Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57e année, 2004-2005, n° 938, p. 1 à 31

MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES À COURBURE SCALAIRE CONSTANTE : UNICITÉ, STABILITÉ

par **Olivier BIQUARD**

Une surface de Riemann compacte admet une métrique à courbure constante, unique à l'action près des automorphismes holomorphes. La recherche d'un phénomène analogue en dimension supérieure est une question centrale de la géométrie différentielle complexe. Plus précisément, il s'agit, étant donnée une variété kählérienne compacte, de trouver dans chaque classe de Kähler une métrique « canonique ». La notion la plus naturelle, introduite par Calabi, est celle de métrique extrémale. Les métriques kählériennes à courbure scalaire constante sont extrémales, et la réciproque est souvent vraie (en particulier en l'absence de champ de vecteurs holomorphe).

La question de l'existence des métriques kählériennes à courbure scalaire constante est très difficile, et peu de résultats sont connus, en dehors du cas où la classe canonique est un multiple de la classe de Kähler : le problème se réduit alors à l'existence d'une métrique Kähler-Einstein, pour lequel on renvoie à l'excellent exposé n° 830 de J.-P. Bourguignon et aux références qu'il contient. Rappelons simplement que ce problème est complètement résolu dans les cas $c_1 < 0$ (Aubin [2], Yau [66]) et $c_1 = 0$ (Yau [66, 67]), mais le cas Fano ($c_1 > 0$), demeure ouvert en dépit de nombreux résultats, en particulier de Tian, voir notamment [56, 58, 60]. Yau [68] a conjecturé que l'existence d'une métrique Kähler-Einstein dans le cas Fano est liée à une forme de stabilité algébrique de la variété, au sens de la théorie géométrique des invariants. Cette conjecture a été confirmée par Tian, qui a montré que l'existence d'une métrique Kähler-Einstein implique une notion de stabilité qu'il appelle K-stabilité [60] ; ce travail l'a mené à formuler une « conjecture de Hitchin-Kobayashi » pour les variétés, liant stabilité et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante. Les travaux de Donaldson, puis de Mabuchi, Chen et Tian, ont permis d'avancer de manière substantielle dans cette direction, et en particulier d'obtenir des résultats généraux d'unicité et de stabilité des métriques kählériennes à courbure scalaire constante.

On désignera par $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes holomorphes de la variété complexe compacte M, et par $\mathrm{Aut}^0(M)$ la composante connexe de l'identité. Si (M, L) est une variété kählérienne polarisée (la classe de Kähler est $c_1(L)$), le groupe des automorphismes holomorphes de L modulo les automorphismes triviaux $\mathbb{C}^*$ sera noté $\mathrm{Aut}(M, L)$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(M)$.

THÉORÈME 0.1 (Donaldson [19]). — *Soit (M, L) une variété complexe compacte polarisée, à groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *discret. Si la classe de Kähler $c_1(L)$ admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, alors* :

(1) *la métrique à courbure scalaire constante est unique dans la classe de Kähler ;*

(2) *pour k assez grand, les plongements projectifs de M dans $PH^0(M, L^k)$ sont stables au sens de Chow-Mumford* (*i.e.* (M, L) *est asymptotiquement stable au sens de Chow-Mumford*).

La force du second énoncé se mesure au fait que la stabilité asymptotique d'une variété algébrique polarisée est une propriété notoirement difficile à vérifier.

À noter que dans le cas Kähler-Einstein Fano, l'unicité de la métrique Kähler-Einstein est aussi un problème délicat, résolu antérieurement par Bando et Mabuchi [3].

Le théorème a été étendu par Mabuchi, et Chen et Tian. Ces derniers aboutissent à l'énoncé le plus général suivant.

THÉORÈME 0.2. — *Sur une variété complexe compacte M, deux métriques kählériennes extrémales dans la même classe de Kähler diffèrent par un automorphisme holomorphe dans* $\mathrm{Aut}^0(M)$.

Le cas d'une variété polarisée, à groupe d'automorphismes non trivial, est traité par Mabuchi [39, 40, 41, 42]. Il montre en outre une forme modifiée de stabilité au sens de Chow, tenant compte de l'action du centre de $\mathrm{Aut}^0(M, L)$ sur $H^0(M, L^k)$, voir section 3.1.2.

Le théorème d'unicité définitif est montré par Chen et Tian [14] qui suppriment la condition que la classe de Kähler soit entière.

Les liens avec la K-(semi)stabilité, ainsi que la conjecture liant K-stabilité et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, seront détaillés dans la section 3.2.

Donnons un bref aperçu de la méthode de Donaldson : dans [17] il interprète le problème des métriques kählériennes à courbure scalaire constante comme un analogue de dimension infinie d'un problème d'application moment de l'action hamiltonienne d'un groupe compact G sur une variété symplectique. Le rôle de l'espace symétrique de type non compact $G^{\mathbb{C}}/G$ est joué par l'espace des potentiels de Kähler, et l'unicité résulterait du formalisme général des applications moment si, dans l'espace des potentiels de Kähler, deux points pouvaient toujours être joints par une géodésique [18]. Dans [19], Donaldson contourne la difficulté par une méthode de quantification consistant à approximer l'espace des potentiels de Kähler par les espaces symétriques $SL(N_k+1)/SU(N_k+1)$ des métriques de Fubini-Study sur les espaces projectifs $P^{N_k} = PH^0(M, L^k)^*$ dans lesquels se plonge M (le rôle de la constante de Planck étant joué par $1/k$) ; la métrique kählérienne à courbure scalaire constante s'approxime dans chaque projectif par une métrique « équilibrée », dont l'existence est équivalente à la stabilité au sens de Chow (Zhang [70], Luo [36]).

Cet exposé a pour but d'expliquer la méthode utilisée par Donaldson, dont les principes sont utilisés aussi par Mabuchi. En revanche, Chen et Tian reviennent au programme initial en travaillant directement sur l'espace de dimension infinie des potentiels de Kähler, ce qui explique qu'ils n'ont plus besoin d'une polarisation ; la démonstration passe par des résultats nouveaux de régularité de solutions d'une équation de Monge-Ampère complexe homogène, que nous n'aborderons pas dans ce séminaire.

Dans la première section, nous exposons quelques généralités sur les métriques kählériennes, avant de passer au schéma formel posant le problème sous forme symplectique. Dans la seconde section, nous donnons la démonstration proprement dite du théorème, via la construction des métriques équilibrées. Enfin, dans la troisième section, nous effleurons diverses notions de stabilité des variétés algébriques, la conjecture sur le lien avec l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, ainsi que certains développements très récents.

Remerciements. Je remercie Paul Gauduchon pour sa précise relecture du manuscrit.

1. GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE ET COURBURE SCALAIRE

1.1. Préliminaires

Ici, nous introduisons les métriques extrémales. Outre les articles fondateurs de Calabi [8, 9], d'excellentes références sur le sujet sont [4, 26, 62].

1.1.1. Métriques extrémales. — Soit M^{2n} une variété complexe, dont on notera la structure complexe J. Une forme de Kähler est une (1,1)-forme fermée, telle que la formule $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ définisse une métrique riemannienne. La connexion de Levi-Civita induit une connexion sur le fibré canonique $K_M = \Lambda^n\Omega^1_M$, dont la courbure s'écrit $i\rho_\omega$ pour une (1,1)-forme réelle fermée ρ_ω appelée forme de Ricci. Elle est reliée au tenseur de Ricci via la structure complexe : $\rho_\omega(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y)$. La forme $\rho_\omega/2\pi$ représente la classe de cohomologie $c_1(M)$, et la courbure scalaire de la métrique g est

$$s_\omega = 2\Lambda\rho_\omega$$

où Λ est l'opérateur de contraction par la forme de Kähler[(1)].

[(1)] La normalisation de la courbure scalaire en géométrie kählérienne fluctue suivant les auteurs, on trouve souvent le choix $\frac{1}{4}s_\omega$ qui simplifie certaines formules ; on a préféré ici s'en tenir strictement à la définition provenant de la géométrie riemannienne. Cela peut expliquer, pour certaines formules, la divergence entre ce séminaire et certains des articles cités.

Pour fixer les notations, si, dans des coordonnées holomorphes locales (z^j), la forme de Kähler s'écrit

$$\omega = \frac{i}{2} g_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k,$$

alors on obtient les formules

$$\rho_\omega = -i\partial\overline{\partial} \log\det(g_{j\overline{k}}), \qquad s_\omega = -4g^{\ell\overline{m}} \frac{\partial^2}{\partial z^\ell \partial\overline{z}^m} \log\det(g_{j\overline{k}}).$$

La forme volume est $d\mu_\omega = \frac{\omega^n}{n!}$, le volume total $V = \int_M d\mu_\omega$ ne dépend que de la classe de cohomologie $\Omega = [\omega]$, et la moyenne $\overline{s}_\omega$ de la courbure scalaire est ainsi déterminée par la topologie :

$$\overline{s}_\omega = \frac{1}{V} \int_M s_\omega d\mu_\omega = \frac{1}{V} \int_M 2\rho_\omega \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = 4\pi n \frac{c_1(M)\Omega^{n-1}}{\Omega^n}.$$

Les identités kählériennes, impliquant l'opérateur $d^C = J^{-1} dJ$ sur les formes différentielles, permettent de retrouver l'identité de Bianchi :

$$d^* \rho_\omega = [\Lambda, d^C]\rho_\omega = -d^C \Lambda \rho_\omega = -\frac{1}{2} d^C s_\omega.$$

L'équation « s_ω constante » est donc équivalente à « ρ_ω harmonique » ; en particulier, si $c_1(M)$ est proportionnelle à la classe de Kähler (dont le représentant harmonique est justement ω), l'équation est équivalente à demander que ρ_ω soit proportionnelle à ω, c'est-à-dire que ω soit Kähler-Einstein.

La fonctionnelle de Calabi [8] est définie sur l'espace des formes de Kähler dans la classe de cohomologie fixée $\Omega \in H^2(M, \mathbb{R})$, par

$$\mathscr{C}(\omega) = \int_M s_\omega^2 d\mu_\omega.$$

Les points critiques de $\mathscr{C}$, appelés métriques extrémales, sont caractérisés par la condition que le champ de vecteurs $K = \sharp ds_\omega$ (où $\sharp : \Omega^1 \to T$ est la dualité symplectique, définie par $(\sharp\alpha) \lrcorner \omega = \alpha$) soit holomorphe. Notant

$$\mathscr{D} = 2\overline{\partial}\sharp\overline{\partial} \tag{1}$$

l'opérateur de Lichnerowicz, l'équation s'écrit donc $\mathscr{D} s_\omega = 0$. Elle est bien entendu vérifiée si s_ω est constante.

1.1.2. Le groupe d'automorphismes. — Un rôle important est joué ici par le groupe des automorphismes de M ou de (M, L). Supposons donc donnée sur le fibré holomorphe en droites complexes L une métrique hermitienne, à courbure $F_L = -i\omega$. Notons également ξ le champ de vecteurs tautologique sur L. Un champ de vecteurs complexe sur L se décompose en

$$\widehat{v} = \widetilde{v} + f\xi,$$

où $\widetilde{v}$ est horizontal pour la connexion de L, et f est une fonction à valeurs complexes. On vérifie facilement que $\widehat{v}$ est holomorphe aux conditions suivantes :

(1) $\widetilde{v}$ est le remonté horizontal d'un champ de vecteurs holomorphe v sur M ;

(2) la fonction f satisfait $\sharp\overline{\partial} f = v$ (et donc $\mathscr{D} f = 0$).

On en déduit immédiatement :

LEMME 1.1. — *L'algèbre de Lie du groupe* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *est isomorphe à l'espace des solutions* $f \in C_0^\infty(M, \mathbb{C})$ *de l'équation* $\mathscr{D} f = 0$.

Une autre manière d'énoncer le lemme est de dire que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(M, L)$ s'identifie aux champs de vecteurs holomorphes, hamiltoniens-complexes (de la forme $\sharp\overline{\partial} f$ pour f une fonction complexe).

Le groupe d'automorphismes est une source importante d'obstructions à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante. La plus ancienne est l'obstruction de Matsushima-Lichnerowicz [43, 34] : *si M admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, alors l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur M est réductive.* Plus précisément, cette algèbre se décompose en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$, où $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie complexe abélienne (constituée des champs de vecteurs parallèles), et $\mathfrak{h}$ s'identifie aux solutions complexes de l'équation $\mathscr{D} f = 0$ (voir le lemme 1.1 dans le cas polarisé) ; les solutions réelles engendrent le groupe d'isométries de M.

Un autre invariant provenant du groupe d'automorphismes est le *caractère de Futaki*, qui sera introduit section 1.3.4.

1.1.3. Exemple : les surfaces complexes réglées. — Nous n'aborderons pas ici les exemples provenant du problème des métriques Kähler-Einstein (voir [5]).

Burns et De Bartolomeis [7] furent sans doute les premiers à détecter un lien entre stabilité algébrique et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire nulle : sur une surface complexe réglée $S = PE$, où E est un fibré holomorphe de rang 2 sur une surface de Riemann Σ, à genre supérieur ou égal à 2, ils ont montré que S admet une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle si et seulement si E provient d'une représentation du $\pi_1(\Sigma)$ dans PU_2, c'est-à-dire, par le théorème de Narasimhan et Seshadri, est (poly-)stable. La métrique kählérienne à courbure scalaire nulle dans ce cas est localement symétrique (quotient du produit du disque hyperbolique et de la droite projective P^1).

Ce résultat a été étendu par LeBrun, en utilisant la théorie de Seiberg-Witten, aux métriques kählériennes à courbure scalaire constante négative sur les surfaces réglées [32].

Le problème de construction de métriques kählériennes à courbure scalaire constante est très difficile (équation d'ordre 4 sur le potentiel de Kähler), et très peu de résultats sont connus. Une exception notable existe en dimension 4 : les métriques kählériennes à courbure scalaire nulle, invariantes sous l'action d'un cercle, se décrivent explicitement en termes de fonctions harmoniques sur l'espace hyperbolique réel de dimension 3 (ansatz hyperbolique de LeBrun [31]). Parmi les applications de cet ansatz, citons les éclatements de surfaces réglées admettant l'action holomorphe d'un cercle [33] : les éclatements peuvent être codés en termes d'une structure parabolique sur E (au sens de Mehta et Seshadri), et LeBrun et Singer montrent que l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle sur ces surfaces réglées éclatées (S^1-invariantes) est équivalente à la stabilité du fibré parabolique associé. Une question intéressante est la généralisation éventuelle à toutes les surfaces réglées (même sans symétrie).

Enfin, toujours en dimension 4, les métriques kählériennes à courbure scalaire nulle peuvent être obtenues par une méthode twistorielle, qui permet de faire des recollements, voir par exemple [30]. Plus récemment est apparue une méthode de désingularisation [49], s'appuyant sur la construction de métriques kählériennes à courbure scalaire nulle sur les désingularisations de certains quotients de $\mathbb{C}^2$ par des groupes finis [11] : par exemple, on peut construire une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle sur une surface obtenue à partir de P^2 en éclatant 10 points—le nombre minimal de points nécessaire.

1.2. Brève revue du quotient kählérien

On fait ici un très bref rappel sur la théorie des invariants et le quotient symplectique, consulter [24, section 6.5] et [45].

1.2.1. Réduction symplectique. — Soit $(\mathscr{X}, \varpi)$ une variété symplectique, et G un groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit une action hamiltonienne de G sur $(\mathscr{X}, \varpi)$, c'est-à-dire qu'il existe une application $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$, équivariante pour l'action de G, et satisfaisant pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$d\langle \mu, \xi \rangle = v_\xi \lrcorner \varpi$$

où v_ξ est le champ de vecteurs sur $\mathscr{X}$ induit par l'action infinitésimale de ξ. Une telle application est appelée application moment, elle est unique à l'addition près d'un élément de $(\mathfrak{g}^*)^G$.

Si 0 est une valeur régulière de μ, le théorème de Marsden-Weinstein indique que le quotient $\mu^{-1}(0)/G$ (appelé quotient symplectique de $\mathscr{X}$ par G) admet une forme symplectique, qui, tirée en arrière sur $\mu^{-1}(0)$, coïncide avec ϖ.

Supposons que la forme symplectique provienne de la courbure d'un fibré en droites complexes L sur $\mathscr{X}$, donc $\varpi = iF_L \in 2\pi c_1(L)$. Le choix d'une application moment permet de remonter l'action de G à L, en faisant agir infinitésimalement $\xi \in \mathfrak{g}$ par

$$\widehat{v}_\xi = \widetilde{v}_\xi + \langle \mu(x), \xi \rangle \frac{d}{d\theta}$$

où $\widetilde{v}_\xi$ est le remonté horizontal de v_ξ sur L grâce à la connexion.

Si en outre $\mathscr{X}$ est kählérienne et G est compact (préservant un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ permettant de l'identifier avec $\mathfrak{g}^*$), alors le quotient symplectique est aussi kählérien. Il a en outre des liens profonds avec l'action complexifiée de $G^{\mathbb{C}}$ sur $\mathscr{X}$. L'action de G sur L se complexifie aussi, et on obtient des orbites de $G^{\mathbb{C}}$ dans L au-dessus d'orbites dans $\mathscr{X}$. Soit Z la fonction G-invariante sur L, introduite par Kempf et Ness [29], et définie par $Z(z) = -\log|z|^2$. La fonction Z est un potentiel pour la forme $\pi^*\omega$, où π est la projection $\pi : L - \{\text{section nulle}\} \to M$, c'est-à-dire $i\partial\overline{\partial}Z = \pi^*\omega$. Fixons un point base $p \in L$, au-dessus d'un point $x \in \mathscr{X}$, et $\xi \in \mathfrak{g}$: un calcul facile fournit les formules

$$\frac{d}{dt}Z(e^{it\xi}p) = \langle \mu(e^{it\xi}x), \xi \rangle,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}Z(e^{it\xi}p) = |v_\xi(e^{it\xi}x)|^2.$$

On voit donc que

– $\mu(x) = 0$ si et seulement si Z admet un point critique en p ;

– Z est une fonction convexe, en le sens suivant : compte tenu du choix de p, la fonction Z se tire en arrière en une fonction sur l'espace symétrique $\mathscr{Q} = G^{\mathbb{C}}/G$, que nous appellerons encore Z ; comme dans tout espace symétrique, les géodésiques sont données par l'action infinitésimale de $i\mathfrak{g}$, donc la seconde identité indique que Z est convexe sur $\mathscr{Q}$.

On déduit immédiatement le résultat classique d'unicité : dans $\mathscr{X}$, une $G^{\mathbb{C}}$-orbite coupe $\mu^{-1}(0)$ en au plus une G-orbite. En outre, en notant G_x le groupe d'isotropie, on a l'isomorphisme des groupes discrets $G_x^{\mathbb{C}}/(G_x^{\mathbb{C}})^0 = G_x/G_x^0$.

L'existence est liée à la stabilité de la manière suivante : il y a équivalence entre

(1) il existe un unique $g \in G^{\mathbb{C}}$ modulo G tel que $\mu(gx) = 0$;

(2) la fonctionnelle Z sur $G^{\mathbb{C}}/G$, correspondant à x, est propre ;

(3) l'orbite complexe $G^{\mathbb{C}}p$ dans L est fermée, et le groupe d'isotropie G_x est fini.

La troisième condition est la condition que x soit un point *stable*, au sens de la théorie géométrique des invariants (on dit parfois *proprement stable*), et la seconde condition peut être vue comme une condition de stabilité analytique.

La condition sur le groupe d'isotropie est parfois supprimée, et on parle alors de point faiblement stable, ou *polystable*. L'existence d'un zéro de μ dans l'orbite complexe reste alors assurée, mais l'unicité de g ne l'est que modulo $(G_x^{\mathbb{C}})^0$.

Enfin, la semistabilité est définie en demandant que l'orbite complexe $G^{\mathbb{C}}p$ ne contienne pas 0 dans son adhérence.

1.2.2. La correspondance de Hitchin-Kobayashi. — Si cette théorie du quotient kählérien est bien établie en dimension finie, tel n'est pas le cas en dimension infinie. Cependant, en dimension infinie existe un problème qui sert de paradigme pour celui des métriques kählériennes à courbure scalaire constante. Soit une variété kählérienne compacte (M^{2n}, ω), et E un fibré holomorphe sur X, de rang r (pour simplifier, on supposera $\deg_\omega(E) = c_1(E)[\omega]^{n-1} = 0$). Le problème est de trouver une métrique hermitienne h sur E, de courbure F_h, satisfaisant l'équation de Hermite-Einstein :

$$\Lambda F_h = 0.$$

La conjecture, posée par Hitchin et Kobayashi, fut résolue par Donaldson [16], et Uhlenbeck et Yau [64] : si E est indécomposable, l'existence d'une telle métrique est équivalente à la stabilité du fibré E, à savoir, pour tout sous-faisceau strict E' de E, on a $\deg_\omega(E') < 0$. Si E est décomposable, la bonne condition est la polystabilité de E, à savoir, E est somme directe de sous-fibrés stables de degré nul.

Ce problème s'interprète en termes d'application moment de la manière suivante. Au lieu de faire varier la métrique, on fixe une métrique hermitienne h_0 sur E, et on considère l'espace $\mathscr{X}$ des opérateurs $\overline{\partial}$ sur E, ou de manière équivalente, des connexions unitaires A. Il s'agit d'un espace affine, de direction l'espace des sections du fibré $\Omega^{0,1} \otimes End(E)$; la norme L^2 le munit d'une structure kählérienne (plate). Le groupe de jauge G est défini comme le groupe des transformations unitaires du fibré E (il s'agit donc des sections d'un fibré sur M de fibre $U(r)$). Son complexifié $G^{\mathbb{C}}$ est le groupe des transformations complexes de E, il agit sur $\mathscr{X}$ par $g(\overline{\partial}^E) = g \circ \overline{\partial}^E \circ g^{-1}$, et sa partie unitaire G en préserve la structure kählérienne.

Le problème de Hermite-Einstein s'interprète en termes de l'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur $\mathscr{X}$: en effet, la métrique $h = g^* h_0 g$ sur E est d'Hermite-Einstein si et seulement si la métrique h_0 est Hermite-Einstein sur $g(E)$. Notons que la paramétrisation des métriques h par $g^* h_0 g$ n'est rien d'autre que l'identification de l'espace $\mathscr{Q} = G^{\mathbb{C}}/G$ à l'espace des métriques hermitiennes sur E.

Un calcul facile montre que $A \to \Lambda F_A$ est une application moment pour l'action de G sur $\mathscr{X}$. L'unicité de la métrique d'Hermite-Einstein peut être déduite du formalisme général de l'application moment, avec la fonctionnelle Z sur $\mathscr{Q}$ définie plus haut qui n'est autre que la fonctionnelle de Donaldson. L'existence de la métrique d'Hermite-Einstein est beaucoup plus difficile, mais la relation entre la propreté de la fonctionnelle de Donaldson et la stabilité du fibré est au cœur de la démonstration, voir par exemple dans [55].

1.3. Le point de vue symplectique

Revenons au problème des métriques kählériennes à courbure scalaire constante. Jusqu'à la fin de cette section, nous décrivons le point de vue symplectique adopté par Donaldson [17, 18].

1.3.1. La courbure scalaire comme application moment. — Le caractère symplectique du problème se voit en changeant de point de vue : au lieu de fixer la structure complexe de la variété et de faire varier la forme de Kähler, on fixe une variété symplectique compacte (M^{2n}, ω), et on considère l'ensemble $\mathscr{J}$ des structures presque-complexes J compatibles à ω, c'est-à-dire satisfaisant $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ et $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ est une métrique riemannienne.

On peut voir $\mathscr{J}$ comme l'espace des sections d'un fibré sur M de fibre l'espace hermitien symétrique $Sp(2n)/U(n)$. La structure complexe de $Sp(2n)/U(n)$, et sa métrique couplée à la forme volume $d\mu_\omega$ de M, donnent formellement à $\mathscr{J}$ une structure de variété kählérienne de dimension infinie, dont on notera la forme de Kähler ϖ. Plus précisément, une structure presque-complexe étant fixée, on décrit les autres structures presque-complexes par leur espace $\Omega^{1,0}$, paramétré comme le graphe d'un $\phi \in \operatorname{Hom}(\Omega^{1,0}, \Omega^{0,1}) = \Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}$. La compatibilité à ω s'écrit alors $\phi \lrcorner \omega = 0$, où l'opération $\lrcorner$ doit être comprise comme la composition de la contraction et du produit extérieur :

$$(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}) \otimes \Omega^{1,1} \longrightarrow \Omega^{0,1} \otimes \Omega^{0,1} \longrightarrow \Omega^{0,2}.$$

Le groupe G des symplectomorphismes hamiltoniens de M agit sur $\mathscr{J}$ par $\phi(J) = \phi_* J \phi_*^{-1}$. Cette action préserve la structure kählérienne. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'espace $C_0^\infty(M)$ des fonctions d'intégrale nulle, une telle fonction H définissant le champ de vecteurs hamiltonien $X_H = \sharp dH$ sur M.

Enfin, la définition de la courbure scalaire peut être étendue à ce cadre presque-complexe : l'opérateur $\overline{\partial} : \Omega^{1,0}M \to \Omega^{1,1}M$ s'étend en une connexion hermitienne sur $\Omega^{1,0}M$ (connexion de Chern), et donc sur le fibré canonique K_M. Sa courbure s'écrit $i\rho_J$, d'où on déduit la courbure scalaire $s_J = 2\Lambda\rho_J$.

La courbure scalaire définit un élément de $\mathfrak{g}^*$ par l'application

$$H \longrightarrow \int_M s_J H d\mu_\omega.$$

LEMME 1.2 (Donaldson). — *L'application $J \to \frac{1}{4} s_J$ est une application moment pour l'action de G sur $\mathscr{J}$. En particulier, le lieu d'annulation de l'application moment est exactement l'espace des structures presque-complexes à courbure scalaire constante.*

Démonstration. — Le tenseur de Nijenhuis $N \in \Omega^{0,2} \otimes T^{1,0}$ de la structure presque-complexe J est défini par $\overline{\partial}^2 f = N \lrcorner \partial f$ pour toute fonction f. Il intervient dans le calcul de l'action infinitésimale d'un champ de vecteurs X sur J :

$$\mathscr{L}_X J = \overline{\partial} X^{1,0} - X^{0,1} \lrcorner N \tag{2}$$

où le résultat est vu comme une section de $\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}$.

Fixons une fonction $H \in \mathfrak{g} = C_0^\infty(M)$. Le lemme signifie qu'on a sur $\mathscr{J}$ l'égalité

$$d\langle s_J, H\rangle = 4(\mathscr{L}_{X_H} J) \lrcorner \varpi,$$

c'est-à-dire, pour toute variation infinitésimale $\phi \in T_J \mathscr{J}$,

$$\int_M d_J s(\phi) H \omega^n = 4 \int_M \operatorname{Re} \left\langle i(\overline{\partial} \sharp \overline{\partial} H - (\sharp \partial H) \lrcorner N), \phi \right\rangle \omega^n. \tag{3}$$

On renvoie à [17] pour les détails du calcul de la différentielle de la courbure scalaire dans ce contexte. $\square$

1.3.2. Complexification. — Le groupe de symplectomorphismes G n'admet pas de complexification. Cependant, $\mathscr{J}$ étant une variété complexe, l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ peut être complexifiée. La fonction $iH \in iC_0^\infty(M)$ agira donc sur J par $J\mathscr{L}_{X_H}J$. La distribution de $\mathscr{J}$, engendrée en J par les $\mathscr{L}_{X_H}J$ et $J\mathscr{L}_{X_H}J$, est involutive, et ses feuilles maximales jouent le rôle des orbites du groupe complexe manquant.

Précisons cette discussion quand on se restreint aux structures complexes intégrables $\mathscr{J}_{\mathrm{int}} \subset \mathscr{J}$. Si J est intégrable, alors par (2), on a

$$J\mathscr{L}_{X_H}J = \overline{\partial}(iX_H^{1,0}) = \mathscr{L}_{JX_H}J, \tag{4}$$

donc l'action complexifiée infinitésimale agit par difféomorphismes (infinitésimaux) sur J. Un point de vue équivalent consiste à fixer J et à modifier plutôt la forme de Kähler ω par $-\mathscr{L}_{JX_H}\omega = -dd^C H$.

Introduisons à présent l'espace des formes de Kähler dans la même classe que ω :

$$\mathscr{K} = \{\omega_\varphi = \omega + dd^C\varphi,\ \omega_\varphi > 0\}.$$

Par le lemme de Moser, on peut choisir, pour chaque $\omega_\varphi \in \mathscr{K}$, un difféomorphisme F_φ, dépendant de manière régulière de φ, tel que $F_\varphi^*\omega_\varphi = \omega$. On montre alors que la feuille maximale de la distribution involutive de $\mathscr{J}$ passant par J est l'image de l'application[(2)]

$$\mathscr{K} \times G \longrightarrow \mathscr{J}, \qquad (\omega_\varphi, \sigma) \longrightarrow \sigma^* F_\varphi^* J.$$

Il apparaît clairement que, $J \in \mathscr{J}_{\mathrm{int}}$ étant fixé, le rôle de l'espace symétrique $G^{\mathbb{C}}/G$ est joué par l'espace des formes de Kähler $\mathscr{K}$.

Remarque 1.3. — Le calcul de la variation de la courbure scalaire s_{ω_φ} par rapport à φ (voir par exemple [26]), est essentiellement équivalent au calcul montrant que s_J est une application moment, le lien entre les deux points de vue étant donné par l'application d'un difféomorphisme infinitésimal, grâce à (4). Plus précisément, l'action infinitésimale de $-JX_\varphi$ sur J (ω restant fixe) mène à une variation de J par $\phi = -i\overline{\partial}X_\varphi^{1,0} = -\frac{i}{2}\mathscr{D}\varphi$ ($\mathscr{D}$ l'opérateur de Lichnerowicz défini en (1)), et, par (3), à une variation de s_J par $-2\mathrm{Re}(i\mathscr{D}^*\phi) = -\mathscr{D}^*\mathscr{D}\varphi$; puis on revient à J en faisant agir le champ de vecteurs JX_φ, d'où une contribution supplémentaire $\mathscr{L}_{JX_\varphi}s = \langle ds, d\varphi\rangle$, ce qui donne la variation complète, pour une variation $\dot\omega = dd^C\varphi$:

$$\dot s = -\mathscr{D}^*\mathscr{D}\varphi + \langle ds, d\varphi\rangle. \tag{5}$$

---

(2) L'image, telle que nous la décrivons, n'est bien définie que pour $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$.

1.3.3. L'espace des métriques kählériennes. — Même si le complexifié du groupe des symplectomorphismes n'existe pas, Donaldson [18] a observé que l'espace $\mathscr{K}$ des formes de Kähler dans la classe Ω a toutes les propriétés souhaitables pour $G^{\mathbb{C}}/G$. En effet, $\mathscr{K}$ est muni d'une métrique riemannienne naturelle, la métrique de Mabuchi [38] définie en $\omega \in \mathscr{K}$ par

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_M \varphi_1 \varphi_2 d\mu_\omega$$

qui en fait formellement un espace symétrique de dimension infinie, à courbure négative.

La fonctionnelle Z de la section 1.2 admet un analogue sur $\mathscr{K}$, à savoir la K-énergie de Mabuchi [37] : on vérifie que la 1-forme σ sur $\mathscr{K}$ définie en ω par $(\varphi \in C_0^\infty(M))$

$$\sigma_\omega(\varphi) = -\int_M \varphi s_\omega d\mu_\omega \tag{6}$$

est fermée, et le choix d'un point base $\omega_0 \in \mathscr{K}$ permet alors de définir sa primitive par

$$\mathbf{E}_{\omega_0}(\omega) = -\int_0^1 dt \int_M \dot{\varphi}_t (s_{\omega_t} - \overline{s}) d\mu_{\omega_t},$$

où $\omega_t = \omega_0 + dd^C \varphi_t$ est un chemin liant ω_0 à $\omega = \omega_1$ dans $\mathscr{K}$, et $\overline{s} = 4\pi n \frac{c_1(M)\Omega^{n-1}}{\Omega^n}$.

La K-énergie satisfait les propriétés formelles de l'application moment expliquées dans la section 1.2 :

– les points critiques de $\mathbf{E}$ sont exactement les métriques à courbure scalaire constante ;

– $\mathbf{E}$ est convexe le long des géodésiques de $\mathscr{K}$: le long d'une géodésique $\omega_t = \omega_0 + dd^C \varphi_t$, on a $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{E}(\omega_t) = \int_M |\mathscr{D}_{\omega_t} \dot{\varphi}_t|^2 d\mu_{\omega_t}$. De là se déduit facilement que si une géodésique de $\mathscr{K}$ relie deux métriques kählériennes à courbure scalaire constante, alors celles-ci diffèrent par un élément du groupe $\mathrm{Aut}^0(M)$.

Cependant, l'existence de géodésiques entre deux points quelconques de cet espace symétrique de dimension infinie est un problème très difficile, qui se ramène à une équation de Monge-Ampère complexe homogène : plus précisément, soit la surface de Riemann à bord $\Sigma = [0,1] \times S^1$, alors le chemin de métriques de Kähler $\omega_t = \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_t$ est une géodésique si et seulement si sur $M \times \Sigma$ est satisfaite l'équation

$$(\omega + i\partial\overline{\partial}\Phi)^{n+1} = 0, \quad \text{où} \quad \Phi(x,t,\theta) = \varphi_t(x).$$

C'est l'étude de cette équation qui avait amené Semmes à redécouvrir la métrique de Mabuchi [54].

Chen [13] montre l'existence de solutions $C^{1,1}$, mais leur régularité est un problème très difficile, qu'il ne résout que sur les variétés à $c_1(M)$ négatif ; l'unicité des métriques kählériennes à courbure scalaire constante dans ce cas s'en déduit. Après les progrès de [10, 20], la solution définitive semble donnée dans les travaux récents de Chen et Tian [14], conduisant à l'énoncé le plus général du théorème 0.2.

1.3.4. Le caractère de Futaki. — La version infinitésimale de la K-énergie de Mabuchi permet de définir un invariant classique des champs de vecteurs holomorphes par rapport à une classe de Kähler, l'invariant de Futaki ([25], voir aussi [9] ; on suit ici [5, 4.6]).

La 1-forme σ sur $\mathscr{K}$ définie par (6) est invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}^0(M)$ agissant sur $\mathscr{K}$. Il est facile de voir que le champ de vecteurs hamiltonien-complexe $v = \sharp\overline{\partial} f$ agit en ω par $dd^C\varphi_v$, avec $\varphi_v = \mathrm{Im}(f)$. D'un autre côté, par invariance, et puisque σ est fermée,

$$0 = \mathscr{L}_v\sigma = d(v\lrcorner\sigma) = -d\int_M \varphi_v(s_\omega - \overline{s}_\omega)d\mu_\omega.$$

On déduit que la quantité

$$\mathscr{F}(v) = -\int \varphi_v(s_\omega - \overline{s}_\omega)d\mu_\omega$$

ne dépend pas de la métrique $\omega \in \mathscr{K}$ choisie, donc ne dépend que du champ de vecteurs v : c'est l'invariant de Futaki de v.

Son annulation est évidemment une condition nécessaire à l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante dans la classe de Kähler. En outre, en évaluant $\mathscr{F}$ sur le champ de vecteurs $i\sharp\overline{\partial}s_\omega$, on voit qu'une métrique extrémale est à courbure scalaire constante si et seulement si le caractère de Futaki est nul.

2. LA QUANTIFICATION DE DONALDSON

Dans cette section, nous détaillons la méthode de Donaldson pour montrer le théorème 0.1, et notamment son idée de « quantification ».

2.1. L'approximation de dimension finie

2.1.1. Métrique équilibrée. — Soit (M, L) une variété kählérienne munie d'un fibré très ample L, avec forme de Kähler $\omega \in 2\pi c_1(L)$, provenant d'une métrique sur L à courbure $F_L = -i\omega$ (la métrique de L est donc fixée à une constante multiplicative près). Nous avons un plongement de Kodaira de M dans le projectif $P^N = PE^*$, où $E = H^0(M, L)$ est de dimension $N + 1$.

Le choix d'une métrique hermitienne sur E permet de définir sur P^N la métrique de Fubini-Study

$$\omega_{FS} = iF_{\mathscr{O}(1)} = i\partial\overline{\partial}\log\sum_0^N |z^\alpha|^2.$$

Définissons alors la matrice $M = (M_{\alpha\beta}) \in \mathfrak{u}(N+1)$ par

$$M_{\alpha\beta} = i\int_M \frac{\overline{z}^\alpha z^\beta}{|z|^2}d\mu_{FS}.$$

Définition 2.1. — *Le plongement $i : M \hookrightarrow P^N$ est équilibré si $(M_{\alpha\beta}) = \lambda(\delta_{\alpha\beta})$, c'est-à-dire si la projection de M sur $\mathfrak{su}(N+1)$ est nulle.*

La variété polarisée (M, L) est équilibrée s'il existe sur $H^0(M, L)$ une métrique telle que le plongement de Kodaira de M dans $PH^0(M, L)^*$ soit équilibré.

D'un autre côté, étant donnée la métrique kählérienne ω sur M, la norme L^2 fournit une métrique sur $H^0(M, L)$; si (s_α) en est une base orthonormale, définissons une fonction sur M par la formule

$$\rho(\omega) = \sum_0^N |s_\alpha|^2;$$

cette fonction ne dépend ni du choix de base orthonormale (s_α), ni de la multiplication de la métrique de L par une constante, donc est intrinsèquement attachée à ω. Il est facile de voir que ρ permet de calculer la différence entre ω et la métrique de Fubini-Study, tirée en arrière par le plongement de Kodaira :

$$\omega = i^*\omega_{FS} - i\partial\overline{\partial}\log\rho.$$

On en déduit immédiatement l'équivalence entre :

– le plongement $i : M \hookrightarrow P^N$ est équilibré pour une métrique de Fubini-Study ω_{FS} sur P^N, et $\omega = i^*\omega_{FS}$;

– la fonction $\rho(\omega)$ est constante.

Le problème de trouver un plongement équilibré admet une interprétation en termes d'application moment. Considérons l'espace $\mathscr{B}$ des bases de E ; une base $s = (s_0, \dots, s_N) \in \mathscr{B}$ définit une métrique H sur E, donc une métrique de Fubini-Study sur PE^*, qui, tirée en arrière, fournit une métrique $\omega(s)$ sur M ; une manière équivalente de définir $\omega(s)$ est de fixer la métrique $h = FS(H)$ de L en décidant que

$$\sum_0^N |s_\alpha|_h^2 = 1, \tag{7}$$

puis de prendre $\omega(s) = iF_h$. La métrique h de L et ω_s permettent de définir

$$\mu_{SU}(s) = \pi_{SU}[i(s_\alpha, s_\beta)_h] \in SU(N+1).$$

Théorème 2.2. — *L'espace $\mathscr{B}/\operatorname{Aut}^0(M, L)$ a une structure kählérienne pour laquelle l'action de $SU(N+1)$ est hamiltonienne, avec application moment μ_{SU}.*

Cette structure kählérienne est construite par Donaldson [19] par un quotient de dimension infinie. Phong et Sturm [48] en donnent une construction de dimension finie, basée sur des idées de Zhang [70], utilisant des techniques de type « métriques de Quillen ». Plutôt que de donner les détails de cette construction, nous décrivons ci-après une approche élémentaire, suffisante pour les résultats démontrés dans cet article, consistant à expliciter dans cette situation la fonctionnelle Z de la section 1.2.

2.1.2. La fonctionnelle convexe Z. — Plusieurs points de vue existent, notamment celui de Zhang qui utilise la « norme de Chow », mais nous suivons ici plutôt [23, 47].

L'espace $\widetilde{\mathscr{K}}$ des métriques hermitiennes sur L s'identifie à l'espace des potentiels de Kähler : si deux métriques h et h_0 sont liées par $h = e^{-\varphi} h_0$, alors les formes de Kähler diffèrent par $i\partial\overline{\partial}\varphi$. On définit sur $\widetilde{\mathscr{K}}$, à une constante près, la fonctionnelle classique $\mathbf{I}$ par sa différentielle en $\omega \in \mathscr{K}$:

$$d_\omega \mathbf{I}(\varphi) = -\int_M \varphi d\mu_\omega.$$

Cette formule définit une 1-forme fermée sur $\widetilde{\mathscr{K}}$, dont la primitive fournit, à une constante près, la fonctionnelle $\mathbf{I}$.

Fixons un déterminant de E. À une métrique hermitienne H sur E, on associe [23]

$$Z(H) = -\mathbf{I}(FS(H)) + \frac{V}{N+1} \log \det H,$$

où $FS(H)$ est la métrique induite sur L par (7) ; le deuxième terme dans Z a pour seul but de rendre Z invariante par homothétie : $Z(aH) = Z(H)$.

Lemme 2.3. — *Soit $\xi \in \mathfrak{su}(N+1)$; on a en $t = 0$ les dérivées suivantes de $f(t) = Z(e^{it\xi}H)$:*

$$f'(0) = \sum i\xi_{\alpha\beta}(s_\alpha, s_\beta)_{FS(H)},$$
$$f''(0) = \int_M |\pi_{\mathscr{N}}(v_\xi)|^2 d\mu_{FS(H)},$$

où v_ξ est le champ de vecteurs engendré par l'action infinitésimale de ξ, et $\pi_{\mathscr{N}}$ représente la projection sur le fibré normal de $M \hookrightarrow P^N$.

De la dérivée première, on déduit la caractérisation des métriques équilibrées comme points critiques de Z ; de la seconde, le corollaire suivant, qui peut aussi être vu directement comme conséquence du théorème 2.2.

Corollaire 2.4. — *Si* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *est discret, alors une métrique équilibrée pour (M, L) est unique (à homothétie près).*

Démonstration. — Nous donnons une idée de la démonstration du lemme 2.3, notamment la seconde formule qui a une certaine importance dans la suite. On suit [23, proposition 1].

Notons $h_0 = FS(H)$ la métrique induite sur L ; dans ce calcul, toutes les normes des sections seront écrites par rapport à h_0. En diagonalisant ξ dans une base orthonormale (s_α), on peut écrire

$$H_t = e^{i\xi t} H = \mathrm{diag}(e^{\lambda_\alpha t}).$$

On a la base H_t-orthonormale $s_\alpha(t) = e^{-\frac{\lambda_\alpha}{2}t}s_\alpha$, et donc $h_t = FS(H_t) = e^{-\varphi_t}h_0$ est défini par

$$\varphi_t = \log \sum e^{-\lambda_\alpha t}|s_\alpha|^2,$$

d'où en particulier à $t = 0$:

$$\begin{aligned}\dot\varphi &= -\sum \lambda_\alpha |s_\alpha|^2,\\ \ddot\varphi &= \sum \lambda_\alpha^2|s_\alpha|^2 - \big(\sum \lambda_\alpha|s_\alpha|^2\big)^2.\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement

$$f'(0) = \int_M \dot\varphi d\mu_\omega = \int_M \sum -\lambda_\alpha|s_\alpha|^2 d\mu_\omega,$$

d'où la première formule. Pour calculer la dérivée seconde, on s'appuie sur la formule générale

$$\frac{d^2\mathbf{I}}{dt^2} = \int_M (-\ddot\varphi + \dot\varphi\partial^*\partial\dot\varphi)d\mu_\omega$$

pour arriver à

$$f''(0) = \int_M (\ddot\varphi - \frac{1}{2}|d\dot\varphi|^2)d\mu_\omega.$$

Voyons P^N comme le quotient de la sphère $S^{2N+1} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ par l'action du cercle (en particulier sa métrique est induite de celle de la sphère). L'action infinitésimale de ξ induit un champ de vecteurs $\widetilde{v_\xi} = \sum \lambda_\alpha z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ sur $\mathbb{C}^{N+1}$, se projetant sur v_ξ dans P^N. On a donc, sur la sphère $S^{2N+1} = \{\sum |z_\alpha|^2 = 1\}$,

$$|v_\xi|^2 = \sum \lambda^2|z_\alpha|^2 - \big(\sum \lambda_\alpha|z_\alpha|^2\big)^2.$$

Puisque $\sum |s_\alpha|^2 = 1$, il est clair que sur l'image de M dans P^N, on a

$$-\ddot\varphi = |v_\xi|^2.$$

D'un autre côté, on voit que $\widetilde{v_\xi} = \sharp\overline\partial \sum \lambda_\alpha|z_\alpha|^2$, donc la projection de v_ξ sur $TM \subset TP^N$ n'est autre que

$$\pi_{TM}(v_\xi) = \sharp\overline\partial \sum \lambda_\alpha|s_\alpha|^2 = -\sharp\overline\partial\dot\varphi, \tag{8}$$

dont la norme est $|\overline\partial\dot\varphi|^2 = \frac{1}{2}|d\dot\varphi|^2$. Finalement,

$$f''(0) = \int_M (|v_\xi|^2 - |\pi_{TM}(v_\xi)|^2)d\mu_\omega = \int_M |\pi_{\mathscr N} v_\xi|^2 d\mu_\omega. \quad \square$$

2.1.3. Résultats. — Supposons la variété polarisée (M, L) donnée, avec $\mathrm{Aut}(M, L)$ discret. Si (M, L^k) est équilibrée, alors il existe une unique métrique de Fubini-Study équilibrée sur P^{N_k}, que nous noterons $\widetilde{\omega}_k$. La métrique tirée en arrière par le plongement $i_k : M \hookrightarrow P^{N_k}$,

$$\omega_k = \frac{1}{k} i_k^* \widetilde{\omega}_k,$$

est dans la classe de cohomologie fixée $2\pi c_1(L)$.

THÉORÈME 2.5. — *Supposons que* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *soit discret, alors :*

(1) *s'il existe* ω_∞ *à courbure scalaire constante, alors pour* k *suffisamment grand,* (M, L^k) *est équilibrée, et les métriques* ω_k *induites satisfont* $\omega_k \to \omega_\infty$ *;*

(2) *si* (M, L^k) *est équilibrée, induisant la métrique* ω_k *sur* M*, et* $\omega_k \to \omega_\infty$*, alors* ω_∞ *est à courbure scalaire constante.*

L'unicité dans le théorème 0.1, est une conséquence du premier énoncé : l'unicité des métriques équilibrées ω_k implique l'unicité de la limite à courbure scalaire constante ω_∞.

Le second énoncé est une réciproque élémentaire : si les métriques équilibrées convergent, c'est vers une métrique à courbure scalaire constante (mais montrer a priori la convergence semble très difficile).

Dans le cas où le groupe d'automorphismes n'est pas discret, un résultat similaire est montré par Mabuchi, voir section 3.1.2.

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème 2.5.

2.2. Noyau de Bergmann

Soit (M^{2n}, L) une variété kählérienne polarisée. Dans cette partie il sera plus commode de normaliser la forme de Kähler ω dans $c_1(L)$; elle provient ainsi d'une métrique sur L, de courbure $F_L = -2\pi i\omega$ (la métrique de L est fixée à une constante multiplicative près). Si l'entier k est assez grand, le plongement de Kodaira envoie M dans l'espace projectif $P^{N_k} = PH^0(M, L^k)^*$. La dimension $N_k + 1 = h^0(M, L^k)$ est donnée par le théorème de Riemann-Roch, pour k assez grand :

$$N_k + 1 = \chi(L^k) = \int_M e^{kc_1(L)} Td(M) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{9}$$

avec notamment

$$a_0 = \frac{c_1(L)^n}{n!}, \qquad a_1 = \frac{1}{2(n-1)!} c_1(L)^{n-1} c_1(M). \tag{10}$$

Notons $\rho_k(\omega) = \sum_0^{N_k} |s_\alpha|^2$ pour une base orthonormale (s_α) de $H^0(M, L^k)$. Ainsi,

$$\int_M \rho_k(\omega) d\mu_\omega = h^0(M, L^k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots ,$$

avec les coefficients a_i s'exprimant en termes d'intégrales impliquant la courbure de ω. L'étude du noyau $\rho_k(\omega)$ peut donc être vue comme une géométrisation du théorème de Riemann-Roch. Les résultats établis par Tian [57], Catlin [12], Zelditch [69], Ruan [53] et Lu [35] en donnent un développement asymptotique précis quand k tend vers l'infini, voir aussi l'article récent [15].

THÉORÈME 2.6. — *La forme ω étant fixée, on a quand k tend vers l'infini un développement asymptotique*

$$\rho_k(\omega) = A_0(\omega)k^n + A_1(\omega)k^{n-1} + \cdots ,$$

où les $A_i(\omega)$ sont des fonctions sur M, localement définies par ω. En particulier, on a $A_0 = 1$ et $A_1(\omega) = s_\omega/8\pi$.

Le développement s'entend au sens suivant : pour tous $r, N \geqslant 0$, on a

$$\Big\|\rho_k(\omega) - \sum_0^N A_i(\omega)k^{n-i}\Big\|_{C^r(M)} \leqslant K_{r,N,\omega}k^{n-N-1}.$$

De plus, à r et N fixés, la constante $K_{r,N,\omega}$ peut être prise uniforme par rapport à un ensemble de métriques borné dans C^s, où s dépend de r et N.

Expliquons rapidement les raisons de l'existence d'un tel développement (Catlin, Zelditch) : le domaine $D = \{|z| \leqslant 1\} \subset L^*$ est strictement pseudoconvexe. Une section holomorphe s de L^k donne une fonction holomorphe $\widehat{s}$ sur D, et donc holomorphe CR sur ∂D, par $\widehat{s}(x) = \langle x^k, s(p(x))\rangle$, ou p est la projection $L^k \to M$. En outre, ce procédé fournit toutes les fonctions holomorphes sur ∂D de poids k par rapport à l'action du cercle. On peut exprimer cela de la façon suivante : l'espace de Hardy $H^2(\partial D)$ des fonctions holomorphes L^2 sur le bord ∂D admet une décomposition de Fourier $H^2(\partial D) = \sum_k H^2_k(\partial D)$, avec une identification $H^2_k(\partial D) = H^0(M, L^k)$. Le projecteur de Szegö $L^2(\partial D) \to H^2(\partial D)$ admet un noyau $\pi(x, y)$, et la fonction $\rho_k(\omega)$ peut être vue comme le k-ième coefficient de Fourier de $\pi(x, x)$. L'existence du développement asymptotique provient alors de résultats généraux de Boutet de Monvel et Sjöstrand sur le noyau de Szegö [6]. Le calcul précis des premiers coefficients est fait par Lu.

2.3. Solution formelle

Partons d'une métrique kählérienne ω_0 dans la classe de Kähler $c_1(L)$. On souhaite construire une métrique équilibrée pour le plongement de M dans $PH^0(M, L^k)^*$. Posons $q = \frac{1}{k}$, $\chi(q) = \chi(L^k)$ et $B(q, \omega) = q^n\rho_k(\omega)$; on a donc par le théorème 2.6 un développement asymptotique

$$B(q, \omega) = 1 + \frac{s_\omega}{8\pi}q + f_2q^2 + \cdots \tag{11}$$

avec

$$\frac{1}{V}\int_M B(q, \omega)d\mu_\omega = \frac{q^n n!}{c_1(L)^n}\chi(q) = 1 + \frac{n}{2}\frac{c_1(L)^{n-1}c_1(M)}{c_1(L)^n}q + \cdots$$

Il est utile de poser[3]

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}(q,\omega) &= \frac{1}{q}\Big(B(q,\omega) - \frac{q^n}{V}\chi(q)\Big) \\
&= \frac{s_\omega}{8\pi} - \frac{n}{2}\frac{c_1(L)^{n-1}c_1(M)}{c_1(L)^n} + O(q) \\
&= \frac{1}{8\pi}(s_\omega - \overline{s}_\omega) + O(q) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

avec : $\widetilde{B}(q,\omega) = 0$ si et seulement si ω est équilibrée pour (M, L^k).

Supposons à présent la courbure scalaire constante : $s_{\omega_0} = \overline{s}_{\omega_0}$. Considérons une variation infinitésimale $\dot{\omega} = dd^C\varphi$. En $q = 0$, on peut écrire d'après (5)

$$\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial \omega}(\varphi) = -\frac{1}{8\pi}\mathscr{D}^*\mathscr{D}\varphi.$$

Par le lemme 1.1, si $\mathrm{Aut}(M, L)$ est discret, l'opérateur $\mathscr{D}^*\mathscr{D}$ n'a pas de noyau ; autoadjoint, il est donc inversible. À partir du développement (11), le théorème des fonctions implicites fabrique alors une solution

$$\omega(q) = \omega + dd^C(\eta_1 q + \eta_2 q^2 + \cdots)$$

au problème $\widetilde{B}(q, \omega(q)) = 0$. Bien entendu, la variable q ne prend qu'un ensemble discret de valeurs, et la solution est à entendre au sens des séries formelles. En tronquant à l'ordre A, on obtient une solution approchée $\omega_A(q)$ telle que

$$\|\widetilde{B}(q, \omega_A(q))\|_{C^{r+2}} \leqslant C_A q^{A+1}. \qquad (13)$$

Digression : démonstration du second point du théorème 2.5

Si on a pour les $q = 1/k$ une suite de métriques équilibrées ω_q qui converge vers une limite ω_0, alors, par (12),

$$0 = \widetilde{B}(q, \omega_q) = \frac{1}{8\pi}(s_{\omega_q} - \overline{s}) + O(q)$$

avec, d'après le théorème 2.6, le $O(q)$ uniforme par rapport à un ensemble borné de métriques ; en prenant la limite quand q tend vers 0, on obtient $s_{\omega_0} = \overline{s}$. □

2.4. Point de vue dual

Après la construction d'une solution approchée $\omega_A(q)$, l'idée est de changer de point de vue pour regarder le problème, non plus du point de vue d'une forme de Kähler vérifiant $\widetilde{B}(q, \omega) = 0$, mais d'une métrique équilibrée sur $H^0(M, L^k)$ (rappelons $q = 1/k$). L'avantage est de passer d'un problème en dimension infinie à un autre en dimension finie, qui sera résolu par la méthode suivante.

[3] Je tiens cette présentation du problème de T. Mabuchi.

2.4.1. Un résultat général. — Soit un groupe compact G agissant de manière hamiltonienne sur une variété kählérienne $\mathscr{X}$, avec stabilisateurs discrets. Au point x, l'action infinitésimale $\xi \to v_\xi(x)$ fournit une application injective $\sigma_x : \mathfrak{g} \to T_x\mathscr{X}$. L'opérateur $Q_x = \sigma_x^* \sigma_x$ sur $\mathfrak{g}$ est inversible, et on notera

$$\Lambda_x = \|Q_x^{-1}\|_{op}, \tag{14}$$

où l'on a choisi un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$. Autrement dit, l'inégalité $\Lambda_x \leqslant \lambda$ est équivalente à

$$|\xi|^2 \leqslant \lambda |v_\xi(x)|^2 \tag{15}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$.

LEMME 2.7. — *Dans cette situation, si $x_0 \in \mathscr{X}$, et s'il existe deux nombres λ et δ tels que*

(1) $\lambda|\mu(x_0)| < \delta$,
(2) $\Lambda_{e^{i\xi}x_0} \leqslant \lambda$ *dès que* $|\xi| \leqslant \delta$,

alors il existe $\eta \in \mathfrak{g}$ avec $|\eta| \leqslant \delta$ et $\mu(e^{i\eta}x_0) = 0$.

Le lemme, sans difficulté, est démontré en suivant le flot du gradient de la fonction $|\mu|^2$ à partir de x_0 [19, proposition 17].

2.4.2. Estimation de la seconde forme fondamentale. — Repartons de la solution tronquée $\omega_A(q)$. L'estimation (13) indique qu'on a pour chaque $k = \frac{1}{q}$ une métrique presque équilibrée. En vue du lemme précédent, on peut fabriquer à partir de cette solution approchée une solution exacte à condition de contrôler de manière uniforme par rapport à k les normes concernées. C'est là le point le plus technique de [19], que nous détaillons maintenant.

Pour pouvoir travailler de manière uniforme, il faut fixer des métriques de référence pour chaque k. On fixe la métrique kählérienne à courbure scalaire constante ω_0 sur M, et pour chaque k la métrique $\widetilde{\omega}_0 = k\omega_0$.

La métrique de référence fixée, on dit qu'une métrique $\widetilde{\omega}$ est à géométrie R-bornée, si

$$\widetilde{\omega} > \frac{1}{R}\widetilde{\omega}_0,$$
$$\|\widetilde{\omega} - \widetilde{\omega}_0\|_{C^r(\widetilde{\omega}_0)} < R.$$

Cette définition donne la classe de métriques sur laquelle les estimations seront faites pour chaque k.

On dira de plus qu'une base $s = (s_\alpha)$ de $H^0(M, L^k)$ est à géométrie R-bornée, si la métrique de Fubini-Study qu'elle induit sur M est à géométrie R-bornée.

Le cœur de la démonstration consiste maintenant en une estimation uniforme de la constante Λ définie en 2.4.1, pour le problème des métriques équilibrées expliqué dans la section 2.1.1, dont nous reprenons à présent les notations. Nous suivrons ici, non pas l'approche initiale de Donaldson, mais celle de Phong et Sturm [48, théorème 2] :

Théorème 2.8. — *Si* $\mathrm{Aut}(M,L)$ *est discret, alors pour tout* $R>1$ *il existe* C *et* $\varepsilon<\frac{1}{10}$ *tels que, si une base* $s=(s_\alpha)$ *de* $H^0(M,L^k)$ *est à géométrie* R*-bornée, et* $\|\mu_{SU}(s)\|_{op}<\varepsilon$*, alors*

$$\Lambda_s \leqslant Ck^2.$$

Démonstration. — Vu le lemme 2.3 et (15), l'estimation à montrer est simplement, pour tout $\xi\in\mathfrak{su}(N_k+1)$,

$$|\xi|^2 \leqslant Ck^2\int_M |\pi_{\mathscr N}(v_\xi)|^2 d\mu_{\widetilde\omega}. \tag{16}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2.3, diagonalisons dans une base $s=(s_\alpha)$, donc $i\xi=\mathrm{diag}(\lambda_\alpha)$, et définissons la fonction réelle f sur M par

$$f=\sum\lambda_\alpha|s_\alpha|^2.$$

L'inégalité de Poincaré sur M,

$$\int_M |f|^2 d\mu_\omega \leqslant c\left(\int_M |\overline\partial f|^2 d\mu_\omega + \Big(\int_M f d\mu_\omega\Big)^2\right),$$

devient après le changement d'échelle $\widetilde\omega=k\omega$,

$$\int_M |f|^2 d\mu_{\widetilde\omega} \leqslant c\left(k\int_M |\overline\partial f|^2 d\mu_{\widetilde\omega} + k^{-n}\Big(\int_M f d\mu_{\widetilde\omega}\Big)^2\right). \tag{17}$$

Rappelons (8), à savoir $\pi_{TM}(v_\xi)=\sharp\overline\partial f$, donc

$$\int_M |f|^2 d\mu_{\widetilde\omega} \leqslant c\left(k\int_M |\pi_{TM}(v_\xi)|^2 + k^{-n}\Big(\int_M f d\mu_{\widetilde\omega}\Big)^2\right).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\int_M |v_\xi|^2 &= \int_M \Big(\sum\lambda_\alpha^2|s_\alpha|^2 - \big(\sum\lambda_\alpha|s_\alpha|^2\big)^2\Big)d\mu_{\widetilde\omega}\\ &\geqslant \int_M\Big(\sum\lambda_\alpha^2|s_\alpha|^2\Big)d\mu_{\widetilde\omega} - c\left(k\int_M|\pi_{TM}(v_\xi)|^2 + k^{-n}\Big(\int_M f d\mu_{\widetilde\omega}\Big)^2\right).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$(ck+1)\int_M |v_\xi|^2 \geqslant \int_M\Big(\sum\lambda_\alpha^2|s_\alpha|^2\Big)d\mu_{\widetilde\omega} - ck^{-n}\Big(\int_M\sum\lambda_\alpha|s_\alpha|^2 d\mu_{\widetilde\omega}\Big)^2 \tag{18}$$

$$\geqslant c'\sum\lambda_\alpha^2 \tag{19}$$

si k est assez grand et la métrique suffisamment équilibrée (alors les $\int_M|s_\alpha|^2 d\mu_{\widetilde\omega}$ sont proches de 1).

Il est clair que le théorème est alors une conséquence de (19) et de l'estimation :

$$\int_M |\pi_{TM}v_\xi|^2 d\mu_{\widetilde\omega} \leqslant ck\int_M|\pi_{\mathscr N}v_\xi|^2 d\mu_{\widetilde\omega}, \tag{20}$$

que nous établissons maintenant. Puisque $\mathrm{Aut}(M, L)$ est discret, on a une inégalité de Poincaré, qui, après changement d'échelle comme dans (17), s'écrit

$$\int_M |\pi_{TM} v_\xi|^2 d\mu_{\widetilde{\omega}} \leqslant ck \int_M |\overline{\partial}\pi_{TM} v_\xi|^2 d\mu_{\widetilde{\omega}}. \tag{21}$$

Comme v_ξ est holomorphe, on a

$$\overline{\partial}\pi_{TM} v_\xi = -\overline{\partial}\pi_{\mathscr{N}} v_\xi = -\alpha\pi_{\mathscr{N}} v_\xi, \tag{22}$$

où $\alpha \in \Omega^{0,1}(\mathrm{Hom}(\mathscr{N}, TM))$ est la seconde forme fondamentale de M dans P^{N_k}, définie par l'opérateur $\overline{\partial}$ du fibré $TP^{N_k} = TM \oplus \mathscr{N}$ le long de M :

$$\overline{\partial}_{TP^{N_k}} = \begin{pmatrix} \overline{\partial}_{TM} & \alpha \\ 0 & \overline{\partial}_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}.$$

L'estimation souhaitée (20) est alors une conséquence immédiate de (21), (22) et du fait suivant.

Fait 2.9. — *Sous les hypothèses du théorème, la seconde forme fondamentale α de M dans TP^{N_k} est bornée par une constante ne dépendant que de R.*

La démonstration du fait vient de la formule bien connue suivant laquelle « la courbure décroît dans les sous-fibrés » :

$$F_{TP^{N_k}}|_{TM} - F_{TM} = -\alpha \wedge \alpha^*,$$

d'où on déduit

$$|\alpha|^2 \leqslant |F_{TP^{N_k}}| + |F_{TM}|.$$

La courbure de TP^{N_k} est bornée (courbure de la métrique de Fubini-Study), comme l'est celle de TM grâce à l'hypothèse que $\widetilde{\omega}$ reste à géométrie R-bornée. □

2.4.3. Fin de la démonstration du théorème 2.5. — Rassemblons maintenant brièvement les éléments de la démonstration, en omettant cependant la fastidieuse vérification de l'uniformité convenable des estimations que nous écrirons. La solution tronquée à un ordre A fixé à l'avance, $\omega_A(q)$, est presque équilibrée : avec un peu de travail, pour une base s de $H^0(M, L^k)$ définie comme en (7), l'estimation (13) donne

$$\|\mu_{SU}(s)\|_{op} = O(q^{A+2}).$$

La norme figurant dans les hypothèses du lemme 2.7 lui est liée par

$$|\mu_{SU}(s)| \leqslant \sqrt{N_k + 1}\|\mu_{SU}(s)\|_{op},$$

avec $N_k = O(q^{-n})$, donc

$$|\mu_{SU}(s)| = O(q^{A+2-\frac{n}{2}}).$$

Par le théorème 2.8, on peut choisir la constante λ dans le lemme 2.7 en $O(q^{-2})$, et donc

$$\lambda|\mu_{SU}(s)| = O(q^{A-\frac{n}{2}}).$$

Si on a choisi initialement $A > \frac{n}{2}$, le lemme 2.7 fournit pour q assez petit une solution s_q à $\mu_{SU}(s_q) = 0$ et $|s - s_q| = O(q^{A-\frac{n}{2}})$. Revenant aux formes de Kähler, la métrique équilibrée $\widetilde{\omega}_q$ satisfait
$$\|\widetilde{\omega}_q - \widetilde{\omega}_0\|_{C^r(\widetilde{\omega}_0)} = O(q^{A-\frac{n}{2}}),$$
et par changement d'échelle :
$$\|\omega_q - \omega_0\|_{C^r(\omega_0)} = O(q^{A-r-\frac{n}{2}}).$$
Si on a choisi au début $A > r + \frac{n}{2}$, on déduit la convergence dans C^r des métriques équilibrées ω_q vers ω_0. Par unicité des métriques équilibrées, la convergence est valable dans C^∞. $\square$

3. STABILITÉ ET CONJECTURES

Il existe plusieurs notions de stabilité des variétés algébriques. L'idée générale est de considérer la stabilité d'une variété dans P^N comme la stabilité par rapport à l'action de $SL(N+1)$ sur le schéma de Hilbert des variétés de même polynôme de Hilbert. Chaque choix d'un plongement projectif de celui-ci mène à une notion différente de stabilité : Hilbert-Mumford, Chow-Mumford, K-stabilité. Nous nous concentrerons ici sur les deux dernières.

3.1. Stabilité de Chow-Mumford

3.1.1. Stabilité et métriques équilibrées. — Soit une variété projective $M^n \subset P^N = PE^*$, de degré d. Alors il existe un point $\widehat{M} \in W = (\mathrm{Sym}^d E)^{\otimes(n+1)}$, tel que $[\widehat{M}] \in PW$ soit le point de Chow du cycle $M \subset P^N$, voir la construction dans [44, 1.16], qui généralise les deux cas simples suivants :

– si M est une hypersurface, $\widehat{M}$ est l'équation de M ;

– si M est linéaire, $\widehat{M}$ est obtenu par les coordonnées de Plücker.

Le groupe $SL(N+1) = SL(E)$ agit sur W.

DÉFINITION 3.1 (Mumford). — *La variété $M^n \subset P^N$ est stable* (*au sens de Chow*) *si $SL(N+1)\widehat{M}$ est fermée dans W, et le stabilisateur de $\widehat{M}$ est fini* ; *elle est semistable si* 0 *n'est pas dans l'adhérence de $SL(N+1)\widehat{M}$.*

La variété polarisée (M, L) est asymptotiquement stable si pour k assez grand, l'image $M_k \subset P^{N_k} = PH^0(M, L^k)^*$ de M par les plongements de Kodaira est stable.

Par exemple, les courbes asymptotiquement stables sont exactement les courbes stables au sens de Deligne-Mumford.

Comme indiqué section 1.2.1, on peut définir aussi la polystabilité en supprimant l'hypothèse de finitude du stabilisateur. C'est la polystabilité qui a une interprétation en termes de géométrie différentielle—les métriques équilibrées de la section 2.1 :

THÉORÈME 3.2 (Zhang [70]). — *La variété* (M, L) *est équilibrée si et seulement si le plongement* $M \hookrightarrow PH^0(M, L)^*$ *est polystable.*

Zhang énonce seulement stable $\Rightarrow$ équilibré $\Rightarrow$ semistable, mais son argument montre en réalité le théorème écrit ci-dessus, voir aussi [47]. La stabilité est équivalente à l'existence d'une *unique* métrique équilibrée. La fonctionnelle Z de la section 2.1.2, définie différemment, joue un rôle crucial dans la démonstration.

Joint au théorème 2.5, l'énoncé précédent implique immédiatement la partie relative à la stabilité du théorème 0.1 :

COROLLAIRE 3.3. — *Si* (M, L) *admet dans la classe* $c_1(L)$ *une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, et* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *est discret, alors* (M, L) *est asymptotiquement stable.*

Comme indiqué dans l'introduction, tester la stabilité d'une variété algébrique est très difficile, et peu de résultats sont connus (Mumford, Gieseker [27], Viehweg [65]). Un corollaire du résultat est par exemple que toutes les variétés à $c_1 < 0$ sont asymptotiquement stables.

3.1.2. Stabilité relative. — Le cas où le groupe $\mathrm{Aut}^0(M, L)$ n'est pas trivial est étudié par Mabuchi : en réalité, si $\mathrm{Aut}^0(M, L)$ est semi-simple, les résultats demeurent identiques (il suffit de se restreindre aux fonctions invariantes sous le groupe d'isométries de la métrique kählérienne à courbure scalaire constante). Le cas délicat provient de la présence d'un centre Z dans $\mathrm{Aut}^0(M, L)$. Plus généralement, si un tore complexe T agit, les espaces $E_k = H^0(M, L^k)$ se décomposent sous l'action de T,

$$E_k = \oplus_1^{\nu_k} E_k^{\chi_j},$$

où les χ_j sont des caractères de T. On définit alors le groupe

$$G_k = \times_1^{\nu_k} SL(E_k^{\chi_j}).$$

On regarde l'image M_k de M dans PE_k^* : la *stabilité relative à* T de (M, L^k) est définie comme dans la définition 3.1, en regardant l'action de G_k sur $\widehat{M_k}$ au lieu de celle de $SL(E_k)$.

THÉORÈME 3.4 (Mabuchi [42]). — *Si* (M, L) *admet une métrique extrémale, alors* (M, L) *est asymptotiquement stable relativement au centre de* $\mathrm{Aut}^0(M, L)$.

Le principe de la démonstration —la méthode de quantification—, reste le même, mais Mabuchi montre directement la stabilité à partir des solutions approchées, sans recourir à la construction de métriques équilibrées. Cependant, il montre aussi que la stabilité relativement à un tore complexe T est équivalente à l'existence de « métriques équilibrées relativement à T », voir les détails dans [39].

L'unicité de la métrique extrémale dans $c_1(L)$, modulo $\mathrm{Aut}^0(M, L)$, est déduite dans [40]. Enfin, il semble qu'il y ait des obstructions à la stabilité asymptotique (absolue) de (M, L), pourvue d'une métrique extrémale, en présence d'un centre de $\mathrm{Aut}^0(M, L)$, voir [41].

3.2. K-stabilité

3.2.1. Configuration test. — Le critère de Hilbert-Mumford dit que la stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants peut être testée sur les sous-groupes à un paramètre : l'orbite $G^{\mathbb{C}}x$ est fermée si tel est le cas pour tous les sous-groupes à un paramètre $\mathbb{C}^* \subset G^{\mathbb{C}}$. Pour un tel sous-groupe, on a une limite

$$x_0 = \lim_{\lambda \to 0} \lambda \cdot x$$

qui est un point fixe de l'action de $\mathbb{C}^*$; la question de la stabilité se réduit alors à la question de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur la droite au-dessus de x_0, qui a un poids $\rho \in \mathbb{Z}$ (action par λ^ρ) : si le poids ρ est toujours strictement négatif, alors x est stable (semistable s'il est toujours négatif ou nul).

L'idée de sous-groupe à un paramètre de l'action de $SL(N+1)$ sur le schéma de Hilbert mène à la définition suivante [21].

Définition 3.5. — *Une configuration test d'exposant r pour la variété polarisée (M, L) est la donnée de :*

(1) *un schéma $\mathscr{M}$ avec une action de $\mathbb{C}^*$,*

(2) *un fibré en droites ample $\mathscr{L} \to \mathscr{M}$, équivariant pour l'action de $\mathbb{C}^*$,*

(3) *une application plate, propre, $\mathbb{C}^*$-équivariante, $\pi : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$, avec $\mathbb{C}^*$ agissant sur $\mathbb{C}$ de la manière standard,*

telle que les fibres $(\mathscr{M}_t, \mathscr{L}_t)$ soient isomorphes à (M, L^r) pour $t \neq 0$.

Une telle configuration est dite produit si $\mathscr{M} \simeq M \times \mathbb{C}$, et triviale si en outre $\mathbb{C}^*$ agit seulement sur le facteur $\mathbb{C}$.

3.2.2. Invariant de Futaki et K-stabilité. — Si $\mathbb{C}^*$ agit sur un schéma projectif X muni d'un fibré ample L, alors pour tout k, il agit aussi sur l'espace vectoriel

$$E_k = H^0(X, L^k).$$

Soit d_k sa dimension et w_k le poids de l'action induite sur $\Lambda^{d_k} E_k$. Pour k assez grand, d_k et w_k peuvent être calculés par le théorème de Riemann-Roch (équivariant), et sont donc des polynômes en k, de degrés respectifs n et $n+1$. La fonction $F(k) = w_k / k d_k$ a un développement asymptotique

$$F(k) = F_0 + \frac{F_1}{k} + \frac{F_2}{k^2} + \cdots$$

avec les coefficients F_i rationnels. Le coefficient F_1 est appelé l'*invariant de Futaki* de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur (X, L).

Dans le cas d'une variété lisse X, l'action infinitésimale de $\mathbb{C}^*$ induit un champ de vecteurs holomorphe v, et l'invariant de Futaki F_1 se spécialise bien à l'invariant de Futaki $\mathscr{F}$ introduit dans la section 1.3.4, à une constante près : $F_1 = -\frac{1}{V}\mathscr{F}(v)$, voir [21, proposition 2.2.2].

On définit la K-stabilité, introduite par Tian [60] dans son étude des variétés de Fano, puis adaptée par Donaldson [21] pour autoriser une fibre centrale non normale.

DÉFINITION 3.6. — *La variété polarisée* (M, L) *est K-stable (resp. K-semistable) si, pour toute configuration test non triviale* $(\mathscr{M}, \mathscr{L})$*, l'invariant de Futaki de l'action de* $\mathbb{C}^*$ *induite sur* $(\mathscr{M}_0, \mathscr{L}_0)$ *est strictement négatif (resp. négatif ou nul). Elle est K-polystable si elle est semistable, et si l'invariant de Futaki ne s'annule que pour les configurations produits.*

À nouveau, il y a des variations dans la terminologie : ce que nous avons appelé polystabilité est appelé par Tian semistabilité propre, et par Donaldson stabilité ; notre terminologie, plus cohérente avec celle des fibrés vectoriels, suit [51].

Enfin, il n'est pas clair que la K-stabilité soit une bonne notion de stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants, voir cependant [46].

3.2.3. La conjecture. — Dans la correspondance de Hitchin-Kobayashi (section 1.2.2), l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein sur un fibré holomorphe est équivalente à la condition algébrique de polystabilité du fibré. On attend de même une correspondance de Hitchin-Kobayashi pour les variétés, dans laquelle le rôle de la condition algébrique serait joué par la K-stabilité (Tian [63], Donaldson [21]) :

CONJECTURE 3.7. — *La variété polarisée* (M, L) *admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante si et seulement si elle K-polystable.*

Dans la correspondance de Hitchin-Kobayashi, la direction Hermite-Einstein $\Rightarrow$ stabilité est facile, et très difficile la réciproque. Sur les variétés, même la direction « facile » n'est pas connue : en effet, comme on a vu, l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante sur une variété polarisée (M, L) implique bien la stabilité asymptotique de Chow-Mumford, mais on a seulement l'implication

$$\text{asymptotiquement stable} \Rightarrow \text{asymptotiquement semistable} \Rightarrow \text{K-semistable},$$

voir [52] pour une discussion précise des relations entre les différentes notions de stabilité, qui s'interprètent toutes en des conditions sur les $F(k)$, convenablement normalisés, associés aux configurations tests ; l'implication manquante sur la gauche, K-stabilité $\Rightarrow$ stabilité asymptotique, est tentante, mais n'est pas démontrée pour le moment.

Ainsi donc, *une variété portant une métrique kählérienne à courbure scalaire constante est K-semistable.* Ce fait peut aussi être vu comme conséquence [14, 46] d'une borne inférieure sur la K-énergie :

THÉORÈME 3.8. — *Supposons que* M *admette une métrique kählérienne à courbure scalaire constante. Alors la K-énergie de Mabuchi y atteint un minimum.*

Si on dispose de géodésiques dans l'espace des métriques de Kähler $\mathscr{K}$, le théorème est une conséquence immédiate de la convexité de la K-énergie ; c'est la voie empruntée par Chen et Tian [14]. Dans le cas polarisé, et groupe d'automorphismes discret, la méthode de quantification est utilisée par Donaldson [23] pour une autre démonstration : la solution du problème des métriques équilibrées donne une borne inférieure sur la fonctionnelle Z de la section 2.1.2, qui, après passage au problème dual, fournit des bornes inférieures sur des fonctionnelles convergeant vers la K-énergie.

Une borne inférieure sur la K-énergie peut être pensée comme une condition analytique de semistabilité. Plus généralement, Tian [62, 63] conjecture que l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante est équivalente à une *stabilité analytique* définie comme la propreté (en un sens précis) de la K-énergie. Il a montré cette conjecture dans le cas Kähler-Einstein Fano [60]. Pour les liens entre propreté de la K-énergie et K-stabilité, voir [59, 61, 46].

Un autre développement concernant la stabilité est la définition par Ross et Thomas [51] d'une notion de pente, μ, pour les sous-schémas Z d'une variété projective polarisée M, analogue à la pente des sous-faisceaux d'un fibré vectoriel. Comme pour les fibrés, la semistabilité est définie en exigeant que $\mu(Z) \leqslant \mu(X)$ pour tout $Z \subset X$. Le lien avec la K-stabilité est obtenu en considérant la configuration provenant de la déformation au cône normal, de sorte que la semistabilité pour la pente est une conséquence de la K-semistabilité. Comme corollaire, Ross [50] construit sur P^2 éclaté en quatre points des classes de Kähler n'admettant pas de métriques kählériennes à courbure scalaire constante ; l'obstruction ne provient pas du groupe d'automorphismes, trivial. On consultera [51] pour d'autres exemples.

3.3. Le cas torique

L'image de la conjecture 3.7 devient un peu plus nette dans le cas torique, grâce au travail fondateur de Donaldson [21]. Nous donnons ici un bref aperçu des résultats.

Soit (M^{2n}, ω) une variété kählérienne torique. Le tore T^n agit avec application moment $\mu : M \to \mathbb{R}^n$, et l'image de μ est un polytope $\overline{P}$ dans $\mathbb{R}^n$, le polytope de Delzant de M. L'action est libre sur l'image réciproque de l'intérieur, $M_0 = \mu^{-1}(P) \subset M$. On utilise alors les variables action-angle (x^i, θ_i) telles que

$$\omega = \sum dx^i \wedge d\theta_i,$$

avec l'application moment donnée par la projection sur les coordonnées x^i, et l'action de T^n par la translation dans les coordonnées θ_i.

Le problème se pose de manière élégante dans un formalisme proche de celui de la section 1.3.1, en fixant la forme symplectique ω et en faisant varier la structure complexe. Les métriques T^n-invariantes, kählériennes avec forme de Kähler ω, ont la description suivante, due à Guillemin : une telle métrique, g, est décrite par un *potentiel symplectique* u, fonction convexe sur P, de sorte que

$$g = \sum u_{,ij} dx^i dx^j + u^{,ij} d\theta_i d\theta_j,$$

où $(u^{,ij})$ est l'inverse de la métrique hessienne $(u_{,ij})$ de u.

On a alors la belle formule d'Abreu [1] pour la courbure scalaire :

$$s(u) = -\sum \frac{\partial^2 u^{,ij}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Le problème des métriques kählériennes à courbure scalaire constante apparaît donc comme un problème d'équations aux dérivées partielles, non linéaire, d'ordre 4 sur le potentiel symplectique.

Guan [28] a montré que les géodésiques de l'espace des formes de Kähler dans la classe $[\omega]$ deviennent des droites dans l'espace des potentiels symplectiques. Il en déduit l'existence de géodésiques reliant deux métriques données, et donc l'unicité, à automorphisme holomorphe près, des métriques extrémales toriques.

Donaldson [21] étudie les surfaces toriques K-polystables. Il montre que :

(1) la K-énergie de Mabuchi est bornée inférieurement ;

(2) une suite minimisante de potentiels symplectiques a toujours une sous-suite convergeant en un sens faible.

L'idée est d'utiliser la K-stabilité en l'appliquant à des configurations tests construites à partir de fonctions convexes, rationnelles, linéaires par morceau sur P. Un corollaire important est la construction de nouvelles surfaces toriques n'admettant pas de métrique kählérienne à courbure scalaire constante.

Si la limite faible obtenue était lisse et minimisait la K-énergie, elle fournirait la métrique kählérienne à courbure scalaire constante souhaitée : justifier cet espoir est manifestement un problème d'analyse très délicat ; voir cependant les estimations de [22].

RÉFÉRENCES

[1] M. Abreu – « Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics », *Internat. J. Math.* **9** (1998), no. 6, p. 641–651.

[2] T. Aubin – « Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **283** (1976), no. 3, p. Aiii, A119–A121.

[3] S. Bando & T. Mabuchi – « Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions », in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, p. 11–40.

[4] A.L. Besse – *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[5] J.-P. Bourguignon – « Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : obstructions et existence (d'après Y. Matsushima, A. Futaki, S.T. Yau, A. Nadel et G. Tian) », in *Séminaire Bourbaki, 1996/97*, Astérisque, vol. 245, Société Mathématique de France, 1997, Exp. n$^{\mathrm{o}}$ 830, p. 277–305.

[6] L. Boutet de Monvel & J. Sjöstrand – « Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö », in *Journées Équations aux Dérivées Partielles (Rennes, 1975)*, Astérisque, vol. 34-35, Société Mathématique de France, Paris, 1976, p. 123–164.

[7] D. Burns & P. de Bartolomeis – « Stability of vector bundles and extremal metrics », *Invent. Math.* **92** (1988), no. 2, p. 403–407.

[8] E. Calabi – « Extremal Kähler metrics », in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, p. 259–290.

[9] ______, « Extremal Kähler metrics. II », in *Differential geometry and complex analysis*, Springer, Berlin, 1985, p. 95–114.

[10] E. Calabi & X.X. Chen – « The space of Kähler metrics. II », *J. Differential Geom.* **61** (2002), no. 2, p. 173–193.

[11] D.M.J. Calderbank & M.A. Singer – « Einstein metrics and complex singularities », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 2, p. 405–443.

[12] D. Catlin – « The Bergman kernel and a theorem of Tian », in *Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997)*, Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, p. 1–23.

[13] X.X. Chen – « The space of Kähler metrics », *J. Differential Geom.* **56** (2000), no. 2, p. 189–234.

[14] X.X. Chen & G. Tian – « Geometry of Kähler metrics and holomorphic foliation by discs », arXiv : `math.DG/0409433`.

[15] X. Dai, K. Liu & X. Ma – « On the asymptotic expansion of Bergman kernel », *J. Differential Geom.* **72** (2006), no. 1, p. 1–41.

[16] S.K. Donaldson – « Infinite determinants, stable bundles and curvature », *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 1, p. 231–247.

[17] ______, « Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology », in *Fields Medallists' lectures*, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, p. 384–403.

[18] ______, « Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics », in *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 13–33.

[19] ______, « Scalar curvature and projective embeddings. I », *J. Differential Geom.* **59** (2001), no. 3, p. 479–522.

[20] ______, « Holomorphic discs and the complex Monge-Ampère equation », *J. Symplectic Geom.* **1** (2002), no. 2, p. 171–196.

[21] ______, « Scalar curvature and stability of toric varieties », *J. Differential Geom.* **62** (2002), no. 2, p. 289–349.

[22] ———, « Interior estimates for solutions of Abreu's equation », *Collect. Math.* **56** (2005), no. 2, p. 103–142.

[23] ———, « Scalar curvature and projective embeddings, II », *Q. J. Math.* **56** (2005), no. 3, p. 345–356.

[24] S.K. Donaldson & P. B. Kronheimer – *The geometry of four-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990, Oxford Science Publications.

[25] A. Futaki – « An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, p. 437–443.

[26] P. Gauduchon – *Calabi's extremal Kähler metrics : an elementary introduction.*

[27] D. Gieseker – « Global moduli for surfaces of general type », *Invent. Math.* **43** (1977), no. 3, p. 233–282.

[28] D. Guan – « On modified Mabuchi functional and Mabuchi moduli space of Kähler metrics on toric bundles », *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 5-6, p. 547–555.

[29] G. Kempf & L. Ness – « The length of vectors in representation spaces », in *Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978)*, Lect. Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, p. 233–243.

[30] J. Kim, C. LeBrun & M. Pontecorvo – « Scalar-flat Kähler surfaces of all genera », *J. Reine Angew. Math.* **486** (1997), p. 69–95.

[31] C. LeBrun – « Scalar-flat Kähler metrics on blown-up ruled surfaces. », *J. Reine Angew. Math.* **420** (1991), p. 161–177.

[32] ———, « Polarized 4-manifolds, extremal Kähler metrics, and Seiberg-Witten theory », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 5, p. 653–662.

[33] C. LeBrun & M. Singer – « Existence and deformation theory for scalar-flat Kähler metrics on compact complex surfaces », *Invent. Math.* **112** (1993), no. 2, p. 273–313.

[34] A. Lichnerowicz – « Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes », *C. R. Acad. Sci. Paris* **244** (1957), p. 3011–3013.

[35] Z. Lu – « On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch », *Amer. J. Math.* **122** (2000), no. 2, p. 235–273.

[36] H. Luo – « Geometric criterion for Gieseker-Mumford stability of polarized manifolds », *J. Differential Geom.* **49** (1998), no. 3, p. 577–599.

[37] T. Mabuchi – « K-energy maps integrating Futaki invariants », *Tohoku Math. J. (2)* **38** (1986), no. 4, p. 575–593.

[38] ———, « Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I », *Osaka J. Math.* **24** (1987), no. 2, p. 227–252.

[39] ———, « Stability of extremal Kähler metrics », *Osaka J. Math.* **41** (2004), no. 3.

[40] ———, « Uniqueness of extremal Kähler metrics for an integral Kähler class », *Internat. J. Math.* **15** (2004), no. 6, p. 531–546.

[41] ———, « An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, I », *Invent. Math.* **159** (2005), no. 2, p. 225–243.

[42] ———, « An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, II », *J. Differential Geom.* (à paraître).

[43] Y. Matsushima – « Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne », *Nagoya Math. J.* **11** (1957), p. 145–150.

[44] D. Mumford – « Stability of projective varieties », *Enseignement Math. (2)* **23** (1977), no. 1-2, p. 39–110.

[45] D. Mumford, J. Fogarty & F. Kirwan – *Geometric invariant theory*, 3e éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[46] S.T. Paul & G. Tian – « Algebraic and analytic K-stability », arXiv : `math.DG/0405530`.

[47] D.H. Phong & J. Sturm – « Stability, energy functionals, and Kähler-Einstein metrics », *Comm. Anal. Geom.* **11** (2003), no. 3, p. 565–597.

[48] ______, « Scalar curvature, moment maps, and the Deligne pairing », *Amer. J. Math.* **126** (2004), no. 3, p. 693–712.

[49] Y. Rollin & M. Singer – « Non-minimal scalar-flat Kähler surfaces and parabolic stability », *Invent. Math.* **162** (2005), no. 2, p. 235–270.

[50] J. Ross – « Instability of polarised algebraic varieties », PhD thesis, Imperial College, 2003.

[51] J. Ross & R. Thomas – « An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics », *J. Differential Geom.* **72** (2006), no. 3, p. 429–466.

[52] ______, « A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties », arXiv : `math.AG/0412519`, .

[53] W.-D. Ruan – « Canonical coordinates and Bergmann metrics », *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 3, p. 589–631.

[54] S. Semmes – « Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds », *Amer. J. Math.* **114** (1992), no. 3, p. 495–550.

[55] C.T. Simpson – « Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 4, p. 867–918.

[56] G. Tian – « On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$ », *Invent. Math.* **89** (1987), no. 2, p. 225–246.

[57] ______, « On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds », *J. Differential Geom.* **32** (1990), no. 1, p. 99–130.

[58] ______, « On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class », *Invent. Math.* **101** (1990), no. 1, p. 101–172.

[59] ______, « The K-energy on hypersurfaces and stability », *Comm. Anal. Geom.* **2** (1994), no. 2, p. 239–265.

[60] ______, « Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature », *Invent. Math.* **130** (1997), no. 1, p. 1–37.

[61] ______, « Bott-Chern forms and geometric stability », *Discrete Contin. Dynam. Systems* **6** (2000), no. 1, p. 211–220.

[62] ______, *Canonical metrics in Kähler geometry*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000, Notes taken by Meike Akveld.

[63] ______, « Extremal metrics and geometric stability », *Houston J. Math.* **28** (2002), no. 2, p. 411–432, Special issue for S. S. Chern.

[64] K. Uhlenbeck & S.-T. Yau – « On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles », *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), no. S, suppl., p. S257–S293, Frontiers of the mathematical sciences : 1985 (New York, 1985).

[65] E. Viehweg – *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 30, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[66] S.-T. Yau – « Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), no. 5, p. 1798–1799.

[67] ———, « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, p. 339–411.

[68] ———, « Open problems in geometry », in *Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 1–28.

[69] S. Zelditch – « Szegö kernels and a theorem of Tian », *Internat. Math. Res. Notices* (1998), no. 6, p. 317–331.

[70] S. Zhang – « Heights and reductions of semi-stable varieties », *Compositio Math.* **104** (1996), no. 1, p. 77–105.

Olivier BIQUARD

CNRS et Université Louis Pasteur
IRMA
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg cedex
E-mail : biquard@math.u-strasbg.fr