C. CHEVALLEY

Les isogénies

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 18, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A5_0>

LES ISOGÉNIES

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 25.11.1957)

Rappelons que, si G et G' sont des groupes algèbriques, on appelle isogénie de G sur G' un épimorphisme rationnel de noyau fini de G sur G'. Il est clair que, s'il existe une isogénie de G sur G', on a $\dim G = \dim G'$. Si H est un sous-groupe fermé de G, $f(H)$ est un sous-groupe fermé de G'. Le noyau N de f est un sous-groupe distingué fini de G, donc contenu dans le centre de G. Si H' est un sous-groupe connexe de G', il y a un sous-groupe connexe H et un seul de G tel que $f(H) = H'$, à savoir la composante connexe H_o de l'élément neutre dans $\bar{f}^1(H')$. En effet, comme f est surjectif, on a $f(\bar{f}^1(H')) = H'$; $f(H_o)$ est donc un sous-groupe fermé d'indice fini de H', d'où $f(H_o) = H'$ puisque H' est connexe. Par ailleurs, si H est un sous-groupe connexe de $\bar{f}^1(H')$, on a $H \subset H_o$. Comme f est de noyau fini, on a $\dim H_o = \dim H'$, et, si $f(H) = H'$, $\dim H = \dim H' = \dim H_o$, d'où $H = H_o$.

Soit f une isogénie du groupe G sur le groupe G' ; soient Φ et Φ' les corps de fonctions numériques sur G et G'. Le cohomomorphisme φ de f est alors un isomorphisme φ de Φ' sur un sous-corps Φ_1 de Φ.

On peut montrer que la connaissance de Φ_1 détermine l'isogénie f à un isomorphisme près ; d'une manière précise, si f' et f'' sont des isogénies de G sur des groupes G' et G'' dont les cohomomorphismes appliquent les corps de fonctions numériques sur G' et G'' sur le même sous-corps Φ_1 de Φ, il y a un isomorphisme h de G' sur G'' tel que $h \circ f' = f''$. On peut aussi caractériser comme suit les sous-corps Φ_1 de Φ qui correspondent à des isogénies de G. Pour tout $s \in G$, désignons par $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ les cohomomorphismes des translations à gauche et à droite par s dans G ; pour qu'un sous-corps Φ_1 de Φ (contenant K) soit associé à une isogénie de G, il faut et suffit que Φ soit une extension algébrique de degré fini de Φ_1 et que Φ_1 soit transformé en lui-même par les opérations $\lambda(s)$, $\mu(s)$ pour tout $s \in G$. L'isogénie f est dite <u>radicielle</u> si Φ est une extension radicielle de Φ_1 ; on dit de plus que f est radicielle de hauteur 1 si on a $\Phi^p \subset \Phi_1$, où Φ^p est le corps des puissances p-ièmes des fonctions de Φ. On montre que Φ_1 est alors déterminé par la connaissance de celles des dérivations invariantes à gauche (ou d'ailleurs à droite) qui sont nulles sur Φ_1 ; ces dérivations forment un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , qui est stable relativement à la représentation adjointe de G et à l'opération de puissance p-ième dans $\mathfrak{g}$. Réciproquement, on peut montrer que tout sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ satisfaisant à ces conditions est associé à une isogénie radicielle f de hauteur 1. Nous ne démontrerons pas ces résultats, qui ne seront pas utilisés dans la suite. Nous allons cependant montrer que, pour tout groupe algébrique G , dont nous désignerons le corps des fonctions numériques par Φ , et pour toute puissance q de l'exposant caractéristique de K, il existe une isogénie de G sur un groupe G' dont le cohomomorphisme applique le corps des fonctions numériques sur G' sur le corps Φ^q des puissances q-ièmes des éléments de Φ . Il est bien connu que l'ensemble des points de G peut être muni d'une structure de variété telle que les fonctions numériques sur cette variété soient les puissances q-ièmes des fonctions de Φ ; désignons cette variété par G' . L'application identique f de G est un morphisme de G dans G' dont le cohomomorphisme est l'isomorphisme d'inclusion de Φ^q dans Φ. Il reste à montrer que l'application $(s , t) \longrightarrow st$ est un morphisme de la variété $G' \times G'$ dans G' . Or cette application est un morphisme de $G \times G$ dans G ; son cohomomorphisme est un isomorphisme μ de Φ sur le corps des fonctions numériques sur $G \times G$, qui s'identifie au corps des frations de $\Phi \otimes \Phi$. Il est clair que $\mu(\Phi^q)$ est contenu dans le corps des fractions de $\Phi^q \otimes \Phi^q$, donc dans le corps des fonctions numériques sur $G' \times G'$; la restriction de μ à Φ^q est le cohomomorphisme d'une fonction m' (a priori non nécessairement partout définie) sur la variété $G' \times G'$ à valeurs dans G' et que l'on a $m' \odot f = f \odot m$ en désignant par m la multiplication dans G , d'où $m'(s , t) = st$ si m' est définie en (s , t) . Par ailleurs, G et G' ont même topologie, et le graphe M de m est une sous-variété fermée de $G \times G \times G$, donc aussi de $G' \times G' \times G'$ (car $G' \times G' \times G'$ est la varieté dont les points sont ceux de $G \times G \times G$ et dont les fonctions numériques sont les puissances q-ièmes des fonctions sur $G \times G \times G$). Il en résulte que M est l'adhérence du graphe de m' dans $G' \times G' \times G''$. La projection $(s , t , u) \longrightarrow (s , t)$ de $G' \times G' \times G'$ sur $G' \times G'$ induit une bijection π de M sur $G' \times G'$ qui est aussi un morphisme birationnel. Comme G est une variété normale, il en est de même de G' ; on en déduit que π est un isomorphisme de M sur $G' \times G'$, donc que m' est partout définie et que G' est un groupe. Nous appellerons <u>isogénie des puissances</u> q-<u>ièmes</u> l'isogénie f du groupe G que l'on vient de définir ; du point de vue ensembliste, c'est l'application identique de G .

PROPOSITION 1. - *Soit f une isogénie d'un groupe algébrique connexe G sur un groupe algébrique connexe G'. Si l'un des groupes G, G' est semi-simple (resp. presque-simple), il en est de même de l'autre.*

Soient H un sous-groupe fermé connexe de G et $f(H) = H'$. Si H est distingué (resp. résoluble) dans G, il est clair que H' est distingué (resp. résoluble) dans G'. Réciproquement, si H' est distingué dans G', $f^{-1}(H')$ est distingué dans G, et il en est de même de H qui est le composante connexe de l'élément neutre dans G. Si H' est résoluble, il en est de même de H ; car, si N est le noyau de f, $f^{-1}(H)/N$ est isomorphe à H', donc résoluble, et N est dans le centre de $f^{-1}(H')$, ce qui montre que $f^{-1}(H')$ est résoluble ; la proposition 1 résulte immédiatement de là.

Soit maintenant G un groupe semi-simple, et soit T un tore maximal de G. Si α est une racine de G par rapport à T ; il existe un isomorphisme τ_α du groupe additif K dans G tel que $t\tau_\alpha(\xi)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\xi)$ si $\xi \in K$, $t \in T$; nous dirons que τ_α est associé à α ; les éléments de $\tau_\alpha(K)$ sont unipotents ; nous dirons que le groupe $\tau_\alpha(K)$ est un sous-groupe unipotent de G associé à α.

LEMME 1. - *Soit P un sous-groupe connexe de dimension 1 de G composé d'éléments unipotents et dont le normalisateur contient T ; il y a une racine α et une seule telle que P soit associé à α.*

Le groupe PT est résoluble et connexe ; il est donc contenu dans un groupe de Borel B de G, et P est contenu dans l'ensemble B^u des éléments unipotents de B. Soient α_i $(1 \leq i \leq N)$ les racines de G qui sont négatives sur la chambre de Weyl associée à B ; il y a alors pour chaque i un groupe P_i associé à α_i contenu dans B^u, et P est le produit semi-direct de ceux des P_i qu'il contient (exposé 13, théorème 1). Comme $\dim P = 1$, il y a un i tel que $P_i = P$. Soit τ_i un isomorphisme de K sur $P_i = P$ associé à α_i ; si P est associé à une racine α, soit τ un isomorphisme de K sur P associé à α. Comme τ et τ_i sont des isomorphismes, on a $\tau(\xi) = \tau_i(c\xi)$ avec un $c \neq 0$ de K ; il en résulte aussitôt que $\alpha = \alpha_i$.

Soit maintenant f une isogenie de G sur un groupe G' ; $T' = f(T)$ est alors un tore maximal de G', et la restriction f_T de f à T est une isogénie de T sur T'. Elle détermine un isomorphisme $\theta' \longrightarrow \theta' \circ f_T$ du groupe $X(T')$ des caractères rationnels de T' sur un sous-groupe du groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T. Comme $\dim T = \dim T'$, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q}\otimes X(T)$, que nous appellerons l'isomorphisme attaché à f. Soit α une racine de G par rapport à T, et soit P_α le groupe unipotent associé à α ; f induit une isogénie f_α de P_α sur un sous-groupe connexe P'_α de dimension 1 de G' dont les éléments sont unipotents et dont le normalisateur contient T' ; P'_α est donc le groupe unipotent associé à une racine α' bien déterminée de G' ; nous dirons que α et α' se correspondent par l'isogénie f. Réciproquement, soit α' une racine de G' et soit $P'_{\alpha'}$ le groupe unipotent qui lui est associé ; c'est l'image par f d'un sous-groupe connexe P de dimension 1 de G, et d'un seul. Il est clair que le normalisateur de P contient T. Le groupe P est résoluble (cf. la démonstration de la proposition 1) et n'est pas un tore, car sinon $P'_{\alpha'} = f(P)$ serait un tore. Comme $\dim P = 1$, il en résulte que P est composé d'éléments unipotents ; c'est donc le groupe unipotent associé à une racine α de G. La correspondance que nous avons établie entre racines de G et racines de G' définit donc une bijection de l'ensemble des premières sur l'ensemble des secondes. Soient de plus τ_α, $\tau'_{\alpha'}$, des isomorphismes de K sur P_α et $P'_{\alpha'}$ respectivement ; on a donc, pour $\xi \in K$, $f(\tau_\alpha(\xi)) = \tau'_{\alpha'}(m(\xi))$, où m est une isogénie de K sur K ; $m(\xi)$ s'exprime comme polynôme en ξ. Si $t \in T$, $t' = f(t)$, on a

$$t' f(\tau_\alpha(\xi))\, t'^{-1} = f(t\, \tau_\alpha(\xi) t^{-1}) = f(\tau_\alpha(\alpha(t)\,\xi))$$

d'où $\alpha'(t')\, m(\xi) = m(\alpha(t)\,\xi)$. Comme $m(\xi)$ est un polynome en ξ, ce polynome est homogène ; si $q(\alpha)$ est son degré, on a $\alpha'(t') = (\alpha(t))^{q(\alpha)}$, ce qui donne, en notation additive,

$$\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha .$$

De plus, comme m est un homomorphisme de K dans lui-même, $q(\alpha)$ est une puissance de l'exposant caractéristique de K.

<u>DÉFINITION 1</u>. - <u>Soient</u> G <u>et</u> G' <u>des groupes algébriques semi-simples,</u> T <u>et</u> T' <u>des tores maximaux de</u> G <u>et</u> G', $X(T)$ <u>et</u> $X(T')$ <u>les groupes des caractères rationnels de</u> T <u>et</u> T'. <u>Un isomorphisme</u> φ <u>de</u> $\mathbb{Q}\otimes X(T')$ <u>sur</u> $\mathbb{Q}\otimes X(T)$ <u>est dit spécial si les conditions suivantes sont satisfaites</u> :

1° <u>on a</u> $\varphi(X(T')) \subset X(T)$;

2° <u>il existe une bijection</u> ψ <u>de l'ensemble des racines de</u> G <u>par rapport à</u> T <u>sur l'ensemble des racines de</u> G' <u>par rapport à</u> T' <u>telle que l'on ait</u> $\varphi(\psi(\alpha)) = q(\alpha)\,\alpha$ <u>pour toute racine</u> α <u>de</u> G, $q(\alpha)$ <u>étant une puissance de l'exposant caractéristique de</u> K ; <u>les</u> $q(\alpha)$ <u>sont alors appelés les exposants</u>

radiciels de φ.

On notera que ψ et les $q(\alpha)$ sont alors uniquement déterminés par φ, car si α_1 et α_2 sont des racines telles que $\alpha_2 = c\alpha_1$, c rationnel >0, on a $c = 1$.

L'isomorphisme associé à une isogénie est donc toujours spécial. C'est l'un des objets essentiels de ce séminaire d'établir que réciproquement tout isomorphisme spécial est associé à une isogénie.

PROPOSITION 2. - *Soient* G *un groupe algébrique semi-simple,* T *un tore maximal de* G, q *une puissance de l'exposant caractéristique de* K, f *l'isogénie des puissances q-ièmes de* G, G' *le groupe* $f(G)$, T' *le groupe* $f(T)$. *L'isomorphisme spécial* φ *de* $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ *sur* $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ *associé à* f *applique* $X(T')$ *sur* $qX(T)$; *ses exposants radiciels sont tous égaux à* q.

Soit H un sous-groupe fermé connexe de G, et soit $f(H) = H'$. Pour qu'une fonction numérique u sur G soit définie en un point $s \in H$, il faut et suffit que u^q, considéré comme fonction sur G', soit défini en s ; il en résulte immédiatement que la restriction de f à H est l'isogénie des puissances q-ièmes pour H. Prenant $H = T$, on voit que les caractères rationnels de T' sont les puissances q-ièmes des caractères rationnels de T d'où $\varphi(X(T')) = qX(T)$. Prenant pour H le groupe $\tau_\alpha(K)$, où τ_α est un isomorphisme associé à une racine α, on voit qu'il y a un isomorphisme τ' de K sur H' tel que $f(\tau_\alpha(\xi)) = \tau'(\xi^q)$, ce qui montre que l'exposant radiciel relatif à α est q.

PROPOSITION 3. - *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K ; *soit* f_V *l'application naturelle de* $GL(V)$ *sur le groupe projectif* $PL(V)$. *Soient* G *un sous-groupe fermé connexe semi-simple de* $GL(V)$, G' *le groupe* $f_V(G)$, f *la restriction de* f_V *à* G. *Les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial attaché à* f *sont tous égaux à* 1.

Soit T un tore maximal de G. Si P est un groupe associé à une racine α de G par rapport à T, P est contenu dans l'ensemble N des éléments unipotents d'un groupe de Borel de $GL(V)$; il suffira de montrer que f_V induit un isomorphisme de N sur un sous-groupe de $PL(V)$. Or, il y a une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que l'on ait, pour $s \in N$, $s.e_i \equiv e_i \pmod{\sum_{j>i} Ke_j}$; si on pose $s.e_i = e_i + \sum_{j>i} u_{ji}(s)e_j$, les u_{ji} $(j > i)$ engendrent l'algèbre affine de N. Posons, pour $t \in GL(V)$, $t.e_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji}(t)e_j$; les fonctions $v_{ji}/v_{j'i'}$ sont les images par le cohomomorphisme de f_V de fonctions numériques sur $PL(V)$. Or, si $j > i$, $s \in N$, on a $u_{ji}(s) = v_{ji}(s)$; les u_{ji} sont donc les images par le cohomomorphisme de la restriction f_N de f_V à N de fonctions numériques partout définies sur $f_V(N)$, ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 4. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' et φ un isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. L'application $\varphi_W : w' \longrightarrow \varphi \circ w' \circ \varphi^{-1}$ induit alors un isomorphisme du groupe de Weyl W' de G' sur le groupe de Weyl W de G ; si w' est la symétrie par rapport à une racine α' de G' , $\varphi_W(w')$ est la symétrie par rapport à la racine α de G telle que $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, $q(\alpha) > 0$. Si α et β sont des racines de G transformées l'une de l'autre par une opération de W , les exposants radiciels correspondant à α et à β sont égaux. Soient $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ des racines de G et α'_i les racines de G' telles que $\varphi(\alpha'_i) = q_i\alpha_i$, $q_i > 0$; pour que $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ forment un système fondamental de racines de G il faut et suffit que $\alpha'_1 , \dots , \alpha'_n$ forment un système fondamental de racines de G' . Supposons qu'il en soit ainsi ; soient w_i et w'_i les symétries par rapport à, α_i , α'_i ; posons $w_i(\alpha_j) = \alpha_j + c(i , j)\alpha_i$, $w'_i(\alpha'_j) = \alpha'_j + c'(i , j)\alpha'_i$. On a alors $c(i , j) = c'(i , j)\, q_i q_j^{-1}$.

Soit w' un élément de W' , et soit $w = \varphi \circ w' \circ \varphi^{-1}$. Si β est une racine de G , on a $\varphi^{-1}(\beta) = (q(\beta))^{-1}\beta'$, où β' est une racine de G' , d'où

$$(w' \circ \varphi^{-1})(\beta) = (q(\beta))^{-1}\, \gamma'$$

si γ' est la racine $w'(\beta')$ et $w(\beta) = q(\gamma)(q(\beta))^{-1}\gamma$ si $\varphi(\gamma') = q(\gamma)\gamma$. Il y a donc une permutation ϖ de l'ensemble des racines de G telle que $w(\beta) = c(\beta)\,\varpi(\beta)$ avec un nombre rationnel $c(\beta) > 0$. Supposons maintenant que w' soit la symétrie par rapport à une racine α' ; on a alors

$$\gamma' = \beta' + a(\beta')\alpha' ,$$

$a(\beta')$ étant un entier ; si on pose $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, on a $w(\beta) = \beta + r(\beta)\alpha$, $r(\beta)$ étant un nombre rationnel.

Par ailleurs, il est clair que $w(\alpha) = -\alpha$. Soit w_α la symétrie par rapport à α . On a donc

$$(w_\alpha w)(\beta) = c(\beta)\,\varpi'(\beta) = \beta + s(\beta)\alpha$$

où $c(\beta)$, $s(\beta)$ sont des nombres rationnels et ϖ' une permutation de l'ensemble des racines ; de plus, $(w_\alpha w)(\alpha) = \alpha$. Soit k l'ordre de la permutation ϖ' ; on a $(w_\alpha w)^k(\beta) = c_1(\beta)\beta = \beta + ks(\beta)\alpha$ avec $c_1(\beta)$ rationnel. Or, si on prend $\beta \neq \pm\alpha$, α et β sont linéairement indépendantes, d'où $c_1(\beta) = 1$,

$s(\beta) = 0$. On a aussi $s(\pm\alpha) = 0$; $w_\alpha w$ est donc l'identité, d'où $w = w_\alpha$. Comme le groupe de Weyl est engendré par les symétries par rapport aux racines, il en résulte que $w' \longrightarrow \varphi \circ w' \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme de W' sur W. Les notations étant les mêmes qu'au début, il résulte du fait que $w \in W$ que $w(\beta)$ est une racine, d'où $q(\beta) = q(\gamma)$, $\gamma = w(\beta)$.

Comme φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soient linéairment indépendantes est qu'il en soit ainsi de $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$; de plus une condition nécessaire et suffisante pour que toute racine de G puisse s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients rationnels tous ≥ 0 ou tous ≤ 0 des α_i est que toute racine de G' puisse s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients rationnels tous ≥ 0 ou tous ≤ 0 des α'_i ; l'avant dernière assertion de la proposition 4 résulte de là. On a $\varphi \circ w'_i = w_i \circ \varphi$, d'où $w_i(\varphi(\alpha'_j)) = q_j\alpha_j + c'(i, j)q_i\alpha_i$ et

$$w_i(\varphi(\alpha'_j)) = q_j\, w_i(\alpha_j) = q_j(\alpha_j + c(i, j)\alpha_i),$$

ce qui démontre la dernière assertion.

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> G, G', G'' <u>des groupes algébriques semi-simples</u>, f' <u>et</u> f'' <u>des isogénies de</u> G <u>sur</u> G' <u>et</u> G'', T <u>un tore maximal de</u> G, $T' = f'(T)$, $T'' = f''(T)$, φ' <u>et</u> φ'' <u>les isomorphismes de</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ <u>et</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ <u>sur</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ <u>attachés à</u> f' <u>et</u> f''. <u>Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial</u> γ <u>de</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ <u>sur</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ <u>tel que</u> $\varphi' \circ \gamma = \varphi''$. <u>Il existe alors une isogénie</u> g <u>de</u> G' <u>sur</u> G'' <u>qui applique</u> T' <u>sur</u> T'' <u>telle que</u> γ <u>soit l'isomorphisme associé à</u> g <u>et que</u> $g \circ f' = f''$. <u>Si</u> γ <u>applique</u> $X(T'')$ <u>sur</u> $X(T')$ <u>et si ses exposants radiciels sont égaux à</u> 1, g <u>est un isomorphisme</u>.

La restriction de γ à $X(T'')$ est un isomorphisme de ce groupe sur un sous-groupe de $X(T')$; il y a donc un homomorphisme g_T de T' dans T'' tel que $\theta'' \circ g_T = \gamma(\theta'')$ si $\theta'' \in X(T'')$; g_T est une isogénie, et il résulte immédiatement de la formule $\varphi' \circ \gamma = f''$ que $g_T \circ f'_T = f''_T$ en désignant par f'_T, f''_T les restrictions de f' et f'' à T. Soient α une racine de G par rapport à T, τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à α, $I_\alpha = \tau_\alpha(K)$, α' et α'' les racines de G' et G'' telles que $\varphi'(\alpha') = q'(\alpha)\alpha$, $\varphi'(\alpha'') = q''(\alpha)\alpha$, avec $q'(\alpha) > 0$, $q''(\alpha) > 0$. Il résulte de la définition des exposants radiciels qu'il y a des isomorphismes $\tau'_{\alpha'}$, $\tau''_{\alpha''}$ de K sur $f'(P_\alpha)$ et $f''(P_\alpha)$ respectivement tels que

$$f'(\tau_\alpha(\xi)) = \tau'_{\alpha'}(\xi^{q'(\alpha)}) \quad f''(\tau_\alpha(\xi)) = \tau''_{\alpha''}(\xi^{q''(\alpha)}) .$$

Par ailleurs, γ étant spécial, $\gamma(\alpha'')$ est de la forme $\bar{q}(\alpha)\bar{\alpha}'$, où $\bar{q}(\alpha)$ est un entier >0 et $\bar{\alpha}'$ une racine de G'. Comme $\varphi' \circ \gamma = \varphi''$, on a

$$\varphi''(\alpha'') = \bar{q}(\alpha)\varphi'(\bar{\alpha}') = q''(\alpha)\,\alpha .$$

Il en résulte que $\bar{\alpha}' = \alpha'$, $\bar{q}(\alpha)\, q'(\alpha) = q''(\alpha)$; il y a par suite un homomorphisme g_α de $f'(P_\alpha)$ sur $f''(P_\alpha)$ tel que $g_\alpha(\tau'_{\alpha'}(\xi)) = \tau''_{\alpha''}(\xi^{\bar{q}(\alpha)})$ pour tout $\alpha \in K$, et on a $g_\alpha \circ f'_\alpha = f''_\alpha$ en désignant par f'_α et f''_α les restrictions de f' et f'' à P_α. Choisissons un groupe de Borel B de G contenant T ; soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les racines qui sont négatives sur la chambre de Borel associée à B ; le groupe B^u des éléments unipotents de B est alors le produit semi-direct des P_{α_i} $(1 \leqslant i \leqslant N)$ (théorème 1, exposé 13). De plus, il y a un groupe de Borel C contenant T tel que le groupe C^u des éléments unipotents de C soit le produit semi-direct des $P_{-\alpha_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$; l'application $(b, t, c) \longrightarrow btc$ est un isomorphisme de la variété $B^u \times T \times C^u$ sur une sous-variété ouverte U de G. Les groupes $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ sont des groupes de Borel de G' contenant T. Soit α'_i la racine de G' telles que $\varphi'(\alpha'_i) = q'(\alpha_i)\alpha_i$; le groupe unipotent associé à α'_i est le sous-groupe $f(P_{\alpha_i})$ de B', tandis que le groupe unipotent associé $-\alpha'_i$ est $f(P_{-\alpha_i}) \subset C'$. Il en résulte que les α'_i (resp. $-\alpha'_i$) sont les racines qui sont négatives sur la chambre associée à B' (resp. C'). Désignant par B'^u et C'^u les groupes d'éléments unipotents de B' et C', B'^u (resp. C'^u) est le produit semi-direct des $f'(P_{\alpha_i})$ (resp. $f'(P_{-\alpha_i})$) et

$$(b', t', c') \longrightarrow b'\,t'\,c'$$

est un isomorphisme de $B'^u \times T' \times C'^u$ sur une sous-variété ouverte U' de G' ; on a $U' = f'(U)$. Il existe donc un morphisme g_U de la variété U' dans G'' tel que l'on ait

$$g_U\Big(\prod_{i=1}^N s'_i)\, t'(\prod_{i=1}^N \tilde{s}'_i)\Big) = \prod_{i=1}^N g_{\alpha_i}(s'_i)\, g_T(t')\prod_{i=1}^N g_{-\alpha_i}(\tilde{s}'_i)$$

si $s'_i \in f'(P_{\alpha_i})$, $\tilde{s}'_i \in f'(P_{-\alpha_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. De plus, il est clair que $g_U \circ f'_U = f''_U$ en désignant par f'_U et f''_U les restrictions de f' et f'' à U. L'application g_U se prolonge en une fonction g sur G' à valeurs dans G''. Nous allons montrer que cette fonction est partout définie et est un homomorphisme. Soient s un élément de G, $s' = f'(s)$, $s'' = f''(s)$; désignons par λ, λ', λ'' les translations à gauche par s, s', s'' dans G, G', G''. On va montrer que

$g \odot \lambda' = \lambda'' \odot g$ (on rappelle que $g \odot \lambda'$, par exemple, est l'unique fonction sur G' à valeurs dans G'' qui prolonge l'application $g \circ \lambda'$). On a évidemment $g \odot f' = f''$, d'où $\lambda'' \odot g \odot f' = \lambda'' \odot f''$; comme f', f'' sont desh momorphismes on a

$$\lambda'' \circ f'' = f'' \circ \lambda = \quad g \odot f' \odot \lambda \; = g \odot \lambda' \odot f' ,$$

d'où

$$\lambda'' \odot g \odot f' = g \odot \lambda' \odot f' .$$

Comme f' est surjectif, il en résulte tout de suite que $\lambda'' \odot g = g \odot \lambda'$. Si donc g est défini en un point s'_o, il l'est aussi en $\lambda'(s'_o) = s's'_o$. Ceci étant vrai pour tout $s \in G$, g est partout défini, et on peut écrire $g \circ f' = f''$, $\lambda'' \circ g = g \circ \lambda'$, d'où $g(f'(s)s'_o) = f''(s)g(s'_o) = g(f'(s))g(s'_o)$ pour tout $s \in G$ et tout $s'_o \in G'$. Comme f' est surjectif, g est un homomorphisme. L'image réciproque par f' du noyau de g est contenue dans le noyau de f'' et est donc finie, ce qui montre que le noyau de g est fini ; $g(G') = g(f'(G))$ est $f''(G) = G''$, ce qui montre que g est surjectif ; g est donc une isogénie. On a

$$g(T') = g_T(T') = T'' \quad ;$$

si γ^* est l'isomorphisme de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T'')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ associé à g, il résulte immédiatement de la formule $g \circ f' = f''$ que $\varphi' \circ \gamma^* = \varphi''$, d'où $\gamma^* = \gamma$.

Supposons maintenant que $\gamma(X(T'')) = X(T')$ et que les exposants radiciels de γ soient égaux à 1 ; γ^{-1} est alors évidemment un isomorphisme spécial, et il existe une isogénie g' de G'' sur G' telle que $g' \circ f'' = f'$. On a

$$g \circ g' \circ f'' = f'' \quad ;$$

comme f'' est surjectif, $g \circ g'$ est l'application identique de G''. De même, $g' \circ g$ est l'application identique de G' ; g est donc alors un isomorphisme, et la proposition 5 est établie.

<u>PROPOSITION 6</u>. - <u>Soient</u> G, G', G'' <u>des groupes algébriques semi-simples,</u> f' <u>et</u> f'' <u>des isognies de</u> G' <u>et</u> G'' <u>sur</u> G, T <u>un tore maximal de</u> G, T' <u>et</u> T'' <u>les tores maximaux de</u> G' <u>et</u> G'' <u>tels que</u> $f'(T') = f''(T'') = T$, φ' <u>et</u> φ'' <u>les isomorphismes de</u> $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ <u>et</u> $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T'')$ <u>attachés à</u> f' <u>et</u> f''. <u>Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial</u> γ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T'')$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ <u>tel que</u> $\gamma \circ \varphi'' = \varphi'$. <u>Il existe alors une isogénie</u> g <u>de</u> G' <u>sur</u> G'' <u>qui applique</u> T' <u>sur</u> T'' <u>telle que</u> γ <u>soit l'isomorphisme associé à</u> g <u>et que</u> $f'' \circ g = f'$. <u>Si on suppose que</u> $\gamma(X(T'')) = X(T')$ <u>et que les exposants radiciels</u>

de γ *sont égaux à* 1 , g *est un isomorphisme*.

Etablissons d'abord le

LEMME 2. - *Soient* f' *et* f'' *des isogénies de groupes connexes* G' *et* G'' *sur un groupe* G . *Il existe alors un groupe connexe* H *et des isogénies* h' *et* h'' *de* H *sur* G' *et* G'' *tels que* $f' \circ h' = f'' \circ h''$.

Soit H_0 l'ensemble des $(s', s'') \in G' \times G''$ tels que $f'(s') = f''(s'')$; c'est évidemment un sous-groupe fermé de $G' \times G''$. Soit H la composante connexe de l'élément neutre dans H_0 ; les projections de $G' \times G''$ sur G' et G'' induisent des homomorphismes h' et h'' de H dans G' et G'' , et on a $f' \circ h' = f'' \circ h''$. Comme f' et f'' sont surjectifs, les projections de $G' \times G''$ sur ses deux facteurs induisent des épimorphismes h_0 et h'_0 de H_0 sur G' et G'' ; comme H est d'indice fini dans H_0 , h' et h'' sont surjectifs ; les noyaux de f' , f'' étant finis, il en est évidemment de même de ceux de h'_0 , h''_0 , donc aussi de ceux de h' , h'' .

Ceci dit, passons à la démonstration de la proposition 6 ; soit H un groupe connexe qui admet des isogénies h' et h'' sur G' et G'' telles que $f' \circ h' = f'' \circ h''$; soit T_H le tore maximal de H tel que

$$(f' \circ h')(T_H) = (f'' \circ h'')(T_H) = T \quad ;$$

on a évidemment $f'(T_H) = T'$, $f''(T_H) = T''$. Soient η' , η'' les isomorphismes de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_H)$ associés à h' , h'' ; on a donc $\eta' \circ \varphi' = \eta'' \circ \varphi''$, d'où $\eta'' \circ \gamma \circ \varphi' = \eta'' \circ \varphi''$ et par suite $\eta' \circ \gamma = \eta''$. Il résulte de la proposition 5 qu'il existe une isogénie $g : G' \longrightarrow G''$ telle que $g \circ h' = h''$, $g(T') = T''$ et que l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \times X(T')$ attaché à g soit γ . On a $f'' \circ g \circ h' = f'' \circ h'' = f' \circ h'$; comme h' est surjectif, on a $f'' \circ g = f'$. La seconde assertion de la proposition 6 résulte de la proposition 5.