C. Chevalley

Les groupes de type A_n

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 20, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A7_0>

LES GROUPES DE TYPE A_n

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 16.12.1957)

1. - Le groupe SL(V) .

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K ; nous supposerons V de dimension $n+1>1$. Soit $SL(V)$ le groupe des automorphismes de déterminant 1 de V . Le groupe $GL(V)$ est, comme on le voit facilement, produit semi-direct de $SL(V)$ et d'un groupe de dimension 1 ; comme $GL(V)$ est connexe, on voit que $SL(V)$ est connexe. Montrons qu'il est semi-simple. Il est bien connu que l'injection canonique $SL(V) \to GL(V)$ est une représentation simple de $SL(V)$ et que le centre de $SL(V)$ est fini ; notre assertion résultera donc du

LEMME 1. - *Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur K et G un sous-groupe fermé connexe de $GL(V)$; si l'injection canonique $G \to GL(V)$ est une représentation semi-simple de G , le radical de G est un tore qui est la composante connexe de l'élément neutre dans le centre de G .*

Soient R le radical de G et R^u l'ensemble des éléments unipotents de R . Représentons V comme somme directe de sous-espaces V_k stables par G qui fournissent des représentations simples de G . Pour chaque k , il existe un $x_k \neq 0$ de V_k qui est laissé fixe par les éléments de R^u (exposé 6, théorème 1). Or il est clair que R^u est un sous-groupe distingué de G ; les éléments de V_k invariants par R^u forment donc un sous-espace stable par G et par suite identique à V_k . Ceci étant vrai pour tout k , R^u se réduit à son élément neutre. Il en résulte que R est un tore (exposé 6, théorème 3) ; étant distingué dans G , il est dans le centre de G ; le lemme 1 résulte immédiatement de **là**.

Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ une base de V . Les éléments s de $SL(V)$ qui admettent chacun des x_i comme vecteur propre forment un groupe T ; si on pose $t.x_i = \omega_i(t)x_i$ $(t \in T)$, on a $\prod_{i=1}^{n} \omega_i(t) = 1$, et, si $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont des éléments quelconques de K de produit égal à 1, il existe un élément $t \in T$ tel que $\omega_i(t) = a_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$; si on choisit les a_i de manière qu'ils soient tous distincts, ce qui est manifestement possible, le centralisateur de l'élément t est T . Il résulte de là que T est un tore maximal de $SL(V)$ et que le groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T est engendré par les ω_i ; on a (en notation additive) $\Sigma_{i=1}^{n+1} \omega_i = 0$, et tout ensemble composé de n des éléments

ω_i est une base du groupe $X(T)$. Soient i et j des indices distincts entre 1 et $n+1$; si $\xi \in K$, les formules

$$\tau_{ij}(\xi).x_i = x_i + \xi x_j ,$$

$$\tau_{ij}(\xi).x_k = x_k \quad \text{si } k \neq i$$

définissent un élément $\tau_{ij}(\xi)$ de $SL(V)$, et τ_{ij} est un isomorphisme du groupe additif K sur un sous-groupe de $SL(V)$; on a si $t \in T$,

$$t\,\tau_{ij}(\xi)t^{-1} = \tau_{ij}(\omega_j(t)\,\omega_i^{-1}(t)\xi);$$

il s'ensuit que $\omega_j - \omega_i$ est une racine de $SL(V)$ par rapport à T. Il est clair que l'on obtient ainsi $n(n+1)$ racines distinctes de $SL(V)$; comme $SL(V)$ est de dimension $(n+1)^2 - 1$ et T de dimension n, on a obtenu toutes les racines de $SL(V)$ (exposé 19, lemme 1). Il est clair que les racines $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ forment un système fondamental, et que le diagramme de Dynkin correspondant est de type A_n. Le normalisateur de T dans $SL(V)$ se compose des automorphismes $x_i \to b_i\, x_{\pi(i)}$ où π est une permutation de $\{1, \ldots, n+1\}$ et où les b_i ont pour produit la signature de π. Les éléments de $SL(V)$ qui transforment en eux-mêmes tous les sous-espaces $\sum_{j=i}^{n+1} Kx_j$ de V $(1 \leq i \leq n+1)$ forment un groupe de Borel.

Soit f l'application canonique de $GL(V)$ sur le groupe projectif $PL(V)$ de l'espace V. C'est une isogénie dont les exposants radiciels sont tous égaux à 1 (exposé 18, proposition 3) ; il résulte immédiatement de là que $PL(V)$ est aussi de type A_n. Si $T' = f(T)$, et si φ est l'isomorphisme du groupe $X(T')$ des caractères rationnels de T' sur un sous-groupe de $X(T)$ associé à f, l'image de $X(T')$ par φ est engendrée par les rapports mutuels (en notation additive, les différences mutuelles) des ω_i ; le groupe $X(T')$ est donc engendré par les racines de $PL(V)$.

Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de K ; soit H le groupe algébrique qui a les mêmes éléments que $SL(V)$ mais tel que les fonctions numériques sur H soient les puissances q-ièmes des fonctions numériques sur $SL(V)$. Pour tout $s \in SL(V)$, soit $M(s)$ la matrice qui représente s par rapport à la base $(x_1, \ldots, x_{n+1})$; l'application de $SL(V)$ qui fait correspondre à tout s l'élément s' tel que les éléments de $M(s')$ soient les puissances q-ièmes de ceux de $M(s)$ est un isomorphisme de $SL(V)$ sur H.

2. - Poids dominants minimaux.

Soient G un groupe algèbrique semi-simple, T un tore maximal de G et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T. On appelle poids dominants de G les poids dominants des représentations projectives simples de G. Désignant par $X(T)$ le groupe des caractéres rationnels de T, on peut ordonner l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ en convenant que les éléments $\geqslant 0$ sont les combinaisons linéaires à coefficients tous $\geqslant 0$ des α_i ; on appelle alors poids dominants minimaux les éléments minimaux de l'ensemble des poids dominants $\neq 0$ relativement à cette relation d'ordre.

Introduisons une métrique définie positive invariante par le groupe de Weyl W sur l'espace $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Tout élément λ de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tel que l'on ait $(\lambda \mid \alpha_i) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est $\geqslant 0$ relativement à notre relation d'ordre.

Ecrivons en effet : $\lambda = \Sigma_{i\in I'} c_i \alpha_i - \Sigma_{i\in I''} c_i \alpha_i$ où I' et I'' sont des ensembles disjoints et où les c_i sont $\geqslant 0$. Tenant compte des relations $(\alpha_i \mid \alpha_j) \geqslant 0$ si $i \neq j$, on voit tout de suite que $(\Sigma_{i\in I''} c_i \alpha_i \mid \alpha_j) \leqslant 0$ pour tout $j \in I''$; il en résulte que $(\Sigma_{i\in I''} c_i \alpha_i \mid \Sigma_{i\in I''} c_i \alpha_i) \leqslant 0$, d'où $\Sigma_{i\in I''} c_i \alpha_i = 0$, ce qui démontre notre assertion. Si ϖ est un poids dominant et w_i la symétrie par rapport à α_i, on a $w_i(\varpi) = \varpi - e_i \alpha_i$ avec $e_i \geqslant 0$; il en résulte que $(\varpi \mid \alpha_i) \geqslant 0$, donc que ϖ est > 0. Les poids dominants minimaux sont donc nécessairement des poids dominants fondamentaux ; mais, en général, les poids dominants fondamentaux ne sont pas tous minimaux.

Si λ est un élément quelconque de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$, il existe une opération w du groupe de Weyl tel que l'on ait $(w(\lambda) \mid \alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i, d'où $w(\lambda) \geqslant 0$. En effet, soit λ' en élément maximal (relativement à notre relatioh d'ordre) dans l'ensemble des transformés de λ par les opérations de W ; comme w_i est la symétrie par rapport à α_i, on a $w_i(\lambda') = \lambda' - m_i \alpha_i$, m_i étant un nombre rationnel ; il résulte du caractère maximal de λ' que les m_i sont tous $\geqslant 0$, d'où $(\lambda' \mid \alpha_i) \geqslant 0$, ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 1. - Soit ρ une représentation projective simple de G dont le poids dominant ϖ soit minimal. Les poids $\neq 0$ de ρ sont alors les transformés de ϖ par les opérations du groupe de Weyl W ; ils sont tous de multiplicité 1.

Soit en effet ϖ' un poids de ρ ; il existe une opération w de W telle que l'on ait $(w(\varpi') \mid \alpha_i) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; on a donc $w_i(w(\varpi')) = w(\varpi') - e_i \alpha_i$, les e_i étant des nombres rationnels $\geqslant 0$. Mais tout transformé de ϖ' par une opération de W est encore un poids de ρ, et les différences mutuelles des poids de ρ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines (exposé 16, proposition 1) ; les e_i sont donc entiers.

Il en résulte que, si $\varpi' \neq 0$, $w(\varpi')$ est un poids dominant ; comme $\varpi - w(\varpi')$ est $\geqslant 0$ (exposé 16) , il résulte du caractère minimal de ϖ que $w(\varpi') = \varpi$. Il est clair que deux poids de ρ qui se déduisent l'un de l'autre par une opération de W ont même multiplicité ; comme ϖ est de multiplicité 1, il en est de même de ϖ'.

COROLLAIRE. - Les notations étant celles de la proposition 1, si on suppose de plus que ϖ n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers de $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$, 0 n'est pas un poids de ρ et le degré de ρ est le nombre des transformés distincts de ϖ par les opérations de W .

Cela résulte de ce que la différence entre deux poids de ρ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i .

[On notera que nous appelons degré d'une représentation projective opérant dans l'espace projectif $\mathcal{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V la dimension de l'espace V et non pas celle de l'espace $\mathcal{P}(V)$] .

Appliquons ceci aux divers types de diagrammes de Dynkin connexes. Nous utiliserons les notations de l'exposé 19.

1° Type A_n . On reconnait facilement que tous les poids dominants fondamentaux sont minimaux. Les transformés du k-ième poids dominant fondamental ϖ_k par les opérations de W sont tous les éléments $\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}$ où $i_1 , \ldots , i_k$ sont des indices distincts entre 1 et $n + 1$. Aucun des poids ϖ_k n'est combinaison linéaire à coefficients entiers des racines ; si donc G est de type A_n , le degré de la représentation projective simple de poids dominant ϖ_k est le coefficient binomial $\binom{n+1}{k}$.

2° Type B_n . Les seuls poids dominants minimaux sont ϖ_1 et ϖ_n . Le poids ϖ_1 est combinaison linéaire entière des racines, mais il n'en est pas ainsi de ϖ_n . Les transformés de ϖ_n par les opérations de W sont les $(1/2)\sum_{i=1}^{n} e(i)\, \varpi_i$, $e(i) = \pm 1$. Si donc G est de type B_n , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_n de G est de degré 2^n .

3° Type C_n . Le seul poids dominant minimal est ϖ_1 , qui n'est pas combinaison linéaire entière des racines. Ses transformés par les opérations de W sont les $\pm\, \varpi_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Si donc G est de type C_n , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_1 de G est de degré $2n$.

4° Type D_n . Les seuls poids dominants minimaux sont ϖ_1 , ϖ_{n-1} et ϖ_n ; ϖ_1 n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines ; ses transformés par les opérations de W sont les $\pm\varpi_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Donc, si G est de type D_n , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_1 de G est de degré $2n$; on voit facilement de la même manière que les représentations projectives simples de poids dominants ϖ_{n-1} et ϖ_n sont de degré 2^{n-1} .

5° Type E_6 . Le poids ϖ_1 est minimal ; il n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines et ses transformés par les opérations de W sont les ω_i , $\omega_j - s$, $s - (\omega_i + \omega_j)$ $(i \neq j)$; on en conclut que, si G est de type E_6 , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_1 de G est de degré 27.

6° Type E_7 . Le poids ϖ_1 est minimal ; il n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines ; ses transformés par les opérations de W sont les $\pm\omega_i$, $\pm(s - (\omega_i + \omega_j))$ $(i \neq j)$. On en conclut que, si G est de type E_7 , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_1 de G est de degré 56.

Dans le cas des types E_8 , F_4 , G_2 , tous les poids dominants sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines.

3.— Classification des groupes de type A_n .

LEMME 2. - Soit f un homomorphisme d'un groupe algébrique semi-simple G dans un groupe algébrique semi-simple G_1 ; soient T un tore maximal de G et T_1 un tore maximal de G_1 contenant $f(T)$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{Q} \otimes X(T_1)$ dans $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui fait correspondre à tout $\theta_1 \in X(T_1)$ le caractère rationnel $t \to \theta_1(f(t))$ de T . Soit σ une représentation linéaire ou projective de G_1 ; les poids de la représentation $\sigma \circ f$ de G sont alors les images par φ des poids de σ .

L'homomorphisme σ (resp. $\sigma \circ f$) de G_1 (resp. G) dans $\sigma(G_1)$ définit une application linéaire ψ_1 (resp. ψ) de $\mathbb{Q} \otimes X(\sigma(T_1))$ dans $\mathbb{Q} \otimes X(T_1)$ (resp. $\mathbb{Q} \otimes X(T)$) telle que l'on ait

$$(\psi_1(\bar\theta_1))(t_1) = \bar\theta_1(\sigma(t_1)) \quad (\text{resp. } (\psi(\bar\theta_1))(t) = \bar\theta_1(\sigma(f(t)))) \quad \text{pour tout } \bar\theta_1 \in X(T_1)$$

et tout $t_1 \in T_1$ (resp. $t \in T$) ; il est clair que $\psi = \varphi \circ \psi_1$. Dans le cas où

σ est linéaire (resp. projective), elle opère dans un espace vectoriel V (resp. dans l'espace projectif $\mathfrak{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V), et l'application identique de $\sigma(G_1)$ dans $GL(V)$ (resp. $PL(V)$) est une représentation linéaire (resp. projective) τ de $\sigma(G_1)$. Les poids de σ (resp. $\sigma \circ f$) sont par définition les images par ψ_1 (resp. ψ) de ceux de τ, ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE. - Les notations étant celles du lemme 2, supposons de plus que f soit une isogénie et soit une représentation (projective ou linéaire) simple de G dont le poids dominant (relativement à un système fondamental $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de racines de G par rapport à T) soit le k-ième poids dominant fondamental ϖ_k (i.e. celui associé à la racine α_k). La racine α_k est alors l'image par φ d'une racine de G_1.

En effet, il y a des racines α'_i de G_1 telles que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$, les q_i étant des entiers > 0 ; ces racines forment un système fondamental de racines G_1. Soient w_k et w'_k les symétries par rapport à α_k et α'_k ; soit ϖ'_k l'élément de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T_1)$ tel que $\varphi(\varpi'_k) = \varpi_k$. On a donc $w_k(\varpi_k) = \varpi_k - \alpha_k$. Par ailleurs, on a $w_k \circ \varphi = \varphi \circ w'_k$ (exposé 18, proposition 4) ; il en résulte que $w'_k(\varpi'_k) = \varpi'_k - q_k^{-1}\alpha'_k$. Par ailleurs, il résulte du lemme 2 que ϖ'_k est un poids d'une représentation (linéaire ou projective) de G_1 ; l'élément $\varpi'_k - w'_k(\varpi'_k)$, différence de deux poids d'une même représentation simple de G_1, est donc une combinaison linéaire à coefficients entiers des α'_i. On en conclut que $q_k = 1$, ce qui démontre le corollaire.

Soit n un entier > 0 ; nous désignerons par $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ la base canonique de K^{n+1} et par $\bar{T}$ le tore maximal de $PL(K^{n+1})$ composé des opérations qui laissent fixes les points $K\bar{x}_i$ de l'espace projectif $\mathfrak{P}(K^{n+1})$. A chaque $\bar{x}_i$ correspond un poids $\bar{\omega}_i$ de la représentation identique de $PL(K^{n+1})$ sur lui-même ; si on pose $\bar{\alpha}_i = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$, les $\bar{\alpha}_i$ forment un système fondamental de racines de $PL(K^{n+1})$ par rapport à $\bar{T}$.

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type A_n, et soit T un tore maximal de G ; soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets correspondant à α_i et α_{i+1} (où $i < n$) soient liés par une arête. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ des éléments de somme nulle de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ tels que $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$; ω_1 est alors le poids dominant d'une représentation projective simple ρ de G, opérant sur l'espace projectif $\mathfrak{P}(V)$

associé à un espace vectoriel V. On a vu au numéro 12 que V est de dimension $n+1$ et que les poids de ρ sont les ω_i $(1 \leq i \leq n+1)$; soit x_i un point de V qui donne lieu au poids ω_i ; les éléments $x_1, \dots, x_{n+1}$ forment alors une base de V. Par ailleurs, la dimension de G est $(n+1)^2 - 1$ (exposé 19, lemme 1). Comme G est presque simple, ρ est une isogénie, d'où $\dim \rho(G) = \dim G = (n+1)^2 - 1$; comme $\rho(G) \subset PL(V)$, on a $\rho(G) = PL(V)$. Le groupe $T' = \rho(T)$ est le groupe des opérations de $PL(V)$ qui laissent fixe chacun des points Kx_i ; chaque x_i donne lieu à un poids ω'_i de la représentation de $PL(V)$ constituée par son application identique sur lui-même. Soit φ' l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associe à l'isogénie ρ ; on a alors $\varphi'(\omega'_i) = \omega_i$ (cf. la démonstration du lemme 2). Il y a un isomorphisme de V sur K^{n+1} qui applique x_i sur $\overline{x}_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$; cet isomorphisme définit un isomorphisme h de $PL(V)$ sur $PL(K^{n+1})$, et $h \circ \rho$ est une isogénie f de G sur $PL(K^{n+1})$. Si φ est l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à f, il est clair que $\varphi(\overline{\omega}_i) = \omega_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$, d'où $\varphi(\overline{\alpha}_i) = \alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de K ; l'isogénie des puissances q-ièmes applique G sur un groupe $\widetilde{G}$. Faisant usage de l'isogénie de $\widetilde{G}$ sur $PL(K^{n+1})$ qu'on vient de construire, on voit qu'il y a une isogénie de G sur $PL(K^{n+1})$ telle que l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à cette isogénie applique $\overline{\alpha}_i$ sur $q\alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$

THÉORÈME 1. - <u>Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G', $X(T)$ et $X(T')$ les groupes des caractères rationnels de G et G' et φ un isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Si l'un au moins des groupes G, G' est de type A_n, il en est de même de l'autre, et φ est associé à une isogénie de G sur G'.</u>

Comme toutes les racines d'un groupe de type A_n se déduisent les unes des autres par les opérations du groupe de Weyl, tous les exposants radiciels de φ sont égaux entre eux ; soit q leur valeur commune. Il y a donc une bijection ψ de l'ensemble des racines de G sur l'ensemble des racines de G' telle que $\varphi(\psi(\alpha)) = q\alpha$ pour toute racine α ; il en résulte immédiatement que G et G' sont de même type, donc sont tous deux de type A_n. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets relatifs à α_i et α_{i+1} soient liés par une arête $(1 < i < n)$; si α'_i est la racine de G' telle que $\varphi(\alpha'_i) = q\alpha_i$, les α'_i forment un système fondamental de racines de G' par rapport à T' , et, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets relatifs à α'_i et α'_{i+1} sont liés par une arête $(1 \leq i < n)$. Utilisons les mêmes notations que plus haut en ce qui concerne le groupe $PL(K^{n+1})$; il résulte de ce que nous avons dit qu'il existe une isogénie g' de G' sur $PL(K^{n+1})$ qui applique T' sur $\overline{T}$ et qui est tel que l'isomorphisme spécial γ' qui lui est associé applique $\overline{\omega}_i$ sur ω'_i $(1 \leq i \leq n+1)$. Posons $\gamma = \varphi \circ \gamma'$; c'est un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui applique $\overline{\alpha}_i$ sur $q\alpha_i$; il résulte de ce qui a été dit plus haut que γ est associé à une isogénie g de G sur $PL(K^{n+1})$ qui applique T sur $\overline{T}$. L'existence des isogénies g , g' démontre le théorème 1, compte tenu de la proposition 6, exposé 18.

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type A_n , et soit T un tore maximal de G . Soient P et R respectivement le groupe des poids et le groupe des racines de G par rapport à T ; on a donc

$$R \subset X(T) \subset P .$$

Il résulte immédiatement de l'étude que nous avons faite des diagrammes de type A_n (exposé 19) que P/R est un groupe cyclique d'ordre $n+1$. Le groupe $X(T)/R$ est donc un groupe cyclique dont l'ordre d divise $n+1$; nous dirons que d est l'<u>invariant numérique de</u> G . Nous allons montrer qu'il existe des groupes de type A_n admettant pour invariant numérique un diviseur donné quelconque de $n+1$. Partons pour cela du groupe $SL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Si $1 \leq k \leq n$, soit V_k la puissance extérieure k-ième de l'espace V ; si $s \in SL(V)$, soit $\rho_k(s)$ la puissance extérieure k-ième de s ; ρ_k est donc une représentation rationnelle de $SL(V)$. Soit $(x_1 , \ldots , x_{n+1})$ une base de V et soit T le tore maximal de $SL(V)$ composé des opérations qui admettent chacun des x_i comme vecteur propre ; soit $t.x_i = \omega_i(t)x_i$ $(t \in T)$. Soit $(i_1 , \ldots , i_k)$ une suite strictement croissante d'indices entre 1 et $n+1$; désignons par $y(i_1 , \ldots , i_k)$ le produit extérieur des éléments $x_{i_1} , \ldots , x_{i_k}$. On a alors

$$\rho_k(t).y(i_1 , \ldots , i_k) = \omega_{i_1}(t) \ldots \omega_{i_k}(t)y(i_1 , \ldots , i_k) .$$

Les poids de la représentation ρ_k sont donc, en notation additive, les $\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}$ pour toutes les suites strictement croissantes de k indices. Ces poids sont tous transformés les uns des autres par les opérations du groupe de Weyl ; il en résulte tout de suite que ρ_k est une représentation simple dont le poids dominant est le k-ième poids dominant fondamentaux ϖ_k relativement au système fondamental de racines formé des $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$. Soit

$$G_k = \rho_k(SL(V)) \ , \ T_k = \rho_k(T) \ ;$$

soit φ_k l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T_k)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à ρ_k . Les exposants radiciels de φ_k , qui sont tous égaux, sont égaux à 1 (corollaire au lemme 2). Il en résulte tout de suite que φ_k applique le groupe R_k des racines de G_k sur R ; il applique par ailleurs $X(T_k)$ sur le groupe engendré par les $\omega_i + \ldots + \omega_{i_k}$, donc aussi sur le groupe engendré par R et ϖ_k . Or, il résulte immédiatement de l'expression explicite de ϖ_k donnée dans l'exposé 19 que le groupe engendré par R et ϖ_k contient R comme sous-groupe d'indice $m^{-1}(n+1)$, où m est le p.g.c.d. de k et $n+1$; il en résulte que, si d est un diviseur $\neq 1$ de $n+1$, l'invariant numérique de G_k est d si on prend $k = d^{-1}(n+1)$. Par ailleurs, il résulte de ce qui a été dit plus haut que $PL(V)$ est un groupe d'invariant numérique 1.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> n <u>un entier</u> > 0 ; <u>si</u> d <u>est un diviseur de</u> $n+1$ <u>il existe un groupe algébrique semi-simple de type</u> A_n <u>et d'invariant numérique</u> d ; <u>tous les groupes satisfaisant à ces conditions sont isomorphes entre eux.</u>

La première assertion a déjà été établie. Soient G et G' des groupes de type A_n ayant même invariant numérique, T et T' des tores maximaux de G et G' . Comme un groupe cyclique n'a qu'un seul sous-groupe d'ordre donné, il est clair qu'il y a un isomorphisme φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui applique les racines de G' sur celles de G et qui applique $X(T')$ sur $X(T)$; l'isomorphisme φ est associé à une isogénie f de G sur G' (théorème 1), et f est un isomorphisme en vertu de la proposition 6, exposé 18.

COROLLAIRE. - <u>Tout groupe algébrique semi-simple de rang</u> 1 <u>est isomorphe soit à</u> $SL(K^2)$ <u>soit à</u> $PL(K^2)$.

Un pareil groupe est en effet de type A_1 .

Reprenons maintenant les représentations ρ_k considérées plus haut. Elles donnent naissance à des représentations projectives $\tilde{\rho}_k$ de $PL(V)$, opérant dans les espaces $PL(V_k)$. Soient H un groupe algébrique et σ une représentation linéaire (resp. projective) de H opérant dans V (resp. $\mathfrak{P}(V)$) ; $\rho_k \circ \sigma$) (resp. $\tilde{\rho}_k \circ$ est alors une représentation linéaire (resp. projective) de H opérant dans V_k

(resp. $\mathfrak{P}(V_k)$) et qu'on appelle la puissance extérieure k-ième de σ . Considérons en particulier le cas où $k = n$; la représentation ρ_n de $SL(V)$ est évidemment équivalente à la représentation contragrédiente de ρ_1 , qui fait correspondre à tout élément $s \in SL(V)$ l'automorphisme ${}^t s^{-1}$ du dual de V . Par ailleurs, il résulte de la formule $\omega_1 + \ldots + \omega_{n+1} = 0$ que ses poids sont les $-\omega_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$. Si σ est une représentation linéaire de H , $\rho_n \circ \sigma$ est équivalente à la représentation contragrédiente de σ , qui opère dans le dual de V et associe à tout $z \in H$ l'automorphisme ${}^t\sigma(z^{-1})$. De même, si σ est projective, $\tilde{\rho}_n \circ \sigma$ est équivalente à la représentation projective contragrédiente à σ qui opère dans l'espace projectif $\mathfrak{P}(V^*)$ associé au dual de V qu'on peut identifier à l'espace des hyperplans de l'espace $\mathfrak{P}(V)$; si $z \in H$, la contragrédiente de σ fait correspondre à z l'automorphisme qui transforme tout hyperplan M de $\mathfrak{P}(V)$ en $\sigma(M)$. Nous avons donc le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Soit σ une représentation linéaire ou projective d'un groupe algébrique G . Les poids de la représentation contragrédiente de σ sont alors les opposés des poids de σ .

COROLLAIRE. - Soit G un groupe algébrique semi-simple, et soit T un tore maximal de G . Si l'automorphisme $\theta \to -\theta$ de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ appartient au groupe de Weyl de G (ce qui se produit dans le cas où G est de l'un des types B_n , C_n , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2) toute représentation linéaire ou projective simple ρ de G est équivalente à sa contragrédiente ; si V est l'espace d'une représentation linéaire simple de G , il y a une forme bilinéaire β non-dégénérée sur $V \times V$ et une seule à un facteur constant près qui est invariante par $\rho(G)$; β est soit symétrique, soit alternée.

Comme les opérations du groupe de Weyl permutent entre eux les poids de ρ , on voit que l'opposé de tout poids de ρ est un poids de ρ , donc que ρ a les mêmes poids que sa contragrédiente ρ^* . En particulier, ρ a le même poids dominant que ρ^* , donc lui est équivalente. Supposons ρ linéaire ; il résulte alors du fait que ρ est équivalente à sa contragrédiente que les opérations de $\rho(G)$ laissent invariante au moins une forme bilinéaire non dégénérée sur $V \times V$. Soit β une forme bilinéaire $\neq 0$ sur $V \times V$ invariante par $\rho(G)$; l'espace des vecteurs x tels que $\beta(x , y) = 0$ pour tout $y \in V$ est $\neq V$ et stable par $\rho(G)$; cet espace est donc $\{0\}$ ce qui montre que β n'est pas dégénérée. Si β' est une forme bilinéaire quelconque sur $V \times V$ invariante par $\rho(G)$, il en est de même de $c\beta + c'\beta$ (où c, c' sont dans K) ; or, K étant algébriquement clos, on peut toujours choisir c, c' non nuls tous deux tels que $c\beta + c'\beta'$ soit dégénérée ; cette forme est alors nulle, et β' est proportionnelle à β. Appliquons ceci au cas où β' est défini par $\beta'(y, x) = \beta(x, y)$: il y a un $m \in K$ tel que $\beta' = m\beta$. Il est clair que $m^2 = 1$; β est donc symétrique ou alternée.

4. - Les représentations simples d'un groupe de rang 1.

Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur K, et soit (x, y) une base de V. Nous nous proposons de rechercher les représentations simples du groupe $SL(V)$.

Etablissons d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - *Soient ρ et ρ' des représentations linéaires d'un groupe G telles que les représentations projectives déduites de ρ et ρ' soient équivalentes. Si G est son propre groupe dérivé (en particulier si G est un groupe algébrique semi-simple), ρ et ρ' sont équivalentes.*

Soient V et V' les espaces de ρ et ρ' ; soient $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$ les représentations projectives déduites de ρ et ρ' ; elles opèrent sur les espaces projectifs $\mathfrak{P}(V)$ et $\mathfrak{P}(V')$ associés à V et V'. Il y a par hypothèse un isomorphisme $\tilde{\mu}$ d'espaces projectifs de $\mathfrak{P}(V)$ sur $\mathfrak{P}(V')$ tel que

$$\tilde{\mu} \circ \tilde{\rho}(s) = \tilde{\rho}'(s) \circ \tilde{\mu} \quad \text{pour tout} \quad s \in G .$$

L'isomorphisme $\tilde{\mu}$ provient par définition d'un isomorphisme μ de V sur V' ; si $s \in G$, $\mu \circ \rho(s)$ et $\rho'(s) \circ \mu$ sont des isomorphismes de V sur V' qui définissent le même isomorphisme de $\mathfrak{P}(V)$ sur $\mathfrak{P}(V')$. Or il est bien connu que les seuls automorphismes d'un espace vectoriel V qui définissent l'automorphisme identique de $\mathfrak{P}(V)$ sont les homothéties de V de rapports $\neq 0$; il y a donc une application χ de G dans l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K telle que l'on ait $\mu \circ \rho(s) = \chi(s)(\rho'(s) \circ \mu)$ pour tout $s \in G$. Comme ρ et ρ' sont des représentations, il en résulte que $\chi(st) = \chi(s)\,\chi(t)$ si $s, t \in G$. Si G est son propre groupe dérivé, il résulte de là que $\chi(s) = 1$ pour tout $s \in G$, donc que ρ et ρ' sont équivalentes.

On voit donc que deux représentations linéaires simples d'un groupe algébrique semi-simple G qui ont même poids dominant (relativement à un tore maximal T de G et à un système fondamental de racines de G par rapport à T) sont équivalentes.

Ceci dit, revenons au problème de la déterminantion des représentations linéaires simples de $SL(V)$. Nous désignerons par T le tore maximal de $SL(V)$ composé des éléments t qui admettent x et y comme vecteurs propres ; nous posons, si $t \in T$, $t.x = \omega(t)x$, d'où $t.y = \omega^{-1}(t).y$. Les racines de G par rapport à T sont 2ω et -2ω (en notation additive) ; nous posons $2\omega = \alpha$, et nous considérons α comme racine fondamentale. Les poids dominants sont les $e\omega$, e entier $\geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, soit V_n l'espace des éléments homogènes de degré n de l'algèbre symétrique sur V ; il se compose des formes de degré n en x et y . L'espace V_n est l'espace d'une représentation σ_n de $SL(V)$: si $s \in SL(V)$, $\sigma_n(s)$ est la puissance symétrique n-ième de s . Soit W_n le sous-espace de V engendré par les puissances n-ièmes des éléments de V ; il est manifestement stable par $\sigma_n(SL(V))$; soit ζ_n la représentation d'espace W_n induite par ζ_n ; montrons qu'elle est simple. Désignons par W'_n un sous-espace de W_n stable par ζ_n et $\neq \{0\}$. Soit B le groupe des éléments $s \in SL(V)$ qui laissent invariant le sous-espace Kx de V ; c'est un groupe de Borel. L'espace W'_n contient donc un élément $z \neq 0$ tel que l'espace Kz soit stable par les opérations de B . Si on désigne par $\tau(\xi)(\xi \in K)$ l'automorphisme de V qui laisse x invariant et change y en $y + \xi x$, $\tau(\xi)$ est un élément unipotent de B , de sorte que $\zeta_n(\tau(\xi))$ laisse z invariant. Ecrivant $z = F(x , y)$, où F est une forme de degré n , on voit que $F(x , y) = F(x , y + \xi x)$ pour tout $\xi \in K$, ce qui n'est pas possible que si $F(x , y) = cx^n (c \in K)$. On a donc $x^n \in W'_n$; si x' est un vecteur $\neq 0$ quelconque de V , il y a une opération de $SL(V)$ qui transforme x en x' , d'où $x'^n \in W'_n$ et par suite $W'_n = W_n$, ce qui démontre notre assertion. (On notera que la démonstration montre même que W_n est contenu dans tout sous-espace de V_n stable par les opérations de $\sigma_n(SL(V))$). Les poids de la représentation σ_n sont (en notation additive) les $k\omega$ pour $-n \leq k \leq n$, et $n\omega$ est un poids de ζ_n ; c'est donc le poids dominant de ζ_n . On en conclut que <u>toute représentation linéaire simple de</u> $SL(V)$ <u>est équivalente à une et une seule des représentations</u> ζ_n .

Si K est de caractéristique 0 , il est bien connu que $W_n = V_n$ pour tout n . Supposons maintenant que K soit de caractéristique $p > 0$. Posons, pour ξ , $\xi' \in K$,

$$(\xi x + \xi' y)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \; c_k \, \xi^k \, \xi'^{n-k} \, x^k \, y^{n-k} \quad (c_k \in K) \; ;$$

on voit alors facilement que W_n est engendré par les $x^k y^{n-k}$ pour les k tels que $c_k \neq 0$, i.e. pour les k tels que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ ne soit pas divisible par p . Ecrivons n dans le système de numération de base p : $n = \sum_{r=0}^{h} a_r p^r$ avec $0 \leq a_r < p$. On a alors

$$(\xi x + \xi' y)^n = \prod_{r=0}^{h} (\xi^{p^r} x^{p^r} + \xi'^{p^r} y^{p^r})^{a_r} .$$

On en conclut facilement que les nombres k sont ceux qui peuvent se mettre sous la forme $\sum_{r=0}^{h} b_r p^r$ avec $0 \leq b_r \leq a_r$ pour tout r .

Donc : <u>si</u> K <u>est de caractéristique</u> 0 , <u>la représentation</u> ζ_n <u>de poids dominant</u> $n\omega$ <u>est de degré</u> $n + 1$; <u>si</u> K <u>est de caractéristique</u> $p > 0$, <u>et si</u> $n = \sum_{r=0}^{h} a_r p^r$, <u>avec</u> $0 \leq a_r < p$, ζ_n <u>est de degré</u> $\prod_{r=0}^{h} (a_r + 1)$.

De plus, on notera qu'il résulte de ce que nous avons dit que la représentation σ_n , puissance symétrique n-ième de l'application identique $SL(V) \to GL(V)$, n'est semi-simple (dans le cas où K est de caractéristique $p > 0$) que si ou bien $n < p$ ou bien n est de la forme $p^s - 1$. Enfin, supposant toujours K de caractéristique p et $n = \sum_{r=0}^{h} a_r p^r$, $0 \leq a_r < p$, ζ_n est équivalente au produit tensoriel des représentations simples de poids dominants $a_0 \omega$, $a_1 p\omega$, ... , $a_h p^h \omega$. La représentation simple de poids dominant n^h de $SL(V)$ est de degré 2 et admet $p^h\omega$ et $- p^h\omega$ comme seuls poids.