Séminaire Claude Chevalley

P. Cartier

Définition des variétés algébriques

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A1_0>

-:-:-:-

DÉFINITION DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

(Exposé de P. CARTIER, le 5.11.56)

On a suivi de près l'exposition de SERRE (Ann. of Math., 61, 1955, p. 197-278) en évitant seulement l'emploi des faisceaux, qu'on a remplacés par les systèmes locaux de fonctions, tout de même plus naturels. On fera dans le prochain exposé le lien avec la théorie des schémas de Chevalley-Nagata. Conformément à une tendance récente, on a mis l'accent sur la topologie de Zariski, qui fournit un langage géométrique plus intuitif que le langage équivalent des spécialisations.

1.- Espaces topologiques noethériens.

On appellera espace noethérien un espace topologique E, en général non séparé, dans lequel l'ensemble des ouverts vérifie la condition maximale ou encore l'ensemble des fermés la condition minimale.

Un espace topologique E tel que, de tout recouvrement ouvert, on puisse extraire un recouvrement fini, sera appelé quasi-compact. Un espace compact est donc un espace quasi-compact séparé. Dans ces conditions, un espace noethérien est un espace dans lequel tout ouvert est quasi-compact : en effet, soit E un espace noetherien, U un ouvert de E réunion des ouverts U_i ; si V est un élément maximal de l'ensemble des réunions finies d'ouverts U_i, on a $V \cup U_i \subset V$ pour tout i, donc $U_i \subset V$ pour tout i et par suite $V = U$; inversement, soit E un espace topologique dans lequel tout ouvert est quasi-compact, et soit (U_n) une suite croissante d'ouverts de E ; comme la réunion des U_n est quasi-compacte, elle est réunion d'un nombre fini de ces ouverts, donc égale à l'un d'eux, et la suite (U_n) est stationnaire, ce qui prouve que E est noethérien.

PROPOSITION 1.- Soit E un espace topologique. Si E est noethérien, il en est de même de tout sous-espace F de E ; inversement, si E est réunion d'un nombre fini de sous-espaces noethériens, c'est un espace noethérien.

Supposons E noethérien, et soit (V_n) une suite croissante d'ouverts de F. On a $V_n = F \cap U_n$ avec U_n ouvert dans E pour tout n ; comme E

est noetherien , il existe un entier m tel que $U_n \subset \bigcup_{k \leq m} U_k$ pour $n > m$, d'où $V_n \subset V_m$ pour $n > m$. La suite (V_n) est stationnaire et F est noetherien.

Supposons E réunion des sous-espaces noethériens E_i $(1 \leq i \leq n)$, et soit (U_n) une suite croissante d'ouverts de E ; puisque E_i est noethérien pour chaque i, il y a un entier k_i tel que $U_n \cap E_i$ soit indépendant de n pour $n \geqslant k_i$. Comme $U_n = \bigcup_i (U_n \cap E_i)$, on a $U_m = U_n$ pour $m, n \geqslant \sup_i k_i$, et E est noethérien.

On dira qu'un espace topologique E est <u>irréductible</u> s'il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux sous-espaces fermés distincts de lui-même. Ceci signifie que l'intersection de deux et par suite d'un nombre fini d'ouverts non vides est non vide, ou encore que tout ouvert non vide est partout dense. Il est clair que tout sous-espace ouvert non vide d'un espace irréductible est irréductible.

<u>PROPOSITION 2</u>.- <u>Soit</u> E <u>un espace topologique</u>.

a) <u>Pour qu'un sous-espace</u> F <u>de</u> E <u>soit irréductible, il faut et il suffit que son adhérence</u> $\bar{F}$ <u>le soit</u>.

b) <u>Si</u> E <u>est réunion d'une famille d'ouverts non vides</u> E_i, <u>pour que</u> E <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> E_i <u>soit irréductible pour tout</u> i <u>et que</u> $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ <u>pour tout couple</u> (i, j).

c) <u>Si</u> E <u>est irréductible et si</u> f <u>est une application continue définie dans</u> E, $f(E)$ <u>est irréductible</u>.

L'assertion (a) résulte de ce qu'un sous-espace F de E est irréductible si et seulement si l'intersection de deux ouverts de E qui rencontrent F rencontre aussi F, et de ce que les ouverts rencontrant F sont les ouverts rencontrant $\bar{F}$.

La condition est nécessaire dans (b) ; inversement supposons-la satisfaite et soient U et V deux ouverts non vides de E. Comme E est réunion des E_i, on a $U \cap E_i \neq \emptyset$ et $V \cap E_j \neq \emptyset$ pour i et j convenables ; comme E_i et E_j sont irréductibles et que $E_i \cap E_j$ est un ouvert non vide de E_i et de E_j, il rencontre U et V, et donc $U \cap V$, puisqu'il est irréductible comme ouvert de l'espace irréductible E_i. On a donc prouvé que $U \cap V \neq \emptyset$ et E est irréductible.

Enfin, supposons E irréductible, et soit f une application continue définie dans E ; si U et V sont des ouverts non vides de $f(E)$, les ouverts $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ de E sont non vides donc $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ et par suite $U \cap V \neq \emptyset$, ce qui prouve que $f(E)$ est irréductible.

PROPOSITION 3.- Soit E un espace topologique. Les parties irréductibles maximales de E sont fermées et leur réunion est E. Toute partie irréductible est contenue dans une partie irréductible maximale ; si de plus E est **noethérien**, les parties irréductibles maximales de E sont en nombre fini et pour tout sous-espace F de E, les parties irréductibles maximales de $\bar{F}$ sont les adhérences des parties irréductibles maximales de F.

Soit $\{F_i\}$ une famille totalement ordonnée de parties irréductibles de E et F leur réunion ; si deux ouverts U et V rencontrent F, ils rencontrent l'un des F_i, et comme F_i est irréductible, $U \cap V$ rencontre F_i donc aussi F : l'ensemble F est irréductible. Il résulte alors du théorème de Zorn que toute partie irréductible est contenue dans une partie irréductible maximale. La première assertion de la proposition résulte de ce que l'adhérence d'une partie irréductible est irréductible, et ce que tout point de E étant une partie irréductible est contenu dans une partie irréductible maximale d'après ce qui précède.

Supposons E **noethérien**, et soit $\underline{A}$ l'ensemble des parties de E qui sont réunion d'un nombre fini de parties fermées irréductibles ; si l'on avait $E \notin \underline{A}$, on pourrait trouver une partie fermée G de E, minimale parmi les parties fermées de E qui n'appartiennent pas à $\underline{A}$. Comme $\underline{A}$ contient $\emptyset$ et les parties fermées irréductibles, G n'est ni vide ni irréductible donc $G = G_1 \cup G_2$, $G_i \neq G$ étant fermée pour $i = 1, 2$; de là on tire $G_i \in \underline{A}$ par le caractère minimal de G ; mais on a alors $G = G_1 \cup G_2 \in \underline{A}$, d'où contradiction. On peut donc écrire $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, les E_i étant irréductibles fermées ; si F est irréductible, comme on a $F = \bigcup_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$, il est contenu dans l'un des E_i et par suite lui est égal s'il est irréductible maximal. Les parties irréductibles maximales sont donc certaines des parties E_i et sont en nombre fini.

Enfin, si F est un sous-espace de E et si F_i $(1 \leq i \leq n)$ sont les parties irréductibles maximales de F, on a $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ et $F_i \not\subset F_j$ pour $i \neq j$; on en déduit $\bar{F} = \bar{F}_1 \cup \ldots \cup \bar{F}_n$. On voit comme plus haut que toute partie irréductible maximale de $\bar{F}$ est l'une des $\bar{F}_i$; mais comme $\bar{F}_i \not\subset \bar{F}_j$ pour $i \neq j$ et que toute partie irréductible de $\bar{F}$ est contenue dans une partie irréductible maximale de $\bar{F}$, il en résulte que les parties $\bar{F}_i$ sont les parties irréductibles maximales de $\bar{F}$.

Les parties irréductibles maximales de E se nomment en général les composantes irréductibles de E.

2.- Systèmes locaux de fonctions.

DEFINITION 1.- Soit A un ensemble auxiliaire. Un système local de fonctions sur l'espace topologique E à valeurs dans A est une fonction $\underline{F}$ qui à tout ouvert U de E associe un ensemble $\underline{F}(U)$ d'applications de U dans A satisfaisant aux conditions suivantes :

(SL 1) Si U et V sont des ouverts tels que $V \subset U$, pour tout $f \in \underline{F}(U)$, la restriction $f|V$ de f à V appartient à $\underline{F}(V)$.

(SL 2) Si l'ouvert U est réunion des ouverts U_i, toute application f de U dans A telle que $f|U_i \in \underline{F}(U_i)$ pour tout i, appartient à $\underline{F}(U)$.

Un homomorphisme du système local $\underline{F}$ sur l'espace E dans le système local $\underline{F}'$ sur l'espace E' est une application continue φ de E dans E' telle que pour tout ouvert U' de E' et tout $f' \in \underline{F}'(U')$, on ait $f' \circ \varphi \in \underline{F}(\varphi^{-1}(U'))$.

Il est clair que le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme, que l'application identique de l'espace E est un homomorphisme de $\underline{F}$ dans $\underline{F}$ pour tout système local $\underline{F}$; de plus pour qu'une bijection φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que φ et φ^{-1} soient des homomorphismes.

On va donner deux procédés de définition de systèmes locaux ; soient $\underline{F}$ un système local sur l'espace topologique E et T un sous-espace de E ; pour tout ouvert U de T, on notera $\underline{G}(U)$ l'ensemble des fonctions f de U dans A qui vérifient la condition suivante :

Pour tout $x \in U$, il existe un voisinage U_x de x dans E et $f_x \in \underline{F}(U_x)$ tels que f et f_x coïncident sur $T \cap U_x$.

Il est immédiat que l'application $U \longrightarrow \underline{G}(U)$ est un système local sur T, appelé restriction de $\underline{F}$ à T et noté $\underline{F}|T$. L'application identique i de T dans E est un homomorphisme et si $\underline{F}'$ est un système local sur l'espace E' les homomorphismes de $\underline{F}'$ dans $\underline{F}|T$ sont les applications φ de E' dans T

telles que $i \circ \varphi$ soit un homomorphisme de $\underline{F}'$ dans $\underline{F}$. De là, on déduit (cf. Bourbaki, Ens. IV, paragraphe 2) que si T_1 est un sous-espace de T, on a $(\underline{F}|T)|T_1 = \underline{F}|T_1$.

Le deuxième procédé est fourni par la proposition suivante :

<u>PROPOSITION 4.- Soient $\underline{F}$ un système local sur E et $\underline{F}'$ un système local sur E', tous deux à valeurs dans A. Si pour tout ouvert U de E $M(U)$ est l'ensemble des homomorphismes de $\underline{F}|U$ dans $\underline{F}'$, l'application $U \longrightarrow M(U)$ est un système local $\underline{M}$ de fonctions sur E à valeurs dans E'.</u>

Soient U un ouvert de E, f un homomorphisme de $\underline{F}|U$ dans $\underline{F}'$ et $V \subset U$ un ouvert ; comme l'application identique $i_{U,V}$ de V dans U est un homomorphisme de $\underline{F}|V$ dans $\underline{F}|U$, l'application $f|V = f \circ i_{U,V}$ de V dans E est un homomorphisme de $\underline{F}|V$ dans $\underline{F}'$; (SL 1) est donc vérifié par $\underline{M}$.

Soient maintenant U un ouvert de E réunion des U_i et f une application de U dans E' telle que $f|U_i$ soit un homomorphisme f_i de $\underline{F}|U_i$ dans $\underline{F}'$ pour tout i ; soient U' un ouvert de E' et $h \in \underline{F}'(U')$.

On a $f^{-1}(U') \cap U_i = f_i^{-1}(U')$ et $(h \circ f)|U_i = h \circ f_i \in \underline{F}(f^{-1}(U') \cap U_i)$, ce qui prouve que $f^{-1}(U') = \bigcup_i f_i^{-1}(U_i')$ est ouvert et que $h \circ f \in \underline{F}(f^{-1}(U') \cap U)$ d'après l'axiome (SL 2) pour $\underline{F}$; autrement dit f est continu, et est un homomorphisme de $\underline{F}$ dans $\underline{F}'$; (SL 2) est donc vérifié par $\underline{M}$. On notera $\mathrm{Hom}(E, \underline{F}')$ le système local défini dans la proposition 4.

Nous allons maintenant montrer comment on peut "recoller" des systèmes locaux :

<u>PROPOSITION 5.- Soient E et A deux ensembles et $(E_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E. On suppose donnés pour tout $i \in I$ un système local $\underline{F}_i$ sur l'espace X_i et une bijection f_i de X_i sur E_i de sorte que pour tout couple (i, j)</u>

a) $f_i^{-1}(E_i \cap E_j) = X_{ij}$ <u>soit ouvert dans X_i</u> ;

b) <u>l'application $f_j^{-1} \circ (f_i|X_{ij}) = f_{ij}$ soit un isomorphisme de $\underline{F}_i|X_{ij}$ sur $\underline{F}_j|X_{ji}$.</u>

<u>Il existe alors un système local $\underline{F}$ sur E et un seul tel que pour tout $i \in I$ E_i soit ouvert dans E et que f_i soit un isomorphisme de $\underline{F}_i$ sur $\underline{F}|E_i$. Dans ces conditions, si $\underline{F}'$ est un système local sur l'espace E',</u>

pour qu'une application f de E dans E' (resp. de E' dans E) soit un homomorphisme de $\underline{F}$ dans $\underline{F}'$ (resp. de $\underline{F}'$ dans $\underline{F}$), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, l'application $f \circ f_i$ de X_i dans E (resp. $f_i^{-1} \circ (f \mid f^{-1}(E_i))$ de $f^{-1}(E_i)$ dans X_i) soit un homomorphisme de $\underline{F}_i$ dans $\underline{F}'$ (resp. de $\underline{F}' \mid f^{-1}(E_i)$ dans $\underline{F}$).

Démontrons d'abord la dernière assertion et notons qu'appliquée à l'application identique de E, elle démontre l'unicité de $\underline{F}$. La condition énoncée est nécessaire, puisque le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme ; si elle est remplie, pour tout $i \in I$, l'application $f \circ f_i \circ f_i^{-1} = f \mid E_i$ de E_i dans E' (resp. $f_i \circ f_i^{-1} \circ (f \mid f^{-1}(E_i)) = f \mid f^{-1}(E_i)$ de $f^{-1}(E_i)$ dans E) est un homomorphisme de $\underline{F} \mid E_i$ dans $\underline{F}'$ (resp. de $\underline{F}' \mid f^{-1}(E_i)$ dans $\underline{F}$) et la proposition 4 montre que f est un homomorphisme puisque les E_i (resp. les $f^{-1}(E_i)$) recouvrent E (resp. E').

Pour démontrer l'existence, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1.- Soient E un espace topologique et $\underline{U}$ une base d'ouverts de E. On suppose donné pour tout $U \in \underline{U}$, un ensemble $\underline{F}_o(U)$ d'application de U dans l'ensemble auxiliaire A, de sorte que les axiomes (SL 1) et (SL 2) soient vérifiées pour les ouverts de la base $\underline{U}$. Il existe alors un système local $\underline{F}$ sur E et un seul tel que $\underline{F}(U) = \underline{F}_o(U)$ pour $U \in \underline{U}$.

Soit, pour un ouvert U de E, $\underline{F}(U)$ l'ensemble des applications f de U dans A telles que $f \mid V \in \underline{F}_o(V)$ pour tout $V \in \underline{U}$ contenu dans U. Si $U \in \underline{U}$, il est clair que $\underline{F}(U) = \underline{F}_o(U)$; de plus si $U' \subset U$ et si $f \in \underline{F}(U)$, il est clair que $f \mid U' \in \underline{F}(U')$. Soit alors (U_α) une famille d'ouverts, U leur réunion, f une application de U dans A ; supposons que l'on ait $f \mid U_\alpha \in \underline{F}(U_\alpha)$ pour tout α et soit $V \in \underline{U}$ contenu dans U. Si $\underline{U}_\alpha$ est l'ensemble des ouverts appartenant à $\underline{U}$ contenus dans $V \cap U_\alpha$, on a $f \mid W \in \underline{F}_o(W)$ pour $W \in \underline{U}_\alpha$ puisque $f \mid U_\alpha \in \underline{F}(U_\alpha)$; comme V est réunion de la famille $\bigcup_\alpha \underline{U}_\alpha \subset V$ d'ouverts, l'axiome (SL 2) pour $\underline{F}_o$ montre que $f \mid V \in \underline{F}_o(V)$. Comme ceci a lieu pour tout $V \in \underline{U}$ contenu dans U, on a $f \in \underline{F}(U)$ et $\underline{F}$ vérifie l'axiome (SL 2).

Revenons à la démonstration de la proposition 5 ; transportant par f_i à E_i la topologie de X_i et le système local $\underline{F}_i$, on se ramène au cas où $E_i = X_i$, f_i étant l'identité. La condition (a) signifie que $E_i \cap E_j$ est ouvert dans E_i, et donc dans E_j et la condition (b) que $\underline{F}_i \mid E_i \cap E_j = \underline{F}_j \mid E_i \cap E_j$. Soit alors $\underline{U}$ l'ensemble des parties de E qui sont ouvertes dans l'un des E_i. La condition (a) montre alors que $\underline{U}$ est une base d'ouverts d'une topologie $\mathcal{C}$ sur E pour laquelle les E_i sont ouverts et qui induit la topologie donnée sur chaque E_i. La condition (b) montre que si $U \in \underline{U}$, l'ensemble $\underline{F}_i(U)$ ne dépend pas de l'indice i tel que $U \in E_i$; on notera $\underline{F}_o(U)$ cet ensemble. On peut alors appliquer le lemme 1 car la vérification des axiomes (SL 1) et (SL 2) ne fait intervenir que des ouverts contenus dans un même E_i et $\underline{F}_i$ vérifie ces axiomes. C.Q.F.D.

3.- Résultats préliminaires d'algèbre.

Rappelons le résultat classique de Hilbert sur les anneaux de polynomes (tous les anneaux sont commutatifs avec unité).

THÉORÈME 1.- Soient A un anneau, $\underline{a}$ un idéal de A et K un corps algébriquement clos.

a) Si $x \in A$, pour que x appartienne à tout idéal premier $\underline{p}$ contenant $\underline{a}$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n \in \underline{a}$.

b) Supposons A intègre, et soient A' un sous-anneau de A et x un élément $\neq 0$ de A. Supposons que la structure d'algèbre sur A' de A admette un ensemble fini de générateurs. Il existe alors un élément x' non nul de A' tel que tout homomorphisme de A' dans K qui n'annule pas x' se prolonge en un homomorphisme de A dans K qui n'annule pas x.

Pour les démonstrations des assertions (a) et (b), nous renvoyons au Séminaire CARTAN, 8, 1955/56, exp. 2, prop. 5, p. 6, et exp. 3, lemme p. 1.

COROLLAIRE.- Soient A une algèbre sur le corps k engendrée par un nombre fini d'éléments et K une extension algébriquement close de k. Soit $\underline{a}$ un idéal de A ; pour que tout homomorphisme f de A dans K qui est nul sur $\underline{a}$ annule un élément $x \in A$, il faut et il suffit que $\underline{a}$ contienne une puissance de x.

Supposons que $\underline{a}$ ne contienne aucune puissance de x et soit $\underline{p}$ un idéal premier tel que $\underline{p} \supset \underline{a}$ et $x \notin \underline{p}$ (th. 1,(a)). La classe $\bar{x}$ de x dans l'algèbre intègre $A/\underline{p}$ n'est pas nulle et le (b) du théorème 1 montre qu'il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de $A/\underline{p}$ dans K tel que $\bar{f}(\bar{x}) \neq 0$, d'où un homomorphisme f de A dans K tel que $f(x) \neq 0$.

Nous rappellerons la définition des anneaux de fractions dans le cas général : soient A un anneau commutatif, S une partie de A. On note $A[S^{-1}]$ le quotient de l'algèbre de polynome $A[X_s]_{s \in S}$ par l'idéal $\underline{r}$ engendré par les éléments $sX_s - 1$ pour $s \in S$. Soit ε_S l'homomorphisme canonique de A dans $A[S^{-1}]$; la classe de X_s mod $\underline{r}$ est l'inverse de $\varepsilon_S(s)$ dans $A[S^{-1}]$ et les homomorphismes f de $A[S^{-1}]$ dans un anneau B correspondent biunivoquement par la formule $f' = f \circ \varepsilon_S$ aux homomorphismes f' de A dans B tels que $f(S)$ se compose d'éléments inversibles de B.

De ce qui précède, on déduit que si $S \subset S'$, il existe un homomorphisme $\varepsilon_{S,S'}$ et un seul de $A[S^{-1}]$ dans $A[S'^{-1}]$ tel que $\varepsilon_{S,S'} \circ \varepsilon_S = \varepsilon_{S'}$ et l'on a $\varepsilon_{S',S''} \circ \varepsilon_{S,S'} = \varepsilon_{S,S''}$ pour $S \subset S' \subset S''$; si S' est l'ensemble des produits de suites finies d'éléments de S et si S'' se compose des éléments $x \in A$ tels qu'il existe $y \in A$ avec $xy \in S'$, ceci montre aussi que $\varepsilon_{S,S'}$ et $\varepsilon_{S',S''}$ sont des isomorphismes. De plus, si S est réunion de la famille filtrante croissante S_α, $A[S^{-1}]$ est limite inductive des $A[S_\alpha^{-1}]$ par rapport aux homomorphismes $\varepsilon_{S_\alpha,S}$. Enfin, on notera que $A[(S \cup S')^{-1}]$ est isomorphe canoniquement à $A[S^{-1}][S'^{-1}]$ et $A[x^{-1}, y^{-1}]$ à $A[(xy)^{-1}]$.

LEMME 2.- *Supposons que le produit de deux éléments de S soit dans S. Tout élément de $A[S^{-1}]$ est alors de la forme $a/s = \varepsilon_S(a)\,\varepsilon_S(s)^{-1}$ $(a \in A, s \in S)$ et les opérations de $A[S^{-1}]$ se traduisent par les formules :*

(1) $a/s + a'/s' = (as' + a's)/ss'$

(2) $a/s \,.\, a'/s' = aa'/ss'$

(3) $a/s = a'/s'$ *équivaut à l'existence de* $s'' \in S$ *tel que* $s''(as' - a's) = 0$

Les formules (1) et (2) se démontrent par un calcul facile ; les éléments de la forme a/s engendrent dans tous les cas l'anneau $A[S^{-1}]$, mais si le produit de deux éléments de S est dans S, ils forment un anneau d'après les formules (1) et (2), d'où la première assertion. Nous allons démontrer que lorsque S est quelconque (i.e. même lorsque S n'est pas stable par multiplication), la condition $\varepsilon_S(a) = 0$, qui signifie que $a.1$ appartient à l'idéal de $A[X_s]_{s \in S}$ engendré par les éléments $1 - sX_s$, équivaut à l'existence de $s_i \in S$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que $s_1 \dots s_n \,.\, a = 0$. On se ramène immédiatement au cas où l'ensemble S est fini et possède m éléments, puis par récurrence sur m en tenant compte de la formule $A[x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}] = A[x_1^{-1}, \dots, x_{m-1}^{-1}][x_m^{-1}]$ au cas où $m = 1$ et $S = \{s\}$. Si $as^p = 0$, on a $\varepsilon_S(a)\,\varepsilon_S(s)^p = 0$ d'où $\varepsilon_S(a) = 0$ puis que $\varepsilon_S(s)$ est inversible ;

inversement si $\varepsilon_S(a) = 0$, il y a $P(X) \in A[X]$ tel que $a.1 = (1 - sX)P(X)$, d'où $P(X) = a(1 - sX)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} as^n X^n$ dans $A[[X]]$ et par suite $as^n = 0$ pour n assez grand puisque P est un polynome. L'assertion (3) se déduit immédiatement de là et de la formule (1) en se rappelant que $\varepsilon_S(s)$ est inversible pour $s \in S$.

REMARQUE.- Le lemme 2 fournit un nouveau procédé de définition des anneaux $A[S^{-1}]$; il montre aussi que lorsque A est un anneau intègre et lorsque $S = A - \{0\}$, $A[S^{-1}]$ est le corps des fractions F de A et que pour tout $S \subset A$, l'anneau $A[S^{-1}]$ peut s'identifier à un sous-anneau de F .

On rappelle aussi que lorsque $S = A - \underline{p}$, $\underline{p}$ étant un idéal premier, on écrit $A_{\underline{p}}$ au lieu de $A[S^{-1}]$ et que $A_{\underline{p}}$ s'appelle l'anneau local de l'idéal premier $\underline{p}$.

4.- Spectre des algèbres de type fini.

On se donne, une fois pour toutes, un corps k et une extension algébriquement close K de k . Une algèbre de type fini est une algèbre sur k engendrée par un nombre fini d'éléments, les homomorphismes d'algèbres sont des k-homomorphismes.

L'ensemble Ω_A des homomorphismes de l'algèbre de type fini A dans K se nomme le spectre de A . Pour tout homomorphisme $f : B \longrightarrow A$, B étant une algèbre de type fini, on note $\hat{f}$ l'application $h \longrightarrow h \circ f$ de Ω_A dans Ω_B ; on a $\widehat{(f \circ f')} = \hat{f}' \circ \hat{f}$ pour $f' : C \longrightarrow B$. Soit $x \in A$; si ε est l'homomorphisme canonique de A dans $A[x^{-1}]$, $\hat{\varepsilon}$ est une bijection du spectre de $A[x^{-1}]$ sur le sous-ensemble $V(x)$ de Ω_A formé des h tels que $h(x) \neq 0$ on identifiera ces deux ensembles par $\hat{\varepsilon}$. On a alors :

$$(4) \qquad V(0) = \emptyset \qquad V(1) = \Omega_A \qquad V(xy) = V(x) \cap V(y)$$

donc si l'on pose $V(H) = \bigcup_{x \in H} V(x)$ pour $H \subset A$, les ensembles $V(H)$ sont les ensembles ouverts d'une topologie sur Ω_A , dite topologie de Zariski. Pour tout homomorphisme $f : B \longrightarrow A$, on a

$$(5) \qquad \hat{f}^{-1}(V(H)) = V(f(H)) \qquad \text{pour } H \subset B$$

ce qui prouve que $\hat{f}$ est continue pour les topologies de Zariski de Ω_A et Ω_B .

Pour $x \in A$, on notera $\hat{x}$ la fonction $h \longrightarrow h(x)$ de Ω_A dans K . On a alors pour $f : B \longrightarrow A$ et $y \in B$ la formule : $\hat{y} \circ \hat{f} = \widehat{f(y)}$.

L'application $x \longrightarrow \hat{x}$ est un homomorphisme de A sur une k-algèbre $\hat{A}$ de fonctions de Ω_A à valeurs dans K ; le corollaire du théorème 1 montre que le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des éléments nilpotents de A. De plus, on notera que $V(x)$ est l'ensemble des points de Ω_A où ne s'annule pas $\hat{x}$, et par conséquent la topologie de Zariski ne dépend que de l'algèbre $\hat{A}$; de même, si l'on identifie $V(x)$ au spectre de $B = A[x^{-1}]$, l'algèbre $\hat{B}$ de fonctions sur $V(x)$ est engendrée par les restrictions des fonctions de $\hat{A}$ et par l'inverse de la restriction à $V(x)$ de la fonction $\hat{x}$ qui ne s'annule pas sur $V(x)$.

PROPOSITION 6.- <u>Soit</u> U <u>un ouvert de</u> Ω_A ; <u>si</u> U <u>est de la forme</u> $V(x)$ <u>pour</u> $x \in A$, <u>l'algèbre</u> $\underline{o}(U)$ <u>de fonctions sur</u> U <u>définie par l'algèbre</u> $A[x^{-1}]$ <u>ne dépend pas de l'élément</u> $x \in A$ <u>tel que</u> $U = V(x)$. <u>De plus, il existe sur</u> Ω_A <u>un système local de fonctions à valeurs dans</u> K <u>et un seul, soit</u> $\underline{o}^A$, <u>tel que</u> $\underline{o}^A(U) = \underline{o}(U)$ <u>pour</u> U <u>de la forme</u> $V(x)$.

Soit (x_i) une famille d'éléments de A et $x \in A$; pour que $V(x)$ soit contenu dans la réunion des $V(x_i)$, il faut et il suffit que tout homomorphisme h de A dans K tel que $h(x_i) = 0$ pour tout i, on ait $h(x) = 0$. Si $\underline{a}$ est l'idéal de A engendré par les x_i, le corollaire du théorème 1 montre que ceci équivaut à dire que $\underline{a}$ contient une puissance de x. Ceci montre en particulier que $V(x)$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ouverts $V(x_i)$. Par exemple si $V(x) \subset V(y)$, il existe $a \in A$ tel que $x^n = ay$ (n entier >0), ce qui implique que $\hat{y}$ est non nulle sur $V(x)$ et que son inverse est dans l'algèbre de fonctions sur $V(x)$ définie par $A[x^{-1}]$. Autrement dit, les restrictions à $V(x)$ des fonctions appartenant à $\widehat{A[y^{-1}]}$ sont dans $\widehat{A[x^{-1}]}$ ce qui prouve à la fois la première assertion de la proposition 6 et l'axiome (SL 1) des systèmes locaux. Vérifions maintenant l'axiome (SL 2) : soit $V(x) = \bigcup_i V(x_i)$ et h une fonction sur $V(x)$ dont la restriction à $V(x_i)$ est définie par un élément de $A[x_i^{-1}]$ pour tout i. Il existe donc des entiers $n_i > 0$ et des éléments $a_i \in A$ tels que $f\hat{x}_i^{n_i} = \hat{a}_i$ sur $V(x_i)$ et donc $f\hat{x}_i^{n_i+1} = \hat{a}_i\hat{x}_i$ sur Ω_A puisque $\hat{x}_i$ est nulle en dehors de $V(x_i)$. Posons $b_i = a_i x_i$ et $m_i = n_i + 1$; comme $V(x_i) = V(x_i^{m_i})$, le début de la démonstration démontre l'existence d'un $n > 0$ et de $c_i \in A$ tel que $x^n = \sum c_i x_i^{m_i}$, d'où $f\hat{x}^n = \sum f\hat{c}_i\hat{x}_i^{m_i} = \sum \hat{b}_i\hat{c}_i$ sur $V(x)$, ce qui signifie que f appartient à l'algèbre $\widehat{A[x^{-1}]}$: l'axiome (SL 2) est donc vérifié.

On vérifie immédiatement que si f est un homomorphisme de B dans A, l'application continue $\hat{f}$ de Ω_A dans Ω_B est un homomorphisme du système local $\underline{o}^A$ dans $\underline{o}^B$. Inversement, supposons A sans élément nilpotent, de sorte que l'application $A \longrightarrow \hat{A}$ est bijective ; si φ est un homomorphisme de $\underline{o}^A$ dans $\underline{o}^B$, on peut donc définir un homomorphisme de B dans A par la formule $\widehat{f(y)} = \hat{y} \circ \varphi$ d'où pour $h \in \Omega_A$:

$$h(f(y)) = f(y)(h) = \hat{y}(\varphi(h)) = \varphi(h)(y)$$

soit donc $\varphi(h) = h \circ f$ et $\varphi = \hat{f}$; dans ce cas les applications $\hat{f}$ sont donc tous les homomorphismes de $\underline{o}^A$ dans $\underline{o}^B$.

Etudions maintenant l'effet sur le spectre de diverses opérations à faire sur les algèbres :

1) Soit $\underline{a}$ un idéal de A et π l'homomorphisme canonique de A sur $A/\underline{a}$; $\hat{\pi}$ est alors une bijection du spectre de $A/\underline{a}$ sur l'ensemble $F(\underline{a})$ complémentaire de l'ouvert $V(\underline{a})$; comme π est surjectif, la formule (5) montre que $\hat{\pi}$ est même homéomorphisme si l'on munit $F(a)$ de la topologie induite par celle de Ω_A. De plus, la formule $A[x^{-1}]/\underline{a}A[x^{-1}] = (A/\underline{a})[\pi(x)^{-1}]$ montre immédiatement que $\hat{\pi}$ est un isomorphisme du système local $\underline{o}^{A/\underline{a}}$ sur le système local sur $F(\underline{a})$ induit par $\underline{o}^A$. On identifiera le plus souvent $F(\underline{a})$ au spectre de $A/\underline{a}$ par $\hat{\pi}$; on notera que <u>tout</u> fermé de Ω_A est de la forme $F(\underline{a})$.

2) Soit $x \in A$ et ε l'homomorphisme canonique de A dans $A[x^{-1}]$. L'application $\hat{\varepsilon}$ est une bijection du spectre de $A[x^{-1}]$ sur l'ouvert $V(x)$ de Ω_A. On vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme du système local $\underline{o}^{A[x^{-1}]}$ sur le système induit sur $V(x)$ par $\underline{o}^A$. Dans ce cas, on identifiera le spectre de $A[x^{-1}]$ à $V(x)$ par l'isomorphisme $\hat{\varepsilon}$.

3) Soient A et A' deux algèbres de type fini ; on pose $h(a) = a \otimes 1$ et $h'(a') = 1 \otimes a'$. L'application $u \longrightarrow (\hat{f}(u), \hat{f}'(u))$ est alors une bijection du spectre de $A \otimes A'$ sur $\Omega_A \times \Omega_{A'}$, mais ce n'est pas un homéomorphisme si Ω_A et $\Omega_{A'}$ ont plus d'un élément. On munira toujours dans la suite $\Omega_A \times \Omega_{A'}$ de la topologie obtenue par transport à partir de la topologie de $\Omega_{A\otimes A'}$, strictement plus fineque la topologie produit.

<u>REMARQUE</u>.- Le système local $\underline{o}^A$ sur Ω_A ne dépend que de <u>l'algèbre</u> de fonctions $\hat{A}$ sur Ω_A, et non de A ; de même, comme l'algèbre $\widehat{(A \otimes A')}$ se compose des fonctions $h(x, x') = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(x')$ $(x \in \Omega_A, x' \in \Omega_A,$

$f_i \in \hat{A}$, $g_i \in \hat{A}'$) , la topologie de Zariski sur $\Omega_{\hat{A}} \times \Omega_{\hat{A}'}$ ne dépend que des algèbres $\hat{A}$ et $\hat{A}'$.

5.- Définition des ensembles algébriques.

DEFINITION 2.- On appelle ensemble algébrique un ensemble E muni d'une topologie et d'un système local $\underline{o}^E$ de fonctions à valeurs dans K vérifiant les conditions suivantes :

(EA 1) Il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i \in I}$ de E , pour chaque $i \in I$ une algèbre de type fini A_i , un ouvert V_i de Ω_{A_i} et un isomorphisme φ_i du système local $\underline{o}^E|U_i$ sur le système local $\underline{o}^{A_i}|V_i$.

(EA 2) Pour tout couple $(i , j) \in I \times I$, l'ensemble des $(\varphi_i(x) , \varphi_j(x))$ pour $x \in U_i \times U_j$ est fermé dans $V_i \times V_j$.

Une application régulière de l'ensemble algébrique E dans l'ensemble algébrique F est un homomorphisme du système local $\underline{o}^E$ dans $\underline{o}^F$.

EXEMPLES.- 1) Si A est une algèbre de type fini, l'ensemble Ω_A muni de la topologie de Zariski et du système local $\underline{o}^A$ est un ensemble algébrique ; le premier axiome étant trivialement vérifié, le second résulte de ce que la diagonale de $\Omega_A \times \Omega_A$, étant l'ensemble $F(H)$ où H se compose des éléments $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ de $A \otimes A$, est fermée. Un ensemble algébrique isomorphe à un ensemble du type précédent est dit ensemble algébrique affine. Sa structure est entièrement déterminée par l'algèbre $\underline{o}^E(E)$ de fonctions sur E .

2) Supposons l'algèbre de type fini A graduée (les degrés étant $\geqslant 0$ et les éléments de degré 0 étant les scalaires). Soit x_o l'unique homomorphisme de A dans K nul sur les éléments de degrés > 0 ; soit $h \in \Omega_A$ et $\lambda \neq 0$ dans K : il existe un homomorphisme h_λ de A dans K bien déterminé par la condition $h_\lambda(a) = \lambda^n h(a)$ pour a homogène de degré n . On définit ainsi le groupe multiplicatif K^* comme groupe d'opérateurs de Ω_A ; soit X le quotient de $\Omega_A - \{x_o\}$ par le groupe K^* et π l'application canonique de $\Omega_A - \{x_o\}$ sur X . On définit un ouvert de X comme un ensemble U tel que $\pi^{-1}(U)$ soit ouvert et on note $\underline{o}^X(U)$ l'ensemble des fonctions f de U dans K telles $f \circ \pi \in \underline{o}^A(\pi^{-1}(U))$. Si A est engendrée par ses éléments de degré 1 , on vérifie immédiatement que l'on définit ainsi une structure d'ensemble algébrique sur X . Un ensemble algébrique isomorphe à un ensemble du type précédent est dit projectif.

Soit E un ensemble algébrique. On appelle <u>carte</u> définie sur un ouvert U de E un isomorphisme de $\underline{o}^E|U$ sur le système local $\underline{o}^A|V$ A étant une algèbre de type fini et V un ouvert de Ω_A. Un <u>ouvert affine</u> de E est un ouvert U tel que le système local $\underline{o}^E|U$ soit isomorphe à un système local de la forme $\underline{o}^A$, A étant une algèbre de tyoe fini.

La topologie définie sur E s'appelle la <u>topologie de Zariski</u> ou la <u>k-topologie</u>.

<u>PROPOSITION 7.- Tout ouvert de E est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines et l'intersection de deux ouverts affines est un ouvert affine. L'espace topologique E est noethérien . De plus, si φ et φ' sont deux cartes définies respectivement sur les ouverts U et U', l'ensemble des $(\varphi(x), \varphi'(x))$ pour $x \in U \cap U'$ est fermé dans $\varphi(U) \times \varphi'(U')$.</u>

Supposons d'abord $E = \Omega_A$, A étant une algèbre de type fini. Soit $F(H)$ $(H \subset A)$ un ensemble fermé de Ω_A ; il est clair que si H engendre l'idéal $\underline{a}$, on a $F(H) = F(\underline{a})$, mais si $\underline{a}$ est engendré par les éléments $x_1, \ldots, x_n$ (noter que A est un anneau noethérien), on aura $F(\underline{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} F(x_i)$ et par suite l'ouvert $V(H)$ est réunion des ouverts affines $V(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ et on peut supposer que $x_i \in H$. De là résulte aussitôt que Ω_A est noethérien . Dans le cas général, l'existence d'un recouvrement ouvert fini (U_i) de E ayant les propriétés (EA 1) et (EA 2) prouve que E est noethérien (prop. 1) et que tout ouvert U de E est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines puisqu'il en est ainsi de chacun des ouverts $\varphi_i(U \cap U_i)$.

Si φ et φ' sont deux cartes définies respectivement sur U et U', l'axiome (EA 2) montre que l'ensemble des $(\varphi_i(x), \varphi_j(x))$ pour $x \in U \cap U' \cap U_i \cap U_j$ est fermé dans $\varphi_i(U \cap U_i) \times \varphi_j(U' \cap U_j)$. Comme la restriction de $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ (resp. $\varphi \circ \varphi_j^{-1}$) à $U \cap U_i$ (resp. $U' \cap U_j$) est un homéomorphisme, l'ensemble des $(\varphi(x), \varphi'(x))$ pour $x \in U \cap U' \cap U_i \cap U_j$ est fermé dans $\varphi(U \cap U_i) \times \varphi'(U' \cap U_j)$. La dernière assertion de la prop. 7 résulte de là immédiatement.

Si enfin U et U' sont des ouverts affines, on peut supposer $\varphi(U) = \Omega_A$ et $\varphi'(U') = \Omega_{A'}$; soit Δ l'ensemble fermé de $\Omega_A \times \Omega_{A'}$ formé des $(\varphi(x), \varphi'(x))$ pour $x \in U \cap U'$. La restriction de φ à $U \cap U'$ est composée de l'application $\psi : x \longrightarrow (\varphi(x), \varphi'(x))$ de $U \cap U'$ sur Δ et de la projection de $\Omega_A \times \Omega_{A'}$ sur Ω_A. Comme $\varphi|U \cap U'$ est un isomorphisme, il en est de même de ψ et $U \cap U'$ est isomorphe au sous-ensemble algébrique affine Δ de $\Omega_A \times \Omega_{A'}$. L'ouvert $U \cap U'$ est donc affine. C.Q.F.D.