C. Chevalley

Espaces homogènes de groupes algébriques

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A8_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 8

ESPACES HOMOGÈNES DE GROUPES ALGÉBRIQUES.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 28.1.1957)

Soient U et V des variétés, f une fonction sur U à valeurs dans V ; c'est un morphisme dans V d'une sous-variété ouverte D de U ; pour toute partie A de U, nous poserons $f(A) = f(D \cap A)$. L'ensemble $B = f(U)$ est une partie irréductible de V ; nous désignerons par $\mathfrak{o}$ son anneau local et par $\mathfrak{p}$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{o}$ est donc l'ensemble de celles des fonctions numériques (i.e. à valeurs dans le corps de base K) v sur V qui sont définies en au moins un point de $f(U)$, et $\mathfrak{p}$ est l'ensemble des $v \in \mathfrak{o}$ tels que $v(y) \neq 0$ pour tout $y \in f(U)$ en lequel v est défini. Soit g une fonction sur V à valeurs dans W, définie en au moins un point de $f(U)$; l'ensemble U_1 des $x \in U$ tels que f soit défini en x et g en $f(x)$ est ouvert non vide, et l'application $x \to g(f(x))$ de U_1 dans W se prolonge d'une manière et d'une seule en une fonction sur U à valeurs dans W ; nous désignerons cette fonction par $g \odot f$, et nous l'appellerons la <u>fonction composée de</u> g <u>et de</u> f. Nous exprimerons le fait que g est défini en au moins un point de $f(U)$ en disant que g <u>est composable avec</u> f. Il en est toujours ainsi dans le cas où $f(U)$ est dense dans V. Appliquons ce qui précède au cas où $W = K$ (le corps de base). Les fonctions numériques (ou fonctions rationnelles) sur V composables avec f sont celles qui appartiennent à $\mathfrak{o}$; l'application $v \to v \odot f$ de $\mathfrak{o}$ dans le corps F_U des fonctions numériques sur U est un homomorphisme φ qu'on appelle le <u>cohomomorphisme</u> de f (pour toute variété U, nous noterons systématiquement F_U le corps des fonctions numériques sur U) ; le noyau de φ est $\mathfrak{p}$. Réciproquement, on montre que, si E est une partie irréductible fermée de V, $\mathfrak{o}$ son anneau local, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}$ et φ un homomorphisme $\mathfrak{o} \to F_U$ de noyau $\mathfrak{p}$ (il s'agit toujours d'homomorphismes des structures d'algèbre sur K), il y a une fonction f et une seule sur U à valeurs dans V de cohomomorphisme φ ; $f(U)$ est une partie dense de E. Pour que f soit définie en un point

$x \in U$, il faut et il suffit qu'il y ait un $y \in E$ tel que φ applique l'anneau local $\mathcal{O}(y)$ de y (qui est automatiquement contenu dans $\mathcal{O}$) dans l'anneau local de x ; y est alors uniquement déterminé par cette condition et on a $f(x) = y$. Si g est une fonction sur V à valeurs dans W , composable avec f , et γ son cohomomorphisme, l'application $\varphi \circ \gamma$ prolonge le cohomomorphisme de $g \odot f$ et lui est égale si $f(U)$ est dense dans V .

PROPOSITION 1.- Soit f une fonction sur une variété U à valeurs dans une variété V telle que $f(U)$ soit dense dans V , et soit φ son cohomomorphisme. Soit u une fonction numérique sur U , Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

a) u est radicielle sur $\varphi(F_V)$;

b) il existe un ouvert non vide Ω de U contenu dans les ensembles de définition de u et de f tel que l'on ait $u(x) = u(x')$ toutes les fois que $x, x' \in \Omega$ sont tels que $f(x) = f(x')$.

Supposons a) satisfaite ; soit q une puissance de l'exposant caractéristique telle que $u^q = \varphi(v)$, $v \in F_V$. L'ensemble Ω des $x \in U$ tels que f et u soient définies en x et v en $f(x)$ est ouvert non vide ; si x , $x' \in \Omega$ sont tels que $f(x) = f(x')$, on a $u^q(x) = v(f(x)) = u^q(x')$, d'où $u(x) = u(x')$.

Supposons réciproquement b) satisfaite. Soit h la fonction sur U à valeurs dans $V \times K$ telle que $h(x) = (f(x)\ ,\ u(x))$ si f et u sont définis en x ; $h(\Omega)$ est épais et contient une partie relativement ouverte non vide W de son adhérence. La projection de $V \times K$ dans V induit un morphisme f' de W dans V ; il est clair que f' est injectif et que $f'(W)$ est dense dans V , Il y a une partie relativement ouverte W' de W , non vide, telle que, pour tout $z' \in W'$, W' soit normale en z' et V normale en $f'(z')$: remplaçant au besoin W' par une partie ouverte non vide plus petite, on peut supposer que $f'(W')$ est une sous-variété ouverte normale V' de V . Soit φ_1' le cohomomorphisme de la restriction de f' à W' ; pour tout $y' \in V'$, $f_1^{-1}(y)$ se compose d'un seul point ; il résulte alors de ce qui a été dit dans un exposé antérieur (exposé 5, corollaire 2 au théorème 2) que $F_{W'}$ est algébrique et radiciel sur $\varphi_1'(F_{V'}')$. En particulier, la projection de $V \times K$ sur K induit sur W' une fonction numérique qui est radicielle sur $\varphi_1'(F_{V'})$. Il y a donc une fonction numérique v sur V et une puissance q de l'exposant caractéristique telles que $u^q(x) = v(f(x))$ pour tout $x \in U$ tel que f et u soient définis en x et $(f(x), u(x)) \in W'$; ces points x formant un ouvert non vide, on a $u^q = \varphi(v)$ par continuité.

DÉFINITION 1.- Soient f un morphisme d'une variété U dans une variété V et φ son cohomomorphisme. Supposons les conditions suivantes satisfaites : on a $f(U) = V$; tout élément de F_U radiciel sur $\varphi(F_V)$ appartient à ce corps ; si v est une fonction numérique sur V et si $\varphi(v)$ est définie en un point $x \in U$, alors v est définie en $f(x)$. On dit alors que V est une variété quotient de U par f.

THÉORÈME 1.- Soit f un morphisme d'une variété U dans une variété V telle que V soit variété quotient de U par f. Soit g une fonction sur U à valeurs dans une variété W ; supposons qu'il existe un ouvert $\Omega \neq \emptyset$ de U contenu dans l'ensemble de définition de g tel que les conditions $x, x' \in \Omega$, $f(x) = f(x')$ entraînent $g(x) = g(x')$. Alors il existe une fonction h et une seule sur V à valeurs dans W telle que $g = h \odot f$; si $x \in U$, h est définie en $f(x)$ si et seulement si g est définie en x.

Si D est l'ensemble de définition de g, $f(D)$ est épais et dense dans V ; si donc h, h' sont des solutions du problème, elles coïncident sur un ouvert non vide, ce qui démontre l'unicité. Pour démontrer l'existence et la dernière assertion, on peut supposer sans restriction de généralité que $g(U)$ est dense dans W. Soient φ et γ les cohomomorphismes de f et g ; soit $w \in F_W$; Si $x, x' \in \Omega$ sont tels que $f(x) = f(x')$ et que w soit défini en $g(x) = g(x')$, on a $(\gamma(w))(x) = (\gamma(w))(x')$; tenant compte de la définition des variétés quotient et de la proposition 1, on voit que $\gamma(w) \in \varphi(F_V)$; il y a donc un isomorphisme η de F_W sur un sous-corps de F_V tel que $\gamma = \varphi \circ \eta$. C'est le cohomomorphisme d'une fonction h sur V à valeurs dans W telle que $g = h \odot f$. Si h est définie en $f(x)$, g l'est en x.

Supposons réciproquement g définie en x, et soit $z = g(x)$; soit w une fonction de l'anneau local $\mathcal{O}(x)$ de z ; alors $\varphi(\eta(w)) = \gamma(w)$ est définie en x, donc $\eta(w)$ est définie en $f(x)$ par la définition des variétés quotient ; comme $\eta(\mathcal{O}(z))$ est contenu dans l'anneau local de $f(x)$, h est définie en $f(x)$.

COROLLAIRE.- Les notations étant celles du théorème, si g est définie en x, elle est définie en tout point de $\bar{f}^{1}(f(x))$ et est constante sur cet ensemble.

PROPOSITION 2.- Soit f un morphisme d'une variété U dans une variété V tel que V soit variété quotient de U par f. Soit g un morphisme de V dans une variété W, et soit $h = g \odot f$. Pour que W soit variété quotient de U par h, il faut et suffit que W soit variété quotient de V par g.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration, qui est facile.

THEOREME 2.- Soit f une fonction sur une variété U à valeurs dans une variété V ; supposons que $f(U)$ soit dense dans V et que, φ désignant le cohomomorphisme de f, tout élément de F_U radiciel sur $\varphi(F_V)$ soit dans $\varphi(F_V)$. Il existe alors une sous-variété ouverte U' de U telle que, f' désignant la restriction de f à U', $f'(U')$ soit une sous-variété ouverte V' de V et que V' soit variété quotient de U' par f'.

Remplaçant U par une sous-variété ouverte, on peut supposer que f est un morphisme. Tenant compte du théorème 4 du séminaire 1955/56 (exposé 8) et de la remarque qui suit la démonstration de ce théorème, on voit qu'il y a une sous-variété ouverte V' de V qui possède la propriété suivante : si $y \in V'$, $y = f(x)$, $x \in U$, et si Y est une sous-variété fermée passant par y, il y a une sous-variété X de U passant par x telle que $f(X)$ soit dense dans Y. On peut de plus supposer V' normale et contenue dans $f(U)$. Or on a le lemme suivant :

LEMME 1.- Soient V une variété, y un point de V en lequel V est normale et v une fonction numérique sur V non définie en y. Il y a alors une sous-variété Y de V passant par y telle que v^{-1} soit définie en au moins un point de Y et prenne la valeur 0 en tout point de Y où elle est définie.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local de y ; les $a \in \mathcal{O}$ tels que $av \in \mathcal{O}$ forment un idéal $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}$; soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$ et $\mathcal{O}$ son anneau local. Si $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_r$ sont les idéaux premiers minimaux

$\neq \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$, il y a un exposant $n > 0$ tel que $\mathfrak{p}^n \mathfrak{p}_2^n \dots \mathfrak{p}_r^n \subset \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{p}^n \mathfrak{O} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{O}$ puisque $\mathfrak{p}_i \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$ si $i > 1$. Soit donc k le plus petit exposant $\geqslant 0$ tel que $\mathfrak{p}^k v \subset \mathfrak{O}$; on a $k > 0$. Soit $v \in \mathfrak{p}^{k-1} v$, $v \notin \mathfrak{O}$, d'où $\mathfrak{p} v' \subset \mathfrak{O}$. Si on avait $\mathfrak{p} v' \subset \mathfrak{p}\mathfrak{O}$, la multiplication par v' donnerait un endomorphisme du $\mathfrak{O}$-module fini $\mathfrak{p}\mathfrak{O}$; v' serait alors entier sur $\mathfrak{O}$; mais c'est impossible, car, $\mathfrak{o}$ étant normal, il en est de même de $\mathfrak{O}$ et v' n'est pas entier sur $\mathfrak{O}$ puisque $v' \notin \mathfrak{O}$. Donc $\mathfrak{p} v'$ contient un élément inversible de $\mathfrak{O}$, et $v'^{-1} \in \mathfrak{O}$. On a $v'^{-1} \in \mathfrak{p}\mathfrak{O}$, d'où $\mathfrak{p}\mathfrak{O} = v'^{-1}\mathfrak{O}$ puisque $\mathfrak{p} v' \subset \mathfrak{O}$. On voit alors que vv'^{-k} est un élément inversible de $\mathfrak{O}$, d'où $v^{-1} \in \mathfrak{O}$. Il correspond à $\mathfrak{p}$ une sous-variété Y de V passant par $\mathfrak{O}$; son anneau local est $\mathfrak{O}$; puisque $v^{-1} \in \mathfrak{O}$, v^{-1} est définie en au moins un point de Y ; comme $v^{-1} \in \mathfrak{p}\mathfrak{O}$, v^{-1} est nulle en tout point de Y où elle est définie.

Ceci dit, démontrons le théorème 2. Soit y un point de V' et soit v une fonction numérique sur V non définie en y . Soit Y une sous-variété fermée de V passant par y qui possède les propriétés du lemme 1 ; soit x un point quelconque de $f^{-1}(y)$. Il passe par x une variété X telle que $f(X)$ soit dense dans Y . Soit $u = \varphi(v)$; il y a un ensemble X' dense dans X tel que u^{-1} soit défini et nul en tous les points de X' ; cela signifie que u^{-1} appartient à l'idéal premier maximal de l'anneau local de X , ce qui implique manifestement que u n'est pas défini en x . Ceci établit le théorème 2.

<u>REMARQUE</u>.- On peut montrer que si $x \in U$ est tel que V soit normale en $f(x)$ et que toute composante de $f^{-1}(f(x))$ passant par x soit de dimension $\dim U - \dim V$, alors on peut prendre U' contenant x ; nous n'utiliserons pas ce résultat plus précis.

Soit f une application d'une variété U sur un ensemble A . S'il existe sur A une structure de variété qui soit variété quotient de U par f , il n'en existe qu'une, comme il résulte tout de suite du théorème 1 ; on dit alors qu'il existe une variété quotient de U par f . Dans l'énoncé suivant, nous appellerons partie tubulaire (pour f) de U toute sous-variété ouverte T de U telle qu'il existe une variété quotient de T par la restriction de f à T .

PROPOSITION 3.- Soit f une application surjective d'une variété U sur un ensemble A. Supposons que, si x et x' sont des points quelconques de U, il existe toujours une partie tubulaire de U (pour f) contenant x et x'. Il y a alors une variété quotient de U par f.

Pour toute partie tubulaire T, soit f_T la restriction de f à T, et soit A_T l'ensemble $f(T)$ muni de sa structure de variété quotient de T ; soient φ_T le cohomomorphisme de f_T, et $G_T = \varphi_T(F_{A_T})$. Montrons que les corps G_T sont tous égaux. Soient T et T' des parties tubulaires et $u \in G_T$; si D est l'ensemble de définition de u, $D \cap T \cap T'$ est un ouvert non vide, et si x, x' sont des points de cet ensemble tels que $f(x) = f(x')$, on a $u(x) = u(x')$ (corollaire au théorème 1). Il en résulte, en vertu de la proposition 1 et de la définition des variétés quotient, que $u \in G_{T'}$; on a donc $G_T \subset G_{T'}$, ce qui montre que les corps G_T sont tous égaux. Soit G leur valeur commune, et soit Σ l'ensemble des intersections avec G des localités de F_U qui appartiennent au schéma de U. Si E est une partie irréductible d'une partie tubulaire T, on a, en désignant par $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(f_T(E))$ les anneaux locaux de E et de $f_T(E)$ respectivement, $\varphi_T(\mathcal{O}(f_T(E))) = \mathcal{O}(E) \cap G$. En effet, soit v une fonction numérique sur A_T ; si v est définie en au moins un point de $f_T(E)$, $\varphi_T(v)$ est définie en au moins un point de E, et la réciproque est vraie puisque A_T est variété quotient de T par f_T. Les éléments de Σ sont donc des localités de G. Comme U est un espace noetherien, il peut être couvert par un nombre fini de parties tubulaires, ce qui montre que Σ est réunion finie de schémas affines (on se rappellera que, si E est une partie irréductible de U, $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E \cap T)$ si E rencontre la partie tubulaire T). Soient $\Upsilon = \mathcal{O}(E) \cap G$, $\Upsilon' = \mathcal{O}(E') \cap G$ des éléments de Σ, E et E' étant des parties irréductibles de U ; il y a par hypothèse une partie tubulaire T qui rencontre E et E' ; Υ et Υ' sont donc images par φ_T de localités du schéma de A_T et sont par suite identiques ou incompatibles ; Σ est donc un schéma. Si $y \in A$, les intersections avec G des anneaux locaux des points $f^{-1}(y)$ sont toutes égales, comme il résulte immédiatement du fait que deux quelconques de ces points sont dans une même partie tubulaire ; si $\mathcal{O}_y$ est la valeur commune de ces intersections, on vérifie immédiatement que $y \to \mathcal{O}_y$ est une bijection de A sur l'ensemble des localités de dimension 0 de Σ, cette bijection définit sur A une structure de variété, qui est évidemment variété quotient de U par f.

THÉORÈME 3.- Soit f une fonction sur une variété U à valeurs dans une variété V : supposons que $\dim. U = \dim. V$ et que $f(U)$ soit dense dans V. Il y a alors des sous-variétés ouvertes U', V' de U, V qui possèdent les propriétés suivantes : U' et V' sont normales ; la restriction f' de f à U' est un morphisme ; on a $V' = f'(U')$; pour tout $y \in V'$, $f'^{-1}(y)$ a toujours le même nombre d'éléments.

On peut manifestement supposer U et V normales et affines, et que f est un morphisme ; soient P et Q les algèbres affines de U et V ; si φ est le cohomomorphisme de f, on a $\varphi(Q) \subset P$ puisque f est un morphisme. Comme $\dim.U = \dim.V$, F_U est algébrique sur le corps des fractions $\varphi(F_V)$ de $Q' = \varphi(Q)$. Comme P est à engendrement fini, il y a un élément $v' \neq 0$ de Q' tel que $P[v'^{-1}]$ soit entier sur $Q[v'^{-1}]$. Remplaçant U et V par des sous-variétés ouvertes, on peut supposer que P est entier sur Q. La variété U est alors la variété dérivée normale de V relativement à l'isomorphisme φ de F_V sur un sous-corps de F_U, puisque P est la clôture intégrale de $\varphi(Q)$ dans F_U ; le résultat découle alors d'un résultat établi dans un exposé antérieur (exposé 5, corollaire 2 au théorème 2).

Soit f un morphisme d'une variété normale U dans une variété normale V ; supposons de plus que, pour tout $y \in V$, le nombre n des points de $f^{-1}(y)$ soit fini et toujours le même. Soit φ le cohomomorphisme de f ; supposons d'abord F_U séparable sur $\varphi(F_V)$. Soient y un point de V $\mathfrak{O}(y)$ son anneau local, $\mathfrak{O}' = \varphi(\mathfrak{O}(y))$, $\mathfrak{D}$ la clôture intégrale de $\mathfrak{O}'$ dans F_U. Si $\mathfrak{p}'$ est l'idéal premier maximal de $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{D}$ est l'intersection de n idéaux premiers maximaux $\mathfrak{P}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ dont les anneaux locaux sont les anneaux locaux des points de $f^{-1}(y)$; $\mathfrak{D} / \mathfrak{p}'\mathfrak{D}$ est isomorphe à la somme directe de n corps identiques à K au moyen d'un isomorphisme qui applique tout $t \in \mathfrak{D}$ sur l'élément $(t(x_1), \dots, t(x_n))$, où les x_i sont les points de $f^{-1}(y)$ (cf. exposé 5). Il y a des éléments $t_i \in \mathfrak{D}$ tels que $t_i(x_j) = \delta_{ij}$, et ces éléments forment une base de F_U sur $\varphi(F_V)$. Soit alors u une fonction numérique sur U définie en $x_1, \dots, x_n$; calculant la trace $\mathrm{Tr}\ u$ de u par rapport à $\varphi(F_V)$ au moyen de la base $(t_1, \dots, t_n)$, on voit tout de suite que $(\mathrm{Tr}\ u)(x_i) =$ $= \sum_{i=1}^{n} u(x_i)$. On en conclut que, si u est une fonction numérique partout définie sur U, la formule :

$$v(y) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \text{ (où } \{x_1, \dots, x_n\} = \overset{-1}{f}(y))$$

définit une fonction numérique v partout définie sur V. Ce résultat doit être modifié lorsque F_U n'est plus séparable sur $\varphi(F_V)$; il y a alors une variété normale U_1, un morphisme f_1 de U dans U_1 et un morphisme f_2 de U_1 dans V tels que, pour tout $x_1 \in U_1$, $f_1^{-1}(x_1)$ se compose d'un seul point, que, pour tout $y \in V$, $f_2^{-1}(y)$ se compose de n points, que F_U soit radiciel sur l'image de F_{U_1} par le cohomomorphisme φ_1 de f_1 et F_{U_1} séparable sur l'image de F_V par le cohomomorphisme de f_2. Si q est le degré de F_U sur $\varphi_1(F_{U_1})$, et si u est une fonction numérique partout définie sur U, la formule $v(y) = \sum_{i=1}^{n} u^q(x_i)$ définit une fonction numérique partout définie sur V.

APPLICATION AUX GROUPES.

Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé de G. Pour tout $t \in H$, le cohomomorphisme de la translation à droite par t est un automorphisme τ_t du corps F_G ; soit R le corps des fonctions invariantes par les τ_t. Les fonctions de R sont appelées les fonctions H-invariantes. Nous nous proposons de montrer que, si s, s' sont des points de G tels que $sH \neq s'H$, il y a une fonction de R qui est définie en s et s' et y prend des valeurs distinctes.

Soit H_o la composante connexe de l'élément neutre e dans H ; soient g et h les dimensions de G et H. Il existe une sous-variété U de G de dimension $g - h$ passant par e telle que e soit un point isolé de $U \cap H_o$. Pour le montrer, établissons le

LEMME 2.- Soient U une variété de dimension m, x un point de U, $T_1, \dots, T_r$ des sous-variétés de dimensions > 0 de U passant par x ; il existe alors une fonction numérique u sur U, définie en x, y prenant la valeur 0, qui n'induit 0 sur aucune des T_i.

Soient $\mathfrak{O}$ l'anneau local de x, $\mathfrak{t}_i$ l'idéal premier de $\mathfrak{O}$ correspondant à T_i ; puisque $\dim . T_i > 0$, les $\mathfrak{t}_i$ sont tous distincts de l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{O}$. Les $\mathfrak{t}_i$ étant des sous-espaces de la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{p}$ sur K (qui est infini), il y a un $u \in \mathfrak{p}$ qui n'appartient à aucun des $\mathfrak{t}_i$, d'où le résultat.

Si U' est une composante de l'ensemble des zéros de u passant par x , U' est de dimension $m-1$ et, pour chaque i , $U' \cap T_i$ est de dimension $< \dim. T_i$. Appliquons ceci à la situation qui nous occupe : on construit inductivement au moyen du lemme 2 une suite $(U_i)_{1 \leq i \leq h}$ de sous-variétés U_i de G passant par e telle que, pour tout i , toute composante de $U_i \cap H_o$ passant par e **soit de dimension** $h - i$; $U = U_h$ possède alors la propriété requise. On peut de plus manifestement supposer que U est affine. L'application $(x , t) \longrightarrow xt$ est un morphisme de $U \times H_o$ dans G , soit f ; le point (e , e) est isolé dans $f^{-1}(e)$; on a donc $\dim. f(U \times H_o) = \dim(U \times H_o) = g - h + h = g$, et $f(U \times H_o)$ est dense dans G . Il y a alors une sous-variété ouverte normale W de $U \times H_o$ et une sous-variété ouverte (donc normale) G' de G telles que, pour tout $z \in G'$, $f'^{-1}(z)$ contienne le même nombre n de points (f' désignant la restriction de f à W). Soit u une fonction numérique partout définie sur U ; il y a un exposant q , puissance de l'exposant caractéristique de K , telle que la formule $v(z) = \sum_{i=1}^{n} u^q(x_i)$ (où $(x_1 , t_1) , \ldots , (x_n , t_n)$ sont les points de $f'^{-1}(z)$) définisse une fonction numérique v sur G , partout définie sur G' . Cette fonction est toujours H_o-invariante. Soit en effet z un point de G' , et soient (x_i , t_i) $(1 \leq i \leq n)$ les points de $f'^{-1}(z)$; l'ensemble A des $t \in H_o$ tels que $(x_i , t_i t) \in W$ $(1 \leq i \leq n)$ est manifestement ouvert et non vide ; si $t \in A$, on a $z't \in G'$ et $f'^{-1}(z't)$ contient les points $(x_i , t_i t)$, qui sont en nombre n et qui sont par suite tous les points de $f'^{-1}(zt)$; on a donc $v(zt) = v(z)$ si $t \in A$. La fonction v est donc constante sur $zH_o \cap G'$ (car zA est dense dans zH_o) . Soit maintenant t un élément quelconque de H_o , et soit τ_t le cohomomorphisme de la translation à droite par t ; on a donc $v(z) = (\tau_t(v))(z)$ pour tout z tel que $z \in G'$, $zt \in G'$; comme les points z ayant ces deux propriétés forment un ouvert non vide de G , $v = \tau_t(v)$. Ceci étant, soient $z_1 , \ldots , z_\nu$ des points de G' tels que les ensembles $z_i H$ $(1 \leq i \leq \nu)$ soient tous distincts ; soient (x_{ik} , t_{ik}) $(1 \leq k \leq n)$ les points de $f'^{-1}(z_i)$, d'où $x_{ik} \in z_i H_o$; les points x_{ik} $(1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq k \leq n)$ sont donc tous distincts, et, comme U est affine, on peut trouver une fonction numérique u partout définie sur U qui prend en ces points des valeurs arbitrairement données. On en conclut qu'il y a une fonction numérique v sur G qui est H_o-invariante et qui prend en les z_i des valeurs arbitrairement données. Soient maintenant s et s' des points de G tels que $sH \neq s'H$; soient $t_1, \dots, t_m$ des représentants des classes de H suivant H_o ; les st_iH_o, $s't_iH_o$ sont donc tous distincts. Les ouverts $G'(st_j)^{-1}$, $G'(s't_j)^{-1}$ se rencontrent, il y a un $a \in G$ tel que les ast_j, $as't_j$ soient tous dans G'. Il y a une fonction H_o-invariante v_1 qui prend en tous ces points des valeurs arbitrairement données ; or, pour toute fonction H_o-invariante v_1, il est clair que $\sum_{j=1}^{m} \tau_{t_j}(v_1)$ est une fonction H-invariante ; choisissant convenablement les valeurs de v_1 en les ast_j, $as't_j$, on voit qu'il y a une fonction numérique v_2 sur G, H-invariante, définie en as et as' et telle que $v_2(as) \neq v_2(as')$. Soit σ le cohomomorphisme de la translation à gauche par a ; σ commute donc avec les cohomomorphismes des translations à droite, et $v = \sigma(v_2)$ est H-invariante ; v est définie en s et s' et y prend des valeurs distinctes.

THÉORÈME 4.- Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé de G ; soit f l'application canonique de G sur l'ensemble G/H. Il existe alors une variété quotient de G par f ; G/H étant muni de cette structure de variété, et φ désignant le cohomomorphisme de f, $\varphi(F_{G/H})$ est le corps $\mathbf{R}$ des fonctions H-invariantes sur G.

Il résulte immédiatement de la définition de R que tout élément de F_G qui est radiciel sur R est dans R. Soit X un modèle quelconque de R ; c'est une variété munie d'un isomorphisme φ' de F_X sur R. On peut considérer φ' comme un isomorphisme de F_X sur un sous-corps de F_G ; comme tel, c'est le cohomomorphisme d'une fonction f' sur G à valeurs dans X. Il résulte alors du théorème 2 que l'on peut choisir X de telle manière qu'il y ait une sous-variété ouverte G' de G telle que, la restriction de f' à G' étant notée f'', X soit variété quotient de G' par f''. Soient s et s' des points de G' tels que $f''(s) = f''(s')$; il est alors clair que, pour toute fonction $v \in R$ définie en s et en s', $v(s) = v(s')$ (car $v = \varphi'(w)$, où w est une fonction numérique sur X qui est définie en $f'(s) = f'(s')$ puisque X est variété quotient de G'). Il en résulte que $sH = s'H$ en vertu de ce qui a été établi plus haut. Soient réciproquement

s et s' des points de G' tels que $sH = s'H$: soit $s' = st$, $t \in H$. Si v est une fonction de R définie en s', il résulte de la formule $v = \tau_t(v)$ (où τ_t est le cohomomorphisme de la translation à droite par t) que v est définie en s. Il en résulte que toute fonction numérique w sur X est définie en $f'(s')$ l'est en $f'(s)$, d'où $f'(s') = f'(s)$. Il y a donc une bijection j de X sur une partie de G/H telle que $j \circ f''$ soit la restriction de f à G' ; autrement dit, G' est une partie tubulaire relativement à f. Il est clair que, pour tout $a \in G$, aG' est encore tubulaire relativement à f. Or, soient s et s' des points quelconques de G ; comme $G's^{-1} \cap G's'^{-1} \neq \emptyset$, il y a un $a \in G$ tel que as et as' soient dans G', de sorte que s et s' sont dans une partie tubulaire pour f. Il résulte alors de la proposition 4 qu'il y a une variété quotient de G par f ; la dernière assertion du théorème 4 résulte immédiatement de notre construction de G/H.

<u>REMARQUE</u>.- Les notations étant comme ci-dessus, on peut non seulement affirmer que tout élément de F_G radiciel sur R est dans R, mais que F_G est séparable sur R, en vertu du lemme suivant :

<u>LEMME 3</u>.- <u>Soient</u> F <u>un corps et</u> R <u>le corps des invariants d'un groupe d'automorphismes de</u> F, F <u>est alors séparable sur</u> R.

Soient en effet $x_1, \dots, x_n$ des éléments de R tels que les $x_i^{1/p}$ soient linéairement indépendants sur F (dans une clôture algébrique de ce corps) ; nous voulons montrer qu'ils sont linéairement dépendants sur R. On se ramène tout de suite au cas où $x_1^{1/p}, \dots, x_{n-1}^{1/p}$ sont linéairement indépendants sur F. Soit alors $x_n^{1/p} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^{1/p}$, $a_i \in R$. Appliquant un automorphisme γ (qui se prolonge à $R^{1/p}$), et tenant compte de ce que les $x_i^{1/p}$ $(i < n)$ sont linéairement indépendants sur R, il vient $\gamma(a_i) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$; les a_i sont donc dans R, ce qui démontre le lemme 3.

<u>PROPOSITION 4</u>.- <u>Soient</u> H', H'' <u>des sous-groupes fermés d'un groupe algébrique</u> G <u>tel que</u> $H'' \subset H'$. <u>Si</u> f <u>est l'application canonique de</u> G/H'' <u>sur</u> G/H', <u>la variété</u> G/H' <u>est variété quotient de</u> G/H'' <u>par</u> f.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.

PROPOSITION 5.- Soit G_i $(i = 1 , 2)$ un groupe algébrique, et soit H_i un sous-groupe fermé de G_i ; soit f_i l'application canonique de G_i sur G_i/H_i. Soit m un morphisme de G_1 dans G_2 tel que $m(sH_1) \subset m(s)H_2$ pour tout $s \in G$; l'application $m^* : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2$ telle que $m^* \circ f_1 = f_2 \circ m$ est un morphisme.

Comme $f_2 \circ m$ est un morphisme, cela résulte du théorème 1.

La proposition 5 s'applique en particulier aux cas suivants :

a) m est un homomorphisme de G_1 dans G_2 tel que $m(H_1) \subset H_2$;

b) on a $G_1 = G_2$, $H_1 = H_2$ et m est la translation à gauche par un élément de G. Dans le cas b), on voit que, si s est un élément d'un groupe algébrique G et H un sous-groupe fermé de G, l'application $x \longrightarrow s.x$ de G/H dans lui-même est un automorphisme de la variété G/H ($s.x$ étant par définition stH si $x = tH$). Il en résulte immédiatement que tous les points de G/H sont simples.

PROPOSITION 6.- Soit G_i $(i = 1 , 2)$ un groupe algébrique et soit H_i un sous-groupe fermé de G ; soit f_i l'application canonique $G_i \longrightarrow G_i/H_i$. Soit $G = G_1 \times G_2$, $H = H_1 \times H_2$, et soit f l'application canonique $G \longrightarrow G/H$; l'application g de G/H sur $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ telle que $g(f(s_1 , s_2)) = (f_1(s_1) , f_2(s_2))$ est un isomorphisme de variétés.

Soit R_i le corps des fonctions numériques H_i-invariantes sur G_i , et soit R le corps des fractions de $R_1 \otimes R_2$. Comme F_{G_i} est séparable sur R_i , il est algébrique et séparable sur un corps S_i qui est une extension transcendante pure de R_i ; il est alors clair que le corps des fractions S de $S_1 \otimes S_2$ est une extension transcendante pure de R et que le corps des fractions F_G de $F_{G_1} \otimes F_{G_2}$ est algébrique séparable sur S. Donc F_G est séparable sur R , et tout élément de F_G radiciel sur R est dans R.

Soit h l'application $(s_1 , s_2) \longrightarrow (f_1(s_1) , f_2(s_2))$; il résulte du théorème 2 qu'il y a une sous-variété ouverte G' de G telle que $h(G')$ soit ouvert dans $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ et que, h' désignant la restriction de h à G' , $h(G')$ soit variété quotient de G' par h'. Or g est un morphisme (théorème 1) ; $f(G') = g^{-1}(h(G'))$ est donc ouvert dans G/H et est variété quotient de G' par la restriction de f à G'. Il en résulte immédiatement que g induit un isomorphisme de $f(G')$ sur $h(G')$. Par ailleurs, si $a_i \in G_i$, l'application m de G/H sur lui-même qui transforme $f(s_1, s_2)$ en $f(a_1 s_1, a_2 s_2)$ est un automorphisme, et l'application m' de $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ qui transforme $(f_1(s_1), f_2(s_2))$ en $(f_1(a_1 s_1), f_2(a_2 s_2))$ est un automorphisme. Comme $g \circ m = m' \circ g$, on en déduit immédiatement que g est un isomorphisme.

PROPOSITION 7.- *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique G. L'application $(s, x) \longrightarrow s.x$ de $G \times (G/H)$ dans G/H est un morphisme.*

Soient f l'application canonique $G \longrightarrow G/H$ et g l'application $(s, t) \longrightarrow (s, f(t))$. L'application $(s, t) \longrightarrow s.f(t) = f(st)$ est un morphisme et $G \times (G/H)$ est variété quotient de $G \times G$ par g (proposition 6) ; la proposition 7 résulte alors du théorème 1.

PROPOSITION 8.- *Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe distingué fermé de G. La structure de groupe de G/H et sa structure de variété quotient de G définissent alors sur G/H une structure de groupe algébrique.*

On démontre que l'application $(x, y) \longrightarrow xy$ de $(G/H) \times (G/H)$ dans G/H est un morphisme en opérant comme dans la démonstration de la proposition 6. Soit f l'application canonique $G \longrightarrow G/H$; $s \longrightarrow (f(s))^{-1} = f(s^{-1})$ est un morphisme ; il en résulte (théorème 1) que $x \longrightarrow x^{-1}$ est un morphisme de G/H.

On notera qu'il a été établi que, si H est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe algébrique affine G, G/H est un groupe affine.