

**LA MESURE D'ÉQUILIBRE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$
[d'après Briend et Duval]**

par **Xavier BUFF**

INTRODUCTION

Un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Nous noterons $z = [z_0 : z_1 : \dots : z_k]$ un point $z \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ défini par ses coordonnées homogènes et $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ la projection canonique. Une application rationnelle $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique d est une application qui s'écrit $f = [F_0 : F_1 : \dots : F_k]$, les F_j étant des polynômes homogènes de degré d , sans facteurs communs. On associe à f l'application $F = (F_0, F_1, \dots, F_k) : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$. On a alors $\pi \circ F = f \circ \pi$. Une application rationnelle $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement définie partout. Son ensemble d'indétermination est $\pi(F^{-1}\{0\})$.

Les endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ sont les applications rationnelles non constantes dont l'ensemble d'indétermination est vide. Le degré algébrique d'une application rationnelle est aussi le degré de la préimage d'un hyperplan générique.

Dans tout cet exposé, nous nous intéressons aux propriétés dynamiques d'un endomorphisme holomorphe $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique $d \geq 2$. D'après le théorème de Bezout, son degré topologique, c'est-à-dire le nombre de préimages d'un point générique, est alors égal à d^k .

Remarque 0.1. — Nous ne parlerons pas des applications rationnelles dont l'ensemble d'indétermination n'est pas vide, par exemple les applications de Hénon. Le lecteur intéressé pourra consulter [25].

Le cas de la dimension $k = 1$ a une histoire assez ancienne, avec des contributions de Koenigs, Schröder, Böttcher à la fin du XIX^e siècle et les fameux mémoires de Fatou et Julia au début du XX^e siècle. L'ensemble de Fatou Ω_f est le plus grand ouvert sur lequel la famille des itérés de f est normale (pour la convergence uniforme sur tout compact). L'ensemble de Julia J_f est le complémentaire de Ω_f .

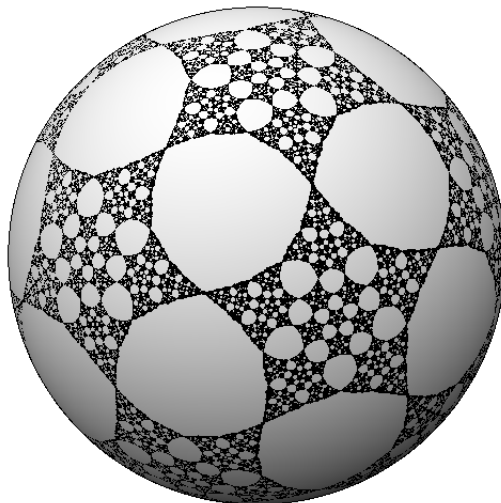


FIGURE 1. L'ensemble de Julia J_f de la fraction rationnelle

$$f : z \mapsto z \frac{z^{10} + 66z^5 - 11}{-11z^{10} - 66z^5 + 1}.$$

Le fait même que les ensembles de Fatou et de Julia soient définis à partir de la notion de famille normale reflète les origines de la dynamique holomorphe. Un ingrédient majeur dans les travaux de Fatou et de Julia est le théorème de Montel qui dit qu'une famille de fonctions holomorphes définies sur un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et évitant 3 points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une famille normale.

L'ensemble J_f est compact, parfait et complètement invariant par f :

$$f(J_f) = J_f \quad \text{et} \quad f^{-1}(J_f) = J_f.$$

Il se peut qu'il y ait un ensemble fini complètement invariant par f . Un tel ensemble contient au plus 2 points. Le plus grand s'appelle l'ensemble exceptionnel E_f . On peut donner des définitions équivalentes de l'ensemble de Julia J_f d'une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

- J_f est le plus petit fermé complètement invariant contenant au moins 3 points ;
- J_f est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f (*i.e.* les points $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $f^{ok}(z) = z$ et $|(f^{ok})'(z)| > 1$ pour un entier $k \geq 1$).

En 1965, Brodin [9] démontre que si f est un polynôme, il existe une mesure de probabilité invariante et mélangeante μ_f , supportée par l'ensemble de Julia J_f , qui reflète la distribution des préimages des points hors de l'ensemble exceptionnel E_f . L'outil central de la démonstration est la théorie du potentiel. La mesure μ_f peut être

obtenue comme le Laplacien d'une fonction de Green dynamique. Tortrat [26] montre que la mesure μ_f reflète également la distribution des points périodiques.

En 1983, Lyubich [21] et Freire-Lopès-Mañé [16, 22] généralisent ce résultat pour toute fraction rationnelle f . De plus, ils montrent que μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale de f .

Que reste-t-il de ces résultats en dimension $k \geq 2$?

Les définitions de l'ensemble de Fatou et de l'ensemble de Julia restent les mêmes. Mais en général, on ne peut plus caractériser l'ensemble de Julia comme le plus petit fermé invariant ou comme l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

En 1990, Sibony a l'idée d'introduire la théorie du potentiel dans l'étude de la dynamique des difféomorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Pour un tel difféomorphisme, il définit une mesure de probabilité invariante. Avec Bedford [2] §3, il établit les premières propriétés de cette mesure. Les résultats sont complétés par Bedford, Lyubich et Smillie [3, 1].

En 1994, Hubbard et Papadopol [19] définissent, pour un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, une mesure de probabilité invariante naturelle, la *mesure d'équilibre* μ_f , en utilisant la théorie du pluripotential. Fornæss et Sibony [12] montrent que la mesure d'équilibre μ_f est mélangeante et reflète la distribution des préimages des points en dehors d'un ensemble pluripolaire. En dimension $k \geq 2$, le support de la mesure est en général plus petit que l'ensemble de Julia (nous verrons un exemple plus loin).

En 2001, Briend et Duval [7] montrent que les méthodes de Lyubich s'adaptent en toute dimension avec des résultats similaires. Nous allons présenter ces travaux de Briend et Duval. Dans les énoncés suivants, f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ ($k \geq 1$) de degré algébrique $d \geq 2$.

THÉORÈME ET DÉFINITION 0.2. — *Les ensembles algébriques complètement invariants par f sont en nombre fini. L'ensemble exceptionnel E_f de f est le plus grand ensemble algébrique propre complètement invariant par f .*

Il est naturel de tirer en arrière des fonctions continues sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et de pousser en avant des mesures sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$:

$$f^* \varphi = \varphi \circ f \quad \text{et} \quad \langle f_* \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f^* \varphi \rangle = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \circ f \, d\mu.$$

Étant donné que $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une application propre, elle a un degré topologique fini, à savoir d^k . La définition suivante a donc un sens :

$$\frac{1}{d^k} f_* \varphi = \frac{1}{d^k} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y),$$

les préimages de x étant comptées avec multiplicités. L'application $d^{-k}f_*\varphi$ obtenue en moyennant φ dans les fibres de f est alors une fonction continue (car on a pris en compte les multiplicités des préimages). On peut alors définir $d^{-k}f^*\mu$ par dualité :

$$\left\langle \frac{1}{d^k}f^*\mu, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \left(\frac{1}{d^k} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y) \right) d\mu(x),$$

les préimages de x étant comptées avec multiplicités. Par exemple, $\mu_{n,x} = d^{-kn}(f^{on})^*\delta_x$ est la mesure de comptage normalisée sur $f^{-n}(x)$:

$$\mu_{n,x} = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{y \in f^{-n}(x)} \delta_y.$$

THÉORÈME 0.3. — *La mesure d'équilibre μ_f est l'unique mesure de probabilité vérifiant $d^{-k}f^*\mu_f = \mu_f$ et ne chargeant pas l'ensemble exceptionnel E_f . De plus, pour toute mesure de probabilité ν ne chargeant pas E_f , on a $d^{-kn}(f^{on})^*\nu \rightarrow \mu_f$. En particulier, $\mu_{n,x} \rightarrow \mu_f$ si et seulement si $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus E_f$. La mesure μ_f est mélangeante, et donc ergodique.*

Nous rappellerons les notions d'entropie topologique et d'entropie métrique plus loin. Depuis 1977, on sait que l'entropie topologique d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique $d \geq 2$ est $k \log d$. La minoration est due à Misiurewicz et Przytycki [23] et la majoration est due à Gromov [17]. Comme la mesure d'équilibre μ_f est de jacobien constant d^k , la formule de Rohlin-Parry [24] dit que l'entropie métrique de μ_f vaut $k \log d$. Enfin, le principe variationnel affirme que l'entropie topologique est le supremum des entropies métriques. Donc, μ_f est une mesure d'entropie maximale.

THÉORÈME 0.4. — *La mesure d'équilibre est l'unique mesure d'entropie maximale de f .*

L'ensemble des points périodiques de période n contient $(d^{n(k+1)} - 1)/(d - 1)$ points, en comptant les multiplicités. Le théorème suivant montre que la majorité d'entre eux sont répulsifs et que la mesure d'équilibre reflète leur distribution asymptotique.

THÉORÈME 0.5. — *La suite de mesures*

$$\frac{1}{d^{nk}} \sum_{\substack{f^{on}(y)=y \\ y \text{ répulsif}}} \delta_y$$

converge faiblement vers la mesure d'équilibre μ_f .

En dimension $k = 1$, tous les points périodiques, sauf au plus un nombre fini, sont répulsifs ; les points périodiques répulsifs sont dans l'ensemble de Julia qui est le support de μ_f . En dimension $k \geq 2$, Hubbard et Papadopol [19] (exemple 2, page 343)

montrent qu'il se peut que les points périodiques répulsifs ne soient pas dans le support de la mesure d'équilibre. Fornæss et Sibony [15] (théorème 4.3 et remarque 4.4) montrent également qu'il se peut qu'il y ait une infinité de tels points.

Antérieurement aux résultats que nous présentons ici, Briend et Duval [6] en avaient obtenu un autre que nous ne démontrerons pas.

THÉORÈME 0.6. — *Les exposants de Liapounoff de f relativement à μ sont minorés par $(\log d)/2$.*

Signalons [10] où Dinh et Sibony ont généralisé toute cette théorie au cas des applications d'allure polynomiale (qui contient le cas des endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$). Ils donnent une construction directe de la mesure d'équilibre, n'utilisant que les fonctions plurisousharmoniques. Ils montrent que la mesure d'équilibre est K -mélangeante (ce qui est la notion la plus forte de mélange) et qu'elle est exponentiellement mélangeante.

Signalons également les travaux de Guedj [18] et de Dinh et Sibony [11] qui généralisent de nombreux résultats dans le cadre des transformations méromorphes (l'ensemble d'indétermination n'est pas vide).

1. DÉFINITION POTENTIALISTE DE LA MESURE D'ÉQUILIBRE

1.1. La mesure de Brolin pour les polynômes

Considérons d'abord le cas d'un polynôme $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de degré $d \geq 2$. Dans ce cas, on peut définir l'ensemble de Julia rempli

$$K_P = \{z \in \mathbb{C}; \text{ la suite } (P^{on}(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}.$$

L'ensemble de Julia J_P est le bord de l'ensemble de Julia rempli K_P .

On peut alors définir une fonction $g_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_P(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |P^{on}(z)|,$$

où $\log^+ = \max(0, \log)$. Il est facile de voir que la limite existe et est uniforme en remarquant que la fonction $u(z) = \log^+ |P(z)| - d \log^+ |z|$ est bornée sur \mathbb{C} et que

$$g_P(z) = \log^+ |z| + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{d^m} u(P^{om}(z)).$$

La fonction g_P est continue et sousharmonique comme limite uniforme de fonctions continues et sousharmoniques. Elle s'annule sur K_P et est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K_P$. Comme g_P est sousharmonique, son Laplacien est une mesure. En fait, $\mu_P = \frac{1}{2\pi} \Delta g_P$ est une mesure de probabilité de support égal à J_P .

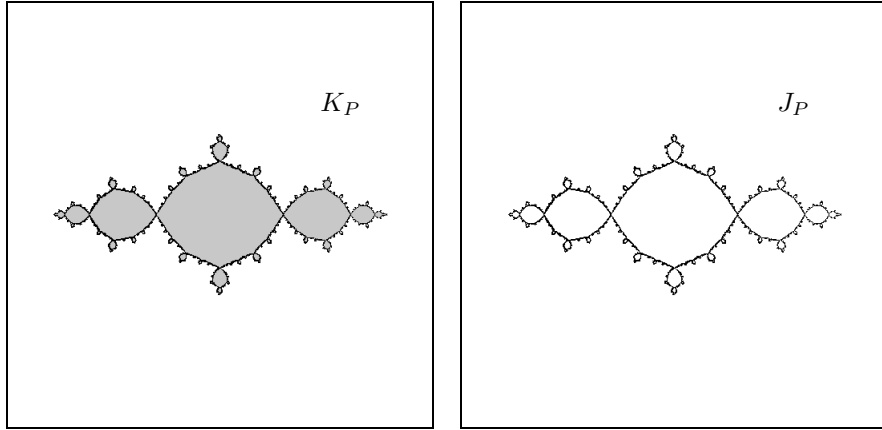


FIGURE 2. L'ensemble de Julia rempli et l'ensemble de Julia du polynôme $P : z \mapsto z^2 - 1$.

La mesure μ_P est appelée la mesure de Brolin du polynôme P . On voit facilement que $g_P(P(z)) = d \cdot g_P(z)$ et on en déduit que $d^{-1}P^*\mu_P = \mu_P$. Pour établir la distribution des images réciproques d'un point w , on est amené à montrer que la suite de fonctions sousharmoniques

$$\frac{1}{d^n} \log |P^{\circ n}(z) - w|$$

converge vers g_P . De même, pour établir la distribution des points périodiques, on est amené à montrer que la suite de fonctions sousharmoniques

$$\frac{1}{d^n} \log |P^{\circ n}(z) - z|$$

converge vers g_P .

1.2. La mesure d'équilibre pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$

1.2.1. *Passage aux coordonnées homogènes.* — Soient $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ un endomorphisme holomorphe de degré algébrique $d \geq 2$ et $F : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ un relevé dont les coordonnées sont des polynômes homogènes de degré d :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k(\mathbb{C}). \end{array}$$

On écrit $F = (F_0, F_1, \dots, F_k)$ et $f = [F_0 : F_1 : \dots : F_k]$. On peut prolonger F à $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{C})$ en posant

$$F([z_0 : z_1 : \dots : z_k : z_{k+1}]) = [F_0 : F_1 : \dots : F_k : z_{k+1}^d].$$

Dans ce numéro, nous allons préciser les relations qui existent entre la dynamique de $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et la dynamique de $F : \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{C})$.

Le point fixe $O = [0 : \dots : 0 : 1]$ est complètement invariant par F . C'est un point super-attractif et toute orbite rencontrant un voisinage de O suffisamment petit converge vers O . Le bassin d'attraction Ω_0 de ce point fixe super-attractif est contenu dans l'ensemble de Fatou de F . Il est homéomorphe à une boule réelle de dimension $2(k+1)$.

L'hyperplan à l'infini $H = \{z_{k+1} = 0\}$ est complètement invariant par F et $F : H \rightarrow H$ est conjuguée à $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Pour $z = [z_0 : \dots : z_k] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, on note $L_z \subset \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{C})$ la droite passant par O avec « pente » z :

$$L_z = \{[z_0 : \dots : z_k : 0]\} \cup \{[tz_0 : \dots : tz_k : 1]; t \in \mathbb{C}\}.$$

L'application F envoie L_z sur $L_{f(z)}$ et $F : L_z \rightarrow L_{f(z)}$ est de la forme $t \mapsto \lambda t^d$. En particulier, un cercle de rayon r centré en O s'envoie sur un cercle de rayon $|\lambda|r^d$ centré en O .

L'ensemble de Julia J_F est la réunion du bord de Ω_0 , et du cône $C(J_f) \setminus \Omega_0$ où $C(J_f)$ est la réunion des droites L_z pour $z \in J_f$. Le bord de Ω_0 est homéomorphe à une sphère de dimension $2k+1$.

Exemple 1.1. — Considérons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$f([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^d : z_1^d : z_2^d].$$

Il est de degré algébrique d et de degré topologique d^2 . Il admet trois points fixes super-attractifs complètement invariants : les points $[0 : 0 : 1]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[1 : 0 : 0]$. Les trois droites $\{z_0 = 0\}$, $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$ sont complètement invariantes par f . La réunion des trois bassins super-attractifs constitue l'ensemble de Fatou. Son bord est l'ensemble de Julia.

Pour visualiser le bassin attractif de $[0 : 0 : 1]$, on peut se placer dans la carte $z_2 = 1$. On est dans \mathbb{C}^2 et $F(z_0, z_1) = (z_0^d, z_1^d)$. Le bassin d'attraction Ω_0 de $(0, 0)$ est le polydisque $\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| < 1, |z_1| < 1\}$. Son bord est la réunion de deux tores pleins de dimension réelle 3 :

$$\partial\Omega_0 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| < 1, |z_1| = 1\} \cup \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| = 1, |z_1| < 1\}.$$

Pour obtenir l'ensemble de Julia J_F , il faut ajouter un troisième tore plein :

$$\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| = |z_1| > 1\} \cup \{[z_0 : z_1 : 0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); |z_0| = |z_1|\}.$$

L'intersection de ces trois tores est le tore réel $\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| = |z_1| = 1\}$ qui se révélera être le support de la mesure d'équilibre.

Exemple 1.2. — On peut considérer un exemple un peu plus élaboré :

$$F([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 - z_1^2 : z_1^2 : z_2^2].$$

Si on se place dans la carte $\{z_2 = 1\}$, c'est-à-dire dans \mathbb{C}^2 , l'expression de F est $F(z_0, z_1) = (z_0^2 - z_1^2, z_1^2)$ qui est l'expression en coordonnées homogènes du polynôme $f(z) = z^2 - 1$.

Le point $[0 : 0 : 1]$ est fixe et super-attractif et son bassin d'attraction Ω_0 est homéomorphe à une boule de dimension réelle 4. Son bord est homéomorphe à une 3-sphère.

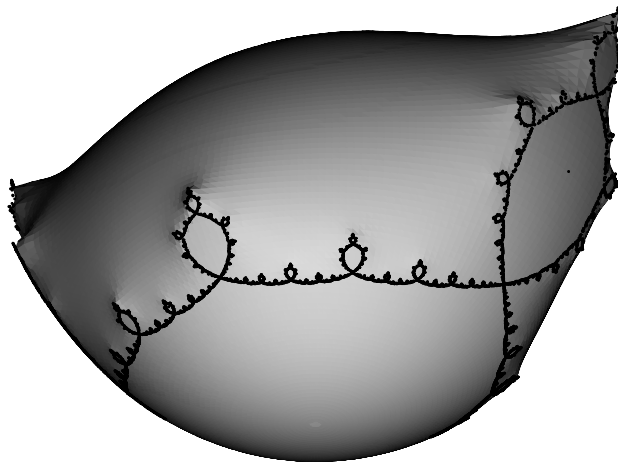


FIGURE 3. Une représentation du bord du bassin attractif Ω_0 de $(0, 0)$ pour l'application $F : (z_0, z_1) \mapsto (z_0^2 - z_1^2, z_1^2)$. Cet ensemble est contenu dans l'ensemble de Julia J_F . En noir, on a représenté l'intersection $\partial\Omega_0 \cap C(J_f)$ entre le bord de Ω_0 et le cône $C(J_f)$. Cette intersection est le support de la mesure d'équilibre μ_F .

L'ensemble de Julia J_F et le bord du bassin Ω_0 sont des ensembles cerclés : si $(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ appartient à J_F (respectivement à $\partial\Omega_0$) et si $|\lambda| = 1$, alors $(\lambda z_0, \dots, \lambda z_k)$ appartient à J_F (respectivement à $\partial\Omega_0$).

En particulier, on a une fibration de $\partial\Omega_0$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les fibres étant des cercles (c'est la fibration de Hopf). On peut se faire une idée de la géométrie de $\partial\Omega_0$ en quotientant par $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1)$ si $|\lambda| = 1$. À chaque point (z_0, z_1) on associe alors un point $z = [z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et un réel $r = \sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2} \in]0, +\infty[$. Le point $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'identifie avec un point $M_z \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ via la projection stéréographique (S^2 est la

sphère unité dans \mathbb{R}^3) et on peut représenter le couple (z, r) par le point $r \cdot M_z \in \mathbb{R}^3$. Le bord de Ω_0 est alors représenté par une surface de \mathbb{R}^3 (voir figure 3). On peut représenter l'ensemble de Julia J_F en suivant le même principe (voir figure 4).

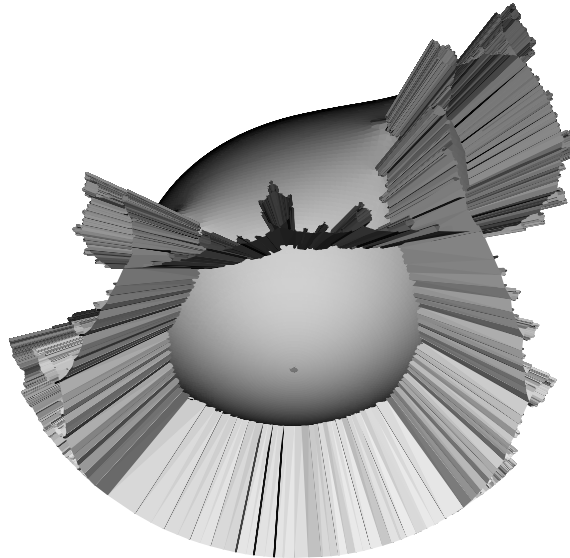


FIGURE 4. Une représentation de l'ensemble de Julia J_F pour l'application $F : (z_0, z_1) \mapsto (z_0^2 - z_1^2, z_1^2)$. On s'est en fait restreint à représenter l'intersection de J_F avec la boule de rayon 3 dans \mathbb{C}^2 .

Exemple 1.3. — Considérons toujours une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et une application $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associée par passage aux coordonnées homogènes. Si l'ensemble de Julia de f est égal à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors, l'ensemble de Julia de F est égal au complémentaire du bassin attractif de $[0 : 0 : 1]$. Il ne sera donc pas d'intérieur vide, et il ne sera pas égal à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

1.2.2. La fonction de Green d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. — Pour $x \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, on pose $u(x) = \log \|F(x)\| - d \log \|x\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{C}^{k+1} . Pour $n \geq 0$, on définit

$$G_n(x) = \frac{1}{d^n} \log \|F^{\circ n}(x)\|.$$

Par homogénéité de F , on voit que la fonction u ne dépend que de $\pi(x) \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et que u est donc bornée sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$. On en déduit immédiatement que la suite

$$G_n(x) - \log \|x\| = \sum_{m=1}^n G_m(x) - G_{m-1}(x) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{d^m} u(F^{\circ m}(x)).$$

converge uniformément sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ vers une fonction continue bornée : $G_F(x) - \log \|x\|$. On a donc la

PROPOSITION 1.4. — *La fonction*

$$G_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^{\circ n}\|$$

est continue et plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, on a $G_F(F(x)) = d \cdot G_F(x)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $G_F(\lambda x) = G_F(x) + \log |\lambda|$.

Exemple 1.5. — Soit $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un polynôme de degré d . Considérons alors l'application $F : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ définie par

$$F(z_0, z_1) = (z_1^d f(z_0/z_1), z_1^d).$$

L'application F relève f en coordonnées homogènes. On a alors

$$F^{\circ n}(z_0, z_1) = (z_1^{d^n} f^{\circ n}(z_0/z_1), z_1^{d^n}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G_F(z_0, z_1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^{\circ n}(z_0, z_1)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2d^n} \log \left(\left| z_1^{d^n} f^{\circ n}(z_0/z_1) \right|^2 + \left| z_1^{d^n} \right|^2 \right) \\ &= \log |z_1| + g_f(z), \end{aligned}$$

où $z = [z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et g_f est la fonction de Green associée au polynôme f .

1.2.3. *Courants positifs sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.* — Une forme lisse de bidegré (p, q) sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une forme différentielle lisse qui, dans des cartes, s'écrit

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} \varphi_{\alpha, \beta} dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}$$

où $dz_{\alpha} = dz_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_{\alpha_p}$ et $d\bar{z}_{\beta} = d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$. Un courant de bidegré (p, q) sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est un élément du dual des formes lisses de bidegré $(k-p, k-q)$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Dans des cartes, un courant S de bidegré (p, q) se représente comme une forme différentielle de bidegré (p, q) à coefficients distributions

$$S = \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} S_{\alpha, \beta} dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}.$$

L'opérateur d de Poincaré se décompose en $d = \partial + \bar{\partial}$ où

$$\partial\varphi = \sum \frac{\partial\varphi_{\alpha, \beta}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta} \quad \text{et} \quad \bar{\partial}\varphi = \sum \frac{\partial\varphi_{\alpha, \beta}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}.$$

On définit l'opérateur

$$d^c = \frac{i}{2\pi}(\bar{\partial} - \partial).$$

On a

$$dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}.$$

Si S est un courant de bidegré (p, p) , on a

$$\langle dS, \varphi \rangle = -\langle S, d\varphi \rangle, \quad \langle d^c S, \varphi \rangle = -\langle S, d^c \varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle dd^c S, \varphi \rangle = \langle S, dd^c \varphi \rangle.$$

Remarque 1.6. — Si U est un ouvert de \mathbb{C} et $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 , alors $dd^c h = (\frac{1}{2\pi}\Delta h) dx \wedge dy$, où Δh est le Laplacien de h .

On dit qu'un courant S de bidegré (p, p) est positif si $\langle S, \varphi \rangle \geq 0$ pour toute forme test

$$\varphi = i\varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge i\varphi_{k-p} \wedge \bar{\varphi}_{k-p},$$

avec φ_j forme lisse de bidegré $(1, 0)$. Dans des cartes, les coefficients d'un courant positif S de bidegré (p, p) sont des mesures régulières : ce sont des distributions qui se prolongent en formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues.

On définit alors la masse d'un courant positif S de bidegré (p, p) par

$$\|S\| = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} S \wedge \frac{\omega^{k-p}}{(k-p)!}.$$

Si une suite de courants positifs sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est de masse bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente. Si la suite est croissante et de masse bornée, alors elle est convergente.

Un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ s'écrit localement $dd^c u$ avec u pluri-sousharmonique.

1.2.4. Le courant de Green d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. — À partir de la fonction de Green G_F , on peut définir un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ comme suit.

PROPOSITION 1.7. — *Il existe un courant positif fermé T_f de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tel que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et toute section holomorphe $\sigma : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, on ait*

$$T_f|_U = dd^c(G_F \circ \sigma).$$

Démonstration. — Étant donné un ouvert $U \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et une section holomorphe $\sigma : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, la fonction $G_F \circ \sigma$ est une fonction plurisousharmonique, et $T_f|_U = dd^c(G_F \circ \sigma)$ est un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$. Remarquons que la définition de $T_f|_U$ ne dépend pas du choix de section. En effet, si $\sigma_0 : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ sont deux sections holomorphes, alors il existe une fonction holomorphe $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\sigma_0 = \lambda \cdot \sigma_1$. Dans ce cas,

$$dd^c(G_F \circ \sigma_0) = dd^c \log |\lambda| + dd^c(G_F \circ \sigma_1) = dd^c(G_F \circ \sigma_1)$$

puisque $\log |\lambda|$ est une fonction pluriharmonique sur U . □

Remarque 1.8. — Hubbard et Papadopol [19] ont montré que le support de T_f est contenu dans l'ensemble de Julia J_f . Fornæss et Sibony [14] et indépendamment Ueda [27] ont montré que le support de T_f coïncide avec J_f .

Rappelons que la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est la forme ω de bidegré $(1, 1)$ qui vérifie

$$\pi^*\omega = dd^c \log \|\cdot\|.$$

Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a

$$G_F(\lambda x) = G_F(x) + \log |\lambda| \quad \text{et} \quad \log \|\lambda x\| = \log \|x\| + \log |\lambda|,$$

la fonction $x \in \mathbb{C}^{k+1} \mapsto G_F(x) - \log \|x\|$ descend en une fonction continue φ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et on a

$$T_f = \omega + dd^c \varphi.$$

Le courant T_f est donc cohomologue à la forme de Fubini-Study ω .

1.2.5. Première définition de la mesure d'équilibre. — Par construction, au voisinage de chaque point $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, $T_f = dd^c u$ avec u continue. Il est possible de définir le produit extérieur de courants positifs fermés de bidegrés $(1, 1)$ dont les potentiels sont continus (voir [4]). On peut donc parler de

$$T_f^{\wedge k} = \underbrace{T_f \wedge T_f \wedge \cdots \wedge T_f}_{k \text{ fois}}$$

Comme le courant T_f est cohomologue à la forme de Fubini-Study ω , $T_f^{\wedge k}$ est cohomologue à la forme volume $\Omega = \omega^{\wedge k}$ de la métrique de Fubini-Study. Ceci nous amène à la définition suivante.

DÉFINITION 1.9. — *La mesure d'équilibre μ_f d'un endomorphisme $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est la mesure de probabilité $\mu_f = T_f^{\wedge k}$.*

On a

$$G_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n \quad \text{avec} \quad G_n = \frac{1}{d^n} \log \|F^{\circ n}\|.$$

Pour $n \geq 0$, il existe une forme lisse T_n de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ telle que $\pi^*T_n = dd^c G_n$. En fait,

$$T_n = \frac{1}{d^n} (f^{\circ n})^* \omega.$$

La fonction $G_n(x) - \log \|x\|$ descend en une fonction lisse φ_n sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformément sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et

$$T_n = \omega + dd^c \varphi_n.$$

On a donc $T_n \rightarrow T_f$ au sens des courants, et comme la convergence de φ_n vers φ est uniforme, on a la convergence suivante au sens des courants (voir [4]) :

$$T_n \longrightarrow T_f \quad \text{et} \quad T_n^{\wedge k} = \frac{1}{d^{kn}} (f^{\circ n})^* \Omega \longrightarrow T_f^{\wedge k} = \mu_f.$$

On vient de démontrer la

PROPOSITION 1.10. — *La mesure d'équilibre μ_f est la limite faible de la suite de mesures de probabilité $\mu_n = \frac{1}{d^{kn}}(f^{\circ n})^*\Omega$, où $\Omega = \omega^{\wedge k}$ est la forme volume de la métrique de Fubini-Study.*

Exemple 1.11. — Considérons de nouveau l'endomorphisme f de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par

$$f([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^d : z_1^d : z_2^d].$$

L'ensemble de Julia J_f est la réunion de trois tores pleins qui s'intersectent le long du tore réel $\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0| = 1 \text{ et } |z_1| = 1\}$. Ce tore réel est totalement invariant. Il contient tous les points périodiques répulsifs. Les préimages d'un point $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ hors des droites $\{z_0 = 0\}$ et $\{z_1 = 0\}$ s'accumulent sur ce tore réel. Ce tore réel est le support de la mesure d'équilibre μ_f qui n'est autre que la mesure de Lebesgue sur le tore. Le support de la mesure d'équilibre μ_f n'est donc pas égal à J_f .

Exemple 1.12. — Considérons maintenant l'endomorphisme F de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par

$$F([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 - z_1^2 : z_1^2 : z_2^2].$$

Le bord du bassin attractif Ω_0 du point $[0 : 0 : 1]$ est représenté sur la figure 3. Le support de la mesure d'équilibre μ_F est contenu dans $\partial\Omega_0$. C'est l'intersection du bord de Ω_0 avec le cône $C(J_f)$. La projection $\pi_*(\mu_F)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la mesure d'équilibre μ_f de f ($\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la projection canonique).

Exemple 1.13. — La mesure d'équilibre d'un polynôme construite en passant aux coordonnées homogènes est égale à la mesure de Brolin obtenue à partir de la fonction de Green $g_f : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty[$.

En effet, nous avons mentionné plus haut (exemple 1.5) que $G_F(z_0, z_1) = \log |z_1| + g_f(z)$, où $z = [z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et g_f est la fonction de Green associée au polynôme f . La fonction $(z_0, z_1) \mapsto G_F(z_0, z_1) - \log \|(z_0, z_1)\|$ définie sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ descend en une fonction $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(z) = g_f(z) - \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2).$$

On a alors

$$\mu_f = \omega + \left(\frac{1}{2\pi} \Delta \varphi\right) dx \wedge dy = \left(\frac{1}{2\pi} \Delta g_f\right) dx \wedge dy,$$

où ω est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

1.2.6. Seconde définition. — Dans l'approche que nous venons de présenter, nous avons eu besoin d'utiliser la théorie de Bedford-Taylor pour définir μ_f comme

puissance k -ième d'un courant positif fermé T_f de bidegré $(1, 1)$ et pour obtenir la convergence faible de la suite de mesures $\mu_n = T_n^{\wedge k}$ vers $\mu_f = T_f^{\wedge k}$.

Dinh et Sibony [10] puis Guedj [18] ont montré qu'on peut en fait directement définir la mesure d'équilibre μ_f comme la limite faible de la suite de mesures de probabilité $\mu_n = \frac{1}{d^{kn}}(f^{\circ n})^*\Omega$. Nous allons maintenant présenter l'approche de Guedj.

On observe d'abord que $d^{-k}f^*\Omega$ est cohomologue à Ω , et on peut donc écrire

$$\frac{1}{d^k}f^*\Omega = \Omega + dd^c S$$

avec S une forme lisse de bidegré $(k-1, k-1)$. On a alors, par compacité de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, l'encadrement $-C\omega^{\wedge k-1} \leq S \leq C\omega^{\wedge k-1}$ pour une constante $C \geq 0$. Quitte à rajouter $C\omega^{\wedge k-1}$ à S , on peut supposer que $0 \leq S \leq C\omega^{\wedge k-1}$. On a alors

$$\frac{1}{d^{kn}}(f^{\circ n})^*\Omega = \Omega + dd^c S_n \quad \text{avec} \quad S_n = S + \frac{1}{d^k}f^*S + \dots + \frac{1}{d^{k(n-1)}}(f^{\circ n-1})^*S.$$

Comme $S \geq 0$, la suite de courants positifs S_n est croissante. La masse des courants S_n est bornée :

$$0 \leq \|S_n\| = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} S_n \wedge \omega \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{d^{kj}} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (f^{\circ j})^*\omega^{k-1} \wedge \omega = C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{d^j} < +\infty.$$

La suite S_n converge donc faiblement vers un courant positif S_∞ de bidegré $(k-1, k-1)$, et

$$\frac{1}{d^{kn}}(f^{\circ n})^*\Omega = \Omega + dd^c S_n \longrightarrow \mu_f := \Omega + dd^c S_\infty.$$

L'opérateur $\mu \mapsto d^{-k}f^*\mu$ est un opérateur continu pour la convergence faible. En passant à la limite sur l'équation $\mu_{n+1} = d^{-k}f^*\mu_n$, on obtient

$$\mu_f = \frac{1}{d^k}f^*\mu_f.$$

Il en découle également que la mesure d'équilibre μ_f est f -invariante :

$$\mu_f(f^{-1}(A)) = \int \mathbf{1}_{f^{-1}(A)} d\mu_f = \int \mathbf{1}_{f^{-1}(A)} d\frac{f^*\mu_f}{d^k} = \int \mathbf{1}_A d\mu_f = \mu_f(A).$$

PROPOSITION 1.14. — *La mesure d'équilibre μ_f ne charge pas les ensembles pluripolaires. En particulier, elle ne charge pas les ensembles algébriques.*

Démonstration. — Une fonction quasiplurisousharmonique sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une fonction semi-continue supérieurement qui est localement la somme d'une fonction pluri-sousharmonique et d'une fonction lisse. Tout ensemble pluripolaire est contenu dans $\varphi^{-1}\{-\infty\}$ pour une fonction quasiplurisousharmonique φ . Nous allons voir que φ est intégrable par rapport à la mesure μ_f , ce qui implique que $\varphi^{-1}\{-\infty\}$ est de mesure nulle.

Quitte à translater φ , on peut supposer que $\varphi \leq 0$ et quitte à multiplier φ par une constante, on peut supposer $dd^c \varphi \geq -\omega$. On a alors, en utilisant le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (-\varphi) d\mu_f &= \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (-\varphi) d\Omega + \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (-dd^c \varphi) \wedge S_\infty \\ &\leq \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (-\varphi) d\Omega + \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} S_\infty \wedge \omega, \end{aligned}$$

puisque S_∞ est un courant positif. Une fonction quasiplurisousharmonique est intégrable donc $\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (-\varphi) d\Omega < +\infty$, et $\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} S_\infty \wedge \omega = \|S_\infty\| < +\infty$. \square

2. L'ENSEMBLE EXCEPTIONNEL

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner une troisième construction de la mesure d'équilibre qui est due à Briend et Duval [7]. Cette approche est plus géométrique et s'inspire des travaux de Lyubich [21] dans le cas de la dimension $k = 1$. Une conséquence immédiate sera que la mesure d'équilibre μ_f reflète la distribution asymptotique des préimages des points hors d'un ensemble exceptionnel algébrique E_f .

Les premiers résultats concernant les ensembles exceptionnels algébriques pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ avec $k \geq 2$ ont été obtenus par Fornæss et Sibony [13].

Nous allons maintenant montrer que les ensembles algébriques complètement invariants par f sont en nombre fini (résultat dû à Briend et Duval [7]). La réunion de tous ces ensembles hormis $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est donc un ensemble algébrique complètement invariant par f (éventuellement vide). C'est l'ensemble exceptionnel E_f .

Exemple 2.1. — Considérons d'abord une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$. Les ensembles algébriques propres contenus dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les ensembles finis. Si E est un ensemble fini et complètement invariant, son complémentaire $U = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus E$ est un ouvert complètement invariant de caractéristique d'Euler finie $\chi(U) = 2 - \#E$. La formule de Riemann-Hurwitz appliquée à $f : U \rightarrow U$ donne $\chi(U) = d\chi(U) - n$ où n est le nombre de points critiques de f contenus dans U , comptés avec multiplicités. On a alors $\chi(U) = n/(d-1) \geq 0$, ce qui montre que $\#E \leq 2$. L'ensemble exceptionnel E_f contient donc au plus 2 points.

Une étude au cas par cas montre alors que lorsque E_f contient un point fixe, f est conjuguée à un polynôme (le point fixe étant envoyé à l'infini). Lorsque E_f contient deux points, f est conjuguée soit à $z \mapsto z^d$, soit à $z \mapsto z^{-d}$.

Exemple 2.2. — Considérons maintenant une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$. Soit $F : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ un relèvement en coordonnées homogènes. L'application F se prolonge holomorphiquement en un endomorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré algébrique d .

Le point $[0 : 0 : 1]$ est alors complètement invariant puisque c'est un point fixe de F qui n'a pas d'autre préimage que lui-même. Le degré topologique local de F en $[0 : 0 : 1]$ est d^2 . La droite à l'infini est un ensemble complètement invariant. La restriction de F à cette droite est conjuguée à $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le degré topologique local de F en un point générique de cette droite est d . Aux points qui correspondent aux points critiques de f , le degré topologique local de F sera $> d$.

Si l'ensemble exceptionnel de la fraction rationnelle f est vide, il n'y a pas d'autre ensemble algébrique propre complètement invariant par f . Sinon, il nous faut rajouter les points sur la droite à l'infini correspondant aux points de l'ensemble exceptionnel E_f et les droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui passent par l'origine et dont la pente correspond aux points de l'ensemble exceptionnel E_f .

Exemple 2.3. — Dans [13], Fornæss et Sibony présentent un exemple instructif qui montre qu'en dimension $k \geq 2$, contrairement à la dimension 1, les points complètement invariants ne sont pas nécessairement super-attractifs et qu'ils peuvent même se trouver dans l'ensemble de Julia. L'exemple est celui du point $[0 : 0 : 1]$ pour l'endomorphisme $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [\lambda x_0 x_2^{d-1} + x_1^d : x_0^d : x_2^d].$$

Dans la coordonnée $x_2 = 1$, l'expression de f est $f(x_0, x_1) = (\lambda x_0 + x_1^d, x_0^d)$. Si $|\lambda| > 1$, le point $[0 : 0 : 1]$ est dans l'ensemble de Julia.

2.1. Finitude des ensembles algébriques complètement invariants par f

Le degré topologique local $\deg_x f$ de f en x est le nombre de points de $f^{-1}(y)$ proches de x pour y générique proche de $f(x)$. C'est la multiplicité de x comme racine de $f(\cdot) - f(x)$. Le degré topologique local varie entre 1 et d^k et ses strates $\{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); \deg_x f \geq s\}$ sont des ensembles algébriques. Si A est un ensemble algébrique irréductible, le degré local de f aux points génériques de A est $\deg_A f = \min_{x \in A} \deg_x f$.

LEMME 2.4. — *Soient A un ensemble algébrique irréductible, $s = \deg_A f$ et $p = \text{codim}(A)$. Alors $s \leq d^p$. Si de plus $f(A) = A$, alors $s = d^p$ si et seulement si A est complètement invariant par f .*

Démonstration. — Soit x un point générique de A . Soit P le plan de codimension p tangent à $f(A)$ en $f(x)$. Soit Q un plan de dimension p transverse à A en x . La multiplicité de x comme point d'intersection de $f^{-1}(P)$ et de Q est s . Comme $f^{-1}(P)$ est de degré d^p , le théorème de Bezout implique que $f^{-1}(P) \cap Q$ contient exactement d^p points comptés avec multiplicités. On a donc $s \leq d^p$.

Supposons maintenant que $f(A) = A$; soit τ le degré de A . Alors, le degré de $f^{-1}(A)$, en comptant les multiplicités, est égal à $d^p \tau$ et comme $A \subset f^{-1}(A)$ intervient avec multiplicité s , on a $s\tau \leq d^p \tau$ avec égalité si et seulement si $A = f^{-1}(A)$. \square

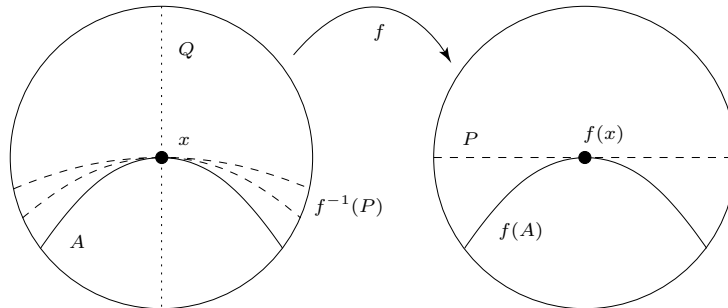


FIGURE 5. L'ensemble $f^{-1}(P) \cap Q$ contient au moins s points comptés avec multiplicités.

Les strates de degré topologique correspondant à une puissance de d vont donc jouer un rôle particulier.

DÉFINITION 2.5. — Pour $p \geq 1$, on pose

$$A_p = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); \deg_x f \geq d^p\}.$$

LEMME 2.6. — Soit A un ensemble algébrique irréductible de codimension $p \geq 1$. Si A est complètement invariant par un itéré de f , alors l'orbite de A est contenue dans A_p .

Démonstration. — On suppose que A est complètement invariant par $f^{\circ n}$. D'une part, d'après le lemme 2.4, on a $\deg_A f^{\circ n} = d^{pn}$. D'autre part,

$$\deg_A f^{\circ n} = \prod_{j=0}^{n-1} \deg_{f^{\circ j}(A)} f$$

et d'après le lemme 2.4, on a $\deg_{f^{\circ j}(A)} f \leq d^p$. On a donc $\deg_A f = d^p$ et $A \subset A_p$ (de même que son orbite). \square

Soit E est un ensemble algébrique complètement invariant par f . Comme E est algébrique, ses composantes irréductibles de codimension p sont en nombre fini. Comme E est complètement invariant, ces composantes sont nécessairement perméées. Si A est une de ces composantes, elle est donc complètement invariante par un itéré de f . D'après le lemme 2.6, A est une des composantes de dimension maximale de A_p , qui sont en nombre fini puisque A_p est algébrique.

Les ensembles algébriques propres complètement invariants par f sont donc en nombre fini et leur réunion est un ensemble algébrique : l'ensemble exceptionnel E_f .

Exemple 2.7. — Dans le cas de la fonction $F : [x : y : t] \mapsto [x^2 - y^2 : y^2 : t^2]$ que nous avons évoqué plus haut, $E_2 = \{[0 : 0 : 1], [1 : 0 : 0]\}$. La strate E_1 est la réunion de la droite à l'infini et de la droite passant par l'origine avec pente $x/y = \infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

La démonstration de Briend et Duval donne également le

LEMME 2.8. — *L'ensemble exceptionnel E_f a les propriétés suivantes :*

- (1) *la strate E_p de codimension pure p de E est la réunion des cycles de composantes de codimension p entièrement contenus dans A_p ; en particulier, E est contenu dans le lieu critique C_f de f ;*
- (2) *la strate de codimension pure p de $A_p(f^{\circ n})$ décroît avec n et se stabilise sur E_p pour n assez grand;*
- (3) *l'ensemble exceptionnel d'un itéré de f coïncide avec celui de f .*

Enfin, signalons le résultat de Briend-Cantat-Shishikura [5] qui donne une caractérisation plus précise de E_f .

THÉORÈME 2.9. — *Tout ensemble algébrique irréductible complètement invariant par f est un espace linéaire. En particulier, E_f est une union finie d'espaces linéaires.*

Démonstration. — Soit A une composante irréductible de E_p . Quitte à remplacer f par un itéré, on peut supposer que $A = f(A) = f^{-1}(A)$. En reprenant la démonstration et les notations du lemme 2.4, on voit que si x est un point générique de A , P le plan de codimension p tangent à A en $f(x)$ et Q un plan de dimension p transverse à A en x , alors $f^{-1}(P) \cap Q$ contient d^p points, en comptant les multiplicités. Comme x intervient avec multiplicité d^p , on a $f^{-1}(P) \cap Q = \{x\}$. Comme Q est n'importe quel plan de dimension p transverse à A en x , $f^{-1}(P)$ est un plan de codimension p . C'est le plan tangent à A en x .

Le degré de $f^{-1}(P)$ est égal à 1 si on ne prend pas en compte les multiplicités, et il est égal à d^p si on tient compte des multiplicités. On voit donc que le degré topologique local de f en un point générique de $f^{-1}(P)$ est égal à d^p . On vient de montrer que, pour un point générique $x \in A$, le plan tangent à A en x est contenu dans l'ensemble algébrique A_p . On en déduit que A est un plan de codimension p . \square

3. PRÉIMAGES DE POINTS HORS DE L'ENSEMBLE EXCEPTIONNEL

On va maintenant présenter l'approche de la mesure d'équilibre due à Briend et Duval. Nous consacrerons cette partie à la démonstration du

THÉORÈME 3.1. — *La mesure d'équilibre μ_f est l'unique mesure de probabilité vérifiant $d^{-k} f^* \mu_f = \mu_f$ et ne chargeant pas E_f . Pour toute mesure de probabilité ν ne chargeant pas E_f , on a $d^{-kn} (f^{\circ n})^* \nu \rightarrow \mu_f$.*

3.1. Existence

Les résultats de la partie 1 donnent l'existence d'une mesure de probabilité vérifiant $d^{-k}f^*\mu_f = \mu_f$ et ne chargeant pas E_f . Briend et Duval démontrent cette existence de la manière suivante.

Soit $\Omega = \omega^{\wedge k}$ la forme volume de la métrique de Fubini-Study et soit μ_n la suite de mesure de probabilités $\mu_n = d^{-kn}(f^{\circ n})^*\Omega$. L'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est compact. L'opérateur $d^{-k}f^*$ est continu. On en déduit que toute valeur d'adhérence de la suite $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mu_m$ est un point fixe de $d^{-k}f^*$.

LEMME 3.2. — *Une telle valeur d'adhérence ne charge pas l'ensemble critique C_f , et donc ne charge pas E_f .*

Remarque 3.3. — La preuve s'inspire largement de celle du théorème 4.3 qui est donnée plus bas.

Démonstration. — Désignons par $\text{Jac}(f)$ le jacobien de f pour la forme volume Ω (on a $f^*\Omega = \text{Jac}(f)\Omega$). Soit M le maximum de $\text{Jac}(f)$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Fixons $\eta \in]0, 1[$. On peut alors choisir un voisinage U de C_f assez petit pour que $\varepsilon = \max_U \text{Jac}(f)$ vérifie $\varepsilon^\eta M^{1-\eta} < d^k$ (ceci est possible car $\text{Jac}(f) \equiv 0$ sur C_f). On va montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(U) \leq \eta$. On a

$$\nu_n(U) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mu_m(U) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^{\circ j} d\mu_n \leq \mu_n(X_n) + \eta,$$

où $X_n = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); \text{Card}(U \cap \{x, \dots, f^{n-1}(x)\}) \geq \eta n\}$ est l'ensemble des points dont la n -orbite visite souvent U . Or

$$\begin{aligned} \mu_n(X_n) &= \int_{X_n} \frac{1}{d^{kn}} (f^{\circ n})^*\Omega = \int_{X_n} \frac{\text{Jac}(f^{\circ n})}{d^{kn}} \Omega \\ &= \int_{X_n} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\text{Jac}(f) \circ f^{\circ j})}{d^{kn}} \Omega \leq \left(\frac{\varepsilon^\eta M^{1-\eta}}{d^k} \right)^n. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\mu_n(X_n) \rightarrow 0$ et donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(U) \leq \eta. \quad \square$$

3.2. Unicité

La difficulté consiste à démontrer l'unicité d'une mesure de probabilité μ vérifiant $d^{-k}f^*\mu = \mu$ et ne chargeant pas E_f . Pour cela, Briend et Duval montrent que les préimages de deux points x et y hors de E_f s'équidistribuent de la même manière : $\mu_{n,x} - \mu_{n,y}$ converge vers 0 faiblement. Le théorème découle alors immédiatement en

moyennant ce résultat. Si μ est une mesure vérifiant $d^{-k} f^* \mu = \mu$ et ne chargeant pas E_f et si ν ne charge pas E_f , on peut écrire

$$\mu = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \delta_x d\mu(x) \quad \text{et} \quad \nu = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \delta_x d\nu(x)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \mu - \frac{1}{d^{kn}} (f^{\circ n})^* \nu &= \frac{1}{d^{kn}} (f^{\circ n})^* \mu - \frac{1}{d^{kn}} (f^{\circ n})^* \nu \\ &= \iint_{E_f^c \times E_f^c} (\mu_{n,x} - \mu_{n,y}) d\mu(x) \otimes d\nu(y) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que les préimages de deux points x et y hors de E_f s'équidistribuent de la même manière.

Notons C_f le lieu critique de f , $V_f = f(C_f)$ l'ensemble des valeurs critiques de f , $V_l = \bigcup_{j=1}^l f^{\circ j}(C_f)$ l'ensemble des valeurs critiques de $f^{\circ l}$, et $V_\infty = \bigcup_{l \geq 1} V_l$ l'ensemble post-critique de f .

Il nous faut donc montrer que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et tous points x, y hors de E_f , la moyenne $\langle \mu_{n,x}, \varphi \rangle$ de φ aux préimages n -ièmes de x est proche de la moyenne $\langle \mu_{n,y}, \varphi \rangle$ de φ aux préimages n -ièmes de y , pour n assez grand.

On se donne une fonction $\varphi : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ continue et pour $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, on note $\varphi_n = d^{-kn} (f^{\circ n})_* \varphi$ la moyenne de φ aux préimages n -ièmes. On va d'abord montrer le

LEMME 3.4. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l \geq 1$ tel que pour tout compact $K \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$, si n est suffisamment grand, la variation de φ_n sur K est inférieure à ε .*

On va ensuite montrer le

LEMME 3.5. — *Pour tout $l \geq 1$ et tout $x \notin E_f$, la proportion de préimages n -ièmes de x hors de V_l (en comptant les multiplicités) tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.*

On conclut alors de la manière suivante. Si x et y sont hors de E_f , on choisit m assez grand pour que la proportion de préimages m -ièmes de x et de y hors de V_l soit supérieure à $1 - \varepsilon$. La réunion de ces préimages est un compact $K \subset \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$. Pour n assez grand, la variation de φ_n sur K est inférieure à ε . On obtient alors facilement

$$|\varphi_{m+n}(x) - \varphi_{m+n}(y)| \leq 2\varepsilon \sup_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} |\varphi| + \varepsilon.$$

Venons-en à la démonstration des lemmes 3.4 et 3.5.

Un disque holomorphe est dit *plat générique* s'il est tracé sur une droite projective non contenue dans l'ensemble post-critique V_∞ . Le lemme 3.4 est un corollaire du

LEMME 3.6. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $l \geq 0$ tel que sur tout disque plat générique Δ relativement compact dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$, on peut construire $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses de $f^{\circ n}$ pour n assez grand, d'images Δ_i^{-n} avec $\sup_i \text{Diam}(\Delta_i^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Remarque 3.7. — Briend et Duval montrent qu'on peut définir $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses d'images Δ_i^{-n} avec $\text{Diam}(\Delta_i^{-n}) = \mathcal{O}(d^{-n/2})$.

Démonstration. — Soit τ le degré de V_f (l'ensemble des valeurs critiques de f). On fixe l de sorte que $2\tau d^{-l}(1 - 1/d)^{-1} < \varepsilon$. On considère un disque holomorphe Δ relativement compact dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$ et tracé sur une droite $L \not\subset V_\infty$. Soit $\tilde{\Delta} \supset \Delta$ un disque holomorphe tracé sur L et évitant V_l .

On commence par contrôler le nombre de branches inverses de $f^{\circ n}$ sur $\tilde{\Delta}$. Puisque Δ évite V_l , on dispose de d^{kl} branches inverses f_i^{-l} de $f^{\circ l}$ sur $\tilde{\Delta}$, d'images $\tilde{\Delta}_i^{-l} = f_i^{-l}(\tilde{\Delta})$. Une telle branche inverse f_i^{-l} engendre d^k pour $f^{\circ l+1}$ si $\tilde{\Delta}_i^{-l}$ n'intersecte pas V_f . Or, les disques $\tilde{\Delta}_i^{-l}$ sont disjoints et tracés sur la courbe $f^{-l}(L)$ qui est de degré $d^{(k-1)l}$. Par le théorème de Bezout, cette droite intersecte V_f en au plus $\tau d^{(k-1)l}$ points. Ainsi, $d^{kl}(1 - \tau d^{-l})$ disques $\tilde{\Delta}_i^{-l}$ évitent V_f et contribuent à $d^{k(l+1)}(1 - \tau d^{-l})$ branches inverses de $f^{\circ(l+1)}$ sur $\tilde{\Delta}$. En procédant par récurrence, on montre que pour $n \geq l$, il y a au moins $d^{kn}(1 - \tau d^{-l}(1 + d^{-1} + \dots + d^{-n+l+1})) \geq d^{kn}(1 - \varepsilon/2)$ branches inverses f_i^{-n} de $f^{\circ n}$ sur $\tilde{\Delta}$, d'images $\tilde{\Delta}_i^{-n} = f_i^{-n}(\tilde{\Delta})$.

On va maintenant contrôler l'aire de la majorité des disques $\Delta_i^{-n} = f_i^{-n}(\Delta)$. La courbe $f^{-n}(L)$ étant de degré $d^{(k-1)n}$, l'aire totale de $f^{-n}(L)$ pour la forme de Fubini-Study ω est $d^{(k-1)n}$. Comme les disques $\tilde{\Delta}_i^{-n}$ sont disjoints sur $f^{-n}(L)$, au plus $(\varepsilon/2)d^{nk}$ d'entre eux auront une aire supérieure à $(2/\varepsilon)d^{-n}$. Ainsi, pour $(1 - \varepsilon)d^{nk}$ d'entre les disques $\tilde{\Delta}_i^{-n}$, l'aire sera majorée par $(2/\varepsilon)d^{-n}$.

Ceci est suffisant pour contrôler le diamètre des disques $\Delta_i^{-n} \subset \tilde{\Delta}_i^{-n}$. En effet, la famille des branches inverses $f_i^{-n} : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}_i^{-n}$ est normale (voir la remarque 3.8 ci-dessous) et puisque l'aire des disques $\tilde{\Delta}_i^{-n}$ tend vers 0, les seules valeurs d'adhérence sont des constantes. \square

Remarque 3.8. — On peut voir que la famille des branches inverses $f_i^{-n} : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}_i^{-n}$ est normale, en passant aux coordonnées homogènes. En effet, si $F : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ est un relevé de $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et si $\sigma : \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ est une section holomorphe, les branches inverses $f_i^{-n} : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}_i^{-n}$ se relèvent en branches inverses $F_i^{-n} : \sigma(\tilde{\Delta}) \rightarrow F^{-n}(\sigma(\tilde{\Delta}))$. Ces branches inverses évitent un voisinage de 0 et un voisinage de ∞ qui sont super-attractifs pour F . Elles forment donc une famille normale.

Le lemme 3.5 est un corollaire du

LEMME 3.9. — Si x n'appartient pas à E_f , alors $\mu_{n,x}(C_f) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. — Quitte à remplacer f par un itéré, on peut supposer que pour tout $p \geq 1$, la strate E_p de codimension pure p de E_f coïncide avec A_p . On a alors $A_k = E_k$ (c'est la strate de dimension 0, une réunion finie de points avec degré local d^k). Et pour $p \leq k-1$, les composantes irréductibles de $A_p \setminus E_f$ sont alors de codimension $\geq p+1$.

On peut alors montrer par récurrence descendante sur p , que $\mu_{n,x}(A_p)$ décroît exponentiellement vite. Pour $p = k$, on a $A_k = E_k$ et comme $x \notin E_f \supset E_k$, on a $\mu_{n,x}(A_k) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Les composantes de A_{p-1} de codimension $p - 1$ sont les composantes de E_{p-1} . Comme $f^{-n}(x) \cap E_{p-1} = \emptyset$, on voit que $f^{-n}(x)$ ne rencontre A_{p-1} qu'en des composantes de codimension $\geq p$. En utilisant le théorème de Bezout, on voit alors que quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\text{Card}(f^{-n}(x) \cap A_{p-1}) = \mathcal{O}(d^{n(k-p)}).$$

Pour majorer $\mu_{n,x}(A_{p-1})$, il suffit de majorer les multiplicités de $f^{\circ n}$ en ces points.

Fixons $\rho < 1$. Si les $[\rho n]$ premiers itérés d'un point $y \in f^{-n}(x)$ ne rencontrent pas A_p , la multiplicité de $f^{\circ n}$ en y est majorée par κ_p^n avec $\kappa_p = (d^p - 1)^\rho d^{k(1-\rho)}$. La contribution de ces points à $\mu_{n,x}(A_{p-1})$ est donc majorée par

$$\frac{\kappa_p^n \cdot \text{Card}(f^{-n}(x) \cap A_{p-1})}{d^{kn}}$$

qui décroît exponentiellement vite si on choisit $\rho < 1$ suffisamment proche de 1 pour que $\kappa_p < d^p$.

Pour les autres points, on utilise l'hypothèse de récurrence. On sait que $\mu_{n,x}(A_p)$ décroît exponentiellement vite : $\mu_{n,x}(A_p) = \mathcal{O}(\lambda_p^n)$. On en déduit qu'en comptant les multiplicités, le nombre de points $y \in f^{-n}(x)$ pour lesquels il existe $j \leq \rho n$ avec $f^{\circ j}(y) \in A_p$ est un $\mathcal{O}(\lambda_p^{(1-\rho)n} \cdot d^{kn})$. Leur contribution à $\mu_{n,x}(A_{p-1})$ est donc $\mathcal{O}(\lambda_p^{(1-\rho)n})$ qui décroît exponentiellement vite. \square

3.3. Mélange

PROPOSITION 3.10. — *La mesure μ_f est mélangeante, et donc ergodique.*

Démonstration. — La convergence de $\mu_{n,x}$ vers μ_f se traduit dualement de la manière suivante : si φ est une fonction continue sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, alors sur E^c ,

$$d^{-kn}(f^{\circ n})_* \varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \, d\mu_f.$$

Si ψ est une autre fonction continue, on aura donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \cdot (\psi \circ f^{\circ n}) \, d\mu_f &= \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \cdot (\psi \circ f^{\circ n}) \, d \frac{(f^{\circ n})^* \mu_f}{d^{kn}} \\ &= \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \, d \frac{(f^{\circ n})^* (\psi \mu_f)}{d^{kn}} \\ &= \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \frac{(f^{\circ n})_* \varphi}{d^{kn}} \psi \, d\mu_f \\ &\longrightarrow \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \, d\mu_f \right) \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \psi \, d\mu_f \right). \end{aligned}$$

C'est le mélange. \square

Dans [10], Dinh et Sibony montrent que μ_f est K -mélangeante, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi \in L^2(\mu_f)$, on a

$$\sup_{\|\psi\|_{L^2(\mu_f)}} \left| \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \cdot (\psi \circ f^{on}) d\mu_f - \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi d\mu_f \right) \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \psi d\mu_f \right) \right| \rightarrow 0.$$

Ils montrent également que la mesure μ_f est exponentiellement mélangeante et que la vitesse de mélange est d'ordre d^{-n} : il existe une constante $A > 0$ telle que pour toute fonction $\psi \in L^\infty(\mu_f)$, et toute fonction φ de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$\left| \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \cdot (\psi \circ f^{on}) d\mu_f - \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi d\mu_f \right) \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \psi d\mu_f \right) \right| \leq A \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2} d^{-n}.$$

Antérieurement, Fornæss et Sibony [12] avaient montré que la vitesse était d'ordre $(d - \varepsilon)^{-n}$. Dinh et Sibony ont depuis montré que dans le cas où φ est une fonction lipschitzienne, la mesure est encore exponentiellement mélangeante et la vitesse de mélange est d'ordre $d^{-n/2}$:

$$\left| \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \cdot (\psi \circ f^{on}) d\mu_f - \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi d\mu_f \right) \left(\int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \psi d\mu_f \right) \right| \leq A \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_{\text{Lip}} d^{-n/2}.$$

4. PROPRIÉTÉS ENTROPIQUES DE LA MESURE D'ÉQUILIBRE

Nous allons maintenant montrer que la mesure d'équilibre μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale de f .

4.1. Entropie topologique et entropie métrique

Si X est un espace compact et métrisable, et si $f : X \rightarrow X$ est une application continue, l'entropie de f est censée mesurer la rapidité à laquelle on acquiert de l'information sur la position d'un point $x \in X$ quand on observe (avec une certaine imprécision) la trajectoire pendant longtemps.

4.1.1. Entropie métrique. — Si X est muni d'une mesure de probabilité μ , savoir que x appartient à un ensemble $A \subset X$ est censé fournir une quantité d'information égale à $\log \frac{1}{\mu(A)}$. Un questionnaire qui définit une partition mesurable \mathcal{U} de X en sous-ensembles A_i correspondant aux réponses possibles procure une quantité d'information moyenne égale à

$$h_\mu(\mathcal{U}) = \sum_i \mu(A_i) \log \frac{1}{\mu(A_i)}.$$

Supposons que μ soit f -invariante et que l'on observe la trajectoire d'un point x sous itération de f pendant un temps n . On répond alors au questionnaire pour

$x_j = f^{\circ j}(x)$, $j = 0, \dots, n-1$. Ceci définit une partition $\bigvee^n \mathcal{U}$ de X . L'entropie métrique de f définie à partir de \mathcal{U} et de μ est alors

$$h_\mu(\mathcal{U}, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} h_\mu \left(\bigvee^n \mathcal{U} \right).$$

Cette limite existe et est un infimum car la suite $h_\mu(\bigvee^n \mathcal{U})$ est sous-additive (une suite (u_n) de nombres réels et positifs est sous-additive si $u_{n+n'} \leq u_n + u_{n'}$ pour tous n, n' ; pour une telle suite, la limite $\lim \frac{1}{n} u_n$ existe et est un infimum).

L'entropie de f par rapport à la mesure f -invariante μ est alors définie par

$$h_\mu(f) = \sup \{ h_\mu(\mathcal{U}, f); \mathcal{U} \text{ une partition mesurable de } X \text{ avec } h_\mu(\mathcal{U}) < +\infty \}.$$

Si μ et ν sont deux mesures f -invariantes, alors pour $t \in [0, 1]$, on a

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) = th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f).$$

L'entropie métrique de la réunion de deux ensembles invariants est donc la somme des entropies de chaque ensemble pondéré par sa mesure.

4.1.2. Entropie topologique. — Quand aucune mesure particulière n'intervient, on peut alors définir l'entropie topologique en comptant le nombre de réponses possibles. Si \mathcal{U} est un recouvrement de X par des ouverts, on définit

$$\#^* \mathcal{U} = \min \{ \text{Card}(\mathcal{V}); \text{où } \mathcal{V} \text{ est un recouvrement de } X \text{ contenu dans } \mathcal{U} \}.$$

On pose $f^* \mathcal{U} = \{ f^{-1}(U) \}_{U \in \mathcal{U}}$. Si \mathcal{U} et \mathcal{V} sont deux recouvrements de X par des ouverts, on pose $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{ U \cap V \}_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}}$. On pose

$$\bigvee^n \mathcal{U} = \mathcal{U} \vee f^* \mathcal{U} \vee \dots \vee (f^{\circ n-1})^* \mathcal{U}.$$

Un élément non vide $W = U_0 \cap f^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(U_{n-1})$ de $\bigvee^n \mathcal{U}$ correspond à un n -itinéraire dans \mathcal{U} , c'est-à-dire une suite (U_0, \dots, U_{n-1}) telle qu'il existe $x \in X$ avec $f^{\circ i}(x) \in U_i$ pour $i = 0, \dots, n-1$.

On définit l'entropie topologique de f par rapport à \mathcal{U} de la manière suivante :

$$h_{\text{top}}(\mathcal{U}, f) = \lim \frac{1}{n} \log \#^* \bigvee^n \mathcal{U}.$$

Cette limite existe et est un infimum car

$$\#^* \bigvee^{n+n'} \mathcal{U} \leq \left(\#^* \bigvee^n \mathcal{U} \right) \left(\#^* \bigvee^{n'} \mathcal{U} \right)$$

et donc, le log est une fonction sous-additive de n . On définit l'entropie topologique de f par

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mathcal{U}} h_{\text{top}}(\mathcal{U}, f).$$

Cette définition ne dépend clairement que de la topologie sur X .

4.1.3. *Espaces métrisables.* — Si X est métrisable, on peut donner des caractérisations de l'entropie métrique et de l'entropie topologique faisant intervenir la distance d définissant la topologie sur X . Pour $n \geq 1$, on définit la distance dynamique d_n par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{d(f^{\circ j}(x), f^{\circ j}(y))\}.$$

La distance d_n mesure la distance entre les n -orbites de x et de y dans l'espace produit X^n . On note $B_n(x, r)$ les boules dynamiques associées.

Dans le cas où μ est une mesure ergodique, un théorème de Brin et Katok [8] permet de définir l'entropie métrique en terme de la décroissance des masses des boules dynamiques $B_n(x, r)$.

THÉORÈME 4.1 (Brin-Katok). — *Pour μ presque tout x , on a*

$$h_\mu(f) = \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \varepsilon)).$$

Une manière de définir l'entropie topologique consiste à considérer des ensembles F qui sont (n, ε) -séparés, c'est-à-dire tels que pour toute paire de points $(x, y) \in F^2$, on ait $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. On pose alors

$$h_d(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_d(f, \varepsilon, n),$$

où $N_d(f, \varepsilon, n)$ est le nombre maximal de points de X dans un ensemble (n, ε) -séparé. On a alors la propriété suivante :

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_d(f, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} h_d(f, \varepsilon).$$

4.1.4. *Le principe variationnel.* — Historiquement, l'entropie topologique a été introduite après l'entropie métrique. Bien qu'il y ait des analogies entre les définitions, l'absence d'une mesure canonique de la taille des ensembles invariants amène à des différences entre les deux notions. Par exemple, l'entropie métrique de f sur la réunion de deux ensembles invariants est un barycentre des entropies sur chaque ensemble, pondéré par les mesures de chaque ensemble. L'entropie topologique de f sur la réunion de deux ensembles invariants est le maximum de l'entropie topologique sur chaque ensemble. Par conséquent, l'entropie topologique mesure la complexité dynamique maximale, alors que l'entropie métrique mesure une complexité moyenne. Il est donc naturel d'espérer que l'entropie métrique soit inférieure à l'entropie topologique. Le principe variationnel dit que l'entropie topologique est le supremum des entropies métriques :

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\{h_\mu(f); \mu \text{ mesure de probabilité } f\text{-invariante}\}.$$

Le principe variationnel pose la question, centrale en théorie ergodique, de l'existence et de l'unicité d'une mesure μ d'entropie maximale, c'est-à-dire telle que $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)$. Nous allons voir plus loin que dans le cas d'un endomorphisme holomorphe $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, la mesure d'équilibre μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale.

Nous aurons besoin d'une version relative du principe variationnel. L'entropie topologique se localise naturellement. Si on considère un ensemble $Y \subset X$ non nécessairement invariant, on définit l'entropie de f relative à Y par :

$$h_{\text{top}}(f|Y) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (\max\{\text{Card}(F); F \text{ } (n, \varepsilon)\text{-séparé, } F \subset Y\}).$$

On regarde donc la rapidité de croissance du nombre de n -orbites ε discernables en partant de Y . Mais on ne demande pas à ce que l'orbite reste dans Y . On a alors le

LEMME 4.2 (Principe variationnel relatif). — *Si μ est une mesure ergodique et si Y est un ensemble mesurable tel que $\mu(Y) > 0$, alors*

$$h_{\mu}(f) \leq h_{\text{top}}(f|Y).$$

4.2. La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une mesure d'entropie maximale

Commençons par rappeler le théorème suivant dû à Misiurewicz et Przytycki [23].

THÉORÈME 4.3. — *Si X est une variété compacte orientable et $f : X \rightarrow X$ est une application de classe \mathcal{C}^1 , alors $h_{\text{top}}(f) \geq \log |\deg f|$.*

Démonstration. — Soient d une distance définissant la topologie sur X , ω une forme volume, $\alpha \in]0, 1[$, $L = \sup_X |\text{Jac } f|$; posons $\varepsilon = L^{-\alpha/(\alpha-1)}$. Considérons l'ensemble $B = \{x \in X; |\text{Jac } f(x)| \geq \varepsilon\}$.

(1) Il existe $\delta > 0$ tel que si $x \neq y$ sont dans B et $d(x, y) < \delta$, alors $f(x) \neq f(y)$.

(2) Supposons maintenant que x est une valeur régulière de $f^{\circ n}$. On construit alors un ensemble (n, δ) -séparé dans $f^{-n}(x)$ de la manière suivante. D'abord, comme x est une valeur régulière de f , $f^{-1}(x)$ contient au moins $N = |\deg f|$ préimages. Si N d'entre elles sont dans B , on dit qu'on a une bonne transition et on pose $Q_1 = \{\text{ces } N \text{ préimages}\}$. Sinon, on dit qu'on a une mauvaise transition et on pose $Q_1 = \{y\}$ avec $y \in B^c$ et $f(y) = x$. Chaque élément de Q_1 est une valeur régulière de $f^{\circ n-1}$ et on peut recommencer la même procédure pour tous les $y \in Q_1$. En collectant ainsi tous les ensembles obtenus, on définit $Q_2 \in f^{-2}(x)$. En itérant le procédé on obtient un ensemble $Q_n \in f^{-n}(x)$ qui est (n, δ) -séparé.

(3) Si $x \in X \setminus f^{\circ n}(A)$ avec

$$A = \{y \in X; \text{Card}(B \cap \{y, f(y), \dots, f^{n-1}(y)\}) \leq \alpha n\},$$

on a beaucoup de bonnes transitions. En effet, si $x \notin f^{\circ n}(A)$, alors $Q_n \cap A = \emptyset$, et pour passer de x à n'importe quel point $y \in Q_n$, on a au moins $[\alpha n] + 1$ bonnes transitions. Par conséquent $\text{Card}(Q_n) \geq N^{\alpha n}$.

(4) Il ne reste plus qu'à démontrer que, pour tout n , on peut trouver une valeur régulière $x \in X \setminus f^{\circ n}(A)$. Le cardinal maximal d'un ensemble (n, δ) -séparé sera alors minoré par $N^{\alpha n}$ et on aura $h_{\text{top}}(f) \geq \alpha \log N$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Si $y \in A$, alors

$$|\text{Jac } f^{\circ n}(y)| = \prod_{j=0}^{n-1} |\text{Jac } f(f^{\circ j}(x))| < L^{\alpha n} \varepsilon^{n-\alpha n} = 1$$

(par choix de ε). Donc le volume de $f^{\circ n}(A)$ est strictement inférieur au volume de X et d'après le théorème de Sard, il existe une valeur régulière $x \in X \setminus f^{\circ n}(A)$. \square

COROLLAIRE 4.4. — Si $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est un endomorphisme holomorphe de degré algébrique d , son entropie topologique est minorée par $k \log d$.

La majoration de l'entropie d'un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est due à Gromov [17]. Il montre que l'entropie topologique de f est majorée par $\text{lov}(f)$, où $\text{lov}(f)$ est le taux de croissance du volume du graphe itéré de f .

DÉFINITION 4.5. — On pose

$$\Gamma_n = \{(x, f(x), \dots, f^{\circ n-1}(x)), x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})\}$$

et on définit

$$\text{lov}(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{Vol}(\Gamma_n)) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\int_{\Gamma_n} \omega_n^{\wedge k} \right),$$

où ω_n est la forme de Kähler sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})^n$ induite par la forme de Fubini-Study sur chaque facteur.

LEMME 4.6. — Si $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est un endomorphisme holomorphe de degré algébrique d , on a $\text{lov}(f) = k \log d$.

Démonstration. — C'est un calcul cohomologique. On a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Gamma_n) &= \int_{\Gamma_n} \omega_n^{\wedge k} = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (\omega + f^* \omega + \dots + (f^{\circ n-1})^* \omega)^{\wedge k} \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \{0, \dots, n-1\}^k} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (f^{\circ i_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_{k-1}})^* \omega \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \{0, \dots, n-1\}^k} d^{i_1 + \dots + i_{k-1}} \\ &= (1 + d + \dots + d^{n-1})^k = \left(\frac{d^n - 1}{d - 1} \right)^k. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{lov } f = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n} \log \frac{d^n - 1}{d - 1} = k \log d. \quad \square$$

THÉORÈME 4.7. — Si $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est un endomorphisme holomorphe, on a $h_{\text{top}}(f) \leq \text{lov}(f)$.

Démonstration. — La démonstration repose sur le théorème de Lelong [20]. Un ensemble (n, ε) -séparé F donne, via ses n -orbites, un ensemble ε -séparé G dans le graphe itéré Γ_n pour la distance produit, qui n'est autre que la distance dynamique d_n . On a donc

$$\text{Vol}(\Gamma_n) \geq \sum_{y \in G} \text{Vol}(B_n(y, \varepsilon/2) \cap \Gamma_n),$$

puisque les boules $B_n(y, \varepsilon/2)$ sont disjointes. Le théorème de Lelong fournit une minoration indépendante de n et de y du volume de Γ_n dans ces boules :

$$\text{Vol}(B_n(y, \varepsilon/2) \cap \Gamma_n) \geq c.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{n} \log(\text{Vol}(\Gamma_n)) \geq \frac{\log c}{n} + \frac{1}{n} \log(\max\{\text{Card}(F), F \text{ } (n, \varepsilon)\text{-séparé}\}).$$

Ceci donne la majoration souhaitée. \square

En combinant les résultats de cette partie, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 4.8. — *Si $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est un endomorphisme holomorphe de degré algébrique d , son entropie topologique est égale à $k \log d$.*

Nous allons maintenant voir que puisque la mesure d'équilibre μ_f est de jacobien constant égal à d^k (pour tout borélien B sur lequel f est injective, on a $\mu_f(B) = d^{-k} \mu_f(f(B))$), elle est d'entropie maximale.

D'après le théorème 4.1 de Brin et Katok, il suffit d'expliciter, pour $\alpha > 0$, un borélien X_α de mesure non nulle, avec $\mu_f(B_n(x, \varepsilon)) \leq d^{-kn(1-\alpha)}$ pour x dans X_α et n assez grand. On choisit un voisinage U de l'ensemble des valeurs critiques de f , assez petit pour que $\mu_f(U) \leq \alpha/2$. On pose alors

$$X_n(\alpha) = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); \text{Card}\{j; f^{\circ j}(x) \in U\} \leq n\alpha\}$$

et

$$X_\alpha = \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n(\alpha).$$

D'après le théorème de Birkhoff, pour μ_f presque tout x , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}\{j \in [0, n-1]; f^{\circ j}(x) \in U\}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_U \circ f^{\circ j}(x) = \mu_f(U) \leq \alpha/2.$$

Par conséquent, $\mu_f(X_\alpha) = 1$. La masse des boules dynamiques centrées sur X_α s'estime par récurrence grâce à la propriété de jacobien constant de μ_f . Soient $x \in X_\alpha$ et $\varepsilon < d(V, \partial U)$. Si $f^{\circ j+1}(x) \notin U$, ce qui arrive au moins $n(1-\alpha)$ fois, f réalise une injection de $B_{n-j}(f^{\circ j}(x), \varepsilon)$ dans $B_{n-j-1}(f^{\circ j+1}(x), \varepsilon)$. On a alors

$$\mu_f(B_{n-j}(f^{\circ j}(x), \varepsilon)) \leq d^{-k} \mu_f(B_{n-j-1}(f^{\circ j+1}(x), \varepsilon)).$$

Sinon, on a toujours, par invariance de μ_f ,

$$\mu_f(B_{n-j}(f^{\circ j}(x), \varepsilon)) \leq \mu_f(B_{n-j-1}(f^{\circ j+1}(x), \varepsilon)).$$

On a donc

$$\mu_f(B_n(x, \varepsilon)) \leq d^{-kn(1-\alpha)}. \quad \square$$

4.3. Unicité de la mesure d'entropie maximale

Dans cette partie, nous allons montrer que la mesure d'équilibre est l'unique mesure d'entropie maximale. Nous supposons qu'il existe une mesure ergodique $\nu \neq \mu_f$ d'entropie maximale $k \log d$ et nous chercherons une contradiction.

LEMME 4.9. — *La mesure ν ne charge pas l'ensemble des valeurs critiques V_f .*

Démonstration. — L'argument de Gromov s'adapte pour démontrer que

$$h_{\text{top}}(f|V_f) \leq \text{lov}(f|V_f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{Vol}(\Gamma_n|V_f)).$$

Le même calcul cohomologique que dans la preuve du lemme 4.6 montre que

$$\text{Vol}(\Gamma_n|V_f) = \tau \left(\frac{d^n - 1}{d - 1} \right)^{k-1}$$

où τ est le degré de V_f . On voit donc que $\text{lov}(f|V) \leq (k-1) \log d$. D'après le principe variationnel relatif, si ν chargeait V_f , on aurait

$$h_\nu(f) = k \log d \leq h_{\text{top}}(f|V_f) \leq (k-1) \log d,$$

d'où une contradiction. □

On voit donc que ν ne charge pas l'ensemble exceptionnel E_f . La mesure ν n'est donc pas un point fixe de l'opérateur $d^{-k}f^*$. Elle n'est pas de jacobien constant d^k .

On peut alors paver $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_f$ par des simplexes S à bords de mesure nulle pour ν . Soit $U = \bigcup_S \overset{\circ}{S}$. La préimage de chaque simplexe S est une union disjointe de d^k composantes S_1, \dots, S_{d^k} que l'on indexe de sorte que $\nu(S_1) \geq \dots \geq \nu(S_{d^k})$. Pour $j = 1, \dots, d^k$, on pose

$$U_j = \bigcup_S S_j.$$

On a ainsi $f^{-1}(U) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_{d^k}$ et $f : U_j \rightarrow U$ est bijective. Comme ν est invariante mais pas de jacobien constant d^k , on peut supposer, quitte à prendre un pavage de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_f$ par des simplexes suffisamment petits, que $\nu(U_1) > d^{-k}$.

On peut alors trouver $\sigma > d^{-k}$ et un ouvert O relativement compact dans U_1 tels que $\nu(O) > \sigma$. On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le ε -voisinage de O soit contenu dans U_1 . Soit X l'ensemble des points visitant assez souvent O :

$$X = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); r_n(x) \geq \sigma n \text{ pour } n \geq m\},$$

avec

$$r_n(x) = \text{Card}(\{j \in [0, n-1]; f^{\circ j}(x) \in O\}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_O \circ f^{\circ j}(x).$$

D'après le théorème de Birkhoff, on sait que pour ν presque tout x , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_n(x)}{n} = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \mathbf{1}_O d\nu = \nu(O) > \sigma.$$

On peut donc prendre m assez grand pour que $\nu(X) > 0$.

D'après le principe variationnel relatif, on a donc

$$k \log d = h_\nu(f) \leq h_{\text{top}}(f|X).$$

L'argument de Gromov s'adapte pour démontrer que

$$h_{\text{top}}(f|X) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{Vol}(\Gamma_n|X)_\varepsilon),$$

où $(\Gamma_n|X)_\varepsilon$ est le ε -voisinage de la restriction de Γ_n à X dans Γ_n . On va montrer qu'il existe $\tau < 1$ tel que pour n assez grand, on a

$$\text{Vol}((\Gamma_n|X)_\varepsilon) = \mathcal{O}(d^{\tau kn}).$$

On en déduira alors que

$$k \log d \leq h_{\text{top}}(f|X) \leq \tau k \log d,$$

ce qui donnera la contradiction recherchée.

Pour estimer le volume de $(\Gamma_n|X)_\varepsilon$, on introduit le codage suivant. À un ensemble de volume nul près, $\{U_1, \dots, U_{d^k}\}$ est une partition de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Pour $\alpha \in \{1, \dots, d^k\}^n$, on note

$$U_\alpha^{-n} = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}); f^{\circ j}(x) \in U_{\alpha_j} \text{ pour } j \in [0, n-1]\}$$

et

$$\Gamma_n(\alpha) = \Gamma_n \cap (U_{\alpha_0} \times \dots \times U_{\alpha_{n-1}}).$$

À des ensembles de volume nul près, $\{U_\alpha^{-n}\}_{\alpha \in \{1, \dots, d^k\}^n}$ et $\{\Gamma_n(\alpha)\}_{\alpha \in \{1, \dots, d^k\}^n}$ sont respectivement des partitions de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et de Γ_n . Puisque la restriction de f à chaque U_j est injective, la restriction de $f^{\circ j}$ à chaque U_α^{-n} est injective pour $j \in [0, n-1]$. Le point x appartient à U_α^{-n} si et seulement si sa n -orbite $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ appartient à $\Gamma_n(\alpha)$. On a donc

$$\int_{\Gamma_n(\alpha)} \omega_n^{\wedge k} = \int_{U_\alpha^{-n}} (\omega + \dots + (f^{\circ n-1})^* \omega)^{\wedge k}.$$

De plus, si une n -orbite $(y, \dots, f^{n-1}(y)) \in \Gamma_n$ est dans le ε -voisinage de $(\Gamma_n|X)_\varepsilon$, il existe un $x \in X$ tel que $d(f^{\circ j}(x), f^{\circ j}(y)) \leq \varepsilon$ pour tout $j \in [0, n-1]$. Si $f^{\circ j}(x) \in O$ alors $f^{\circ j}(y) \in O$ par choix de ε . Par conséquent, on a l'inclusion

$$(\Gamma_n|X)_\varepsilon \subset \bigcup_{\alpha \in \Sigma_n} \Gamma_n(\alpha),$$

avec

$$\Sigma_n = \{\alpha \in \{1, \dots, d^k\}^n; \text{Card}(\{j; \alpha_j = 1\}) \geq \sigma n\}.$$

LEMME 4.10. — Il existe $\rho < 1$ tel que

$$\text{Card}(\Sigma_n) \leq (d^{k\rho})^n.$$

Démonstration. — On a

$$\text{Card}(\Sigma_n) = \sum_{\sigma_n \leq j \leq n} \frac{n!}{j!(n-j)!} (d^k - 1)^{n-j}.$$

Il suffit alors de majorer en utilisant la formule de Stirling. \square

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}((\Gamma_n|X)_\varepsilon) &\leq \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \int_{\Gamma_n(\alpha)} \omega_n^{\wedge k} \\ &\leq \sum_{\underline{i} \in \{1, \dots, n-1\}^k} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \int_{U_\alpha^{-n}} (f^{\circ i_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k})^* \omega. \end{aligned}$$

On choisit λ tel que $\rho < \lambda < 1$. On scinde la somme sur $\underline{i} \in \{1, \dots, n-1\}^k$ en deux parties. L'une sur $\{\lfloor \lambda n \rfloor, \dots, n-1\}^k$ et l'autre sur le complémentaire.

Pour $\underline{i} \in \{\lfloor \lambda n \rfloor, \dots, n-1\}^k$ on a, en posant $q = \lfloor \lambda n \rfloor$,

$$\begin{aligned} \int_{U_\alpha^{-n}} (f^{\circ i_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k})^* \omega &= \int_{U_\alpha^{-n}} (f^{\circ q})^* ((f^{\circ i_1 - q})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k - q})^* \omega) \\ &\leq \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (f^{\circ i_1 - q})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k - q})^* \omega \\ &= d^{i_1 + \dots + i_k - kq} \leq d^{kn(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

La première somme est donc majorée par

$$n^k \text{Card}(\Sigma_n) d^{k(1-\lambda)n} \leq n^k (d^{k(1+\rho-\lambda)})^n.$$

Pour $\underline{i} \notin \{\lfloor \lambda n \rfloor, \dots, n-1\}^k$ on majore globalement la deuxième somme en utilisant le fait que les U_α^{-n} sont deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \int_{U_\alpha^{-n}} (f^{\circ i_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k})^* \omega &\leq \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (f^{\circ i_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{\circ i_k})^* \omega \\ &= d^{i_1 + \dots + i_k} \leq d^{(k-1)(n-1) + \lambda n + 1}. \end{aligned}$$

La deuxième somme est donc majorée par $n^k (d^{k-1+\lambda})^n$. On a donc

$$\text{Vol}((\Gamma_n|X)_\varepsilon) \leq n^k (d^{k(1+\rho-\lambda)})^n + n^k (d^{k-1+\lambda})^n = \mathcal{O}(d^{\tau n})$$

avec

$$\tau = \max\{1 + \rho - \lambda, k - 1 + \lambda\} < 1. \quad \square$$

5. POINTS PÉRIODIQUES RÉPULSIFS

Nous allons maintenant montrer que la mesure d'équilibre reflète la distribution des points périodiques répulsifs. Avant les travaux de Briend et Duval, on ne savait pas montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ admet un cycle répulsif. Briend et Duval montrent non seulement qu'il y en a toujours un, mais qu'il y en a une infinité et qu'ils sont denses dans le support de la mesure d'équilibre.

Le lemme clé est le suivant.

LEMME 5.1. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe l tel que pour tout $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$, il existe une boule $B(x, r)$ sur laquelle on peut définir $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses f_i^{-n} de $f^{\circ n}$, d'images B_i^{-n} avec $\sup_i \text{Diam}(B_i^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Remarque 5.2. — Il est possible de montrer qu'on peut définir $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses d'images B_i^{-n} avec $\text{Diam}(B_i^{-n}) = \mathcal{O}(d^{-n/2})$ (voir par exemple [10, Prop. 3.4.7]).

Nous allons d'abord expliquer comment utiliser ce lemme. On pose

$$\nu_n = \frac{1}{d^{nk}} \sum_{\substack{f^{\circ n}(y)=y \\ y \text{ répulsif}}} \delta_y.$$

Le nombre total de points périodiques de période n comptés avec multiplicités est $\frac{d^{n(k+1)} - 1}{d - 1}$. On voit donc que la masse totale de ν_n est bornée. A priori, cette masse pourrait être nulle (s'il n'y avait pas de point périodique répulsif de période n). Considérons une valeur d'adhérence ν de la suite de mesures ν_n . La masse totale de la mesure ν est alors majorée par 1.

Fixons $\varepsilon > 0$. Considérons l comme dans le lemme 5.1 et pour x hors de V_l , soit $B = B(x, r)$ une boule sur laquelle on peut définir $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses f_i^{-n} de $f^{\circ n}$, d'images B_i^{-n} avec $\sup_i \text{Diam}(B_i^{-n}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Nous allons montrer que

$$\nu(B) \geq (1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B).$$

La mesure d'équilibre μ_f ne charge pas les ensembles algébriques (proposition 1.14). Elle ne charge donc pas l'ensemble V_l . On en déduit que $\nu \geq (1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\nu \geq \mu_f$. Comme μ_f est une mesure de probabilité et comme la masse de ν est majorée par 1, on en déduit que $\nu = \mu_f$. On a donc

$$\frac{1}{d^{nk}} \sum_{\substack{f^{\circ n}(y)=y \\ y \text{ répulsif}}} \delta_y \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_f.$$

Montrons maintenant que $\nu(B) \geq (1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B)$. On doit montrer que pour n assez grand, le nombre de points périodiques répulsifs de période n contenus dans B est supérieur à $d^{nk}(1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B)$. Pour cela, il suffit de montrer que le nombre de boules B_i^{-n} relativement compactes dans B est supérieur à $d^{nk}(1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B)$. En

effet, si B_i^{-n} est relativement compacte dans B , alors $f_i^{-n} : B \rightarrow B_i^{-n}$ est contractante et a un point fixe attractif dans B_i^{-n} . Ce point est un point périodique répulsif de période n pour f . Comme les B_i^{-n} sont deux à deux disjointes, les points périodiques répulsifs ainsi obtenus sont tous distincts.

Donnons-nous une boule B' relativement compacte dans B telle que $\mu_f(B') \geq (1 - \varepsilon)\mu_f(B)$. Si n est assez grand, le diamètre des boules B_i^{-n} est petit, et toute boule B_i^{-n} qui intersecte B' est relativement compacte dans B . Il suffirait donc de montrer que la boule B' contient au moins $d^{nk}(1 - 3\varepsilon)^2\mu_f(B)$ points $x_i^{-n} = f_i^{-n}(x)$. Comme la mesure d'équilibre reflète la distribution des préimages de x , la boule B' contient au moins $d^{nk}(1 - 2\varepsilon)\mu_f(B)$ préimages n -ièmes de x pour n assez grand. Le problème majeur est que nous avons « jeté » εd^{nk} de ces préimages. Étant donné que la taille de la boule B est déterminée par ε , rien n'empêche $\mu_f(B)$ d'être de l'ordre de grandeur de ε , et donc, il se pourrait qu'aucun des points x_i^{-n} ne se trouve dans la boule B' .

On peut cependant s'en sortir en procédant comme suit. On pose $\varepsilon' = \varepsilon\mu_f(B)$. Pour cet ε' , il existe l' tel que pour tout $y \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_{l'}$, il existe une boule $B(y, r'_y)$ sur laquelle on peut définir $(1 - \varepsilon')d^{km}$ branches inverses $f^{\circ m}$ dont les images ont un petit diamètre. La mesure μ_f ne charge pas les ensembles algébriques. On peut donc trouver un voisinage ouvert U' de $V_{l'}$ dont la masse est inférieure à ε (le ε de départ). Comme $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus U'$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $B(y, r'_y/2)$. On choisit alors n assez grand pour que

- les boules B_i^{-n} aient un diamètre suffisamment petit de sorte que

$$x_i^{-n} \in B(y, r'_y/2) \implies B_i^{-n} \subset B(y, r'_y)$$

(ceci est possible car on a un nombre fini de boules $B(y, r'_y/2)$ et que le diamètre des boules B_i^{-n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$) et

- le nombre de préimages n -ièmes de x contenues dans le voisinage U' de $V_{l'}$ soit inférieur à $2\varepsilon d^{nk}$ (ceci est possible car $\mu_{n,x}(U') \rightarrow \mu_f(U') \leq \varepsilon$).

On a alors $(1 - 3\varepsilon)d^{nk}$ branches inverses f_i^{-n} de $f^{\circ n}$ sur B , telles que pour tout i , la boule $B_i^{-n} = f_i^{-n}(B)$ est contenue dans une des boules $B(y, r'_y)$. Pour chaque i et pour m assez grand, on peut alors construire $(1 - \varepsilon')d^{mk}$ branches inverses de $f^{\circ m}$ sur B_i^{-n} d'images $B_j^{-(n+m)}$ ayant un diamètre strictement inférieur à la distance de B' au bord de B . Utilisons le fait que $\mu_{m,x_i^{-n}} \rightarrow \mu_f$ quand $m \rightarrow +\infty$. Quand $m \rightarrow +\infty$, la proportion de préimages m -ièmes de x_i^{-n} contenues dans B' tend vers $\mu_f(B') \geq (1 - \varepsilon)\mu_f(B)$. Pour m assez grand, le nombre de préimages m -ièmes de x_i^{-n} contenues dans B' est donc supérieur à $(1 - 2\varepsilon)\mu_f(B)d^{mk}$. On en a « jeté » $\varepsilon' d^{mk} = \varepsilon\mu_f(B)d^{mk}$. Il y a donc au moins $(1 - 3\varepsilon)\mu_f(B)d^{mk}$ branches inverses de $f^{\circ m}$ sur B_i^{-n} qui ont des images relativement compactes dans B .

En faisant le total sur les $(1 - 3\varepsilon)d^{nk}$ points x_i^{-n} , on obtient $(1 - 3\varepsilon)d^{nk} \cdot (1 - 3\varepsilon)\mu_f(B)d^{mk}$ branches inverses $f_j^{-(n+m)}$ de $f^{\circ(n+m)}$ sur B d'images $B_j^{-(n+m)}$

relativement compactes dans B . Ces branches inverses produisent, comme expliqué ci-dessus, $(1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B) d^{(n+m)k}$ points répulsifs de période $n + m$ dans B et on a donc, pour n et m assez grands,

$$\nu_{n+m}(B) \geq (1 - 3\varepsilon)^2 \mu_f(B).$$

Venons-en maintenant à la démonstration du lemme 5.1. On procède essentiellement comme dans le lemme 3.6, avec cependant quelques modifications. La démonstration que nous présentons nous a été expliquée par Julien Duval.

Démonstration du lemme 5.1. — Soient $\varepsilon > 0$ et $l \geq 1$ grand. Soient $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus V_l$ et r_0 assez petit pour que $B_0 = B(x, r_0)$ évite V_l . On peut alors définir d^{kl} branches inverses f_i^{-l} de f^{ol} sur B_0 .

On ne va pas montrer qu'une grosse proportion des boules $B_i^{-l} = f_i^{-l}(B_0)$ n'intersecte pas l'ensemble V_f des valeurs critiques. Mais on va montrer que c'est vrai si on s'autorise à diminuer le rayon de la boule de départ. Considérons la suite décroissante r_n définie par

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_0}{2(n+1)^2}.$$

Cette suite converge vers $r = r_0(1 - \pi^2/12) > 0$. Posons $B_1 = B(x, r_1)$ et supposons que $f_i^{-l}(B_1)$ intersecte V_f . Alors, d'après le théorème de Lelong, on a

$$\text{Vol}(f^{ol}(f_i^{-l}(B_1) \cap V_f)) \geq c(r_0 - r_1)^{2(k-1)},$$

où c est une constante universelle. Or, ce volume est donné par l'intégrale

$$\int_{f_i^{-l}(B_1) \cap V_f} (f^{ol})^* \omega^{\wedge k-1}.$$

La somme pour toutes les branches inverses f_i^{-l} est donc majorée par

$$\int_{V_f} (f^{ol})^* \omega^{\wedge k-1} = \tau d^{l(k-1)},$$

où τ est le degré de V_f . Parmi les d^{lk} ensembles $f_i^{-l}(B_1)$, il y en a au plus

$$\frac{\tau d^{l(k-1)}}{c(r_0 - r_1)^{2(k-1)}}$$

qui intersectent V_f . Les autres contribuent chacun à d^{lk} branches inverses de f^{ol+1} sur B_1 . On a donc

$$d^{lk} \left(1 - \frac{\tau}{cd^l (r_0 - r_1)^{2(k-1)}} \right)$$

branches inverses de f^{ol+1} sur B_{l+1} . En procédant par récurrence, on montre que pour $n \geq l$, il y a au moins

$$d^{kn} \left(1 - \frac{\tau 2^{2(k-1)}}{cd^l r_0^{2(k-1)}} \left(1 + \frac{2^{4(k-1)}}{d} + \dots + \frac{(n-l)^{4(k-1)}}{d^{n-l-1}} \right) \right)$$

branches inverses de $f^{\circ n}$ sur $B(x, r_{n-l})$. Si on prend l assez grand, on a donc $(1 - \varepsilon/2)d^{kn}$ branches inverses f_i^{-n} de $f^{\circ n}$ sur $B(x, r)$.

Nous allons maintenant contrôler le diamètre des boules $B_i^{-n} = f_i^{-n}(B(x, r'))$ pour $r' < r$. Donnons-nous une famille dénombrable de droites L_j passant par x telles que la réunion des disques $\Delta_j = L_j \cap B(x, r)$ soit dense dans $B(x, r)$. Pour chaque n et pour chaque $j \leq n$, on oublie les branches inverses pour lesquelles

$$\text{Aire}(f_i^{-n}(\Delta_j)) \geq \frac{2n}{\varepsilon d^n}.$$

On en oublie au plus n fois $\varepsilon d^{nk}/(2n)$ (voir la preuve du lemme 3.6). Donc, il reste $(1 - \varepsilon)d^{kn}$ branches inverses f_i^{-n} . Ces branches inverses sont telles que pour $j \leq n$, on a $\text{Aire}(f_i^{-n}(\Delta_j)) = \mathcal{O}(nd^{-n})$.

Pour $n \geq 1$, on a donc gardé $(1 - \varepsilon)d^{nk}$ branches inverses f_i^{-n} telles que

$$\text{Aire}(f_i^{-n}(\Delta_j)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les branches inverses $f_i^{-n} : B(x, r) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ forment une famille normale (l'argument est le même que celui de la remarque 3.8). Les valeurs d'adhérence sont constantes le long de chaque disque Δ_j . Elles sont donc constantes sur $B(x, r)$ puisque les disques Δ_j sont denses dans $B(x, r)$. \square

Remerciements. — Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à préparer cet exposé, notamment François Berteloot, Jean-Yves Briend, Arnaud Chéritat, Adrien Douady, Julien Duval, John H. Hubbard et Vincent Guedj. Je tiens également à remercier Nessim Sibony qui a suggéré de nombreuses améliorations pour la version finale.

RÉFÉRENCES

- [1] E. BEDFORD, M. LYUBICH & J. SMILLIE — « Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 (V), The measure of maximal entropy and laminar currents », *Invent. Math.* **112** (1993), p. 77–125.
- [2] E. BEDFORD & J. SMILLIE — « Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : Currents, equilibrium measure and hyperbolicity », *Invent. Math.* **87** (1990), p. 69–99.
- [3] ———, « Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 (III) », *Math. Ann.* **294** (1992), p. 395–420.
- [4] E. BEDFORD & B. TAYLOR — « A new capacity for plurisubharmonic functions », *Acta Math.* **149** (1982), p. 1–39.
- [5] J.-Y. BRIEND, S. CANTAT & M. SHISHIKURA — « Linearity of the exceptional set for maps of $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ », *Math. Ann.* **330** (2004), p. 39–43.
- [6] J.-Y. BRIEND & J. DUVAL — « Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ », *Acta Math.* **182** (1999), p. 143–157.

- [7] ———, « Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), p. 145–159.
- [8] M. BRIN & A. KATOK – « On local entropy », in *Geometric dynamics*, Lect. Notes in Math., vol. 1007, Springer-Verlag, 1983, p. 30–38.
- [9] H. BROLIN – « Invariant sets under iteration of rational functions », *Ark. Mat.* **6** (1965), p. 103–144.
- [10] T.-C. DINH & N. SIBONY – « Dynamique des applications d'allure polynomiale », *J. Math. Pures Appl. (9)* **82** (2003), p. 367–423.
- [11] ———, « Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications », *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no. 1, p. 221–258.
- [12] J.E. FORNÆSS & N. SIBONY – « Complex dynamics in higher dimension », in *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, NATO Adv. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 439, Kluwer Acad. Press, Dordrecht, 1994, Notes partially written by Estela A. Gavosto, p. 131–186.
- [13] ———, « Complex dynamics in higher dimension I », in *Complex analytic methods in dynamical systems (IMPA, janvier 1992)*, Astérisque, vol. 222, Société Mathématique de France, 1994, p. 201–231.
- [14] ———, « Complex dynamics in higher dimension, II », in *Modern Methods in Complex Analysis (Princeton, NJ, 1992)*, Ann. Math. Studies, vol. 137, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995, p. 135–187.
- [15] ———, « Dynamics of \mathbf{P}^2 (Examples) », in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, Contemp. Math., vol. 269, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, p. 47–85.
- [16] A. FREIRE, A. LOPEZ & R. MAÑE – « An invariant measure for rational maps », *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **14** (1983), p. 45–62.
- [17] M. GROMOV – « On the entropy of holomorphic maps », *Enseign. Math. (2)* **49** (2003), p. 217–235, Manuscrit 1977.
- [18] V. GUEDJ – « Ergodic properties of rational mappings with large topological degree », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 3, p. 1589–1607.
- [19] J.H. HUBBARD & P. PAPADOPOULOS – « Superattractive fixed points in \mathbb{C}^n », *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), p. 321–365.
- [20] P. LELONG – « Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **67** (1950), p. 393–419.
- [21] M. LYUBICH – « Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3** (1983), p. 351–385.
- [22] R. MAÑE – « On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps », *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **14** (1983), p. 27–43.
- [23] M. MISIUREWICZ & F. PRZYTYCKI – « Topological entropy and degree of smooth mappings », *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **25** (1977), p. 573–574.
- [24] W. PARRY – *Entropy and generators in ergodic theory*, Benjamin Press, 1969.
- [25] N. SIBONY – « Dynamique des applications rationnelles de \mathbf{P}^k », in *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panoramas & Synthèses, vol. 8, Société Mathématique de France, Paris, 1999, p. 97–185.

- [26] P. TORTRAT – « Aspects potentialistes de l'itération des polynômes », in *Differential geometry and differential equations* (C. Gu, M. Berger & R.L. Bryant, éd.), Lect. Notes in Math., vol. 1255, Springer, 1987, p. 195–209.
- [27] T. UEDA – « Fatou sets in complex dynamics on projective spaces », *J. Math. Soc. Japan* **46** (1994), no. 3, p. 545–555.

Xavier BUFF

Université Paul Sabatier

Laboratoire Émile Picard

UMR 5580 du CNRS

UFR MIG

118, route de Narbonne

F-31062 Toulouse Cedex

E-mail : buff@picard.ups-tlse.fr

