Séminaire BOURBAKI Juin 2006
58e année, 2005-2006, nº 966, p. 385 à 401

ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE ET DISQUES DE SIEGEL DES POLYNÔMES QUADRATIQUES [d'après X. Buff et A. Chéritat]

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

1. ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE

1.1. Soit R une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ opérant sur la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Le multiplicateur d'un point périodique z_0 de R, de période minimale n, est $\lambda = (R^n)'(z_0)$. On dit que z_0 est attractif si $|\lambda| < 1$, répulsif si $|\lambda| > 1$, indifférent si $|\lambda| = 1$. Un point périodique indifférent est parabolique si $\lambda = 1$, rationnel si λ est racine de l'unité, irrationnel dans le cas contraire.

L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \overline{\mathbf{C}}$ au voisinage desquels les itérés $(R^n)_{n\geq 1}$ forment une famille normale. Son complémentaire dans $\overline{\mathbf{C}}$ est l'ensemble de Julia $J(R)$.

L'ensemble de Fatou est ouvert et totalement invariant : $R^{-1}(F(R)) = F(R)$. L'image par R d'une composante connexe de $F(R)$ est encore une composante connexe de $F(R)$. Un célèbre théorème de D. Sullivan affirme que chaque composante est prépériodique sous l'action de R. Il y a au plus $2d-2$ cycles de composantes périodiques. La dynamique dans une composante fixe est d'un des 3 types suivants :

– convergence vers un point fixe attractif ;

– convergence vers un point fixe parabolique situé sur le bord de la composante ;

– dynamique quasi périodique conjuguée à une rotation irrationnelle sur un disque (dit de Siegel) ou un anneau (dit de Herman).

L'ensemble de Julia est une partie compacte, totalement invariante, qui n'est jamais vide. C'est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de R. La dynamique y est chaotique, au moins topologiquement, dans le sens suivant : pour tout ouvert U rencontrant $J(R)$, il existe $N \geq 1$ tel que $R^N(U)$ contienne $J(R)$.

L'ensemble de Fatou peut être vide. C'est le cas, en particulier, pour les exemples de Lattès déduits via la fonction de Weierstrass des endomorphismes non inversibles des courbes elliptiques. M. Rees a montré que dans l'espace (de dimension complexe $2d-2$) des fractions rationnelles de degré d, celles pour lesquelles l'ensemble de Fatou est vide forment un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Cependant, lorsque l'ensemble de Julia n'est pas égal à la sphère de Riemann tout entière, c'est un ensemble d'intérieur vide.

Pour un polynôme P de degré $d \geq 2$, la présence d'un point fixe (super)attractif à l'infini rend les choses un peu plus simples : l'ensemble de Fatou n'est jamais vide. On appelle ensemble de Julia rempli l'ensemble $K(P)$ des points $z \in \mathbf{C}$ d'orbite bornée. C'est une partie compacte totalement invariante de $\mathbf{C}$ dont le bord est égal à $J(P)$.

1.2. Dès le début du siècle dernier, P. Fatou suggère d'étudier les ensembles de Julia par les méthodes de la théorie de la mesure de Borel-Lebesgue. Vers 1980, D. Sullivan développe et met à profit des analogies profondes entre l'itération des fractions rationnelles et l'action des groupes kleiniens (i.e. des sous-groupes discrets de type fini de $PSL(2,\mathbf{C})$) sur la sphère de Riemann. Pour un groupe kleinien, l'ensemble limite joue le rôle de l'ensemble de Julia. Une conjecture d'Ahlfors, maintenant démontrée, affirme que l'ensemble limite est de mesure nulle s'il n'est pas égal à la sphère de Riemann. La question analogue pour les ensembles de Julia s'impose alors rapidement comme l'un des problèmes majeurs de la théorie, d'autant plus qu'une réponse positive aurait de nombreuses conséquences intéressantes. Dans les années suivantes on montre en particulier pour de nombreuses classes de polynômes (cf. ci-dessous) que l'ensemble de Julia est de mesure nulle.

Cependant, vers 1990, T. Nowicki et S. Van Strien d'une part, A. Douady d'autre part, commencent à suspecter qu'il pourrait exister des polynômes dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue positive. T. Nowicki et S. Van Strien considèrent des polynômes $P(z) = z^d + c$, de grand degré d, pour lesquels l'orbite de l'unique point critique 0 s'organise suivant une combinatoire quasipériodique dite de Fibonacci ; mais leur programme n'aboutira pas.

A. Douady formule de son côté un programme visant à construire des polynômes quadratiques possédant un point fixe indifférent irrationnel non linéarisable dont l'ensemble de Julia (égal dans ce cas à l'ensemble de Julia rempli) est de mesure positive. Dans sa thèse [9], A. Chéritat réalise des progrès majeurs qui ne laissent plus de doute sur l'existence de tels polynômes. S'appuyant sur des travaux récents de Inou-Shishikura [13], X. Buff et A. Chéritat ont finalement obtenu ([7], [5]) le

Théorème — *Il existe des polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue strictement positive.*

1.3. Dans la prochaine section, nous présentons quelques préliminaires sur la dynamique des polynômes quadratiques, en particulier ceux possédant un point fixe indifférent irrationnel. Cela nous permettra d'énoncer des versions un peu plus précises du théorème précédent. Dans la section suivante, on présente le plan de la construction, une version simplifiée de la proposition initiale de Douady, qui comporte 3 étapes. Ces étapes sont passées en revue au cours des 3 sections suivantes. Dans la dernière section, nous présenterons plusieurs résultats spectaculaires sur les disques de Siegel des polynômes quadratiques obtenus par X. Buff et A. Chéritat, résultats qui utilisent certains des ingrédients essentiels de la construction précédente.

Je remercie Xavier Buff, Arnaud Chéritat et Adrien Douady pour de nombreuses et précieuses conversations, et Dominique Bidois sans laquelle ce texte n'aurait pas vu le jour à temps.

2. RAPPELS SUR LES POLYNÔMES QUADRATIQUES

2.1. À conjugaison affine près, un polynôme quadratique s'écrit de façon unique sous la forme

$$Q_c(x) = x^2 + c\ .$$

L'ensemble des paramètres c pour lesquels le point critique 0 a une orbite bornée est l'ensemble de Mandelbrot M. C'est aussi l'ensemble des paramètres pour lesquels l'ensemble de Julia rempli $K(Q_c)$ est connexe.

Quand on s'intéresse à un point fixe et à son multiplicateur, il est plus pratique d'effectuer un revêtement ramifié $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ dans le plan des paramètres et une translation $x = z + \lambda/2$ dans le plan dynamique : le point 0 est alors fixe, de multiplicateur λ. Seul le cas où $|\lambda|$ est égal ou voisin de 1 nous intéressant, on écrira $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ et on considérera donc la famille

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2\ .$$

L'image du disque $\{|\lambda| < 1\}$ par le revêtement $\lambda \to c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ (ramifié en $\lambda = 1$ au-dessus de $c = 1/4$) est la cardioïde principale de M.

2.2. Si $c \notin M$, le point critique 0 s'échappe vers le point fixe attractif à l'infini ; l'ensemble de Julia $J(Q_c) = K(Q_c)$ est un ensemble de Cantor sur lequel le polynôme est uniformément dilatant.

Si Q_c possède une orbite périodique $\mathcal{O}$ attractive ou indifférente, alors $c \in M$ et les autres orbites périodiques sont répulsives ; si $\mathcal{O}$ est attractive ou indifférente rationnelle, l'orbite du point critique 0 converge vers $\mathcal{O}$; l'intérieur de $K(Q_c)$ est alors exactement égal au bassin de $\mathcal{O}$. Si $\mathcal{O}$ est attractive, le polynôme Q_c est uniformément dilatant sur $J(Q_c)$. On dit que Q_c est hyperbolique si $c \notin M$ ou si Q_c possède une orbite périodique attractive (à distance finie).

2.3. Soit n un entier au moins égal à 2. On dit que Q_c est n-renormalisable s'il existe des disques topologiques U, V avec $0 \in U \subset\subset V$ tels que la restriction de Q_c^n à U soit un revêtement ramifié sur V de degré 2 et $Q_c^{nk}(0)$ appartienne à U pour tout $k \geq 0$. On dit que Q_c est infiniment renormalisable s'il existe une infinité d'entiers n tels que Q_c soit n-renormalisable.

2.4. Soit Q_c un polynôme quadratique possédant un point périodique indifférent irrationnel x_0, de période minimale N et multiplicateur $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$. On dit que x_0 est linéarisable si x_0 appartient à l'intérieur de $K(Q_c)$; on appelle alors disque de Siegel la composante connexe Δ de $intK(Q_c)$ qui contient x_0 ; c'est un disque topologique et toute représentation conforme $\alpha : (\mathbf{D}, 0) \to (\Delta, x_0)$ conjugue la rotation $R_\alpha(z) = \lambda\, z$ à la restriction de Q_c^N à Δ.

Lorsque x_0 n'est pas linéarisable, on a $K(Q_c) = J(Q_c)$; on dit que x_0 est un point de Cremer.

Notons

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [a_0, a_1, a_2 \ldots]$$

le développement en fraction continue de α et $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ les réduites associées. Alors, pour que x_0 soit linéarisable, il faut et il suffit que α vérifie la condition de Brjuno (cf. [22], [2], [23])

$$\sum_{n\geq 0} q_n^{-1}\ \log\, q_{n+1} < +\infty.$$

On dit que α est de type constant si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est bornée. La condition de Brjuno est alors satisfaite. Un théorème de Herman-Swiatek affirme que Δ est un quasidisque et que le point critique appartient au bord de l'orbite de Δ.

2.5. On sait que l'ensemble de Julia $J(Q_c)$ est de mesure nulle dans chacun des cas suivants :

– Q_c est hyperbolique ;

– Q_c possède un point périodique indifférent rationnel ([11]) ;

– Q_c n'est pas infiniment renormalisable et toutes ses orbites périodiques sont répulsives ([15], [21]) ;

– Q_c possède un point périodique indifférent irrationnel dont le multiplicateur $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ vérifie $\log\, a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ([20]).

Dans tous les cas restants, Buff et Chéritat ont construit des exemples pour lesquels l'ensemble de Julia est de mesure positive.

THÉORÈME. — 1) *Il existe des paramètres c tels que Q_c a un point fixe de Cremer et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

2) *Il existe des paramètres c tels que Q_c a un disque de Siegel fixe et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

3) *Il existe des paramètres c tels que Q_c est infiniment renormalisable et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

Dans la suite, nous décrirons la construction dans le cas des points de Cremer. Les autres cas sont basés sur les mêmes méthodes, avec quelques subtilités supplémentaires.

3. PRINCIPE DE LA CONSTRUCTION

3.1. Comme on s'intéresse à des points fixes indifférents, on va écrire (cf. § 2.1)

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2 \ , \ \lambda = \exp 2\pi i \alpha \ .$$

On notera pour simplifier $K_\alpha = K(P_\alpha), J_\alpha = J(P_\alpha)$.

Soit N un entier assez grand, qui sera déterminé ultérieurement (voir § 5). On note $\mathcal{C}(N)$ l'ensemble des nombres de type constant tels que $a_n \geq N$ pour tout $n \geq 1$. Pour $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots], n \geq 0$ et $A \geq 1$, on pose

$$\alpha(n, A) = [a_0, a_1, \ldots, a_n, A, N, N, N, \ldots]$$

On a donc $\alpha(n, A) \in \mathcal{C}(N)$ si $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ et $A \geq N$.

PROPOSITION. — Soient $\alpha \in \mathcal{C}(N), A_n$ une suite telle que $\lim q_n^{-1} \log A_n = +\infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Si n est assez grand, on a

$$Leb(K_{\alpha(n,A_n)}) \geq (1 - \varepsilon) Leb(K_\alpha)$$

et le disque $\{|z| < \varepsilon\}$ contient un cycle périodique de $P_{\alpha(n,A_n)}$ distinct de $\{0\}$.

REMARQUE. — Cet énoncé est très probablement vrai pour tout entier $N \geq 1$, mais n'est démontré que si l'entier N est assez grand.

3.2. La proposition permet de réaliser la construction recherchée. On définit en effet une suite $(\alpha_\ell)_{\ell \geq 0}$ dans $\mathcal{C}(N)$ comme suit. On choisit arbitrairement $\alpha_0 \in \mathcal{C}(N)$, puis on construit $\alpha_{\ell+1}$ à partir de α_ℓ en posant

$$\alpha_{\ell+1} = \alpha_\ell(n, A_n).$$

Ici, la suite (A_n) est choisie de façon à vérifier l'hypothèse de la proposition et l'entier $n = n_\ell$ est choisi assez grand pour que les conclusions de la proposition soient vérifiées avec $\varepsilon_\ell = 2^{-\ell-1}$. Quitte à augmenter n_ℓ, on peut de plus garantir que la suite α_ℓ converge vers une limite irrationnelle α_∞, et que le cycle périodique dans $\{|z| < 2^{-j}\} - \{0\}$ garanti par la proposition pour P_{α_j} (pour $j \leq \ell$) soit encore contenu dans le même disque pour $P_{\alpha_{\ell+1}}$.

Le polynôme P_{α_∞} possède les propriétés requises : tout voisinage de 0 contient un cycle périodique distinct de 0, donc 0 est un point de Cremer. On a donc $K_{\alpha_\infty} = J_{\alpha_\infty}$. Toute valeur d'adhérence d'une suite $(z_\ell)_{\ell \geq 0}$ vérifiant $z_\ell \in K_{\alpha_\ell}$ appartient à K_{α_∞}.

On a donc

$$Leb(K_{\alpha_\infty}) \geq \limsup Leb(K_{\alpha_\ell}).$$

Comme le produit $\Pi(1-\varepsilon_\ell)$ est convergent et K_{α_0} est d'intérieur non vide, on obtient bien que J_{α_∞} est de mesure de Lebesgue positive.

3.3. La démonstration de la proposition comporte trois étapes.

Dans une première étape, on contrôle le cycle périodique voisin de 0 de $P_{\alpha(n,A_n)}$ au moyen d'outils introduits par A. Chéritat. On couple ensuite ces outils aux techniques de renormalisation introduites il y a une vingtaine d'années par Douady, Ghys et moi-même pour faire un premier pas vers l'estimation de mesure : on montre que, pour tout ouvert V contenu dans le disque de Siegel Δ_α de P_α, et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Leb(V \cap \Delta_{\alpha(n,A_n)}) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon) Leb(V)$$

si n est assez grand.

Dans une deuxième étape, on montre que pour tout ouvert W contenant Δ_α, et tout nombre $\alpha' \in \mathcal{C}(N)$ suffisamment proche de α, l'orbite du point critique pour $P_{\alpha'}$ est contenue dans W. Cette affirmation est une conséquence des résultats de renormalisation d'Inou-Shishikura [13] ; c'est ici qu'il est (pour l'instant) nécessaire de supposer que l'entier N est assez grand.

Dans la troisième étape, on met à profit ce contrôle de l'orbite postcritique pour $P_{\alpha(n,A_n)}$ pour obtenir l'estimation de mesure de $K_{\alpha(n,A_n)}$. Pour promouvoir la constante $\frac{1}{2} - \varepsilon$ en $1 - \varepsilon$, on reprend en le modifiant légèrement un argument de C. McMullen.

Chacune de ces étapes est détaillée dans les trois sections suivantes.

4. EXPLOSION PARABOLIQUE ET TAILLE ASYMPTOTIQUE

4.1. Soit p/q un nombre rationnel. Écrivons au voisinage de l'origine

$$P_{p/q}^q(z) = z + Az^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2}) .$$

Le coefficient A n'est pas nul : sinon, la dynamique locale en 0 comporterait au moins deux cycles de pétales, et chacun devrait contenir une orbite postcritique. Suivant Chéritat, définissons la taille asymptotique par

$$L(p/q) = |qA|^{-1/q}.$$

Pour α voisin de $p/q, P_\alpha$ possède au voisinage de 0 un cycle périodique de période q. Plus précisément, en écrivant $\alpha = p/q+\delta^q$, il existe une fonction holomorphe $\chi = \chi_{p/q}$ définie au voisinage de 0 telle que les points de ce cycle périodique soient exactement

$$\chi(\delta), \chi(\zeta\alpha), \dots, \chi(\zeta^{q-1}\delta)$$

avec $\zeta = \exp 2\pi i/q$. On a

$$|\chi'(0)| = (2\pi q^2)^{1/q} L(p/q)$$

donc la taille asymptotique exprime la vitesse de l'explosion parabolique [10].

On peut suivre le cycle périodique de période q tant qu'il n'est pas parabolique. Par conséquent, χ est holomorphe dans un disque $\{|\delta| < \rho(p/q)\}$, où $r(p/q) = \rho(p/q)^q$ est la distance de p/q à l'ensemble des paramètres $\alpha \neq p/q$ pour lesquels P_α a un q-cycle parabolique. Comme le cycle est contenu dans l'ensemble de Julia rempli, qui est uniformément borné dans la région considérée, la fonction χ est bornée dans $\{|\delta| < \rho(p/q)\}$.

On a

$$1 \geq r(p/q) \geq q^{-3} ,$$

où la majoration est triviale et la minoration résulte d'une inégalité sur la taille des membres de M que j'ai établie il y a 20 ans. En particulier, on a

$$\lim_{q\to+\infty} \rho(p/q) = 1 .$$

4.2. Soit α un nombre vérifiant la condition de Brjuno ; on note $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ les réduites de α et $r(P_\alpha)$ le rayon conforme du disque de Siegel Δ_α (rayon de convergence de l'application linéarisante normalisée). Après Jellouli [14], on observe que $P_{p_n/q_n}^{q_n}$ converge vers l'identité uniformément sur les compacts de Δ_α. En particulier $P_{p_n/q_n}^{q_n}$ est univalente sur de tels compacts et on en déduit facilement

$$\liminf_n \, L(p_n/q_n) \geq r(P_\alpha) .$$

Soit $\rho < 1$. Les fonctions χ_{p_n/q_n} sont définies dans $\{|z| < \rho\}$ pour n assez grand et y forment une famille normale. Toute valeur d'adhérence χ n'est pas constante d'après l'inégalité précédente ; comme on a

$$\chi_{p_n/q_n}(\delta \exp 2\pi i\, p_n/q_n) = P_{p_n/q_n}(\chi_{p_n/q_n}(\delta)) ,$$

la fonction χ va linéariser P_α. Comme $\rho < 1$ est arbitraire, on conclut après Chéritat que $(\chi_{p_n/q_n})_{n\geq 0}$ converge sur les compacts de $\{|z| < 1\}$ vers le biholomorphisme $\chi_\alpha : \{|z| < 1\} \to \Delta_\alpha$ tel que $\chi_\alpha(0) = 0$ et $\chi_\alpha(0) = r(P_\alpha)$. En particulier, on a

$$\lim\ L(p_n/q_n) = r(P_\alpha) .$$

4.3. Dans le cadre de la proposition du 3.1, on a

$$|\alpha(n, A) - p_n/q_n| \approx q_n^{-2}\ A^{-1}.$$

Au vu des résultats ci-dessus, l'hypothèse de la proposition ($A_n^{1/q_n} \to +\infty$) garantit bien l'existence d'un q_n-cycle périodique proche de 0 pour $P_{\alpha(n,A_n)}$ lorsque n est grand.

4.4. Il s'agit maintenant de montrer que, pour tout ouvert V de Δ_α et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Leb(V \cap \Delta_{\alpha(n,A_n)}) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\, Leb(V)$$

si n est assez grand.

Introduisons

$$f_n = \chi_{p_n/q_n}^{-1} \circ P_{\alpha(n,A_n)} \circ \chi_{p_n/q_n} ,$$

Cette suite tend vers R_α uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$. Posons aussi

$$\varepsilon_n = \alpha(n, A_n) - p_n/q_n ,$$

$$\psi_n(z) = \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \varepsilon_n} = v = \exp 2\pi i q_n^2 |\varepsilon_n| w$$

et, pour tout $\rho < 1$

$$X_n(\rho) = \psi_n^{-1}(\{|v| < \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + |\varepsilon_n|}\}) .$$

Pour tout ouvert $W \subset \{|z| < \rho\}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a clairement, si n est assez grand

$$Leb(W \cap X_n(\rho)) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\, Leb(W) .$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $\rho < 1$, $X_n(\rho)$ est contenu dans le disque de Siegel de f_n si n est assez grand.

Posons

$$\xi_n(z) = 2\pi i q_n z(\varepsilon_n - z^{q_n})$$

La définition de χ_{p_n/q_n} permet de factoriser :

$$f_n^{q_n}(z) - z = \xi_n(z)k_n(z) \ ,$$
$$\exp((-1)^n \frac{2\pi i}{q_n}) f_n^{q_{n-1}}(z) - z = \xi_n(z) g_n(z) \ ,$$

et il n'est pas difficile de voir que k_n tend vers 1 uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$, tandis que $|g_n|^{1/q_n}$ est pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\rho < 1$ majoré par $1 + \varepsilon$ sur $\{|z| < \rho\}$ si n est assez grand.

L'image par le revêtement ramifié χ_n du champ de vecteurs $\xi_n(z)\ \partial/\partial z$ est le champ $2\pi i q_n^2\, \varepsilon_n\ v\, \partial/\partial v$, qui se relève en $(-1)^n \frac{\partial}{\partial w}$. Le domaine $X_n(\rho)$ correspond à

$$H_n(\rho) = \{Im\, w > \frac{1}{2\pi|\varepsilon_n| q_n^2} \log(1 + |\varepsilon_n|\rho^{-q_n})\} \ .$$

Dans la coordonnée w, les applications $f_n^{q_n}, f_n^{q_{n-1}}$ s'écrivent respectivement

$$F_n(w) = w + u_n(w) \ ,$$
$$G_n(w) = w + v_n(w) - \frac{1}{q_n^2 \varepsilon_n} \ .$$

Le contrôle de u_n, v_n dans $H_n(\rho)$ se déduit de celui de k_n, g_n. On a en particulier que $|v_n|^{1/q_n}$ est majoré par $1 + \varepsilon$ si n est assez grand ; comme $|\varepsilon_n|^{1/q_n}$ tend vers 0, c'est le terme de translation qui domine dans G_n. On obtient surtout dans $H_n(\rho)$

$$|u_n(w) - 1| \leq B_n |\varepsilon_n| \kappa_n(Re\, w) \ ,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} B_n^{1/q_n} = 1$ et

$$\kappa_n(X) = 1 + |1 + \frac{\rho^{q_n}}{\rho^{q_n} + |\varepsilon_n|} \exp(2\pi i\, q_n^2 |\varepsilon_n| X)|^{-1} \ .$$

Ce contrôle permet (tout juste) d'itérer suffisamment F_n pour traverser une bande de largeur $(q_n^2|\varepsilon_n|)^{-1}$. Cela suffit pour pouvoir utiliser les techniques de renormalisation introduites par Douady, Ghys et moi-même et conclure qu'on peut itérer indéfiniment les points de $H_n(\rho)$, ce qui mène à la conclusion recherchée.

5. CONTRÔLE DE L'ORBITE CRITIQUE ET RENORMALISATION SUIVANT INOU-SHISHIKURA

5.1. Les techniques de renormalisation évoquées précédemment s'appliquent à des transformations (possédant un point fixe indifférent irrationnel) dont la seule caractéristique globale est d'être univalentes dans le domaine où on les considère. Cela s'avère suffisant pour contrôler l'intérieur des disques de Siegel. Cependant, pour presque tout nombre de rotation, le bord du disque de Siegel du polynôme quadratique contient le point critique. Une autre difficulté associée à ces techniques est la présence de choix arbitraires dans la définition de la renormalisation : on considère en effet l'application de premier retour dans un secteur délimité par une courbe ℓ issue du point fixe et son image ; pour uniformiser un tel secteur, il faut le clore par une courbe joignant l'extrémité de ℓ à son image ; changer cette dernière courbe conjugue l'application renormalisée.

Pour étudier de façon plus approfondie les bords des disques de Siegel des polynômes quadratiques (et des transformations de même nature), il est donc souhaitable de travailler avec des transformations de nature plus globale qui permettent en particulier de rigidifier l'uniformisation. Le problème est alors de trouver des classes de transformation qui soient stables pour l'application de renormalisation, de façon à ce qu'on puisse itérer celle-ci autant qu'il est nécessaire.

Inou et Shishikura ont résolu partiellement ce problème en découvrant de telles classes lorsque le nombre de rotation est assez petit. Pour un nombre de rotation α de type constant, c'est donc seulement lorsque $\alpha \in \mathcal{C}(N)$, avec N assez grand, qu'on pourra itérer indéfiniment leur application de renormalisation. C'est suffisant pour la construction de Buff et Chéritat.

5.2. Il est pratique de travailler dans une coordonnée qui rejette le point fixe à l'infini.

Considérons la fraction rationnelle de degré 6

$$Q(z) = z(1 + \frac{1}{z})^6(1 - \frac{1}{z})^{-4}$$

dans $\{|z| > 1\}$. À l'infini, on a

$$Q(z) = z + 10 + 49z^{-1} + \cdots$$

donc ∞ est un point fixe parabolique de multiplicité minimale 2. Dans $\{|z| > 1\}$, le seul point critique est $5 + \sqrt{24}$, la valeur critique correspondante est 27. Sur le cercle $\{|z| = 1\}$, on a aussi les points critiques -1 (de degré local 6) et 1 (de degré local 4), les valeurs critiques correspondantes sont 0 et ∞.

Décrivons l'image du cercle $\{|z| = 1\}$ (en contournant par l'extérieur les points ± 1 : on parcourt l'axe réel positif entre $\varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$ et $R \gg 1$ puis on tourne 2 fois dans le sens négatif sur $\{|z| = R\}$ avant de revenir de R à ε et de tourner 3 fois sur $\{|z| = \varepsilon\}$ dans le sens positif.

Suivant Inou-Shishikura, définissons

$$E = \{z = x + iy\ ,\ (\frac{x - x_E}{a_E})^2 + (\frac{y}{b_E})^2 \leq 1\}$$

avec $x_E = -0.18, a_E = 1.24, b_E = 1.04$. L'intérieur de E contient $\{|z| \leq 1\}$. Notons $\mathcal{F}_0$ la classe des applications $f = Q \circ \varphi^{-1}$, où φ est une application univalente sur $\overline{\mathbf{C}} - E$ vérifiant $\varphi(\infty) = \infty, \varphi'(\infty) = 1$, et telle que $\varphi(\overline{\mathbf{C}} - E)$ est un quasidisque ne contenant pas 0. Le domaine de f est donc ce quasidisque et l'image est $Q(\overline{\mathbf{C}} - E)$.

Les applications de $\mathcal{F}_0$ ont donc toutes un point fixe parabolique à l'infini, et il est facile de voir qu'il est toujours de multiplicité minimale 2.

Pour $\alpha \in (0,1)$, notons $\mathcal{F}_\alpha$ la classe des transformations $R_{-\alpha} \circ f, f \in \mathcal{F}_0$. Le multiplicateur du point fixe à l'infini est alors $\exp 2\pi i\alpha$.

Une transformation dans $\mathcal{F}_\alpha$ s'écrit

$$f(z) = \exp(-2\pi i\alpha)z + c_0 + \mathcal{O}(z^{-1}) \, ,$$

avec $|c_0 - 10| \leq 3$. Pour α petit, f a un autre point fixe z^* voisin de $\frac{c_0}{2\pi i\alpha}$. Supposons par exemple $\alpha > 0$. Notons ℓ la demi-droite verticale joignant z^* à $-i\,\infty$, U le secteur infini délimité par ℓ et $f(\ell)$; la surface de Riemann $\mathcal{U}$ obtenue en recollant les bords de U par f est isomorphe à $\mathbf{C}^*$; on l'uniformise en envoyant les bouts correspondant à z^* et ∞ en $0, \infty$ respectivement. La coordonnée uniformisante est alors définie à multiplication par un nombre complexe non nul près, et sera complètement déterminée en spécifiant l'unique valeur critique de l'application renormalisée (on la prendra égale à $27\exp(-2\pi i\alpha^{-1})$).

La renormalisation Rf de $f \in \mathcal{F}_\alpha$ est définie au voisinage de l'infini comme l'application de premier retour dans U, lue dans la coordonnée uniformisante w de $\mathcal{U}$. L'application Rf a un point fixe indifférent à l'infini de multiplicateur $\exp(-2\pi i\alpha^{-1})$. Après conjugaison par $w \to \overline{w}$, ce multiplicateur devient $\exp(2\pi i\alpha^{-1}) = \exp(2\pi i\alpha_1)$ avec $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$. Inou et Shishikura ont montré que Rf appartient à $\mathcal{F}_{\alpha_1}$!

Plus précisément, notons V_1 (resp.V_{-1}) la région voisine de 1 (resp. de -1) qui s'envoie par Q sur $\{|z| \geq 27e^{4\pi}\}$ (resp. sur $\{|z| \leq 27e^{-4\pi}\}$).

L'ensemble $E' = \{|z| \leq 1\} \cup V_1 \cup V_{-1}$ est contenu dans l'intérieur de E. L'image par Q de $\overline{\mathbf{C}} - E'$ est égale à $\{|z| > 27e^{-4\pi}\}$; un point z dans ce domaine qui n'est pas sur le segment $[27\,e^{-4\pi}, 27\,e^{4\pi}]$ a 1 image inverse par Q dans $\overline{\mathbf{C}} - E'$ si $|z| > 27\,e^{4\pi}$, 3 si $|z| < 27\,e^{4\pi}$.

Sur la surface de Riemann $\mathcal{U}$, munie de sa coordonnée uniformisante normalisée w, Inou et Shishikura construisent un quasidisque E'_1 contenant 0 dans son intérieur tel que

- Rf est défini sur $\overline{\mathbf{C}} - E'_1$ et envoie ce domaine sur $\{|w| > 27\,e^{-4\pi}\}$
- il existe un isomorphisme Φ de $\overline{\mathbf{C}} - E'$ sur $\mathcal{U} - E'_1$ tel que

$$Rf \circ \Phi = Q.$$

On voit que Rf est de la forme cherchée sur un domaine plus grand (car $\overline{\mathbf{C}} - E$ est d'adhérence compacte dans $\overline{\mathbf{C}} - E'$). Cela leur permet de conclure, à l'aide d'un argument de type lemme de Schwartz dans un espace de Teichmüller approprié, que l'opérateur de renormalisation est uniformément contractant (à nombre de rotation fixé). Résumons :

Théorème (Inou-Shishikura), [13]. — *Si α est assez petit, l'opérateur de renormalisation envoie $\mathcal{F}_\alpha$ dans $\mathcal{F}_{\alpha_1}$, et est une contraction uniforme pour la distance de Teichmüller.*

Inou et Shishikura déduisent ce résultat par perturbation d'un résultat analogue pour $\mathcal{F}_0$. Leur démonstration entremêle des calculs numériques délicats et des estimations raffinées sur les fonctions univalentes.

5.3. On prend N assez grand de façon à ce que le théorème d'Inou-Shishikura s'applique lorsque $|\alpha| < 1/N$.

Soit alors $\alpha \in \mathcal{C}(N)$. Bien que l'application $z \to z^2(1+\lambda z)^{-1}$ (conjuguée au polynôme quadratique par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$) n'appartienne pas à $\mathcal{F}_\alpha$ on peut définir sa renormalisée et montrer après Inou-Shishikura qu'elle appartient à $\mathcal{F}_{\alpha_1}$, ce qui permet donc de définir les renormalisées de tous ordres.

Soit W_n le domaine formé des points dont l'orbite jusqu'à l'ordre q_n est représentée par la renormalisée d'ordre n (une définition précise de W_n dépend de choix arbitraires, mais les assertions qui suivent sont indépendantes de ces choix). La suite des domaines $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et on peut montrer que l'intersection des W_n est exactement égale à l'adhérence du disque de Siegel Δ_α. (On utilise ici que α est de type constant : $\partial\Delta_\alpha$ est un quasicercle sur lequel l'orbite postcritique est dense.)

On peut maintenant conclure que, pour tout ouvert W contenant $\overline{\Delta}_\alpha$, on a $\overline{\Delta}_{\alpha'} \subset W$ si $\alpha' \in \mathcal{C}(N)$ est assez proche de α : on a en effet $\overline{W}_{n_0} \subset W$ pour un entier n_0 choisi assez grand ; la continuité évidente de l'opérateur de renormalisation implique qu'on a encore $\overline{W}_{n_0}(\alpha') \subset W$ si α' est assez proche de α, et donc $\overline{\Delta}_{\alpha'} \subset W$.

6. FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

6.1. Il reste à voir que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Leb(K_{\alpha(n,A_n)}) \geq (1-\varepsilon)Leb(K_\alpha)$$

si n est assez grand.

Comme J_α est de mesure nulle, la mesure de Lebesgue de K_α est égale à celle de son intérieur. L'intérieur de K_α est l'union des préimages de Δ_α. Il suffit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Leb(K_{\alpha(n,A_n)} \cap \Delta_\alpha) \geq (1-\varepsilon)Leb(\Delta_\alpha)$$

si n est assez grand. On sait déjà d'après la section 4 qu'on a, pour tout ouvert $V \subset \Delta_\alpha$,

$$Leb(\Delta_{\alpha(n,A_n)} \cap V) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)Leb(V)$$

si n est assez grand. Il est facile de se convaincre que la constante $1/2$ est optimale ; donc, pour récupérer l'autre moitié de la mesure, il faut utiliser les préimages de $\Delta_{\alpha(n,A_n)}$.

On va esquisser l'adaptation par Buff et Chéritat d'un argument de McMullen [18]. Celui-ci montrait (entre autres) que, si α est de type constant, J_α est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2 et tout point du bord de Δ_α est un point de densité de K_α.

6.2. On note Δ'_α la composante de $P^{-1}(\Delta_\alpha)$ distincte de Δ_α, c'est-à-dire le domaine symétrique de Δ_α par rapport au point critique.

Un voisinage W d'un point z est dit équilibré s'il existe $r > 0$ tel qu'on ait

$$B(z, C^{-1}r) \subset W \subset B(z, Cr) .$$

Ici et dans la suite, C désigne des constantes ne dépendant que de α.

Pour $\ell \geq 0$, on pose $\delta_\ell(z) = |P_\alpha^{q_\ell}(z) - z|$.

Comme Δ_α est un quasidisque, et α est de type constant, on peut construire une suite décroissante de domaines de Jordan V_ℓ qui possède les propriétés suivantes :

(i) pour tout $z \in \partial\Delta_\alpha$, on a

$$B(z, C^{-1}\delta_\ell(z)) \subset V_\ell ;$$

(ii) pour tout $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$, on a

$$B(z, C^{-1}\delta_\ell(z)) \subset V_{\ell-1} - V_{\ell+2} ;$$

(iii)
$$V_\ell \subset \bigcup_{\partial\Delta_\alpha} B(z, C\delta_\ell(z)) \bigcup \Delta_\alpha ;$$

(iv)
$$P_\alpha(V_\ell) \subset int\, V_{\ell-1} ;$$

(v) pour tout $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$, il existe un voisinage équilibré W_z de z et un entier $m \leq q_\ell$ tel que $P^j(W_z)$ soit contenu dans $V_{\ell-1} - V_{\ell+2}$ pour $0 \leq j \leq m$, P^m soit univalente de distortion bornée sur W_z, et on ait

$$Leb(P_\alpha^m(W_z) \cap \Delta'_\alpha) \geq c_0\, Leb(P_\alpha^m(W_z)) .$$

La densité relative uniforme de $\Delta_{\alpha(n,A_n)}$ dans Δ_α et un argument de compacité impliquent, si n est assez grand (ℓ étant fixé)

$$Leb(P^m_{\alpha(n,A_n)}(W_z) \cap \Delta'_{\alpha(n,A_n)}) \geq \frac{c_0}{3}\, Leb(P^m_{\alpha(n,A_n)}(W_z)$$

d'où l'on tire

$$Leb(W_z \cap P^{-(m+1)}_{\alpha(n,A_n)}(\Delta_{\alpha(n,A_n)})) \geq c_1\, Leb(W_z) .$$

uniformément en $z \in V_\ell - V_{\ell+1}$ si n est assez grand.

6.3. Notons $Z_{n,\ell}$ l'ensemble des points $z \in \Delta_\alpha$ dont l'orbite sous $P_{\alpha(n,A_n)}$ n'est pas contenue dans V_ℓ.

Soit $u \in Z_{n,\ell+1}$. D'après (*iv*) ci-dessus, si n est assez grand, le premier point $z = P^k_{\alpha(n,A_n)}(u)$ de l'orbite de u pour $P_{\alpha(n,A_n)}$ qui n'appartient pas à $V_{\ell+1}$ appartient à V_ℓ.

D'après la section 5, l'orbite postcritique de $P_{\alpha(n,A_n)}$ est contenue dans $V_{\ell+3}$ si n est assez grand. On a donc une branche inverse de $P^k_{\alpha(n,A_n)}$ définie et à distortion bornée sur W_z envoyant z sur u. L'image est un voisinage équilibré W_u de u. On a

$$Leb(W_u - Z_{n,\ell-1}) \geq c_2 \; Leb(W_u) \; .$$

Par ailleurs, on a $W_u \cap \Delta_\alpha \subset Z_{n,\ell+2}$ puisque $W_z \cap V_{\ell+2} = \varnothing$.

Un argument à la Vitali permet de conclure qu'il existe $\lambda < 1$ tel qu'on ait

$$Leb(Z_{n,\ell-1}) \leq \lambda \; Leb(Z_{n,\ell+2})$$

pour $n \geq n(\ell)$. Cela suffit pour conclure qu'on a, pour tout $\ell \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} Leb \; Z_{n,\ell} = 0 \; .$$

Pour $\ell = 0$, c'est le résultat recherché. Cela conclut l'esquisse de preuve de la proposition de la section 3.

7. DISQUES DE SIEGEL DES POLYNÔMES QUADRATIQUES

7.1. Taille des disques

Soit α un nombre irrationnel, $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ la suite de ses réduites. Définissons

$$\alpha_0 = \{\alpha\} \; , \; \alpha_n = \{\alpha_{n-1}^{-1}\} \quad \text{pour } n \geq 1 \; ,$$

et posons, pour $n \geq -1$

$$\beta_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n) = \prod_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell \; .$$

La série

$$B(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \beta_{n-1} \; \log \; \alpha_n^{-1}$$

converge si et seulement si α vérifie la condition de Brjuno.

Rappelons que pour un nombre α vérifiant la condition de Brjuno, on note $r(P_\alpha)$ le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique P_α. Posons alors

$$\Upsilon(\alpha) = B(\alpha) + \log \; r(P_\alpha).$$

THÉORÈME (BUFF-CHÉRITAT), [6] [4]. — *La fonction $\alpha \to \Upsilon(\alpha)$ s'étend en une fonction continue sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.*

On notera que chacun des deux termes composant Υ est extrêmement singulier, le premier de nature arithmétique et le second de nature géométrique.

J'avais auparavant montré [23] que Υ est minorée et qu'on a une majoration

$$\log\, r(P_\alpha) \leq -(1-\varepsilon)B(\alpha) + C_\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. X. Buff a amélioré récemment mon argument [3] et obtient ainsi de façon élémentaire que Υ est majorée. S. Marmi avait conjecturé, suite à des expériences numériques, que Υ est continue [16]. Une conjecture plus forte [17] est que Υ est höldérienne d'exposant 1/2.

Buff et Chéritat donnent une définition directe de la valeur de Υ aux nombres qui ne vérifient pas la condition de Brjuno.

Considérons d'abord un nombre irrationnel α. Posons

$$\Phi_n(\alpha) = \sum_0^n \beta_{\ell-1}\, \log\, \alpha_\ell^{-1}$$

et notons $r_n(\alpha)$ la distance de 0 à l'ensemble des points périodiques (distincts de 0) de période $\leq q_n$. Ils ont montré qu'on a

$$\Upsilon(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(\alpha) + \log\, r_n(\alpha)\ .$$

Pour un nombre rationnel $\alpha = p/q$, soit m l'entier tel que $\alpha_m = 0$; posons

$$\Phi_{\text{trunc}}(\alpha) = \sum_{0\leq\ell<m} \beta_{\ell-1}\, \log \alpha_\ell^{-1}.$$

On a alors

$$\Upsilon(p/q) = \Phi_{\text{trunc}}(p/q) + \frac{\log 2\pi}{q} + \log\, L(p/q)$$

où $L(p/q)$ est la taille asymptotique de la section 4. La preuve de Buff et Chéritat s'appuie principalement sur les méthodes évoquées dans la section 4.

7.2. Géométrie des disques

Perez-Marco a construit [19] des applications univalentes dans le disque unité possédant un disque de Siegel relativement compact dont le bord est une courbe de Jordan de classe C^∞.

Par une méthode totalement différente, Buff et Chéritat ont montré que ceci se produisait dans de très nombreuses familles, y compris dans la famille des polynômes quadratiques. Leur démonstration a été simplifiée en collaboration avec A. Avila. Une simplification ultérieure est due à L. Geyer [12].

Théorème (Avila-Buff-Chéritat), [1] — *Soient α_0 un nombre de Brjuno, $0 < r < r(P_{\alpha_0})$, $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble de Cantor $K \subset [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$ formé de nombre de Brjuno α tels que le disque de Siegel Δ_α soit de rayon conforme égal à r et ait pour bord une courbe de Jordan de classe C^∞.*

La méthode de démonstration est suffisamment souple pour obtenir d'autres classes de régularité, par exemple des courbes de classes C^n mais pas C^{n+1} [8].

On notera que, pour les nombres α du théorème ci-dessus, le point critique de P_α ne peut se trouver sur le bord de Δ_α ; d'après un théorème de Herman, cela veut dire qu'aucun de ces nombres α ne peut vérifier la condition arithmétique $\mathcal{H}$ associée à la linéarisation analytique des difféomorphismes analytiques du cercle [24].

RÉFÉRENCES

[1] A. Avila, X. Buff & A. Chéritat – « Siegel disks with smooth boundaries », *Acta Math.* **193** (2004), no. 1, p. 1–30.

[2] A. D. Brjuno – « Analytic form of differential equations I, II », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **25, 26** (1971, 1972), p. 119–262, p. 199–239.

[3] X. Buff – « Disques de Siegel et ensembles de Julia d'aire strictement positive », preprint, `http://www.picard.ups-tlse.fr/~buff/HDR/HDR.pdf`.

[4] X. Buff & A. Chéritat – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 265–312.

[5] ———, « Quadratic Julia sets with positive area », preprint `http://arxiv.org/abs/math/0605514`.

[6] ———, « Upper bound for the size of quadratic Siegel disks », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 1, p. 1–24.

[7] ———, « Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 11, p. 669–674.

[8] ———, « How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be? », *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), p. 1073–1080.

[9] A. Chéritat – « Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive », Thèse, Orsay, 2001.

[10] ———, « Sur la vitesse d'explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 12, p. 1107–1112.

[11] A. Douady & J. Hubbard – « Étude dynamique des polynômes complexes I, II », *Publ. Math. Orsay* (1984-85).

[12] L. Geyer – « Smooth Siegel discs without number theory: A remark on a proof by Buff and Chéritat », preprint `http://arxiv.org/abs/math.DS/0510578` (2003).

[13] H. Inou & M. Shishikura – « The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation », preprint, `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/pararenorm/ParabolicRenormalization.pdf`.

[14] H. Jellouli – « Perturbation d'une fonction linéarisable », in *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, p. 227–252.

[15] M. Lyubich – « On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial », Stonybrook IMS, preprint (1991/10).

[16] S. Marmi – « Critical functions for complex analytic maps », *J. Phys. A* **23** (1990), no. 15, p. 3447–3474.

[17] S. Marmi, P. Moussa & J.-C. Yoccoz – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), no. 2, p. 265–293.

[18] C. T. McMullen – « Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets », *Acta Math.* **180** (1998), no. 2, p. 247–292.

[19] R. Pérez-Marco – « Siegel disks with smooth boundary », preprint (1997).

[20] C. L. Petersen & S. Zakeri – « On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 1, p. 1–52.

[21] M. Shishikura – Unpublished.

[22] C. L. Siegel – « Iteration of analytic functions », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 607–612.

[23] J.-C. Yoccoz – *Petits diviseurs en dimension* 1, Astérisque, vol. 231, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[24] ———, « Analytic linearization of circle diffeomorphisms », in *Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998)*, Lecture Notes in Math., vol. 1784, Springer, Berlin, 2002, p. 125–173.

Jean-Christophe YOCCOZ

Collège de France
Département de Mathématiques
3, rue d'Ulm
F–75231 Paris Cedex 05
E-mail : `jean-c.yoccoz@college-de-france.fr`