. D'après ce qui précède $\mathfrak{M}(V) = \Gamma(\mathfrak{M})$ est réunion des $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}^*)$ quand $\mathfrak{U}$ parcourt les recouvrements finis de V par des ouverts spéciaux ; il suffit donc de montrer que l'application $M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M})$ est surjective pour tout recouvrement fini par des ouverts spéciaux.

Pour cela, soient (f_i), p éléments de A tels que $V = \bigcup U_{f_i}$, et soient X_i des éléments de M_{f_i} tels que X_i et X_j aient même image dans $M_{f_i \cdot f_j}$; quitte à remplacer f_i par une de ses puissances, on peut toujours supposer que X_i est de la forme m_i/f_i, où $m_i \in M$. Comme X_i et X_j ont même image dans $M_{f_i \cdot f_j}$,

$$\frac{m_i\, f_j - m_j\, f_i}{f_i\, f_j}$$

est nul dans $M_{f_i \circ f_j}$. Autrement dit

$$(f_i \circ f_j)^r (m_i f_j - m_j f_i) = 0 \quad \text{dans } M \text{ pour } r \text{ assez grand.}$$

D'autre part les $U_{f_i} = U_{f_i^{r+1}}$ recouvrent V, c'est-à-dire que les f_i^{r+1} engendrent A, ou que l'on a une relation de la forme $1 = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i^{r+1}$ où $a_i \in A$. Il en résulte que si $m = \sum_i m_i a_i f_i^{r+1}$, alors

$$f_j^{r+1} m = \sum_i a_i m_i f_i^r f_j^{r+1} = \sum_i a_i m_j f_j^r f_i^{r+1} = m_j f_j^r$$

et dans M_{f_j}, on a l'égalité $X_j = m_j/f_j = m/1$ pour tout j,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - <u>Si S est une partie multiplicativement stable de A la restriction à E_S du faisceau $\mathfrak{M}$ s'identifie au faisceau $\mathfrak{M}_S$ de $V(A_S)$ associé à M_S.</u>

Soit en effet f un élément de A. L'ouvert $E_S \cap U_f$ de E_S s'identifie alors à $E_{S \circ S_f}$, et l'on a par conséquent

$$\mathfrak{M}_S(E_S \cap U_f) = M_{S \circ S_f} = (M_S)_f = \varinjlim_{U_g \supset E_S} M_{f \cdot g}$$

Les applications naturelles $M_{f \circ g} = \mathfrak{M}(U_{fg}) \to \mathfrak{M}(E_S \cap U_f)$ se prolongent donc en une application

$$\mathfrak{M}_S(E_S \cap U_f) \to \mathfrak{M}(E_S \cap U_f)$$

et induisant un morphisme de faisceaux :

$$\mathfrak{M}_S \to \mathfrak{M}|E_S$$

Mais si $\mathfrak{p} \in E_S$, la fibre de $\mathfrak{M}_S$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ n'est autre que $(M_S)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ et l'application précédente induit un isomorphisme au-dessus de chaque $\mathfrak{p}$: l'application est donc un isomorphisme de faisceaux.

COROLLAIRE 2. - M_S <u>est le module des sections de</u> $\mathfrak{M}$ <u>au-dessus de</u> E_S .

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux</u> A-<u>modules, l'application</u> φ : $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ <u>définie par le foncteur</u> $M \Rightarrow \mathfrak{M}$ <u>est bijective.</u>

Nous allons en effet exhiber une application inverse ψ . Pour cela soit Γ le foncteur qui à tout faisceau de $\mathfrak{A}$-modules associe son module des sections sur $V(A)$. Le foncteur Γ définit une application de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma(\mathfrak{M}), \Gamma(\mathfrak{N}))$, et donc, puisque ce dernier groupe est isomorphe à $\mathrm{Hom}(M, N)$ pour un isomorphisme explicité ci-dessus, une application ψ de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ dans $\mathrm{Hom}(M, N)$. En fait φ et ψ sont des applications réciproques.

Il résulte de ce corollaire, et de l'exactitude du foncteur $M \Rightarrow \mathfrak{M}$ que si $u : F \to G$ est un morphisme de faisceaux quasi-cohérents, alors $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Coker}\, u$ sont des faisceaux quasi-cohérents.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> F <u>est un faisceau algébrique sur</u> $V(A)$, <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a. F <u>est quasi-cohérent.</u>

b. <u>Pour tout ouvert spécial</u> U_f , <u>l'application naturelle</u>

$$\Gamma(V, F) \otimes_A A_f \to \Gamma(U_f, F)$$

<u>est bijective.</u>

c. <u>Pour tout point</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> V , <u>l'application naturelle</u>

$$\Gamma(V, F) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \to F_{\mathfrak{p}}$$

<u>est bijective.</u>

d. F <u>est localement isomorphe à un faisceau quasi-cohérent,</u> i.e. <u>tout point</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> V <u>possède un voisinage spécial</u> U_f <u>tel que</u> $F|U_f$ <u>soit un faisceau quasi-cohérent.</u>

On a déjà vu que (a) $\Rightarrow$ (b) , (a) $\Rightarrow$ (c) , (a) $\Rightarrow$ (d) .

Montrons que (b) $\Rightarrow$ (a) : soit en effet $M = \Gamma(V, F)$. Alors pour tout ouvert affine U_f on a des restrictions : $M \to \Gamma(U_f, F)$ et comme $\Gamma(U_f, F)$ est un A_f-module il en résulte une application :

$$M_f = M \otimes_A A_f \to \Gamma(U_f, F) .$$

Ces applications induisent un morphisme de faisceaux : $\mathfrak{M} \to F$.

Ce morphisme sera bijectif si les applications induites $\mathfrak{M}(U_f) \to F(U_f)$ sont bijectives (ainsi (b) $\Rightarrow$ (a)) ou encore si les applications induites $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \to F_{\mathfrak{p}}$ sont bijectives (ainsi (c) $\Rightarrow$ (a)).

Reste à montrer que (d) $\Rightarrow$ (a) . La démonstration qui suit est due à GROTHENDIECK:

On remarque d'abord que l'application $A \to A_f$ munit tout A_f-module d'une structure de A-module et associe donc à tout faisceau quasi-cohérent F sur U_f un faisceau quasi-cohérent $\overline{F}$ sur V (on reviendra plus tard sur cette opération). En outre si U_g est un ouvert affine de V , on a :

$$\Gamma(U_g, \overline{F}) = \Gamma(V, \overline{F})_g = \Gamma(U_f, F)_g = \Gamma(U_f \cap U_g, F) .$$

Donnons-nous donc un faisceau algébrique G sur V tel qu'il existe un recouvrement de V par des ouverts spéciaux U_{f_i} avec les conditions : $G|U_{f_i}$ est quasi-cohérent. Montrons alors que G est quasi-cohérent.

Puisque G est un faisceau, on a pour tout U_g une suite exacte du type :

$$0 \to \Gamma(U_g, G) \to \prod_i \Gamma(U_g \cap U_i, G) \to \prod_{i<j} \Gamma(U_g \cap U_i \cap U_j, G)$$

ou encore

$$0 \to \Gamma(U_g, G) \to \prod_i \Gamma(U_g, \overline{G|U_i}) \to \prod_{i\leq j} \Gamma(U_g, \overline{G|U_i \cap U_j})$$

Les deux derniers termes de la suite exacte sont les sections sur U_g des faisceaux associés aux modules

$$M = \prod_i \Gamma(U_i, G|U_i) \quad \text{et} \quad N = \prod_{i<j} \Gamma(U_i \cap U_j, G) .$$

Faisant varier g on obtient par passage à la limite "une suite exacte de faisceaux" : $0 \to G \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Le faisceau G est donc le noyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents : G est quasi-cohérent.

4. Faisceaux cohérents sur $V(A)$.

On va supposer à partir de maintenant que A est un anneau noethérien. Il est bien connu qu'alors la catégoire des A-modules noethériens coïncide avec celle des A-modules de type fini. On appellera faisceau cohérent sur $V(A)$ tout faisceau F isomorphe à un faisceau du type $\mathfrak{M}$, où M est un A-module de type fini. Le faisceau F est donc quasi-cohérent et c'est un faisceau de type fini (un faisceau F de $\mathfrak{A}$-modules sur un espace topologique X est dit de type fini si tout point X admet un voisinage U et une surjection $\mathfrak{A}^p|U \to F|U \to 0$, où $\mathfrak{A}^p$ est le faisceau somme directe de p faisceaux isomorphes à $\mathfrak{A}$. Une telle surjection induit une application

$$\Gamma(U, \mathfrak{A}^p) = \Gamma(U, \mathfrak{A})^p \to \Gamma(U, F)$$

et définit p sections de F sur U, à savoir les images des vecteurs de base de $\Gamma(U, \mathfrak{A})^p$. Réciproquement la donnée de p sections de F sur U définit une application $A^p|U \xrightarrow{\varphi} F|U$).

THÉORÈME 3. – Les propositions suivantes sont équivalentes (si A est noethérien et si F est un faisceau algébrique sur $V(A)$) :

a. F est un faisceau algébrique cohérent sur $V(A)$

b. F est quasi-cohérent et de type fini

c. F est de type fini, et pour tout ouvert U et tout morphisme $\varphi : G \to F|U$, où G est un faisceau de type fini sur U, le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$ est de type fini sur U.

On sait déjà que (a) $\Rightarrow$ (b). Réciproquement si F est quasi-cohérent et est de type fini, il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $V(A)$ par des ouverts spéciaux tels que $\Gamma(U_{f_i}, F)$ soit un A_{f_i}-module de type fini. Comme $V(A)$ est quasi-compact, on peut toujours supposer que ce recouvrement est fini et que F est du type $\mathfrak{M}$: il s'agit de montrer que M est un A-module de type fini. Mais pour tout i il existe un nombre fini de $m_{i_k} \in M$ qui engendrent M_{f_i}, et si N désigne le sous-module engendré par tous les m_{i_k}, N est un A-module de type fini, et on a manifestement $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, d'où $N = M$,

C. Q. F. D.

Montrons que (c) $\Rightarrow$ (b) : En effet si F est de type fini, tout X admet un voisinage spécial U dans lequel on a une surjection :

$$\mathcal{A}^p|U \rightarrow F|U \rightarrow 0$$

Comme le noyau de cette surjection est aussi de type fini, on a en fait une suite exacte (pourvu que l'ouvert spécial U soit assez petit) :

$$\mathcal{A}^q|U \rightarrow \mathcal{A}^p|U \rightarrow F|U \rightarrow 0$$

Le faisceau F est donc, sur tout ouvert spécial assez petit, le conoyau d'un morphisme de faisceauxquasi-cohérents : ainsi F est localement quasi-cohérent et est donc quasi-cohérent.

Enfin (a) $\Rightarrow$ (c) : car si F est cohérent, F est de type fini. En outre si $\varphi : G \rightarrow F|U$ est un porphisme, on peut toujours supposer que U est un ouvert spécial assez petit pour que l'on ait une surjection $\psi : \mathcal{A}^p|U \rightarrow G \rightarrow 0$.

On a alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}^p|U \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\chi"] & \\ \operatorname{Ker} \varphi \arrow[r] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F|U \\ & 0 & \end{tikzcd} \qquad \chi = \varphi \circ \psi$$

Les faisceaux $\mathcal{A}^p|U$ et $F|U$ sont cohérents sur U et χ est donc induit par un morphisme $\chi' : \mathcal{A}^p(U) \rightarrow F(U)$. Cette "résolution" de $\Gamma(U, F) = F(U)$ se prolonge en une résolution

$$\Gamma(U, A)^q \rightarrow \Gamma(U, A)^p \rightarrow \Gamma(U, F)$$

Cette dernière suite exacte permet de compléter le diagramme et montre que, sur U , $\operatorname{Ker} \varphi$ est quotient d'un faisceau de type fini :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^q|U \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^p|U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\psi"] & F|U \arrow[d, leftrightarrow] \\ \operatorname{Ker} \varphi \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F|U \\ 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

REMARQUE. - L'assertion (c) donne une caractérisation des faisceaux cohérents, qui ne fait pas intervenir la base des ouverts spéciaux de $V(A)$. En fait si V est un espace topologique quelconque et $\mathfrak{A}$ un faisceau d'anneaux sur V, les faisceaux de $\mathfrak{A}$-modules qui satisfont à l'assertion (c) sont les objets d'une sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux de $\mathfrak{A}$-modules (voir SERRE [4]). Dans le cas considéré ici les faisceaux quasi-cohérents sont les limites inductives de faisceaux cohérents.

5. Le spectre maximal d'un anneau de Jacobson.

Nous allons appliquer ce qui précède à la géométrie algébrique. Pour cela nous noterons $\Omega(A)$ et appellerons spectre maximal de A le sous-espace topologique de $V(A)$ formé des idéaux maximaux de A. Nous supposerons en outre que A est un anneau de Jacobson, c'est-à-dire que tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux (voir [1] et [3]). La proposition suivante est dès lors vérifiée :

PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes

a. A est un anneau de Jacobson.

b. La correspondance $U \to U \cap \Omega(A)$ entre ouverts de $V(A)$ et de $\Omega(A)$ est bijective.

c. La correspondance $W \to W \cap \Omega(A)$ entre fermés de $V(A)$ et de $\Omega(A)$ est bijective.

L'équivalence de (b) et (c) est triviale. D'autre part les fermés de V correspondent aux idéaux de A qui sont intersection d'idéaux premiers. Les fermés de Ω correspondent aux idéaux de A qui sont intersection d'idéaux maximaux. Les deux familles d'idéaux coïncident si et seulement si A est un anneau de Jacobson.

Sous cette dernière hypothèse les espaces $V(A)$ et $\Omega(A)$ ont donc même treillis des ouverts. Il en résulte évidemment que les faisceaux sur V et sur Ω "se correspondent biunivoquement". En particulier on appellera ouvert spécial de Ω la restriction d'un ouvert spécial de V, faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) sur Ω, la restriction d'un faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) de V. Les propriétés de ces faisceaux sur V s'étendent à leur restriction sur Ω moyennant des modifications évidentes.

En particulier toute algèbre de type fini sur un corps est un anneau de Jacobson Si k est un corps algébriquement clos, V un ensemble algébrique affine sur k, A son anneau des coordonnées, alors V est homéomorphe au spectre maximal

$\Omega(A)$ de A. Le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}|\Omega(A)$ porte le nom de faisceaux des germes de fonctions régulières sur V.

De même un faisceau de modules sur ce faisceau d'anneaux sera dit algébrique (resp. algébrique quasi-cohérent, resp. algébrique cohérent) s'il est restriction d'un faisceau de $V(A)$ du même nom.

6. Faisceaux quasi-cohérents sur une variété algébrique.

Plus généralement, si X est un ensemble algébrique quelconque sur k, on appellera faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) sur X tout faisceau F tel qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines U_i satisfaisant à la condition : $F|U_i$ est quasi-cohérent (resp. cohérent). D'après la remarque qui suit le théorème 3, ceci équivaut à dire que, pour tout ouvert affine U, le faisceau $F|U$ est quasi-cohérent (resp. cohérent).

En particulier le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ qui est tel pour tout ouvert affine U, $\mathcal{O}(U)$ soit l'anneau des fonctions régulières sur U (avec les restrictions évidentes), est un faisceau cohérent. On le nommera faisceau des germes de fonctions régulières. Tout faisceau de modules sur $\mathcal{O}$ sera dit algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Variétés algébriques affines, Séminaire Cartan-Chevalley, t. 8, 1955/56, n° 3.

[2] GODEMENT (Roger). - Théorie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252).

[3] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.