Séminaire Claude Chevalley

C. Chevalley

Les poids dominants

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 16, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A3_0>

Séminaire C. CHEVALLEY

E.N.S., 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 16

LES POIDS DOMINANTS.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 29.4.57)

1.- Groupe linéaire associé à une représentation projective.

Soit G un groupe linéaire algébrique irréductible et semi-simple, et soit ρ une représentation rationnelle projective de G ; supposons que l'espace de ρ soit l'espace projectif $\mathfrak{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V. Il y a un homomorphisme canonique ω du groupe $SL(V)$ des automorphismes de déterminant 1 de V sur le groupe $PL(V)$ des automorphismes de $\mathfrak{P}(V)$; $\omega^{-1}(\rho(G))$ est un sous-groupe fermé de $SL(V)$; la composante $\tilde{G}$ de l'élément neutre dans ce groupe sera appelé le groupe linéaire associé à la représentation projective ρ. Soient B un groupe de Borel de G et T un tore maximal contenu dans B ; $\rho(B)$ est alors un groupe de Borel de $\rho(G)$, et $\rho(T)$ en est un tore maximal. Le noyau de ω est un sous-groupe fini du centre de $SL(V)$; la composante $\tilde{T}$ de l'élément neutre dans $\omega^{-1}(\rho(T))$ est un groupe résoluble dont les éléments unipotents forment un groupe fini ; c'est donc un tore, et c'est évidemment un tore maximal de G. Pour tout tore T, nous désignerons dans ce qui suit par $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T et par $X^{\mathbb{Q}}(T)$ l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Ceci étant, il est clair que le cohomomorphisme de la restriction de ω à $\tilde{T}$ définit un isomorphisme de $X(\rho(T))$ sur un sous-groupe d'indice fini de $X(\tilde{T})$, qui se prolonge en un isomorphisme de $X^{\mathbb{Q}}(\rho(T))$ sur $X^{\mathbb{Q}}(\tilde{T})$; désignons par ζ_0 l'isomorphisme réciproque de $X^{\mathbb{Q}}(\tilde{T})$ sur $X^{\mathbb{Q}}(\rho(T))$. Le cohomomorphisme de la restriction de ρ à T définit un isomorphisme de $X(\rho(T))$ sur un sous-groupe de $X(T)$ qui se prolonge en un isomorphisme de $X^{\mathbb{Q}}(\rho(T))$ sur un sous-espace de $X^{\mathbb{Q}}(T)$; en le composant avec ζ_0, on obtient un isomorphisme ζ de $X^{\mathbb{Q}}(\tilde{T})$ sur un sous-espace de $X^{\mathbb{Q}}(T)$.

L'espace V possède une base $(v_1, \dots, v_n)$ composée de vecteurs qui sont des vecteurs propres pour les opérations de $\tilde{T}$; soit $\tilde{t} \cdot v_i = \tilde{\chi}_i(\tilde{t})\, v_i$; les $\tilde{\chi}_i$ sont alors des éléments de $X(\tilde{T})$. Leurs images par l'isomorphisme ζ sont des éléments de $X^{Q}(T)$ qui sont appelés les poids de la représentation ρ . Il convient d'observer que, bien que les χ_i n'appartiennent pas en général à $X(T)$, leurs différences mutuelles sont dans $X(T)$: cela résulte de ce que, si l'on pose $\tilde{s}.x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(\tilde{s})x_j$ pour $\tilde{s} \in SL(V)$, les rapports mutuels des fonctions $\tilde{s} \longrightarrow a_{ji}(\tilde{s})$ sont les images par le cohomomorphisme de ω de fonctions numériques sur $PL(V)$.

Supposons maintenant que la représentation projective soit simple. On sait qu'il y a un point et un seul de $\mathfrak{P}(V)$ qui est invariant par les opérations de $\rho(B)$; ce point peut se mettre sous la forme Kv , où v est un élément $\neq 0$ de V , et on peut supposer que v est le premier élément de la base $(v_1 , \dots , v_n)$ choisie plus haut. Ceci étant, le poids χ_1 s'appelle le poids dominant de la représentation ρ . Nous nous proposons dans ce qui suit de déterminer les poids dominants des représentations projectives simples $\rho_{(e)}$ que nous avons construites précédemment.

Si $\rho = \rho_{(e)}$, nous pouvons prendre pour V l'espace vectoriel engendré par les fonctions numériques v sur G/B dont les diviseurs sont de la forme $s.D_{(e)} - D_{(e)}$, où s parcourt les éléments de G ($D_{(e)}$ étant défini comme dans l'exposé 15). Soit R l'ensemble des racines qui sont négatives sur la chambre associée à B , ces racines étant rangées dans un ordre quelconque. Soit π l'application canonique de G sur G/B . Pour toute racine α , soit τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G tel que l'on ait $t\,\tau_\alpha(\lambda)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\lambda)$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $t \in T$ (théorème 1, exposé 13). Si on désigne par x_o le point qui est invariant par les opérations du groupe de Borel $\tilde{B}$ opposé à B , tout élément x de l'ensemble ouvert $\Omega_o = \pi(B^u)$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $\prod_{\alpha \in R} \tau_\alpha(u_\alpha(x)).x_o$, les $u_\alpha(x)$ étant dans K ; de plus, chaque u_α est une fonction numérique partout définie sur Ω_o et l'algèbre des fonctions numériques partout définies sur Ω_o est engendrée par les u_α (que nous identifions aux fonctions sur G/B qui les prolongent) (corollaires 1 et 3 à la proposition 1, exposé 15). Les fonctions appartenant à V sont partout définies sur Ω_o . Pour tout élément s de G , nous désignons par v^s la transformée d'une fonction numérique v sur G/B par le cohomomorphisme de l'application $x \longrightarrow s^{-1}.x$ de G/B sur lui-même. Si w_s est une fonction de diviseur $s.D_{(e)} - D_{(e)}$, la condition $v \in V$ entraîne $v^s w_s \in V$, et on a (en posant $\rho = \rho_{(e)}$) ,

$\rho(s).Kv = Kv^s w_s$. Si $\tilde{s}$ est un élément de $\tilde{G}$ tel que $\omega(\tilde{s}) = \rho(s)$, on a donc $\tilde{s} . v = c_s v^s w_s$, où c_s est une constante. Si $s \in B$, on peut prendre $w_s = 1$. On peut former une base $(v_1 , \ldots , v_n)$ de V , contenant $1 = v_1$, telle que l'on ait, pour $t \in T$, $v_i^t = \chi_i'(t) v_i$, les χ_i' étant des éléments de $X(T)$. Si $\tilde{t} \in \tilde{T}$, $\omega(\tilde{t}) = \rho(t)$, on aura $\tilde{t}.v_i = c(\tilde{t})\ \chi_i'(t)\, v_i$. Si nous désignons par $d(t)$ le déterminant de l'application $v \longrightarrow v^t$, il résulte du fait que $\det \tilde{t} = 1$ que $c^n(\tilde{t})\, d(t) = 1$; les poids χ_i de la représentation ρ seront, en notation additive,

$$\chi_i = \chi_i' - n^{-1} d \ .$$

Comme $v_1^s = v_1$ pour tout élément s de B , on a $\chi_1' = 1$ (0 en notation additive !) et le poids fondamental est $-n^{-1}d$. Mais il n'est pas facile de calculer la fonction d au moyen des entiers e_i ; nous allons donc suivre tout à l'heure une autre méthode pour calculer le poids fondamental.

Pour le moment, nous observons que l'on a $u_\alpha^t = \alpha(t^{-1}) u_\alpha$, comme il résulte tout de suite des formules $t^{-1}\, \tau_\alpha(\lambda) t = \tau_\alpha(\alpha(t^{-1})\lambda)$ et du fait que $t.x_o = x_o$. On en déduit que, si $u = \prod_{\alpha \in R} u_\alpha^{k(\alpha)}$ est un monôme en les u_α (les $k(\alpha)$ étant des exposants positifs), on a $u^t = (\prod_{\alpha \in R} \alpha(t))^{-k(\alpha)} u$; comme V est contenu dans l'algèbre $K[\ldots, u_\alpha, \ldots]$, on en conclut que les χ_i' sont tous de la forme $-\sum_{\alpha \in R} k(\alpha)\alpha$, où les $k(\alpha)$ sont des entiers $\geqslant 0$. Comme on a $\chi_i - \chi_j = \chi_i' - \chi_j'$, on en déduit la

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> ρ <u>une représentation projective simple de</u> G . <u>Les différences mutuelles des poids de</u> ρ <u>sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines. Si</u> χ_1 <u>est le poids fondamental de</u> ρ <u>(relativement à un groupe de Borel</u> B) <u>et</u> χ <u>un poids quelconque de</u> ρ , $\chi_1 - \chi$ <u>est une combinaison linéaire à coefficients entiers</u> $\geqslant 0$ <u>de celles des racines qui sont négatives sur la chambre associée à</u> B .

Retournons pour un moment au cas où ρ est une représentation projective quelconque de G . Les poids de ρ sont des éléments de l'espace vectoriel $X^{\mathbb{Q}}(T)$ sur lequel opère le groupe de Weyl de G ; nous allons établir la

PROPOSITION 2.- <u>Les poids d'une représentation projective quelconque de</u> G <u>sont permutés entre eux par les opérations du groupe de Weyl.</u>

Soient s une opération du normalisateur de T et w l'opération correspondante du groupe de Weyl. Soit $\tilde{s}$ un élément du groupe $\tilde{G}$ tel que $\omega(\tilde{s}) = \rho(s)$; il est clair que $\tilde{s}$ normalise $\tilde{T}$; si t , $\tilde{t}$ sont des éléments de T , $\tilde{T}$ respectivement tels que $\rho(t) = \omega(\tilde{t})$, on a aussi $\rho(sts^{-1}) = \omega(\tilde{s}\tilde{t}\tilde{s}^{-1})$. Il correspond à $\tilde{s}$ un automorphisme $\tilde{w}$ de $X(\tilde{T})$ qui change tout élément $\tilde{\chi}$ de ce groupe en la fonction $\tilde{t} \longrightarrow \tilde{\chi}(\tilde{s}^{-1}\tilde{t}\tilde{s})$. Si ζ est l'isomorphisme défini plus haut de $X^{Q}(\tilde{T})$ sur un sous-espace de $X^{Q}(T)$, on vérifie facilement que $w.\zeta(\tilde{\chi}) = \zeta(\tilde{w}.\tilde{\chi})$ pour tout $\tilde{\chi} \in X^{Q}(\tilde{T})$. Ceci étant, si v est un vecteur $\neq 0$ de V tel que l'on ait $\tilde{t}.v = \tilde{\chi}(\tilde{t})v$ ($\tilde{\chi}(\tilde{t}) \in K$) pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}$, on aura $\tilde{t}.(\tilde{s}.v) = \tilde{\chi}(\tilde{s}^{-1}\tilde{t}\tilde{s})\tilde{s}.v$; la proposition 2 résulte immédiatement de là.

Revenons maintenant au cas où $\rho = \rho_{(e)}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ les racines fondamentales par rapport à B ; pour déterminer le poids fondamental χ_1 , nous allons déterminer les éléments $\chi_1 - w_k(\chi_1)$, où w_k est la symétrie par rapport à α_k . Pour montrer que la connaissance de ces éléments suffit à déterminer χ_1 , il suffit de montrer qu'il n'y a aucun élément $\chi \neq 0$ de $X^{Q}(T)$ qui soit invariant par les w_k . Or les hyperplans laissés fixes par w_k sont d'une part l'hyperplan H_k composé des points fixes de w_k et d'autre part les hyperplans orthogonaux à H_k (relativement à une forme quadratique invariante par W). Une forme linéaire $\neq 0$ qui est nulle sur H_k est changée en son opposée (et n'est par suite pas invariante) par w_k ; par ailleurs, il n'y a aucun hyperplan qui soit orthogonal à tous les H_k puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ forment une base de $X^{Q}(T)$ (théorème 2, exposé 13) ; ceci montre bien qu'il n'y a aucun élément $\neq 0$ de $X^{Q}(T)$ qui soit invariant par les opérations de W .

Pour déterminer les $\chi_1 - w_k . \chi_1$, nous avons à déterminer les fonctions de V dont les diviseurs sont les $\sigma_k . D_{(e)} - D_{(e)}$, σ_k étant une opération du normalisateur de T qui définit la symétrie par rapport à la racine α_k , opération que nous pouvons prendre dans le centralisateur Z_k de la composante connexe du noyau de α_k . Nous avons pour cela à déterminer les hypersurfaces $\sigma_k . \Delta_{k'}$ $(1 \leq k , k' \leq \ell)$, les $\Delta_{k'}$ étant les hypersurfaces définies dans l'exposé 15.

Désignons par P_α le groupe $\tau_\alpha(K)$. Soit C_k le groupe engendré par les P_α pour les racines α qui sont négatives sur la chambre associée à B et qui sont $\neq \alpha_k$; c'est un sous-groupe distingué de B^u , et, si on pose $P_k = P_{\alpha_k}$, on a $B^u = C_k P_k$ (propositions 4 et 6 , exposé 13) . Si w_k transforme la racine α en la racine β , on a $\sigma_k P_\alpha \sigma_k^{-1} = P_\beta$; il en résulte que $\sigma_k C_k \sigma_k^{-1} = C_k$. Par ailleurs, l'ensemble $Z_k x_o$ est une courbe complète qui contient deux points invariants par les opérations de T , à savoir x_o et $\sigma_k \cdot x_o = x_k$ (Cf. lemme 1, exposé 12) ; $P_k x_o$ contient tous les points $\neq x_k$ de cette courbe. Comme σ_k appartient à Z_k , on en conclut que σ_k permute entre eux tous les points $\neq x_o$ de $P_k x_o$. On a $\sigma_k(C_k x_o) = C_k x_k \subset \Delta_k$; on en conclut que l'ensemble des points $x \in \Omega_o$ tels que $\sigma_k \cdot x$ n'appartienne pas à Ω_o est $C_k . x_o$, et que cet ensemble est transformé par σ_k en une partie de Δ_k , d'ailleurs dense puisque $C_k . x_o$ est une sous-variété de codimension 1 de Ω_o . Comme il n'y a aucun point de Ω_c dont l'image par σ_k soit un point de $\Omega - \Omega_o$ n'appartenant pas à Δ_k , on voit que, si $k' \neq k$, $\sigma_k^{-1}(\Delta_{k'})$ est contenu dans $\Omega - \Omega_o$, donc est de la forme $\Delta_{k''}$; par ailleurs, le diviseur $\sigma_k^{-1}(\Delta_{k'}) - \Delta_{k'} = \Delta_{k''} - \Delta_{k'}$ est principal ; il en résulte que l'on a $\sigma_k(\Delta_{k'}) = \Delta_{k'}$ si $k' \neq k$. Par ailleurs, si on pose $u_k = u_{\alpha_k}$, il est clair que $C_k . x_o$ est l'ensemble des points $x \in \Omega_o$ tels que $u_k(x) = 0$; si on désigne par Δ'_k l'adhérence de $C_k . x_o$ dans G/B , le diviseur de u_k est de la forme $\Delta'_k - D$, où D est un diviseur tel que $\operatorname{Supp} D \subset \Omega - \Omega_o$, donc une combinaison linéaire de $\Delta_1 , \dots , \Delta_\ell$. Ce diviseur est linéairement équivalent à Δ'_k , donc à $\sigma_k(\Delta'_k) = \Delta_k$; il est donc égal à Δ_k , d'où

$$(u_k) = \Delta'_k - \Delta_k = \sigma_k \cdot \Delta_k - \Delta_k \quad .$$

Ceci étant, si $e = (e_1 , \dots , e_k)$, on a

$$\sigma_k . D_{(e)} - D_{(e)} = e_k(u_k) = (u_k^{e_k}) \; .$$

Comme $u_k^t = (\alpha_k(t))^{-1} u_k$, on en conclut que

$$\chi_1 - w_k \cdot \chi_1 = e_k \alpha_k \; . \tag{1}$$

Cette formule établit d'abord le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 3.- Soient</u> e <u>et</u> e' <u>des suites distinctes de</u> ℓ <u>entiers</u> $\geqslant 0$. <u>Si</u> $e \neq e'$, <u>les représentations projectives</u> $\rho_{(e)}$, $\rho_{(e')}$ <u>sont inéquivalentes.</u>

Ces représentations n'ont en effet pas le même poids dominant.

Si maintenant λ est une représentation linéaire (non plus projective) rationnelle de G, d'espace V, V admet une base composée de vecteurs v_i tels que $\lambda(t)v_i = \chi_i(t)v_i$, pour $t \in T$, les χ_i étant des éléments de $X(T)$; ces éléments sont appelés les <u>poids</u> de la représentation linéaire λ.

<u>PROPOSITION 4</u>.- <u>Les poids de toute représentation linéaire rationnelle de</u> G <u>sont aussi des poids de représentations projectives simples de</u> G.

Soit λ une représentation linéaire rationnelle de G, d'espace V ; soit $(V_o, V_1, \dots, V_h)$ une suite de Jordan-Hölder de V, considéré comme module sur K et sur G. Les V_i/V_{i-1} sont les espaces de représentations simples λ_i de G. Comme toute représentation de T est semi-simple, il y a, pour $1 \leq i \leq h$, un sous-espace W_i de V_i stable par les opérations de $\lambda(T)$ et tel que V_i soit somme directe de V_{i-1} et de W_i. Il en résulte que tout poids de λ est aussi un poids de l'une des λ_i ; il suffira donc d'établir la proposition 4 dans le cas d'une représentation simple λ. On déduit alors de λ une représentation projective simple ρ de G, opérant sur l'espace projectif associé à V ; il suffira, pour établir la proposition 4, de montrer que $\lambda(G)$ est le groupe linéaire associé à la représentation projective ρ ; tout revient donc à établir que $\lambda(G) \subset SL(V)$; c'est ce qui résultera du

<u>LEMME 1</u>.- <u>Le groupe</u> G <u>est son propre groupe des commutateurs</u>.

Soit G' le groupe des commutateurs de G. Si α est une racine, la formule $t\,\tau_\alpha(\lambda)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\lambda)$ $(t \in T, \lambda \in K)$ montre que $\tau_\alpha(\lambda) \in G'$ (car $\alpha \neq 1$). Par ailleurs, si σ est un élément du groupe de Weyl, $\sigma t \sigma^{-1} t^{-1}$ appartient à G' si $t \in T$. Soit T' le sous-groupe de T engendré par les éléments de cette forme (pour tous les $t \in T$ et tous les éléments σ du normalisateur de T). Ce groupe est manifestement connexe ; si χ est un caractère rationnel de T qui est égal à 1 sur T', il est clair que χ est invariant par les opérations du groupe de Weyl ; nous avons déjà vu qu'il en résulte que $\chi = 1$. On a donc $T' = T$, d'où $T \subset G'$, et par suite $B \subset G'$. Comme tout élément de G est conjugué à un élément de B, on a $G = G'$, ce qui démontre le lemme 1 et la proposition 4.

On démontrera plus loin un résultat beaucoup plus précis que le lemme 1 :

si H est un sous-groupe distingué fermé quelconque de G , G/H est semi-simple.

Nous désignerons par Π le sous-groupe de $X^{Q}(T)$ engendré par les poids de toutes les représentations projectives simples de G ; ce groupe s'appelle le <u>groupe des poids</u>. On appelle <u>représentationsprojectives fondamentales</u> les représentations projectives simples $\rho_1, \ldots, \rho_\ell$ déterminées par les systèmes suivants d'entiers e_k :

$$(1, 0, \ldots, 0) \ , \ (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) .$$

Les poids dominants de ces représentations sont appelés les <u>poids dominants fondamentaux</u> ; nous les noterons $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$. Il résulte de la formule établie plus haut que l'on a $\varpi_k - w_k . \varpi_k = \alpha_k$; ceci montre que le groupe des poids contient comme sous-groupe le groupe Π_0 engendré par les racines, que nous appellerons <u>groupe des racines</u>. Le poids dominant de la représentation $\rho_{(e)}$, où $e = (e_1, \ldots, e_\ell)$, est évidemment $\sum_{k=1}^{\ell} e_k \varpi_k$. Tenant compte de la proposition 1, on en déduit que Π est engendré par $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$ et par les racines. Comme le groupe G lui-même est isomorphe à un groupe linéaire, il résulte de la proposition 4 que l'on a

$$\Pi_0 \subset X(T) \subset \Pi$$

Nous démontrerons un peu plus loin que le groupe des poids est déjà engendré par les poids dominants fondamentaux. On peut voir dès maintenant qu'il en est bien ainsi dans le cas où $\ell = 1$: en effet, si α est la racine fondamentale, le poids dominant fondamental est $\alpha/2$, en vertu de la formule

$\alpha/2 - (-\alpha/2) = \alpha$.

2.- <u>Les sous-groupes semi-simples de rang 1 de</u> G .

Soit α une racine ; désignons par Q_α la composante connexe de l'élément neutre dans le noyau de α et par Z_α le centralisateur de Q_α; on sait que Z_α/Q_α est un groupe semi-simple de rang 1 et de dimension 3 . Nous allons maintenant montrer que le groupe dérivé Z'_α de Z_α est semi-simple de rang 1 et de dimension 3 . Nous montrerons d'abord que $Z'_\alpha \cap Q_\alpha$ est fini ; cela résultera du

<u>LEMME 2.- Soient</u> Z <u>un groupe linéaire algébrique irréductible et</u> Z' <u>son groupe dérivé ; le centre de</u> Z <u>ne contient aucun tore de dimension</u> > 0 <u>contenu dans</u> Z' .

Soit T' un tore contenu dans le centre de Z et dans Z'. Soit V l'espace vectoriel sur lequel opère Z ; soit $(V_o, \ldots, V_h)$ une suite de Jordan-Hölder de V, considéré comme espace vectoriel à opérateurs admettant Z comme ensemble d'opérateurs ; chaque V_i/V_{i-1} est donc l'espace d'une représentation simple ρ_i de Z. Les éléments de l'intersection N des noyaux des ρ_i sont unipotents, de sorte que $N \cap T' = \{e\}$ (l'élément neutre). Par ailleurs, si $t' \in T'$, $\rho_i(t')$ est une homothétie, de rapport disons c_i ; de plus, comme $t' \in Z'$, on a $\det \rho_i(t') = 1$, d'où $c_i^{d_i} = 1$ si $d_i = \dim V_i/V_{i-1}$; $T'/(N \cap T') = T'$ est donc bien fini.

Le groupe P_α est contenu dans Z_α, donc dans Z'_α en vertu de la formule $t\,\tau_\alpha(\lambda)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\lambda)$ $(t \in T,\ \lambda \in K)$. Si $t \in T$, on peut écrire $t^2 = (t(t^\sigma)^{-1})(tt^\sigma)$, où on désigne par σ un élément de Z_α appartenant au normalisateur de T sans appartenir à T et par t^σ l'élément $\sigma t \sigma^{-1}$. L'élément $t(t^\sigma)^{-1}$ appartient à Z'_α ; tt^σ appartient à la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe des éléments de T qui commutent à σ, donc à Q_α. Comme tout élément de T est le carré d'un élément de T, on voit que $T \subset Z'_\alpha Q_\alpha$. Le groupe $Z'_\alpha Q_\alpha / Q_\alpha$ contient $P_\alpha Q_\alpha/Q_\alpha$, $P_{-\alpha}Q_\alpha/Q_\alpha$ et T/Q_α ; c'est donc Z_α/Q_α tout entier, d'où $Z'_\alpha Q_\alpha = Z_\alpha$. L'homomorphisme canonique de Z_α sur Z_α/Q_α induit un épimorphisme de noyau fini de Z'_α ; il en résulte que Z'_α est de dimension 3. Si R est son radical, RQ_α/Q_α est dans le radical de Z_α/Q_α, donc se réduit à son élément neutre ; R est donc fini, et par suite réduit à son élément neutre, ce qui montre que Z'_α est semi-simple. Le groupe Z'_α contient un tore maximal T_α contenu dans T ; comme $P_\alpha \subset Z'_\alpha$, il est clair que les racines de Z'_α par rapport à T_α sont les restrictions de α et de α^{-1} à T_α. Le groupe $X(T_\alpha)$ contient le groupe engendré par α et est contenu dans le groupe engendré par $\alpha/2$, comme on l'a vu ci-dessus. Par ailleurs, ce groupe est en dualité avec le groupe $\Gamma(T_\alpha)$ des groupes à un paramètre de T_α ; on en conclut que $\Gamma(T_\alpha)$ contient un élément γ_α tel que $\alpha(\gamma_\alpha) = 2$; il est engendré par γ_α si $\alpha/2 \in X(T_\alpha)$, par $\gamma_\alpha/2$ dans le cas contraire. Il est clair que la symétrie par rapport à α transforme tout élément de $X(T_\alpha)$, donc aussi de $\Gamma(T_\alpha)$, en son opposé. Ceci établit la

PROPOSITION 5.- <u>Pour toute racine α de G, il existe un élément γ_α du groupe $\Gamma(T)$ des groupes à un paramètre de T qui possède les propriétés suivantes :</u>

on a $\alpha(\gamma_\alpha) = 2$ et la symétrie par rapport à la racine α transforme γ_α en $-\gamma_\alpha$.

Si χ est un élément quelconque de $X^Q(T)$, on a

$$w_\alpha . \chi = \chi - \chi(\gamma_\alpha)\,\alpha \quad ;$$

comme $\chi(\gamma_\alpha)$ est entier si $\chi \in X(T)$, on obtient le

COROLLAIRE 1.- *Si w_α est la symétrie par rapport à α, et χ un élément quelconque de $X(T)$, $w_\alpha . \chi - \chi$ est un multiple entier de α.*

En particulier, pour toute racine β, $w_\alpha . \beta - \beta$ est un multiple entier de α. Rappelons que l'on désigne par $w_1, \dots, w_\ell$ les symétries par rapport aux racines fondamentales $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$; on a

$$w_k . \alpha_{k'} = \alpha_{k'} + c(k, k')\,\alpha_k$$

où les $c(k, k')$ sont des entiers, qu'on appelle *les entiers de Cartan* ; on a $c(k, k) = -2$, $c(k, k') \geqslant 0$ si $k' \neq k$ (car toute racine est combinaison linéaire à coefficients tous de même signe des α_k). Comme le groupe de Weyl est engendré par les w_k, on voit que ses opérations transforment en lui-même le groupe additif engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$; comme toute racine est la transformée de l'une des racines fondamentales par une opération du groupe de Weyl, on a le

COROLLAIRE 2.- *Les racines fondamentales constituent une base du groupe des racines.*

Posons $\gamma_k = \gamma_{\alpha_k}$; comme on a $w_k . \overline{\omega}_{k'} = \overline{\omega}_{k'} - \delta_{k,k'}\alpha_k$ on a

$$\overline{\omega}_k(\gamma_{k'}) = \delta_{k.k'} \quad .$$

Les poids dominants fondamentaux forment donc une base du groupe des éléments $\chi \in X^Q(T)$ tels que les $\chi(\gamma_k)$ soient entiers. Or ce groupe contient $X(T)$ donc aussi les racines ; comme le groupe des poids est engendré par les $\overline{\omega}_k$ et par les racines, on obtient le

COROLLAIRE 3.- *Les poids dominants fondamentaux forment une base du groupe des poids.*

Correction. Le raisonnement par lequel on a établi (p. 7) que le groupe engendré par les poids dominants fondamentaux contient les racines est incorrect : il montre seulement que ce groupe contient les racines fondamentales. Cependant, le résultat énoncé découle immédiatement de ce qui a été dit au n° 2.
