C. Chevalley

Les groupes de type G_2

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 21, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A8_0>

LES GROUPES DE TYPE G_2

Exposé de C. CHEVALLEY, le 6/1/1958

1. Deux lemmes.

Soient G un groupe algèbrique semi-simple, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T, et Z le sous-groupe de dimension 3 de G correspondant à la racine α (i.e. le centralisateur de la composante connexe de l'élément neutre dans l'ensemble des $t \in T$ tels que $\alpha(t) = 1$). Soient τ_+ et τ_- des isomorphismes de K sur des sous-groupes de Z tels que l'on ait, pour $\xi \in K$, $t \in T$,

$$t\tau_+(\xi)t^{-1} = \tau_+(\alpha(t)\xi)$$

$$t\tau_-(\xi)t^{-1} = \tau_-((\alpha(t))^{-1}\xi) .$$

Soit enfin ρ une représentation linéaire de G opérant dans un espace vectoriel V ; si ϖ est un poids de ρ, on dit qu'un vecteur $x \in V$ appartient au poids ϖ si $x \neq 0$ et si on a, pour $t \in T$, $t.x = \varpi(t)x$.

Nous poserons

$$\zeta_+(\xi) = \rho(\tau_+(\xi)) , \quad \zeta_-(\xi) = \rho(\tau_-(\xi))$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> x <u>un vecteur de</u> V <u>appartenant à un poids</u> ϖ. <u>Alors, pour tout</u> $\xi \in K$, $\tau_+(\xi).x$ <u>est combinaison linéaire de vecteurs de</u> V <u>appartenant à des poids de la forme</u> $\varpi + k\alpha$, k <u>entier</u> ≥ 0.

En effet, τ_+ est une application polynome de K dans $GL(V)$; on peut donc écrire $\tau_+(\xi).x = x + \sum_{k=1}^{m} \xi^k x_k$, les x_k étant des vecteurs de V. On a $t\tau_+(\xi).x = t.x + \sum_{k=1}^{m} \xi^k t.x_k$; mais ceci est encore égal à

$$\tau_+(\alpha(t)\xi).(t.x) ,$$

donc à

$$\omega(t)\ \tau_+(\alpha(t)\xi).x = \omega(t)x + \sum_{k=1}^{m} \omega(t)(\alpha(t))^k \xi^k x_k \ ;$$

on a donc $t.x_k = \omega(t)(\alpha(t))^k x_k$, ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE. - Le sous-espace de V engendré par les vecteurs qui appartiennent à des poids de la forme $\varpi + r\alpha$, où r est un entier, est transformé en lui-même par les opérations de $\rho(Z)$.

Cet espace est évidemment transformé en lui-même par les opérations de $\rho(T)$; il résulte du lemme 1 qu'il est transformé en lui-même par les opérations

$$\tau_+(\xi)\ ,\quad \tau_-(\xi)\quad (\xi \in K)\ .$$

Le corollaire résulte alors du fait que Z est engendré par la réunion des ensembles $Z \cap T$, $\tau_+(K)$ et $\tau_-(K)$.

LEMME 2. - Soit $\tilde{\rho}$ une représentation projective de noyau fini d'un groupe algébrique semi-simple G, et soit T un tore maximal de G. Supposons que les poids de $\tilde{\rho}$ par rapport à T appartiennent au groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T. Il existe alors une représentation linéaire ρ de G telle que $\tilde{\rho}$ soit la représentation projective déduite de ρ.

Posons $\bar{G} = \tilde{\rho}(G)$, $\bar{T} = \tilde{\rho}(T)$. L'application $\tilde{\rho}$ est une isogénie de G sur $\bar{G}$; il lui correspond un isomorphisme spécial $\tilde{\varphi}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. La représentation $\tilde{\rho}$ opère dans l'espace projectif $\mathcal{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V ; soit G' le groupe linéaire associé à $\tilde{\rho}$; c'est un sous-groupe de $SL(V)$. Soient g' l'application canonique de G' sur $\bar{G}$ et T' le tore maximal de G' tel que $g'(T') = \bar{T}'$. Il correspond à l'isogénie g' un isomorphisme spécial χ' de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$. Soit φ l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tel que $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi'$. Nous allons montrer que φ est un isomorphisme spécial. Soit α' une racine de G' par rapport à T' ; on sait que les exposants radiciels de χ' sont égaux à 1 (exposé 18, proposition 3) ; il y a donc une racine $\bar{\alpha}$ de $\bar{G}$ telle que $\chi'(\bar{\alpha}) = \alpha'$. Il y a une racine α de G et une puissance q de l'exposant caractéristique de K telles que $\tilde{\varphi}(\bar{\alpha}) = q\alpha$, d'où $\varphi(\alpha') = q\alpha$. Par ailleurs, l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation τ de G', et les poids de ρ sont par définition les images par φ de ceux de τ ; comme $X(T')$ est engendré par les poids de τ, il résulte du fait que les poids de ρ appartiennent à $X(T)$ que $\varphi(X(T')) \subset X(T)$; φ est donc bien spécial. On en conclut (exposé 18, proposition 6) qu'il existe une isogénie ρ de G sur G' telle que $\tilde{\rho} = g' \circ \rho$, ce qui démontre le lemme 2.

2. Etude d'un groupe de type G_2.

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type G_2. Soit T un tore maximal de G, et soit $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T. Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{3}{\bullet}$$

le sommet S_i correspondant à α_i $(i = 1, 2)$. L'espace $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ est donc engendré par les éléments ω_0, ω_1, ω_2 de somme nulle tels que $\alpha_1 = \omega_0$, $\alpha_2 = \omega_1 - \omega_0$; les poids dominants fondamentaux sont $\varpi_1 = -\omega_2 = \alpha_2 + 2\alpha_1$, $\varpi_2 = \omega_1 - \omega_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_1$ (cf. exposé 19) ; comme ils sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines, G est simplement connexe. Il y a donc une représentation linéaire simple ρ de G de poids dominant ϖ_1 (lemme 2). Posons $G' = \rho(G)$, $T' = \rho(T)$, et soit φ l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à ρ. Il y a un système fondamental de racines (α'_1, α'_2) de G' par rapport à T' tel que $\varphi(\alpha'_i) = q_i\alpha_i$ $(i = 1, 2)$, et on a $q_1 = 1$ en vertu du corollaire au lemme 2, exposé 19. Soient w_i et w'_i les symétries par rapport aux racines α_i de G et α'_i de G' ; on a $w_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 3\alpha_1$ et $\varphi \circ w'_1 = w_1 \circ \varphi$ (exposé 18, proposition 4) ; on en conclut que $w'_1(\alpha'_2) = \alpha'_2 + 3q_2\alpha'_1$. Comme les entiers de Cartan d'un groupe semi-simple sont < 4 en valeur absolue, on a $q_2 = 1$. Il en résulte que G' est de type G_2 et que le diagramme de Dynkin associé au système fondamental (α'_1, α'_2) est le même que celui associé au système (α_1, α_2), S_i correspondant à α'_i. La représentation ρ opère dans un espace vectoriel V ; l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation simple τ de G' dont le poids dominant ϖ' est l'élement de $X(T')$ dont l'image par φ est ϖ_1, c'est-à-dire $\alpha'_2 + 2\alpha'_1$. Comme ρ induit un isomorphisme de $X(T')$ sur $X(T)$, ρ est un isomorphisme de G sur G' (exposé 18, proposition 5). Remplaçant G par G', nous supposerons désormais que G est un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V et que ρ est l'application identique de G dans $GL(V)$. Les poids $\neq 0$ de ρ sont les transformés $\pm\omega_i$ du poids dominant par les opérations du groupe de Weyl (exposé 20, proposition 1) ; ils sont de multiplicité 1.

Nous désignerons par x_i (resp. y_i) un vecteur de V de poids ω_i (resp. $-\omega_i$). Nous désignerons par Z_i le sous-groupe de dimension 3 de G correspondant à la racine α_i. Nous allons d'abord montrer que, si 0 est un poids de ρ, ce poids est de multiplicité 1. Soit z un vecteur de V appartenant au poids 0. Comme il n'y a aucun multiple entier $\neq 0$ de α_2 qui soit poids de ρ, l'espace Kz est transformé en lui-même par les opérations de Z_2 (corollaire au lemme 1), d'où il résulte que z est invariant par les opérations de Z_2 puisque Z_2 est son propre groupe dérivé. Par ailleurs, G est engendré par Z_1 et Z_2 (exposé 13, proposition 5) ; il est donc impossible que z soit stable par les opérations de Z_1. Soit τ_1 un isomorphisme de K sur un sous-groupe de Z_1 associé à la racine α_1 ; montrons que z ne peut être invariant par les opérations de $\tau_1(K)$. Supposons en effet le contraire ; il y a un groupe de Borel B_1 de Z_1 qui est engendré par $\tau_1(K)$ et par un tore maximal T_1 de Z_1 contenu dans T ; z serait alors invariant par B_1, et son orbite $Z_1 z$ relativement à Z_1 serait l'image de la variété complète Z_1/B_1 par un morphisme de cette variété dans V ; cette image, étant une sous-variété complète de l'espace vectoriel V, se réduirait à point, et z serait invariant par les opérations de Z_1, ce qui n'est pas. Il n'y a qu'un seul poids de ρ qui soit de la forme $k\alpha_1$ avec $k > 0$: ce poids est ω_0. Il résulte alors du lemme 1 que l'on a $\tau_1(\xi).z = z + c\xi x_0$ avec $c \in K$, $c \neq 0$. Ceci dit, soit z' un vecteur quelconque appartenant au poids 0 ; on a $\tau_1(\xi).z' = z' + c'\xi x_0$, $c' \neq 0$. Il en résulte que $c'z - cz'$ est invariant par les opérations de $\tau_1(K)$; si ce vecteur était $\neq 0$, il appartiendrait au poids 0, ce que nous avons vu être impossible. On a donc $z' = c^{-1}c'z$, ce qui montre que, si 0 est un poids de ρ, ce poids est de multiplicité 1.

Supposons d'abord que 0 ne soit pas poids de ρ. L'espace M_0 engendré par x_0 et y_0 est alors stable par les opérations de Z_1. Soit T_1 le tore maximal de Z_1 contenu dans T ; les racines de Z_1 par rapport à T_1 sont les restrictions $\overline{\alpha_1}$ et $-\overline{\alpha_1}$ de α_1 et $-\alpha_1$ à T_1 ; les poids par rapport à T_1 de la représentation de Z_1 sur l'espace M_0 sont donc $\overline{\alpha_1}$ et $-\overline{\alpha_1}$. Il en résulte aussitôt que la représentation de Z_1 sur l'espace M_0 est simple et de poids dominant $\overline{\alpha_1}$. Mais, si K est de caractéristique $\neq 2$, la représentation de Z_1 de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ est de dimension 3 ; donc, <u>si</u> 0 <u>n'est pas poids de</u> ρ, K <u>est de caractéristique</u> 2.

Nous allons montrer réciproquement que, <u>si</u> K <u>est de caractéristique</u> 2, 0 <u>n'est pas poids de</u> ρ. Il y a en effet dans tous les cas une forme bilinéaire β non dégénérée sur $V \times V$, symétrique ou alternée, invariante par les opérations de G (exposé 20, corollaire à la proposition 2). Si 0 est un poids de ρ, V est de dimension 7 et β n'est pas alternée ; les opérations de G laissent donc invariante la forme quadratique $x \longrightarrow \beta(x, x)$ qui est $\neq 0$. La forme bilinéaire associée à cette forme quadratique est 2β ; si donc K était de caractéristique 2, la forme quadratique $x \longrightarrow \beta(x, x)$ serait le carré d'une forme linéaire sur V qui serait invariante par les opérations de G, ce qui est impossible, G étant simple.

Ceci étant, supposons que K ne soit pas de caractéristique 2. On désignera par z_o un vecteur appartenant au poids 0. L'espace V est donc de dimension 7. Faisons usage de la forme bilinéaire β déjà mentionnée ci-dessus. Exprimant qu'elle est invariante par les opérations de T, on trouve tout de suite que l'on a

$$\beta(x_i, x_j) = \beta(y_i, y_j) = 0 \text{ quels que soient } i \text{ et } j,$$

$$\beta(z_o, x_i) = \beta(z_o, y_i) = 0 \text{ et } \beta(x_i, y_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

On peut donc supposer x_1, x_2, y_1, y_2 normalisés de telle manière que $\beta(x_1, y_1) = \beta(x_2, y_2) = 1$. Faisant usage du corollaire au lemme 1, on voit tout de suite que les espaces $M_1 = Kx_1 + Ky_2$, $M_2 = Kx_2 + Ky_1$ sont invariants par les opérations de Z_1. Les poids de la représentation de Z_1 sur l'espace M_2 sont les restrictions de α_2 et $-\alpha_1$ à T_1. Déterminons ces restrictions. Soit $\bar{w}_1$ la symétrie par rapport à la racine α_1 de Z_1 ; il est clair que, si w_1 est la symétrie par rapport à α_1, et si ω est un élément quelconque de $X(T)$, $\bar{w}_1$ change la restriction $\bar{\omega}$ de ω à T_1 en la restriction de $w_1(\omega)$, ce qui montre que $\bar{\omega} = 0$ si $w_1(\omega) = \omega$ (car $\bar{w}_1$ change tout élément de $X(T_1)$ en son opposé). Or on a $w_1(\omega_1) = \omega_1 + \omega_o$, $w_1(\omega_2) = \omega_2 + \omega_o$; la restriction de ω_1 ω_2 à T_1 est donc nulle ; comme il est de même de celle de $\omega_o + \omega_1 + \omega_2$ et comme la restriction de ω_o est $\overline{\alpha_1}$, on voit que les restrictions de ω_1 et ω_2 sont égales à $-(1/2)\overline{\alpha_1}$. Comme $-(1/2)\overline{\alpha_1}$ appartient à $X(T_1)$, Z_1 est isomorphe à $SL(K^2)$. Introduisons un espace vectoriel W de dimension 2 sur K et une base (w_1, w_2) de W. Soit f_1 l'isomorphisme de W sur M_1 qui applique w_1 sur x_1 et w_2 sur y_2 ; cet isomorphisme définit un isomorphisme F_1 de $SL(W)$ sur $SL(M_1)$ qui est l'ensemble des restrictions à M_1 des opérations de Z_1. Soit W^* le dual de W, et soit (w_1^*, w_2^*) la base de W^* duale de la base (w_1, w_2) ; soit f_1^* l'isomorphisme de W^* sur M_2 qui applique w_1^* sur y_1 et w_2^* sur x_2 ; cet isomorphisme définit un isomorphisme F_1^* de $SL(W^*)$ sur $SL(M_2)$. Il résulte du fait que β est invariante par les opérations de G que, si $s \in Z_1$ et si u est l'élément de $SL(W)$ tel que s coïncide avec $F_1(u)$ sur M_1, alors s coïncide avec $F_1^*({}^tu^{-1})$ sur M_2. Par ailleurs, comme l'application qui fait correspondre à tout $s \in Z_1$ sa restriction à M_1 est une représentation simple de poids dominant $(1/2)\overline{\alpha_1}$ de Z_1, c'est un isomorphisme de Z_1 sur $SL(M_1)$, d'où il résulte qu'il y a un isomorphisme F de $SL(W)$ sur Z_1 tel que, pour tout $u \in SL(W)$, $F_1(u)$ soit la restriction de $F(u)$ à M_1. Soit W_2 l'espace des éléments homogènes de degré 2 de l'algèbre symétrique sur W ; c'est l'espace d'une représentation σ_2 de $SL(W)$. Si $s \in Z_1$, soit $\zeta_0(s)$ la restriction de s à l'espace engendré par x_o, y_o et par le vecteur z_o de poids 0 : c'est une représentation simple de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ de Z_1. Par ailleurs, $\sigma_2 \circ F^{-1}$ est aussi une représentation simple de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ de Z_1. Les représentations σ_o et $\sigma_2 \circ F^{-1}$ sont donc équivalentes, et il y a un isomorphisme f_2 de W_2 sur M_o tel que l'on ait $f_2 \circ (\sigma_2 \circ F^{-1})(s) = \zeta_o(s) \circ f_2$ pour tout $s \in Z_1$. L'espace W_2 admet une base composée des éléments w_1^2, w_2^2, w_1w_2. Soit τ_1 un isomorphisme de K sur un sous-groupe de Z_1 associé à la racine α_1 ; comme $\omega_o - \omega_2$ n'est pas un poids de ρ, les opérations de $\tau_1(K)$ laissent y_2 fixe ; les opérations de $(F^{-1} \circ \tau_1)(K)$ laissent donc w_2 fixe, et leurs images par σ_2 laissent w_2^2 fixe. Par ailleurs, les points de M_o qui sont invariants par les opérations de $\tau_1(K)$ sont les points de l'espace Kx_o ; on en conclut que f_2 applique w_2^2 sur un multiple scalaire de x_o. On verrait de même que f_2 applique w_1^2 sur un multiple scalaire de y_o. Nous poserons $x_o' = f_2(w_2^2)$, $y_o' = f_2(w_1^2)$. Comme β n'est pas dégénérée et comme $\beta(z_o, x_i) = \beta(z_o, y_i) = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, on a $\beta(x_o', y_o') \neq 0$. Or on peut remplacer f_2 par un isomorphisme de la forme cf_2, où c est un élément $\neq 0$ quelconque de K, sans que l'on cesse d'avoir $f_2 \circ (\sigma_2 \circ F^{-1})(s) = \zeta_o(s) \circ f_2$ pour tout $s \in Z_1$. On peut choisir c de telle manière que $\beta(x_o', y_o') = 1$. Comme x_o et y_o n'ont encore été déterminés qu'à des facteurs constants près, on peut supposer que $x_o = x_o'$ et $y_o = y_o'$. Enfin, on peut supposer que $f_2(w_1w_2) = z_o$. On voit donc que l'espace V admet une base composée d'éléments z_o, x_i, y_i $(i = 0, 1, 2)$ qui possèdent les propriétés suivantes : il existe des isomorphismes f_1, f_1^*, f_2 de W, W^* et W_2 sur les espaces $M_1 = Kx_1 + Ky_2$, $M_2 = Kx_2 + Ky_1$ et $M_o = Kx_o + Ky_o + Kz_o$ respectivement tels que $f_1(w_1) = x_1$, $f_1(w_2) = y_2$, $f_1^*(w_1^*) = y_1$, $f_1^*(w_2^*) = x_2$, $f_2(w_1^2) = y_o$, $f_2(w_2^2) = x_o$, $f_2(w_1w_2) = z_o$; si F_1, F_1^*, F_2 sont les isomorphismes de $SL(W)$ sur $SL(M_1)$, $SL(W^*)$ sur $SL(M_2)$ et $SL(W_2)$ sur $SL(M_o)$ définis par f_1, f_1^* et f_2 respectivement, les opérations de Z_1 sont les automorphismes s de W pour lesquels il existe un $u \in SL(W)$ tel que les restrictions de s à M_1, M_2 et M_o soient $F_1(u)$, $F_1^*({}^tu^{-1})$ et $F_2(\sigma_2(u))$ respectivement ($\sigma_2(u)$ étant la puissance symétrique seconde de u) ; les opérations de G laissent invariante une forme bilinéaire non dégénérée β telle que

$$\beta(x_i , y_i) = 1 \qquad (i = 0 , 1 , 2) ,$$

$$\beta(z_0 , x_i) = \beta(z_0 , y_i) = \beta(x_i , x_j) = \beta(y_i , y_j) = 0 \quad (i , j = 0 , 1 , 2)$$

$$\beta(x_i , y_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \ ;$$

enfin z_0 appartient au poids 0 , x_i au poids ω_i et y_i au poids $-\omega_i$.

Considérons maintenant les opérations de Z_2 . Il résulte du corollaire, au lemme 1 que les espaces $Kx_0 + Kx_1$, $Ky_0 + Ky_1$, Kz_0 , Kx_2 , Ky_2 sont stables par les opérations de Z_2 . Comme Z_2 est son propre groupe dérivé, les points z_0 , x_2 , y_2 sont invariants par les opérations de Z_2 . Par ailleurs, les restrictions des opérations de Z_2 à $Kx_0 + Kx_1$ sont évidemment tous les automorphismes de déterminant 1 de cet espace. Les espaces $Kx_0 + Kx_1$ et $Ky_0 + Ky_1$ sont mis en dualité par la restriction de β au produit de ces deux espaces ; si $s \in Z_2$, les restrictions de s à $Kx_0 + Kx_1$ et $Ky_0 + Ky_1$ sont contragédientes l'une à l'autre par rapport à cette restriction ; ces restrictions se déterminent donc mutuellement.

Ceci étant, construisons un groupe $\bar{G}$ comme suit. Ce sera un groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel $W \times W^* \times W_2$; nous identifierons W , W^* , W_2 à leurs images dans $W \times W^* \times W_2$, qui sera donc identifié à la somme directe des espaces W , W^* , W_2 . Le groupe $\bar{G}$ sera engendré par deux groupes $\bar{Z}_1$ et $\bar{Z}_2$ décrits comme suit. Le groupe $\bar{Z}_1$ se compose des automorphismes dont les restrictions à W , W^* , W_2 sont de la forme u , ${}^t u^{-1}$, $\sigma_2(u)$ pour $u \in SL(W)$. Les opérations de $\bar{Z}_2$ laissent fixes les points $w_1 w_2$, w_2 , w_2^* et les espaces $N = Kw_2^2 + Kw_1$, $N^* = Kw_1^2 + Kw_1^*$; leurs restrictions à N sont tous les automorphismes de déterminant 1 de cet espace ; enfin les restrictions d'une opération de $\bar{Z}_2$ à N et N^* sont contragrédientes l'une à l'autre par rapport à la forme bilinéaire γ sur $N \times N^*$ définie par $\gamma(w_2^2, w_1^2) = \gamma(w_1 , w_1^*) = 1$, $\gamma(w_2^2 , w_1^*) = \gamma(w_1 , w_1^2) = 0$. Ceci étant, il résulte de ce que nous avons dit que le groupe G est isomorphe à $\bar{G}'$.

On a des résultats entièrement analogues dans le cas où K est de caractéristique 2 ; il faut seulement remplacer l'espace W_2 par le sous-espace W_2' engendré par w_1^2 et w_2^2 et remplacer la représentation σ_2 de $SL(W)$ par la représentation σ_2' telle que $\sigma_2'(u)$ soit la restriction de $\sigma_2(u)$ à W_2' $(u \in SL(W))$. Nous avons donc établi le

THÉORÈME 1. - Tous les groupes algébriques semi-simples de type G_2 (relatifs à un même corps de base K) sont isomorphes entre eux.

3. Sur l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple.

Soient G un groupe algébrique semi-simple et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Désignons par T un tore maximal de G, et par $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Pour toute racine α de G par rapport à T, soit τ_α un isomorphisme du groupe K sur un sous-groupe de G associé à α ; alors la formule $X_\alpha = [d\tau_\alpha(\xi)/d\xi]_{\xi=0}$ définit un élément X_α de $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ étant identifié à l'espace tangent à G en son élément neutre). Il résulte de ce qui a été dit dans l'exposé 15 (p. 2 et 3) que $\mathfrak{g}$ est la somme directe de $\mathfrak{t}$ et des espaces KX_α pour toutes les racines α. Soit γ un groupe multiplicatif à un paramètre contenu dans T ; alors la formule $\gamma^K = (d\gamma(\theta)/d\theta)_{\theta=1}$ définit un élément γ^K de $\mathfrak{t}$. On sait que la dérivée en (e, e) (où e est l'élément neutre de G) de l'application $(s, t) \to st$ applique (L, M) sur $L + M$ (L et M étant des vecteurs tangents à G en e ; l'espace tangent à $G \times G$ en (e, e) est identifié au produit par lui-même de l'espace tangent à G en e) ; il en résulte que, si γ, γ' sont des éléments du groupe $\Gamma(T)$ des groupes à un paramètre de T (écrit en notation additive), on a

$$(\gamma + \gamma')^K = \gamma^K + \gamma'^K \quad ;$$

on en déduit une application linéaire $K \otimes_Z \Gamma(T) \to \mathfrak{t}$. Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels, comme il résulte tout de suite du fait que $\Gamma(T)$ a une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ telle que l'application

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \to \prod_{i=1}^n \gamma_i(\theta_i)$$

soit un isomorphisme de K^{*n} sur T. Le dual du groupe $\Gamma(T)$ s'identifie au groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T ; on en déduit un isomorphisme de l'espace vectoriel $K \otimes_Z X(T)$ sur le dual $\mathfrak{t}^*$ de $\mathfrak{t}$; nous désignerons par ω^K l'image dans cet isomorphisme d'un élément ω de $X(T)$. Si α est une racine, nous dirons que α^K est la racine infinitésimale associée à α. On sait que, pour toute racine α, il existe un élément H_α et un seul de $\Gamma(T)$ qui est changé en son opposé par la symétrie par rapport à α et qui est tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$; le groupe à un paramètre H_α est contenu dans le groupe Z_α de dimension 3 associé à la racine α. Nous poserons

$$U_\alpha = H_\alpha^K$$

d'où

$$\alpha^K(U_\alpha) = 2 \ .$$

L'espace $\mathfrak{g}$ est l'espace de la représentation adjointe $s \longrightarrow \mathrm{Ad}\, s$ de G : $\mathrm{Ad}\, s$ est la dérivée en e de l'application $t \longrightarrow sts^{-1}$ de G sur lui-même. Si $t \in T$, la formule $t\, \tau_\alpha(\xi) t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\xi)$ donne

$$\mathrm{Ad}\ t.X_\alpha = \alpha(t) X_\alpha \quad ;$$

par ailleurs, T étant commutatif, on a $\mathrm{Ad}\ t.T = T$ pour tout $T \in \mathfrak{t}$. Les poids de la représentation adjointe de G sont d'une part les racines (qui sont des poids de multiplicité 1) et d'autre part 0, de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{t}$, donc au rang de G.

Tout homomorphisme f de G dans un groupe algébrique G' définit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie de G' (à savoir la dérivée de f en l'élément neutre). En particulier, supposons que f soit une représentation linéaire ρ, donc que $G' = GL(V)$, V étant un espace vectoriel ; l'algèbre de Lie de $GL(V)$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathfrak{E}$ des endomorphismes de V ; l'homomorphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{E}$ défini par ρ s'appelle la <u>représentation infinitésimale</u> associée à ρ ; nous la désignerons par ρ_i. La représentation adjointe de $GL(V)$ fait correspondre à tout $s \in GL(V)$ l'automorphisme $X \longrightarrow sXs^{-1}$ de $\mathfrak{E}$; les opérations de $\mathrm{Ad}\ (GL(V))$ laissent donc invariante la forme bilinéaire $(X , Y) \longrightarrow \mathrm{Tr}\ XY$ sur $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$. Il en résulte que, si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, et ρ une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$, la forme bilinéaire $(X , Y) \longrightarrow \mathrm{Tr}\ \rho_i(X)\ \rho_i(Y)$ est invariante par les opérations de $\mathrm{Ad}\ G$. Soit B_ρ cette forme, que nous appellerons la <u>forme de Killing</u> de la représentation ρ. Exprimant l'invariance de cette forme par les opérations $\mathrm{Ad}\ t$, $t \in T$, il vient

$$(1) \qquad \begin{aligned} &B_\rho(X_\alpha, X_\beta) = 0 \quad \text{si } \alpha, \beta \text{ sont des racines, } \alpha \neq -\beta \\ &B_\rho(U , X_\alpha) = 0 \quad \text{si } \alpha \text{ est une racine, } U \in \mathfrak{t} \ . \end{aligned}$$

Supposons maintenant que G soit de rang 1. Dans ce cas, G est isomorphe soit à $SL(K^2)$ soit à $PL(K^2)$. Supposons d'abord que G soit $SL(K^2)$, c'est-à-dire le groupe des matrices de degré 2 et de déterminant 1. On a alors, en prenant comme tore maximal T le groupe des matrices diagonales contenues dans G, et en choisissant convenablement la racine α,

$$\tau_{-\alpha}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_2\xi & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau_\alpha(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & c_1\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2 sont des éléments $\neq 0$ de K. Il en résulte que l'on a alors $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = c\,U_\alpha$, avec $c = c_1 c_2 \neq 0$. On vérifie facilement qu'il en est encore ainsi dans le cas où G est isomorphe à $PL(K^2)$ (mais il convient d'observer que dans ce cas, si K est de caractéristique 2, on a $T_\alpha = 0$). Soit ρ une représentation linéaire de G ; exprimant l'invariance de B_ρ, on trouve facilement la relation $B_\rho([X_\alpha, U_\alpha], X_{-\alpha}) + B_\rho(U_\alpha, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = 0$, et par suite

$$cB_\rho(U_\alpha, U_\alpha) = 2\,B_\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}) .$$

Revenons maintenant au cas d'un groupe G quelconque. A toute racine α correspond un sous-groupe Z_α de dimension 3 de G qui admet un tore maximal T_α contenu dans T ; X_α et $X_{-\alpha}$ sont des éléments de l'algèbre de Lie de Z_α ; le groupe à un paramètre H_α est un groupe à paramètre de T_α ; la restriction $\overline{\alpha}$ de α à T_α est une racine de Z_α et on a $\overline{\alpha}(H_\alpha) = 2$. On en déduit que, pour toute représentation linéaire ρ de G, on a

(2) $$c_\alpha B_\rho(U_\alpha, U_\alpha) = 2\,B_\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}) .$$

Nous allons appliquer ceci au cas où G est le groupe de type G_2 considéré en 2 ; nous utiliserons les notations du n° 2 ; en particulier, ρ sera l'application identique de G dans $GL(V)$. Nous supposerons de plus que K est de caractéristique 3. Considérons un élément T de $\mathfrak{t}$; on a $\rho_i(T).x_i = \omega_i^K(T).x_i$, $\rho_i(T).y_i = -\omega_i^K(T).y_i$; $\rho_i(T).z_0 = 0$, d'où

$$B_\rho(T, T) = -2\sum_{i=0}^{2} (\omega_i^K(T))^2 .$$

Soit H_i (resp. U_i) l'élément H_α (resp. U_α) relatif à $\alpha = \alpha_i$. En exprimant que H_i est changé en son opposé par la symétrie w_i par rapport à α_i et en tenant compte de ce que $\alpha_i(H_i) = 2$, $w_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 3\alpha_1$, $w_2(\alpha_1) = \alpha_2 + \alpha_1$, il vient $\alpha_1(H_2) = -1$, $\alpha_2(H_1) = -3$. Il en résulte que $\omega_0(H_1) = 2$, $\omega_1(H_1) = -1$, $\omega_2(H_1) = -1$, $\omega_0(H_2) = -1$, $\omega_1(H_2) = 1$, $\omega_2(H_2) = 0$. Les éléments $\omega_i^K(U_j)$ se déduisent des formules que l'on vient d'écrire ; on voit tout de suite que U_1 et U_2 sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\mathfrak{t}$, et que

$$B_\rho(a_1 U_1 + a_2 U_2) = 6\,a_1^2 - 6\,a_1 a_2 - 2\,a_2^2 = a_2^2 .$$

Tenant compte des formules (1), (2), on en conclut que T_1 et X_{α_1} appartiennent au sous-espace $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ composé des X tels que $B_\rho(X, Y) = 0$ pour tout $T \in \mathfrak{g}$, mais que ni T_2 ni X_{α_2} n'appartient à cet espace. Il résulte de l'invariance de B_ρ par la représentation adjointe que $\mathfrak{g}_0$ est stable pour la représentation adjointe. Or, soit s un élément du normalisateur de T ; il définit une opération w du groupe de Weyl. Posons, si $t \in T$ et si α est une racine, $sts^{-1} = t'$, $s\,\tau_\alpha(\xi)s^{-1} = \tau'(\xi)$; il vient alors

$$t'\,\tau'(\xi)t'^{-1} = \tau'(\alpha(t)\,\xi) .$$

Or, si $w(\alpha)$ est la transformée de la racine α par w , on a

$$(w(\alpha))(t) = \alpha(s^{-1}\,ts) ;$$

la formule précédente montre alors que τ' est un isomorphisme associé à la racine $w(\alpha)$, d'où l'on déduit que $\mathrm{Ad}\,s$ transforme X_α en un multiple scalaire $\neq 0$ de $X_{w(\alpha)}$. La relation $X_{\alpha_1} \in \mathfrak{g}_0$ entraine donc $X_\alpha \in \mathfrak{g}_0$ pour toute racine α transformée de α_1 par une opération du groupe de Weyl W ; ces racines sont $\pm\alpha_1$, $\pm(\alpha_2 + \alpha_1)$, $\pm(\alpha_2 + 2\,\alpha_1)$. On en conclut que $\mathfrak{g}_0$ est de dimension $\geqslant 7$.

L'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ est l'espace d'une représentation linéaire σ de G . Désignant par X^* la classe modulo $\mathfrak{g}_0$ d'un élément $X \in \mathfrak{g}$, on a $X^*_{\alpha_2} \neq 0$ et $\sigma(t).X^*_{\alpha_2} = \alpha_2(t)X^*_{\alpha_2}$ si $t \in T$. On en conclut que α_2 est un poids de σ . Il en est de même des transformés de α_2 par les opérations de W , i.e. des racines $\pm\alpha_2$; $\pm(\alpha_2 + 3\alpha_1)$, $\pm(2\alpha_2 + 3\alpha_1)$. De plus, on a $U_2^* \neq 0$, et U_2^* est invariant par les opérations de $\sigma(T)$, ce qui montre que 0 est un poids de σ ; σ est donc de degré $\geqslant 7$. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ est de dimesion $\leqslant 7$, on en conclut que cet espace est de dimension 7 . Nous allons maintenant montrer que cette représentation est simple. Observons d'abord que, si X , $Y \in \mathfrak{g}$, $B_\rho(X , Y)$ ne dépend que de X^* et Y^* ; B_ρ définit donc, par passage aux quotients, une forme bilinéaire B^* sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ qui est un invariant de la représentation ρ . Ceci dit, soit M un sous-espace $\neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ stable pour $\sigma(G)$. Comme les poids de σ sont tous de multiplicité 1, M est engendré par des vecteurs de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ qui appartiennent à des poids. Soit σ_M la représentation sur l'espace M ; comme les transformés d'un poids de σ_M par les opérations de W sont encore des poids de σ_M , on voit qu'il y a que 3 possibilités:

a. on a $M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$;

b. M est engendré par les X^*_α pour toutes les racines $\alpha = \pm\alpha_2$, $\pm(\alpha_2 + 3\,\alpha_1)$, $\pm(2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_1)$;

c. M est engendré par U_2^* .

De plus, le complémentaire orthogonal de M relativement à la forme bilinéaire B^* , soit M^* , est encore stable par $\sigma(M)$; si donc on était dans le cas b. , l'espace KU_2^* serait également stable par $\sigma(G)$. Tout revient donc à établir que KU_2^* n'est pas stable par $\sigma(G)$. Or, supposons pour un moment qu'il en soit ainsi ; comme G est son propre groupe des commutateurs, U_2^* est alors invariant par les opérations de $\sigma(G)$, ce qui signifie que $(\mathrm{Ad}\, s)(U_2) - U_2 \in \mathfrak{g}_0$ pour tout $s \in G$. Or on sait que la représentation $(\mathrm{Ad}\, s)_i$ de $\mathfrak{g}$ déduite de la représentation adjointe de G n'est autre que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$; on en déduit alors que $[X , U_2] \in \mathfrak{g}_0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Or il est impossible qu'il en soit ainsi, car $[U_2 , X_{\alpha_2}] = \alpha_2^K(U_2)X_{\alpha_2} = 2X_{\alpha_2}$ n'est pas dans $\mathfrak{g}_0$. Nous avons donc bien établi que la représentation σ est simple. Son poids dominant est manifestement la racine $2\alpha_2 + 3\alpha_1$ qui est le poids dominant ϖ_2 relatif à la racine α_2.

La représentation σ est une isogénie de G sur le groupe $G' = \sigma(G)$; posons $T' = \sigma(T)$, et désignons par φ l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ définie par σ. Son exposant radiciel relatif à la racine α_2 est 1 (exposé 20, corollaire au lemme 2) ; son exposant radiciel q relatif à la racine α_1 est une puissance de 3. Soient α'_1, α'_2 les racines de $\sigma(G)$ telles que $\varphi(\alpha'_1) = q\alpha'_1$, $\varphi(\alpha'_2) = \alpha_2$. Tenant compte de la proposition 4, exposé 18, on voit facilement qu'il n'y a que deux possibilités : ou bien $q = 1$, et les entiers de Cartan relatifs au système fondamental (α'_1 , α'_2) sont les mêmes que ceux relatifs au système fondamental (α_1 , α_2), ou bien $q = 3$ et les entiers de Cartan relatifs à (α'_1 , α'_2) sont les mêmes que ceux relatifs à (α_2 , α_1). Nous allons voir que c'est la seconde possibilité qui se réalise. Considérons pour cela la représentation $\overline{\sigma}$ de Z_1 induite par σ. Les sous-espaces $KX^*_{\alpha_2} + KX^*_{-\alpha_2+3\alpha_1} = N_1$, $KX^*_{-\alpha_2} + KX^*_{-(\alpha_2+3\alpha_1)} = N_2$, $KX^*_{2\alpha_2+3\alpha_1} = N_3$, $KX^*_{-(2\alpha_2+3\alpha_1)} = N_4$, $KU_2^* = N_5$ sont stables par $\overline{\sigma}(Z_1)$. Les représentations sur N_3, N_4, N_5 sont triviales. Si on désigne par $\overline{\alpha_1}$ la restriction de α_1 à T_1, celle de $\overline{\alpha_2}$ est $-(3/2)\overline{\alpha_1}$ (comme il résulte de la formule $\alpha_2(H_1) = -3$). Les poids de la représentation sur l'un ou l'autre des espaces N_1, N_2 sont donc $\pm(3/2)\overline{\alpha_1}$; chacune de ces représentations est donc équivalente à la représentation simple de poids dominant $(3/2)\overline{\alpha_1}$. Comme on est caractéristique 3, il en résulte que, si $\overline{\sigma_1}$ et $\overline{\sigma_2}$ sont les représentations sur N_1 et N_2, les coefficients de la matrice qui représente $\overline{\sigma_i}(\tau_1(\xi))$ $(s \in Z_1)$ relativement à une base de N_i sont des polynomes en ξ^3. Tenant compte de la définition des exposants radiciels, on en conclut que l'exposant radiciel de φ relatif à α_1 est 3. Nous avons donc démontré que, <u>si</u> K <u>est de caractéristique</u> 3, <u>et si</u> G <u>est un groupe de type</u> G_2, T <u>un tore maximal de</u> G <u>et</u> (α_1 , α_2) <u>un système fondamental de racines de</u> G <u>par rapport à</u> T <u>tel que la symétrie par rapport à</u> α_1 <u>transforme</u>

α_2 en $\alpha_2 + 3\alpha_1$, il y a une isogénie de G dont les exposants radiciels par rapport à α_1 et α_2 sont 3 et 1 respectivement.

4. Isogénies d'un groupe de type G_2.

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe algébrique semi-simple de type G_2, et soit T un tore maximal de G. Soient G' un groupe algébrique semi-simple, T' un tore maximal de G' et φ un isomorphisme spécial de $\underset{\sim}{Q} \circ X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \circ X(T)$. Alors G' est de type G_2 et φ est l'isomorphisme attaché à une isogénie de G sur G' qui applique T sur T'.

Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que l'entier de Cartan $c(1, 2)$ relatif à ce système de racines soit 3. Soit (α'_1, α'_2) le système fondamental de racines de G' tel que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K. Soit $c'(1, 2)$ l'entier de Cartan relatif à ce système fondamental. On a $3 q_2 = c'(1, 2) q_1$; comme $c'(1, 2)$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 ou 3, on voit que l'on a ou bien $q_1 = q_2$, $c'(1, 2) = 3$ ou bien $q_1 = 3q_2$, $c'(1, 2) = 1$; ce dernier cas n'est possible que si K est de caractéristique 3 ; de plus, si $q_1 = 3 q_2$, on a $c'(2, 1) = 3$; G' est donc bien en tous cas de type G_2. Posons dans tous les cas $q = q_2$; l'isogénie des puissances q-ièmes applique G sur un groupe $\overline{G}$ de type G_2. Soit $\overline{T}$ l'image de T, et soit γ l'isomorphisme correspondant de $\underset{\sim}{Q} \circ X(\overline{T})$ sur $\underset{\sim}{Q} \circ X(T)$. Il y a alors un système fondamental de racines $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2})$ de $\overline{G}$ par rapport à $\overline{T}$ tel que $\gamma(\overline{\alpha_i}) = q\alpha_i$ $(i = 1, 2)$. L'isomorphisme φ se met sous la forme $\gamma \circ \overline{\varphi}$, où $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{Q} \circ X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \circ X(\overline{T})$ qui applique α'_2 sur α_2 et α'_1 sur α_1 ou $3\alpha_1$ suivant que $q_1 = q_2 = q$ ou que $q_1 = 3q$. Supposons d'abord que $q_1 = q$. Il résulte alors de ce qui a été démontré plus haut qu'il y a des représentations simples $\overline{\rho}$, ρ' de $\overline{G}$, G' qui possèdent les propriétés suivantes : $\overline{\rho}$ (resp. ρ') est de poids dominant $\overline{\alpha_2} + 2\overline{\alpha_1}$ (resp. $\alpha'_2 + 2\alpha'_1$) ; on a $\overline{\rho}(\overline{G}) = \rho'(G')$, $\overline{\rho}(\overline{T}) = \rho'(T')$; si $T^* = \overline{\rho}(\overline{T})$, les exposants radiciels des isomorphismes spéciaux ζ et ζ' de $\underset{\sim}{Q} \circ X(T^*)$ sur $\underset{\sim}{Q} \circ X(\overline{T})$ et $\underset{\sim}{Q} \circ X(T')$ associés $\overline{\rho}$ et ρ' sont égaux à 1. Il en résulte que $\overline{\varphi} \circ \zeta' = \zeta$. Par ailleurs, les groupes $X(\overline{T})$ et $x(T')$ sont engendrés par les racines ; il en résulte que $\overline{\varphi}$ est spécial. Faisant usage de la proposition 6, exposé 18, on en conclut que $\overline{\varphi}$ est associé à un isomorphisme de $\overline{G}$ sur G', ce qui démontre que le théorème dans ce cas. Supposons maintenant que $q_1 = 3 q_2$; la caractéristique de K est alors 3, et nous avons vu au n° 3 qu'il y a une isogénie γ_1 de $\overline{G}$

sur un groupe $\bar{\bar{\bar{G}}}$ qui applique $\bar{\bar{T}}$ sur un tore maximal $\bar{\bar{\bar{T}}}$ de $\bar{\bar{G}}$ telle que les exposants radiciels relatifs à $\overline{\alpha_1}$ et $\overline{\alpha_2}$ de l'isomorphisme spécial attaché à cette isogénie soient 3 et 1 respectivement. On peut alors écrire $\overline{\varphi} = \gamma_1 \circ \overline{\overline{\varphi}}$, où $\overline{\overline{\varphi}}$ est un isomorphisme spécial de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(\bar{\bar{\bar{T}}})$ dont les exposants radiciels sont égaux à 1 . On conclut comme plus haut que $\overline{\overline{\varphi}}$ est attaché à un isomorphisme de G sur G' qui applique $\bar{\bar{\bar{T}}}$ sur T', ce qui achève la démonstration du théorème.