Séminaire BOURBAKI Juin 2004
56e année, 2003-2004, nº 936, p. 301 à 328

CAPACITÉ ANALYTIQUE ET LE PROBLÈME DE PAINLEVÉ

par **Hervé PAJOT**

1. INTRODUCTION

Nous dirons qu'un compact E du plan complexe est *effaçable* pour les fonctions holomorphes bornées si pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant E, toute fonction holomorphe bornée $f : U \setminus E \to \mathbb{C}$ admet une extension analytique dans U tout entier. Le *problème de Painlevé* consiste à donner une caractérisation métrique et/ou géométrique de ces ensembles effaçables. À ma connaissance, cette question est explicitement posée pour la première fois dans un article de Lars Ahlfors [1] en 1947. Dans ce papier, il introduit la capacité analytique $\gamma(E)$ définie par

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| \mid f : \mathbb{C} \setminus E \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est analytique et bornée avec } \|f\|_\infty \leqslant 1\}$$

(où $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$) et il démontre que le compact E est effaçable si et seulement si $\gamma(E) = 0$. Cependant, comme l'écrit Ahlfors lui-même, cette réponse n'est pas satisfaisante, dans la mesure où l'étude de la capacité analytique n'est pas aisée. Avant la caractérisation des ensembles effaçables donnée par X. Tolsa [48] en 2003, les résultats connus étaient les suivants. Dans les faits 1, 2, 3 et 4, E est un compact du plan complexe.

Fait 1. — Si $H^1(E) = 0$ (où H^1 désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1), alors E est effaçable.

Fait 2. — Si la dimension de Hausdorff de E (que nous noterons Hdiam(E)) est strictement plus grande que 1, alors E n'est pas effaçable.

Les faits 1 et 2 traduisent l'idée intuitive que la propriété d'être effaçable ou non devrait dépendre de la taille de l'ensemble. Ainsi, d'après un théorème de Riemann, un singleton est effaçable. D'un autre côté, grâce au théorème de représentation de Riemann, nous pouvons facilement nous convaincre qu'un continuum (c'est-à-dire un ensemble compact et connexe) du plan complexe qui n'est pas réduit à un point ne l'est pas. Cependant, des exemples dus à Vitushkin, Ivanov et Garnett montrent que les seules considérations de taille ne suffisent pas à caractériser les ensembles effaçables. Les propriétés de rectifiabilité, c'est-à-dire d'approximation par des courbes lipschitziennes, doivent aussi jouer un rôle. Remarquons que les faits 1 et 2 impliquent que le cas « intéressant » est celui des compacts du plan de dimension de Hausdorff 1 qui satisfont à $H^1(E) > 0$.

Fait 3. — Supposons que E soit contenu dans une courbe lipschitzienne Γ. Alors, E est effaçable si et seulement si $H^1(E) = 0$.

Fait 4. — Si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe lipschitzienne Γ.

Notons que le fait 1 implique le sens indirect du fait 3 et que celui-ci implique le sens direct du fait 4. Les démonstrations des faits 3 et 4 sont beaucoup plus difficiles que celles des faits 1 et 2. Alors que ces énoncés semblent plutôt liés à l'analyse complexe, leurs preuves requièrent des techniques fines d'analyse réelle (théorie des intégrales singulières de Calderón-Zygmund, en particulier dans les espaces non doublants) et de théorie de la mesure géométrique (problème du voyageur de commerce géométrique de Peter Jones, théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes). La condition de finitude de la mesure de Hausdorff dans l'énoncé du fait 4 est nécessaire. La solution proposée par Tolsa se passe de cette condition et donne donc une caractérisation complète des ensembles effaçables. Les progrès sur le problème de Painlevé ont été relativement lents. Il faut souligner que l'intérêt pour la capacité analytique a été relancé par les travaux de A.G. Vituskhin en théorie de l'approximation rationnelle [52] dans les années 1960. Le fait 1 est généralement attribué à Paul Painlevé lui-même [38]. Le fait 2 apparaît (sous une forme un peu différente) dans l'article de Lars Ahlfors [1]. Avant qu'une preuve complète en soit donnée, l'énoncé du fait 3 s'appelait « Conjecture de Denjoy ». En effet, A. Denjoy [14] l'avait démontré dans le cas où la courbe Γ est une droite et il pensait que sa démonstration s'étendait au cas des courbes lipschitziennes générales. Il n'en était rien, comme l'ont remarqué L. Ahlfors et A. Beurling [2]. En 1978, A.P. Calderón [3] démontrait la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens (à condition que la constante de Lipschitz soit suffisamment petite). Un corollaire de ce résultat (connu des experts, mais pas de Calderón) était le fait 3. Le fait 4 avait été conjecturé par A.G. Vitushkin (sans d'ailleurs l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$ et sous une forme légèrement différente, voir section 2.1.2). À la suite d'une série de travaux de M. Christ, P. Jones, P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera entre autres, Guy David [9] donnera une preuve complète du fait 4 en 1998. Un outil d'apparence élémentaire joue un rôle important dans cette histoire. Il s'agit de la courbure de Menger. Étant donnés 3 points z_1, z_2, z_3 distincts et non alignés du plan complexe $\mathbb{C}$, on définit leur courbure de Menger par

$$c(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{R(z_1, z_2, z_3)}$$

où $R(z_1, z_2, z_3)$ est le rayon du cercle circonscrit aux trois points. Si ces points ne sont pas distincts ou sont alignés, on pose $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Si μ est une mesure de Radon positive dans $\mathbb{C}$, on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \iiint c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de Tolsa.

THÉORÈME 1.1 (X. Tolsa). — *Soit E un compact du plan complexe. Alors, E n'est pas effaçable si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive* (*non nulle*) *μ telle que*

(T1) *Il existe $C_0 > 0$ tel que $\mu(D(z, r)) \leqslant C_0 r$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $r > 0$ ($D(z, r)$ est le disque ouvert de centre z et de rayon r).*

(T2) $c^2(\mu) < +\infty$.

Nous verrons dans la suite que (T1) est une condition sur la taille de l'ensemble, alors que (T2) est une condition de nature plus géométrique. Dans ce texte, une mesure satisfaisant (T1) sera dite à croissance linéaire (du volume).

Dans le paragraphe 2, nous introduirons les outils et les techniques d'analyse réelle et de théorie de la mesure géométrique dont nous aurons besoin pour expliquer la stratégie de démonstration de Tolsa. En particulier, nous verrons comment l'analyse harmonique s'est débarrassée de la condition de doublement du volume (travaux de Nazarov-Treil-Volberg et de Tolsa). Nous montrerons aussi comment déduire les faits 1, 2, 3 et 4 du théorème 1.1. Les démonstrations directes sont souvent plus simples, mais ceci permettra au lecteur de se convaincre que le résultat de Tolsa contient ce qui était connu avant et de se familiariser avec les diverses notions introduites au cours du texte. Dans le paragraphe 3, nous expliquerons comment la caractérisation de Tolsa permet de résoudre le problème de l'invariance par homéomorphismes bilipschitziens de la classe des ensembles effaçables. Nous discuterons dans le paragraphe 4 de problèmes ouverts autour de la capacité analytique et de la longueur de Favard, qui nous permettront de voir que la courbure de Menger n'est pas un objet aussi simple qu'il n'y paraît. Enfin, le paragraphe 5 sera consacré au cas (largement ouvert) de la dimension supérieure.

Je remercie L. Chevalier, G. David, J. Garnett, Y. Meyer, X. Tolsa, J. Verdera et A. Volberg pour leurs remarques sur des versions préliminaires de ce texte. L'auteur est partiellement supporté par le réseau européen TMR « Harmonic Analysis and Related Problems (HARP) ».

Je dédie avec beaucoup d'amour ces quelques lignes à mon fils, Hervé-Maurice, né et décédé le même jour. Un sombre jour de mai 2004.

2. DE L'ANALYSE COMPLEXE VERS L'ANALYSE RÉELLE

Nous allons dans un premier temps voir comment les propriétés de rectifiabilité peuvent être contrôlées par des quantités géométriques (comme les nombres β de Peter Jones et la courbure de Menger). Cela nous permettra de relier ces propriétés de rectifiabilité à la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy (voir par exemple le théorème 2.13). Nous pourrons alors donner quelques idées de démonstration du fait 4 (voir le début de la section 2.2.2) et du théorème 1.1.

2.1. Nombres géométriques et rectifiabilité

2.1.1. Mesures et dimension de Hausdorff. — Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $d \in \mathbb{R}^+$. Nous définissons la d-mesure de Hausdorff de E par

$$H^d(E) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf \left\{\textstyle\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^d \mid E \subset \cup_i U_i, \operatorname{diam} U_i < \delta\right\}\right).$$

Notons qu'ici les recouvrements considérés sont (au plus) dénombrables. Alors, H^d est une mesure de Borel régulière. Elle n'est pas de Radon (sauf si $d = n$) car elle n'est pas localement finie. Si $d = 0$, nous retrouvons la mesure de comptage. Pour une courbe de Jordan rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$, $H^1(\Gamma)$ est sa longueur. Enfin, H^n est égale (à une constante multiplicative près) à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Par un argument élémentaire, nous pouvons démontrer que $\inf\{s \mid H^s(E) = 0\} = \sup\{t \mid H^t(E) = +\infty\}$. Cette valeur commune est appelée la dimension de Hausdorff de E. Nous la noterons $\mathrm{Hdiam}(E)$. Par exemple, la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\log(2)/\log(3)$, celle d'une courbe de longueur finie est 1. Enfin, $\mathrm{Hdiam}(\mathbb{R}^n) = n$. Un point-clé pour nous est le lemme de Frostman (voir [27] pour une démonstration, ainsi que pour plus de détails sur la théorie de la mesure géométrique) que voici :

THÉORÈME 2.1. — *Soit E un borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit $d \geqslant 0$. Alors, $H^d(E) > 0$ si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive μ (à support compact) telle que*

(i) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ (*μ est une mesure de probabilité*).

(ii) *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\mu(B(x, R)) \leqslant C_0 R^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $R > 0$. Ici, et dans la suite, $B(x, R)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon R.*

Nous pouvons maintenant voir que le théorème de Tolsa implique le fait 1. En effet, soit E un compact du plan complexe tel que $H^1(E) = 0$. Alors, d'après le lemme de Frostman, E ne peut supporter une mesure μ à croissance linéaire (condition (T1) du théorème 1.1). Donc, E est effaçable. Signalons que le fait 1 peut se démontrer directement (et facilement) grâce à la formule de Cauchy (voir le théorème 64 dans [40]).

2.1.2. Rectifiabilité. — Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit d-rectifiable (au sens de la théorie géométrique de la mesure) s'il existe une famille dénombrable d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ telles que $H^d(E \setminus \cup_j f_j(\mathbb{R}^d)) = 0$. Une courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$ est 1-rectifiable. D'un autre côté, un ensemble E est dit purement non d-rectifiable si et seulement si $H^d(E \cap F) = 0$ pour tout ensemble d-rectifiable F de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas particulier où $d = 1$, cette condition est équivalente à $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$. Donc, le fait 4 dit que si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si E est purement non 1-rectifiable. Un exemple d'un tel ensemble est l'ensemble de Cantor 4-coins que nous allons maintenant construire. Soit $E_0 = [0,1]^2$ le carré unité dans $\mathbb{C}$. Découpons E_0 en 16 carrés égaux de longueur de côté $\frac{1}{4}$. L'ensemble E_1 est l'union des 4 carrés situés dans les coins de E_0. Puis, on découpe chacun des 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble E_2 est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de E_1. En itérant cette construction, nous pouvons exhiber une suite de sous-ensembles $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$, chacun des E_j étant formé de 4^j carrés de longueur de côté 4^{-j} qui sont situés dans les coins des carrés de E_{j-1}. Soit $\mathcal{C} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$. Alors, $\mathrm{Hdiam}(\mathcal{C}) = 1$ et $H^1(\mathcal{C}) = \sqrt{2}$. Le fait que $\mathcal{C}$ est purement non rectifiable découle de la remarque suivante. Si Γ est une courbe lipschitzienne du plan complexe, sa projection dans toute direction sauf peut-être une (penser au cas où Γ est une droite) est de mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}$) non nulle. Il en est de même de tout sous-ensemble de Γ de mesure strictement positive. Donc, s'il existait une courbe lipschitzienne Γ telle que $H^1(\mathcal{C} \cap \Gamma) > 0$ alors $\mathcal{C}$ ne pourrait pas avoir des projections de mesure de Lebesgue nulle dans deux directions distinctes. Ce qui est pourtant le cas ! Donc, $\mathcal{C}$ est purement non rectifiable. L'ensemble de Cantor 4-coins est un exemple d'ensemble de 1-mesure de Hausdorff non nulle mais qui est effaçable (voir [16]).

Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$ se décompose en une bonne et une mauvaise partie :

$$E = E_{\mathrm{rect}} \cup E_{\mathrm{nonrect}}$$

où E_{rect} (respectivement E_{nonrect}) est d-rectifiable (respectivement purement non d-rectifiable). Il est important de noter qu'il existe diverses caractérisations des ensembles rectifiables/purement non rectifiables (en termes de densité, d'existence de tangentes, de taille des projections, voir [27]) dans le cas des ensembles de mesure de Hausdorff finie. Cependant, les propriétés de rectifiabilité pour des ensembles qui ne sont pas de mesure de Hausdorff σ-finie sont très mal connues. Donnons maintenant un critère de non rectifiabilité pour les sous-ensembles du plan complexe. Commençons par une définition. Soit $E \subset \mathbb{C}$. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, notons $\Pi_\theta(E)$ la projection orthogonale de E sur la direction θ et $|\Pi_\theta(E)|$ la mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}$) de cette projection. Nous définissons la longueur de Favard de E par

$$\mathrm{Fav}(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\Pi_\theta(E)| d\theta.$$

Le théorème des projections de Besicovitch s'énonce ainsi :

THÉORÈME 2.2. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ tel que $H^1(E) < +\infty$. Alors, E est purement non rectifiable si et seulement si* $\mathrm{Fav}(E) = 0$.

Donc, d'après le fait 4, si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $\mathrm{Fav}(E) = 0$. Vituskhin avait conjecturé ce résultat sans l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$. Nous discuterons de ce cas dans le paragraphe 4.

2.1.3. Le problème géométrique du voyageur de commerce. — Nous allons, dans ce paragraphe, donner des conditions quantitatives de rectifiabilité. Le point de départ est un article de P. Jones [18] qui a eu l'idée d'introduire les nombres β qui mesurent en tout point et à toutes les échelles la qualité de l'approximation d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ par des droites. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, nous définissons

$$\beta_\infty^E(x,t) = \inf_L \sup_{y \in E \cap B(x,t)} \frac{d(y,L)}{t}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les droites L de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\beta(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \beta_\infty^E(x,t)^2 d\mathcal{L}^n(x) \frac{dt}{t^n}$, où $\mathcal{L}^n$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Si E est, par exemple, le graphe d'une fonction lipschitzienne, alors en presque tout $x \in E$, il existe une tangente au graphe et donc $\beta_\infty^E(x,t)$ tend vers 0 avec t. En fait, nous allons voir que les propriétés de rectifiabilité sont liées à des estimations L^2 des nombres β.

THÉORÈME 2.3 ([18] [37]). — *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble E est contenu dans une courbe de longueur finie Γ si et seulement si $\beta(E) < +\infty$. De plus, si c'est le cas,*

$$C^{-1}(\beta(E) + \mathrm{diam}\, E) \leqslant \inf_{\Gamma \supset E} l(\Gamma) \leqslant C(\beta(E) + \mathrm{diam}\, E)$$

où $C \geqslant 1$ est une constante ne dépendant que de n.(1)

Ce résultat apparaît comme une version géométrique du problème classique du voyageur de commerce, dans la mesure où l'ensemble E des villes que le voyageur doit visiter peut être infini. Le théorème donne alors une condition nécessaire et suffisante pour que le voyageur puisse remplir sa tâche en un « temps fini ». Nous allons maintenant donner une version du théorème 2.3 qui a un analogue pour des ensembles de dimension strictement plus grande que 1. Commençons par une définition. Nous dirons qu'un ensemble (non réduit à un point) $E \subset \mathbb{R}^n$ est Ahlfors-régulier (de dimension 1) s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$C_0^{-1} R \leqslant H^1(E \cap B(x,R)) \leqslant C_0 R$$

(1) Très récemment, R. Schul a démontré dans [44] que la constante C peut être choisie indépendante de la dimension ambiante n.

pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} E[$. Notons qu'un tel ensemble est alors de dimension de Hausdorff égale à 1. Cette condition d'Ahlfors-régularité impose peu de restriction sur la géométrie de l'ensemble. Par exemple, sont Ahlfors-réguliers des ensembles rectifiables comme les graphes lipschitziens et des ensembles purement non rectifiables comme l'ensemble de Cantor 4 coins. Une courbe Ahlfors-régulière Γ est une courbe localement rectifiable telle qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $H^1(\Gamma \cap B(x,r)) \leqslant C_0 r$ pour tout $x \in \Gamma$, tout $r > 0$. Notons que, par connexité, nous avons aussi $H^1(\Gamma \cap B(x,r)) \geqslant C_0^{-1} r$ si $x \in \Gamma$ et r est assez petit. Suivant David et Semmes [11] [12], nous dirons qu'un ensemble Ahlfors-régulier E est uniformément rectifiable s'il existe une courbe Ahlfors-régulière Γ telle que $E \subset \Gamma$.

Théorème 2.4. — *Supposons que $E \subset \mathbb{C}$ soit compact et Ahlfors-régulier (de dimension 1).*

(i) *L'ensemble E est uniformément rectifiable si et seulement si il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} E[$,*

$$\int_{y \in E \cap B(x,R)} \int_0^R \beta_\infty^E(y,t)^2 \, dH^1(y) \frac{dt}{t} \leqslant CR.$$

(ii) *L'ensemble E est rectifiable si et seulement si $\int_0^{\operatorname{diam} E} \beta_\infty^E(x,t)^2 \frac{dt}{t} < \infty$ pour H^1-presque tout $x \in E$.*

Le (i) s'obtient en adaptant les arguments de la démonstration du théorème 2.3. Il existe bien d'autres caractérisations des ensembles uniformément rectifiables (voir [11] et [12]). Le (ii) découle en partie de (i) (voir [39]).

2.1.4. La courbure de Menger. — Nous avons rencontré dans l'introduction un autre « nombre géométrique », à savoir la courbure de Menger. Son côté magique repose dans la formule élémentaire suivante.

$$(1) \quad \left(\frac{4S(z_1,z_2,z_3)}{|z_1 - z_2||z_2 - z_3||z_3 - z_1|} \right)^2 = c(z_1,z_2,z_3)^2 = \sum_\sigma \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)})\overline{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})}}$$

où $S(z_1,z_2,z_3)$ est l'aire du triangle de sommets z_1, z_2 et z_3, et la somme se fait sur les permutations σ sur $\{1,2,3\}$. Le membre de gauche mesure la « platitude » du triplet z_1, z_2, z_3, alors que nous verrons un peu plus tard que le membre de droite est relié à l'intégrale de Cauchy. Ainsi, la courbure de Menger va nous permettre de faire le lien entre propriétés géométriques (rectifiabilité) et propriétés analytiques (continuité de l'opérateur de Cauchy). Commençons par le premier aspect.

Théorème 2.5 ([21]). — *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ tel que $H^1(E) < +\infty$. Si $c^2(E) < +\infty$, alors E est 1-rectifiable.*

Ici, $c^2(E)$ désigne la courbure de Menger de la restriction de H^1 à E. Dans le cas Ahlfors-régulier, la courbure de Menger permet de caractériser la rectifiabilité uniforme.

Théorème 2.6. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension* 1. *Alors, E est uniformément rectifiable si et seulement si il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout disque D de $\mathbb{C}$,*

$$\iiint_{(E\cap D)^3} c(x,y,z)^2 dH^1(x)dH^1(y)dH^1(z) \leqslant C_0 \operatorname{diam} D. \tag{2}$$

La condition (2) s'appelle la condition de courbure locale. Ce résultat est énoncé et démontré dans [30]. Nous pouvons aussi le voir comme une conséquence du théorème 2.4(i) et des deux résultats suivants qui font le lien entre courbure de Menger et nombres β (voir [40]).

Attention, les « exposants » dans les nombres β précisent à quel ensemble les β réfèrent.

Théorème 2.7. — *Soit Γ une courbe rectifiable de $\mathbb{C}$ et soit μ une mesure de Radon positive telle que* suppμ *soit un sous-ensemble compact de Γ. Supposons que μ est à croissance linéaire du volume* (*c'est-à-dire vérifie* (T1)) *avec une constante* 1/2 *:*

$$\mu(D) \leqslant \operatorname{diam} D \text{ pour tout disque } D \subset \mathbb{C}.$$

Alors, $c^2(\mu) \leqslant C \int_{\mathbb{C}} \int_0^{+\infty} \beta_\infty^\Gamma(x,t)^2 d\mu(x)\frac{dt}{t}$, où $C > 0$ est une constante absolue. Si de plus, Γ est Ahlfors-régulière, alors $c^2(\mu) \leqslant C\mu(\mathbb{C})$ où $C > 0$ ne dépend que de la constante de régularité de Γ.

Théorème 2.8. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension* 1. *Alors, pour tout disque D de $\mathbb{C}$,*

$$\int_{E\cap D}\int_0^{\mathrm{diamD}} \beta_\infty^E(x,t)^2 dH^1(x)\frac{dt}{t} \leqslant C \iiint_{(E\cap C\cdot D)^3} c(x,y,z)^2 dH^1(x)dH^1(y)dH^1(z)$$

où $C > 0$ ne dépend que de la constante de régularité de E.

Dans la seconde intégrale, $C \cdot D$ désigne le disque de même centre que D mais de diamètre $C \cdot \operatorname{diam} D$. Il est important de noter que les nombres β sont plus faciles à manipuler en pratique que la courbure de Menger, d'où l'intérêt d'avoir des estimations qui permettent de passer de l'un à l'autre. Nous allons maintenant voir comment le théorème de Tolsa implique les faits 3 et 4. Tout d'abord, soit $E \subset \Gamma$, où Γ est une courbe rectifiable, tel que $H^1(E) > 0$. Alors, d'après le lemme de Frostman, il existe une mesure de probabilité μ supportée sur E à croissance linéaire. Donc, d'après les théorèmes 2.3 et 2.7, $c^2(\mu) < +\infty$. D'où, E n'est pas effaçable. Passons maintenant au fait 4 et supposons que $E \subset \mathbb{C}$ ne soit pas effaçable. Alors, il existe une mesure μ supportée sur E qui est à croissance linéaire et de courbure finie. Donc, d'après le théorème 2.5 (et avec un peu de travail), le support de μ est rectifiable. D'où, il existe une courbe lipschitzienne Γ telle que $H^1(E \cap \Gamma) > 0$.

Il est amusant de noter que la courbure de Menger d'une mesure supportée sur un ensemble de dimension plus grande que 1 peut être finie, sans que la géométrie de cet ensemble n'entre en compte. En effet, nous avons le

Théorème 2.9 ([28]). — *Soit* $h : [0,+\infty] \to [0,\infty]$ *une fonction strictement croissante telle que* $\int_0^{+\infty} r^{-3}h^2(r)dr < \infty$ *et soit* μ *une mesure de Borel finie dans* $\mathbb{C}$ *telle que, pour tout disque* D *de rayon* $r > 0$, $\mu(D) \leqslant Ch(r)$. *Alors,*

$$c^2(\mu) \leqslant C\mu(\mathbb{C}) \int_0^{+\infty} r^{-3}h^2(r)dr,$$

où $C > 0$ *est une constante absolue.*

En particulier, si E est de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1, alors il existe $d > 1$ tel que $H^d(E) > 0$. Donc, d'après le lemme de Frostman, il existe une mesure de probabilité μ supportée par E telle que $\mu(D) \leqslant CR^d$ pour tout disque D de $\mathbb{C}$ de rayon $R > 0$. Or, d'après le théorème 2.9 (prendre $h(t) = t^d$), $c^2(\mu) < +\infty$. Donc, E n'est pas effaçable. Le théorème de Tolsa implique donc le fait 2. Pour une preuve directe, voir [40], théorème 64.

2.2. Analyse harmonique sans doublement du volume

2.2.1. La théorie classique. — Un espace de type homogène au sens de Coifman-Weiss est un triplet (X, δ, μ) où X est un ensemble (pour nous, un sous-ensemble de $\mathbb{C}$), δ est une distance (ou une quasi-distance) sur X et μ est une mesure (de Radon positive), supportée sur X, qui satisfait la condition de doublement du volume, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_{\mathrm{dv}} \geqslant 1$ telle que

$$\text{(DV)} \qquad \mu(B(x,2R)) \leqslant C_{\mathrm{dv}}\mu(B(x,R))$$

pour toute boule $B(x,R)$ relativement à δ de centre $x \in X$ et de rayon $R > 0$. Beaucoup de faits classiques d'analyse dans les espaces euclidiens restent vrais dans ces espaces homogènes. Le point-clé est que la condition (DV) permet d'utiliser des théorèmes de recouvrement de type Vitali (voir par exemple le premier chapitre de [45]). Le fait que ces espaces soient un cadre assez général pour faire de l'analyse harmonique apparaît après les travaux de Coifman et Weiss [7] au début des années 1970. Il est clair que $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne et de sa mesure de Lebesgue est un espace de type homogène. Il en est de même si X est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ qui est Ahlfors-régulier (de dimension quelconque d). Dans ce cas, on munit X de la distance euclidienne induite et de la restriction de la mesure de Hausdorff H^d sur X (et c'est ce que nous ferons systématiquement dans la suite). En particulier, peuvent être équipés d'une structure d'espace homogène toute droite (vue comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$), tout graphe lipschitzien de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le graphe, à une rotation près d'une fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), ou l'ensemble de Cantor 4-coins. Décrivons maintenant quelques éléments de la théorie des intégrales singulières dans les espaces homogènes (voir par exemple [5] pour plus de détails), en nous restreignant au cas des espaces homogènes contenus dans $\mathbb{C}$.

Un noyau standard antisymétrique pour la dimension 1 est une fonction $K(x,y)$: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\setminus\{x=y\}\to\mathbb{R}$ telle qu'il existe des constantes $s\in\,]0,1]$ et $C>0$ vérifiant, pour tout $x\neq y$,

(i) $K(x,y)=-K(y,x)$;
(ii) $|K(x,y)|\leqslant C\frac{1}{|x-y|}$;
(iii) $|K(x,y)-K(x',y)|\leqslant C\frac{|x-x'|^s}{|x-y|^{1+s}}$ si $|x-x'|<\frac{1}{2}|x-y|$.

Ainsi, le comportement de $K(x,y)$ est comparable à celui de $1/(x-y)$. Considérons maintenant une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, si μ vérifie (DV), l'espace homogène considéré est le support de la mesure muni de la distance euclidienne induite et de la mesure μ. Nous définissons l'opérateur tronqué T_μ^ε associé au noyau standard K par

$$T_\mu^\varepsilon(f)(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)d\mu(y)$$

pour $f\in L^1(\mu)$ et $x\in\mathbb{C}$.

Nous dirons que l'opérateur T_μ associé au noyau K est continu sur $L^p(\mu)$ s'il existe $C>0$ telle que pour tout $\varepsilon>0$, toute fonction $f\in L^p(\mu)$,

$$\int|T_\mu^\varepsilon(f)(x)|^p d\mu(x)\leqslant C\int|f(x)|^p d\mu(x).$$

En d'autres termes, T_μ^ε est borné sur $L^p(\mu)$ indépendamment de ε. Cette définition de la continuité L^p est équivalente à la plupart des définitions disponibles dans la littérature et permet d'éviter d'avoir à définir proprement $T_\mu(f)$. Un premier fait important est que si μ satisfait la condition de doublement du volume (et donc son support est un espace homogène) et est à croissance linéaire, alors le théorème de Calderón-Zygmund nous dit que, si un opérateur T_μ est continu sur $L^2(\mu)$, alors il est continu sur $L^p(\mu)$ pour $1<p<\infty$ et il est de type faible $(1,1)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C>0$ indépendante de ε telle que, pour tout $M>0$,

$$\mu(\{x\in\mathbb{C}\mid|T_\mu^\varepsilon(f)(x)|>M\})\leqslant\frac{C}{M}\int|f|d\mu$$

pour toute fonction f dans $L^1(\mu)$. Ainsi, compte tenu de ce résultat, la continuité L^2 qui peut être obtenue par des méthodes d'analyse de Fourier joue un rôle crucial dans cette théorie. Considérons par exemple le cas du noyau de Cauchy $K(x,y)=1/(x-y)$. Dans ce cas, nous noterons $\mathcal{C}_\mu$ l'opérateur associé. Si la mesure μ est la restriction de H^1 à $\mathbb{R}$, l'opérateur s'appelle l'opérateur de Hilbert et sa continuité L^2 s'obtient facilement en passant en transformée de Fourier et en appliquant le théorème de Plancherel. Dans le cas où μ est la restriction de H^1 à un graphe lipschitzien, le problème est plus ardu. Cette continuité a été conjecturée par Calderón et Zygmund dans les années 1950, puis démontrée par Calderón [3] dans le cas où la constante de

Lipschitz du graphe est assez petite. Le cas général a été résolu par Coifman, Mc Intosh et Meyer [6]. Il est amusant de noter que de nombreuses preuves très différentes ont été proposées depuis. Un problème important dans les années 1980 est alors d'établir des critères de continuité L^2 pour les opérateurs d'intégrales singulières, en s'inspirant du cas de l'opérateur de Cauchy. Le premier de ces critères a été obtenu par G. David et J.-L. Journé et porte le nom de théorème $T(1)$.

THÉORÈME 2.10. — *Soit μ une mesure doublante et à croissance linéaire, et soit K un noyau antisymétrique dans $\mathbb{C}$. Alors, T_μ est continu sur $L^2(\mu)$ si et seulement si, pour tout disque D de $\mathbb{C}$, tout $\varepsilon > 0$,*

$$\int_D |T_\mu^\varepsilon(\chi_D)(x)|^2 d\mu(x) \leqslant C\mu(D) \tag{3}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε et de D.

La condition (3) est équivalente au fait que $T_\mu(1)$ (quand on donne un sens convenable à l'image de la fonction 1 par l'opérateur T_μ) est dans l'espace BMO(μ) de John et Nirenberg, d'où le nom du théorème. Il existe un critère plus flexible (appelé théorème $T(b)$) pour lequel nous testons l'opérateur sur une fonction raisonnable b que nous pouvons choisir. Au lieu de le donner, nous allons en énoncer une version locale due à M. Christ [4], en ne considérant que le cas Ahlfors-régulier. Commençons par équiper un ensemble Ahlfors-régulier (de dimension 1) d'une famille de partitions qui joue le rôle des intervalles dyadiques de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 2.11. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Il existe une famille de partitions Δ_j, $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j \leqslant \operatorname{diam} E$, de E en « intervalles dyadiques » $Q \subset E$ avec :*

(i) *Si $j \geqslant k$, $Q \in \Delta_j$, $Q' \in \Delta_k$, alors soit $Q \cap Q' = \varnothing$, soit $Q' \subset Q$.*

(ii) *Si $Q \in \Delta_j$, alors*

$$C^{-1}2^j \leqslant \operatorname{diam} Q \leqslant C2^j$$
$$C^{-1}2^j \leqslant H^1(Q) \leqslant C2^j,$$

(où $C > 0$ ne dépend que de E). De plus, les « intervalles dyadiques » ont une petite frontière, au sens où

(iii) *Pour tout $Q \in \cup_j \Delta_j$, tout $\tau \in]0,1[$,*

$$H^1(\{z \in Q \mid d(z, E \setminus Q) \leqslant \tau \operatorname{diam} Q\}) \leqslant C\tau^{1/C} H^1(Q).$$

Notons que le nombre de fils d'un intervalle dyadique $Q \in \Delta_j$ (c'est-à-dire d'intervalles dyadiques de la génération suivante Δ_{j-1} contenus dans Q) est borné indépendamment de j. Le lecteur pourra vérifier aisément que, si $E = \mathbb{R}$, les intervalles dyadiques usuels, c'est-à-dire ceux de la forme $[k2^j, (k+1)2^j]$, satisfont les propriétés précédentes. Voir [8] pour une démonstration de 2.11, ainsi que [4] pour une construction dans le cas d'une mesure qui n'est que doublante. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier (de dimension 1) et soit $\Delta = \bigcup_j \Delta_j$ une famille d'intervalles dyadiques comme donnés par le théorème précédent. Un système de fonctions $\{b_Q, Q \in \Delta\}$ est dit *pseudo-accrétif* s'il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $Q \in \Delta$, $\|b_Q\|_\infty \leqslant C$ et $\left|\int_Q b_Q dH^1\right| \geqslant \varepsilon H^1(Q)$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème $T(b)$ local.

THÉORÈME 2.12. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1 et soit T_μ un opérateur d'intégrale singulière associé à un noyau standard anti-symétrique et défini par rapport à la mesure $\mu = H^1_E$ (restriction de H^1 sur E). Supposons qu'il existe un système pseudo-accrétif (b_Q) tel que $\|T^\varepsilon_\mu b_Q\| \leqslant C$ pour tout $Q \in \Delta$ et tout $\varepsilon > 0$. Alors, T_μ est borné sur $L^2(\mu)$.*

Le côté local vient du fait qu'ici, nous devons construire une fonction b_Q sur chaque intervalle dyadique Q alors que, dans le théorème $T(b)$ classique, la fonction test b est choisie une fois pour toutes et définie sur E tout entier. Celle-ci doit vérifier une condition de moyenne sur les intervalles dyadiques qui est identique à celle des b_Q, mais la condition L^∞ est remplacée par une condition du type BMO (du style de celles du théorème $T(1)$ en remplaçant la fonction caractéristique par son produit par b), qui est plus faible. Signalons que l'on passe de la version classique à la version locale du théorème $T(b)$ en posant $b_Q = b.\chi_Q$ et que, réciproquement, en « recollant » les b_Q, on peut construire une fonction b qui satisfait les hypothèses du théorème $T(b)$. Revenons à l'opérateur de Cauchy. Nous avons vu qu'il définit un opérateur borné (au sens L^2) sur les graphes lipschitziens. Mais, dans quelle mesure les propriétés de rectifiabilité du support de la mesure jouent-elles un rôle ? À la suite de travaux de G. David et S. Semmes [11], [12], P. Mattila, M. Melnikov et J. Verdera [30] ont démontré le résultat étonnant suivant.

THÉORÈME 2.13. — *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Notons μ la restriction de H^1 sur E. Alors, l'opérateur de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$ est bornée sur $L^2(\mu)$ si et seulement si E est uniformément rectifiable.*

Donnons une idée de la démonstration, car cela nous permettra de voir comment les ingrédients précédents peuvent être associés. Formellement, en oubliant les ε (voir [40] pour les détails techniques), la continuité L^2 de l'opérateur est équivalente, d'après le théorème $T(1)$, à

$$\int_D |\mathcal{C}_E(\chi_D)|^2 d\mu \leqslant C \operatorname{diam} D$$

pour tout disque D de $\mathbb{C}$. Ici, nous avons utilisé le fait qu'un ensemble Ahlfors-régulier muni de sa mesure de Hausdorff est un espace de type homogène afin de pouvoir utiliser le théorème $T(1)$. Or, d'après la formule magique (1) sur la courbure,

$$\begin{aligned}\int_D |\mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x)|^2 d\mu(x) &= \int_D \mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x)\overline{\mathcal{C}_\mu(\chi_D)(x)}d\mu(x)\\ &= \int_D\int_D\int_D \frac{1}{(y-x)\overline{\overline{(z-x)}}}d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)\\ &= 6\int_D\int_D\int_D c(x,y,z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z).\end{aligned}$$

Il en résulte que la continuité L^2 de C_μ est équivalente à la condition de courbure locale, qui est elle-même équivalente à la rectifiabilité uniforme (voir le théorème 2.6) ! Signalons que l'idée d'utiliser la courbure de Menger pour étudier l'opérateur de Cauchy apparaît pour la première fois dans [33].

2.2.2. Les théorèmes $T(1)$ *et* $T(b)$ *sans doublement.* — Essayons d'expliquer l'intérêt pour nous d'avoir des analogues dans le cas non homogène des théorèmes du style $T(1)$ en expliquant le plan de preuve d'un des sens du fait 4. Pour cela, considérons $E \subset \mathbb{C}$ tel que $H^1(E) < +\infty$ et $\gamma(E) > 0$. Commençons par le cas où E est Ahlfors-régulier (ce cas a été traité dans [30]).

Étape 1. — Puisque $\gamma(E) > 0$, il existe une fonction non constante, holomorphe, bornée $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et (quitte à multiplier f par une constante de module 1) $f'(\infty) = \gamma(E)$. Un argument standard [27] montre qu'il existe une fonction borélienne $h : E \to \mathbb{C}$ bornée telle que $f(z) = \int_E \frac{h(\xi)}{z-\xi} dH^1(\xi)$ pour tout $z \notin E$.

Étape 2. — L'idée (due à M. Christ dans [4]) est maintenant de construire à partir de h, en utilisant un argument de temps d'arrêt, un ensemble Ahlfors-régulier F et une fonction $b : F \to \mathbb{C}$ tels que $H^1(E \cap F) > 0$ et tels que les hypothèses du théorème $T(b)$ soient vérifées pour l'opérateur de Cauchy sur F muni de H^1_F (restriction de H^1 sur F). Comme cet espace est de type homogène, on en déduit que l'opérateur de Cauchy est borné sur $L^2(F)$.

Étape 3. — D'après le théorème 2.13, F est uniformément rectifiable et donc il existe une courbe rectifiable Γ telle que $H^1(E \cap \Gamma) > 0$.

Le cas général a été résolu par G. David [9] (voir aussi [35]), après un premier pas important avec P. Mattila dans [10]. Expliquons rapidement comment modifier la preuve précédente. L'étape 1 est inchangée. Un des problèmes pour l'étape 2 était le manque d'un théorème de type $T(b)$ dans le cadre des espaces qui ne sont pas de type homogène. Guy David comblera cette lacune (voir plus bas) mais c'est en partie ce problème qui a motivé le développement de l'analyse harmonique dans ces espaces. Concernant l'étape 3, le même genre d'argument que pour démontrer le théorème 2.13 permet de passer d'estimations sur l'opérateur de Cauchy à des estimations sur la courbure de Menger puis nous pouvons appliquer le théorème 2.5 (pour obtenir une partie rectifiable dans E).

Une des premières versions du théorème $T(1)$ dans le cas non doublant concerne l'opérateur de Cauchy ; elle est due indépendamment à Nazarov-Treil-Volberg [34] et Tolsa [46]. Ce résultat s'énonce ainsi.

Théorème 2.14. — *Soit μ une mesure de Borel positive qui est à croissance linéaire. Alors, l'opérateur de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$ est borné sur $L^2(\mu)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_D |\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(\chi_D)|^2 d\mu \leqslant C\mu(D),$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout disque D de $\mathbb{C}$.

Notons que la condition de croissance linéaire est nécessaire. Le lecteur attentif aura noté que l'énoncé du théorème 2.14 est le même que celui du théorème $T(1)$ dans le cas doublant. Ce qui est tout à fait incroyable ! La démonstration de Tolsa repose sur la courbure de Menger et ne permet pas de traiter le cas de noyaux plus généraux. La stratégie (qui s'inspire de celle utilisée dans le cas doublant) de Nazarov-Treil-Volberg leur permettra de considérer tous les noyaux standards (voir [36] par exemple). Expliquons le schéma (maintenant classique) de démonstration d'un théorème de type $T(1)$ ou $T(b)$ dans le cas d'un ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ de dimension 1. Rappelons que, dans ce cas, la mesure μ considérée est la restriction de H^1 à E. Tout d'abord, équipons E d'une famille d'intervalles dyadiques comme dans le théorème 2.11. Une idée naïve pour construire une telle famille est de tout simplement considérer la famille des intersections de tous les carrés dyadiques usuels de $\mathbb{C}$ avec E. Ceci ne marche pas aussi simplement, mais cela donne une bonne idée de ce à quoi doit ressembler un « intervalle dyadique » de E. Considérons la base de Haar $(b_Q)_{Q\in\Delta}$ associée. Le but est alors d'estimer les coefficients de T_μ^ε dans cette base, c'est-à-dire les $\langle T_\mu^\varepsilon(b_Q), b_R\rangle$ pour Q, R dans Δ. Pour cela, nous devons distinguer suivant les positions relatives de R et Q. Ici, vont jouer un rôle important le fait que $\mu(Q)$ est comparable à $\operatorname{diam} Q$ et la propriété de « petite frontière » des « intervalles » de Δ. Pour voir l'importance de la dernière propriété, considérons le cas où Q et R sont très proches. Alors, dans la mesure où le noyau $K(x,y)$ se comporte comme $1/(x-y)$, ses singularités sont proches de la diagonale $x = y$. La propriété de « petite frontière », qui dit que la mesure de l'ensemble des points $x \in Q$ et des points $y \in R$ qui sont très proches est petite, permet de compenser l'effet des singularités du noyau. Sous de bonnes hypothèses, la décroissance des coefficients de T_μ^ε dans la base de Haar au voisinage de la diagonale permet de démontrer la continuité L^2 de T_μ, en appliquant un argument classique du style lemme de Schur (voir [8]). Si notre ensemble E est seulement doublant, ces arguments s'adaptent (voir [4]). Dans le cas où l'espace E n'est plus homogène mais la restriction de H^1 à E est à croissance linéaire, il est possible de construire une famille d'intervalles dyadiques (voir [10]), puis d'adapter les idées précédentes pour obtenir un théorème du style $T(b)$ (voir [9]). Mais, tout ceci est long et très technique. L'idée de Nazarov-Treil-Volberg est de ne pas essayer de construire une bonne famille d'intervalles dyadiques, mais de considérer pour tout vecteur $\vec{u}$, la famille de carrés dyadiques obtenus en translatant de $\vec{u}$ la famille usuelle de carrés dyadiques de $\mathbb{C}$. En intersectant ces carrés avec E, ils obtiennent une collection indexée par $\vec{u}$, et notée $\Delta_{\vec{u}}$, d'intervalles dyadiques. Il est clair que pour des choix aléatoires de $\vec{u}$, la famille $\Delta_{\vec{u}}$ ne satisfait pas les conclusions du théorème 2.11 et que, si nous estimons la matrice de T dans la base de Haar associée à $\Delta_{\vec{u}}$, nous n'obtenons pas la bonne décroissance près de la diagonale. Mais, ce que montrent Nazarov-Treil-Volberg, c'est qu'en moyenne, tout se passe comme dans le cas homogène, et que l'on peut ainsi conclure. Leurs démonstrations utilisent toute une panoplie d'astuces techniques étonnantes, comme par exemple les fonctions de Bellman. Ils obtiennent ainsi des théorèmes de type $T(1)$ ou $T(b)$ et des versions locales de $T(b)$ au sens de M. Christ pour des mesures non doublantes. Nous renvoyons à [53] et à sa liste de références pour plus de détails sur les travaux de Nazarov-Treil-Volberg. Pour un survol sur le développement de l'analyse harmonique non homogène, voir [51].

2.3. La stratégie de Tolsa

La démonstration de Tolsa se fait en deux temps et s'inspire de celle donnée dans [24] dans le cas des ensembles de Cantor de type 4-coins. Elle repose sur une comparaison avec une capacité plus facile à étudier. Celle-ci, notée γ_+, est définie pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$ par $\gamma_+(E) = \sup \mu(\mathbb{C})$ où la borne supérieure est prise sur toutes les mesures de Radon positives et supportées sur E telles que $(1/z) * \mu$ soit borné uniformément par 1. En fait, $\gamma_+(E) = \sup |f'(\infty)|$ où la borne supérieure est maintenant prise sur les fonctions f qui sont holomorphes et bornées par 1 en dehors de E et qui sont de la forme $(1/z) * \mu$, où μ est une mesure positive sur E.

Étape 1 [47]. — *Il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$,*

$$C^{-1} \sup_{\mu} \frac{\mu(\mathbb{C})^{3/2}}{(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu))^{1/2}} \leqslant \gamma_+(E) \leqslant C \sup_{\mu} \frac{\mu(\mathbb{C})^{3/2}}{(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu))^{1/2}},$$

où la borne supérieure est prise pour toutes les mesures de Radon positives μ supportées sur E à croissance linéaire (*de constante* 1) *et de courbure finie.*

L'inégalité de droite avait été démontrée par M. Melnikov [32] pour la capacité analytique, et c'est ce papier qui avait laissé espérer une solution possible au problème de Painlevé. La démonstration de l'étape 1 repose en particulier sur les liens entre courbure de Menger et continuité de l'opérateur de Cauchy. Notons aussi que ces estimations permettent de démontrer facilement que la capacité γ_+ est semi-additive, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que $\gamma_+(E \cup F) \leqslant C(\gamma_+(E) + \gamma_+(F))$ pour tous compacts E et F de $\mathbb{C}$.

Étape 2 [48]. — *Il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que, pour tout compact E de $\mathbb{C}$,*

$$\gamma_+(E) \leqslant \gamma(E) \leqslant C\gamma_+(E).$$

L'inégalité de gauche est évidente par définition des capacités. Nous avons vu, au tout début de la section 2.2.2, que (sous l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$) toute fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{C} \setminus E$ est de la forme $\mu * (1/z)$ où μ est une mesure *complexe* supportée sur E. Le résultat de Tolsa est étonnant, dans la mesure où il nous dit que l'on peut se restreindre dans la définition de la capacité analytique aux seules fonctions holomorphes qui sont obtenues comme convolutions de $1/z$ avec des mesures positives ! Il est clair que les résultats des étapes 1 et 2 impliquent le théorème 1.1. Notons aussi que l'étape 2 et la semi-additivité de la capacité γ_+ (qui découle de l'étape 1, voir plus haut) impliquent la semi-additivité de la capacité analytique, à savoir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\gamma(E \cup F) \leqslant C(\gamma(E) + \gamma(F))$$

pour tous compacts E et F de $\mathbb{C}$. Ceci avait été conjecturé par A.G. Vitushkin dans les années 1960, en particulier à cause des applications potentielles en théorie de l'approximation rationnelle (voir [52]). Nous allons expliquer les idées de la démonstration de Tolsa de l'étape 2 dans le cas où le compact E est la N-ième génération du Cantor 4-coins de Garnett, noté E_N. Rappelons que $E_N = \cup_{j=1}^{4^N} Q_N^j$ où les Q_N^j sont des carrés dont la longueur de côté est 4^{-N} et sont situés dans les coins des carrés de E_{N-1} (voir la section 2.1.2). Nous allons en particulier constater qu'un des ingrédients principaux est le théorème $T(b)$ local de M. Christ. Dans un premier temps, nous devons rappeler que, d'après les travaux d'Eidermann et Tolsa (voir par exemple [46]), il existe une constante $C \geqslant 1$, telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{C^{-1}}{\sqrt{N}} \leqslant \gamma_+(E_N) \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Cette estimation découle de l'étape 1 et de calculs de courbure de Menger. En fait, ceci implique qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(*) \qquad \begin{aligned} \gamma_+(E_{N/2}) &\leqslant C_1\gamma_+(E_N) \quad \text{pour tout } N \text{ pair,} \\ \gamma_+(E_{(N+1)/2}) &\leqslant C_1\gamma_+(E_N) \quad \text{pour tout } N \text{ impair.} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la proposition suivante est vraie.

Proposition 2.15. — *Soit N un entier pair (respectivement impair) et supposons qu'il existe une constante $C_0 > 1$ telle $\gamma(E_{N/2}) \leqslant C_0\gamma(E_N)$ (respectivement $\gamma(E_{(N+1)/2}) \leqslant C_0\gamma(E_N)$). Alors, il existe une constante absolue $A > 0$ telle que $\gamma(E_N) \leqslant C_0A\gamma_+(E_{N/2})$ (respectivement $\gamma(E_N) \leqslant C_0A\gamma_+(E_{(N+1)/2})$).*

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier pair (le cas impair est identique). Nous allons utiliser la proposition précédente pour démontrer que $\gamma(E_N) \leqslant C_2\gamma_+(E_N)$ pour une certaine constante C_2. Pour cela, raisonnons par récurrence et supposons que $\gamma(E_m) \leqslant AC_1^2\gamma_+(E_m)$ pour tout $m < N$ (où C_1 est la constante de $(*)$).

Cas 1. $\gamma(E_N) \leqslant \frac{1}{C_1}\gamma(E_{N/2})$. — Alors,

$$\begin{aligned}\gamma(E_N) &\leqslant \frac{1}{C_1}\gamma(E_{N/2})\\ &\leqslant AC_1\gamma_+(E_{N/2}) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &\leqslant AC_1^2\gamma_+(E_N) \quad \text{d'après } (*).\end{aligned}$$

Cas 2. $\gamma(E_{N/2}) \leqslant C_1\gamma(E_N)$.— D'après la proposition 2.15, il vient

$$\begin{aligned}\gamma(E_N) &\leqslant AC_1\gamma_+(E_{N/2})\\ &\leqslant AC_1^2\gamma_+(E_N) \quad \text{d'après } (*).\end{aligned}$$

Il nous reste donc à esquisser une démonstration de la proposition 2.15, en supposant par exemple que N est pair. Considérons la mesure $\lambda = \frac{1}{4}\gamma(E_N)\mu$ où μ est la mesure de longueur sur le bord de $E_{N/2}$. Alors, la mesure λ est portée par le bord de $E_{N/2}$ et satisfait :

(i) λ est doublante (avec une constante ne dépendant pas de N) ;

(ii) $\lambda(\mathbb{C}) = \gamma(E_N)$;

(iii) l'opérateur de Cauchy $\mathcal{C}_\lambda$ est borné sur $L^2(\lambda)$ et sa norme $\|\mathcal{C}_\lambda\|_{2,2}$ est bornée par $C\,C_0$ (où $C > 0$ est une constante absolue).

Les points (i) et (ii) sont clairs. Pour le point (iii), nous voulons appliquer le théorème $T(b)$ local de Christ, dans sa version « homogène » d'après le point (i). Ainsi, pour tout Q_n^j, $0 \leqslant n \leqslant \frac{N}{2}$, $1 \leqslant j \leqslant 4^n$, nous devons construire une fonction b_n^j à support sur Q_n^j (qui sont les « intervalles dyadiques » considérés) et telle que

(a) $\|b_n^j\|_\infty \leqslant C\,C_0$;

(b) $\|\mathcal{C}_\lambda^\varepsilon(b_n^j)\|_\infty \leqslant C$ (uniformément en ε) ;

(c) $\left|\int_{Q_n^j} b_n^j d\lambda\right| \geqslant \delta\lambda(Q_n^j)$

où C et δ sont des constantes absolues. Rappelons que la démonstration du théorème de Christ donne aussi que $\|\mathcal{C}_\lambda\|_{2,2} \leqslant CC_0$ pour une constante absolue $C > 0$, c'est-à-dire l'estimation annoncée dans le point (iii). L'idée pour construire cette famille pseudo-accrétive est la suivante. Tout d'abord, il existe une fonction f, appelée fonction d'Ahlfors, pour laquelle la capacité analytique $\gamma(E_N)$ est atteinte (c'est-à-dire $f'(\infty) = \gamma(E_N)$). Alors, pour tout $z \notin E_N$,

$$f(z) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\partial E_N} \frac{f(s)t(s)}{s-z}\,ds$$

où $t(s)$ est le vecteur tangent unitaire. Posons $\nu = \frac{-1}{2i\pi}f(s)t(s)ds_{\restriction \partial E_N}$. Alors, ν est supportée sur le bord de E_N et sa transformée de Cauchy est majorée par 1 en dehors de ∂E_N. Commençons par construire b_0^1. Si nous avions $\nu = bd\lambda$, alors $b = b_0^1$ conviendrait. Mais, ν n'est pas absolument continue par rapport à λ (d'ailleurs, ces deux mesures ont des supports différents). L'idée est d'adapter et de considérer

$$b_0^1 = \sum_{j=1}^{4^{N/2}} \frac{\nu(Q^j_{N/2})}{\lambda(Q^j_{N/2})}\, \chi_{Q^j_{N/2}}.$$

L'estimation cruciale pour obtenir (a) est

$$|\nu(Q^j_{N/2})| \leqslant CC_0\lambda(Q^j_{N/2})$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant 4^{N/2}$. Celle-ci découle d'arguments standards et de notre hypothèse (à savoir $\gamma(E_{N/2}) \leqslant C_0\gamma(E_N)$). L'idée pour obtenir (b) est de comparer $\mathcal{C}^\varepsilon_\lambda(b_0^1)$ avec la transformée de Cauchy de ν qui est bornée. Le point (c) est facile, il découle de l'égalité

$$\int_{Q_0^1} b_0^1 d\lambda = \sum_{j=1}^{4^{N/2}} \nu(Q^j_{N/2}) = \nu(\mathbb{C}) = f'(\infty) = \gamma(E_N) = \lambda(Q_0^1).$$

Pour les autres carrés, la construction précédente s'adapte assez facilement. Voir [40] (pages 108–112) pour une preuve complète. Nous avons maintenant à notre disposition une mesure λ qui satisfait les points (i), (ii) et (iii). Alors, d'après le théorème de Calderón-Zygmund dans le cas homogène (voir section 2.2.1), $\mathcal{C}_\lambda$ est de type faible $(1,1)$ avec une constante bornée par $C\,C_0$ et donc, par un argument de dualité utilisant Hahn-Banach (voir [40] théorème 71), il existe une fonction h à support sur $\partial E_{N/2}$ telle que $0 \leqslant h \leqslant 1$, $\lambda(\partial E_{\frac{N}{2}}) \leqslant 2\int_{\mathbb{C}} hd\lambda$ et $|\mathcal{C}(hd\lambda)(z)| \leqslant C\,C_0$ pour tout $z \notin \partial E_{N/2}$. Ainsi, par définition de γ_+, il existe une constante $A > 0$ telle que $\gamma(E_N) = \lambda(\mathbb{C}) \leqslant A\,C_0\gamma_+(E_{N/2})$ et donc la proposition 2.15 est démontrée.

Pour la démonstration de l'étape 2 dans le cas d'un compact quelconque du plan complexe, les difficultés pour adapter l'argument précédent ne manquent pas ! En particulier, les espaces considérés ne sont plus homogènes. Donc, nous ne pouvons plus utiliser le théorème de Christ. De plus, la version du théorème $T(b)$ établie par G. David dans [9] pour résoudre la conjecture de Vitushkin s'est avérée insuffisante. La démonstration de X. Tolsa repose sur les versions données dans [36]. En fait, Nazarov-Treil-Volberg ont démontré ces résultats avec l'idée de les utiliser justement pour démontrer l'équivalence entre capacité analytique γ et capacité γ_+. Il semble utile d'insister sur le fait que l'analyse harmonique non homogène a été développée non pas pour elle-même, mais afin de résoudre les problèmes liés à la capacité analytique.

3. CAPACITÉ ANALYTIQUE ET HOMÉOMORPHISMES BILIPSCHITZIENS

Dans [40] (pages 112–14), nous proposions deux tests afin de déterminer si la solution de Tolsa est une solution satisfaisante ou non au problème de Painlevé. En fait, nous énoncions deux problèmes de nature géométrique autour de la capacité analytique et nous demandions si la réponse de Tolsa permettait de les résoudre. Nous allons dans ce paragraphe expliquer comment Xavier Tolsa a répondu positivement à la question 1 de [40] (page 113). Le second problème est toujours ouvert et sera discuté dans la prochaine section. Commençons par rappeler qu'un homéomorphisme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bilipschitzien s'il existe une constante $K \geqslant 1$ telle que

$$K^{-1}|x-y| \leqslant |\phi(x)-\phi(y)| \leqslant K|x-y|,$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$, tout $y \in \mathbb{C}$. Le problème qui nous intéresse est de déterminer si les ensembles effaçables sont invariants par le groupe des homéomorphismes bilipschitziens. Dans [50], il est démontré le

Théorème 3.1. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipshitzien. Alors, il existe une constante $C_0 \geqslant 1$ ne dépendant que de ϕ telle que*

$$C_0^{-1}\gamma(E) \leqslant \gamma(\phi(E)) \leqslant C_0\gamma(E)$$

pour tout compact E dans $\mathbb{C}$.

Il s'en déduit immédiatement le

Corollaire 3.2. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien et soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact et effaçable. Alors, $\phi(E)$ est effaçable.*

Notons que le cas des ensembles de Cantor de type 4-coins est traité dans [17]. La démonstration du théorème 3.1 repose sur le résultat suivant et des estimations contenues dans [48]. Nous pouvons tout de suite voir que le corollaire 3.2 découle du théorème de Tolsa et du théorème 3.3. Nous noterons μ_ϕ la mesure-image d'une mesure μ par un homéomorphisme ϕ.

Théorème 3.3. — *Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschtizien. Alors, il existe une constante $C_0 > 0$ ne dépendant que de ϕ telle que*

$$c^2(\mu_\phi) \leqslant C_0(c^2(\mu) + \mu(E)),$$

pour tout compact E de $\mathbb{C}$ et toute mesure de Radon positive μ supportée sur E, à croissance linéaire (avec une constante 1) et de courbure de Menger finie.

Notons que ce résultat a un analogue pour l'opérateur de Cauchy. En effet, si μ est une mesure de Radon positive (sans atome) sur $\mathbb{C}$ telle que l'opérateur de Cauchy associé $\mathcal{C}_\mu$ soit borné sur $L^2(\mu)$, il en est de même pour la mesure image de μ par tout homéomorphisme bilipschitzien du plan complexe (voir [50], théorème 1.3). Observons qu'une majoration du type $c^2(\mu_\phi) \leqslant C_0 c^2(\mu)$ dans le théorème 3.3 est impossible. En effet, prenons pour E un segment de $\mathbb{C}$. Alors, toute mesure supportée par E est de courbure de Menger nulle. Ce qui n'est pas obligatoirement le cas de la mesure image. Celle-ci est alors supportée par une courbe corde-arc et il découle du théorème 11 de [41] que $c^2(\mu_\phi) \leqslant C\mu(\mathbb{C})$ (voir aussi le théorème 2.7 ci-dessus). Donc, la majoration du théorème 3.3 est en quelque sorte optimale. Le point-clé de la démonstration du théorème 3.3 est une décomposition de la couronne de type géométrique inspirée des travaux de G. David et S. Semmes [11] [12]. L'idée est de regrouper les carrés dyadiques usuels de $\mathbb{C}$ en régions de temps d'arrêt, dont le nombre est contrôlé. Sur chacune de ces régions, le support de μ est bien approximé par une courbe Ahlfors-régulière. Nous allons dans un premier temps donner les principes généraux de construction de la décomposition de la couronne de Tolsa, avant de donner un énoncé plus précis. Partons d'une mesure μ comme dans le théorème 3.3 et supposons que μ est supportée dans le carré unité $[0,1]\times[0,1]$. Notons Δ la famille des carrés dyadiques usuels de $\mathbb{C}$ et rappelons que Δ est la réunion des familles Δ_j, $j \in \mathbb{Z}$, de carrés dyadiques de génération j : chaque carré $Q \in \Delta_j$ est de la forme $[k\cdot 2^j, (k+1)\cdot 2^j]\times[l\cdot 2^j, (l+1)\cdot 2^j]$. Tout carré $Q \in \Delta_j$ a un unique père, c'est-à-dire un carré $Q' \in \Delta_{j+1}$ tel que $Q \subset Q'$, et a exactement 4 fils, c'est-à-dire des carrés $\widetilde{Q} \in \Delta_{j-1}$ tels que $\widetilde{Q} \subset Q$. Pour tout $Q \in \Delta$, posons $D_\mu(Q) = \mu(Q)/\operatorname{diam} Q$. Une région de temps d'arrêt S est une famille de carrés dans Δ telle qu'il existe un carré dyadique (dit maximal) $Q(S) \in S$ tel que

(1) Pour tout $Q \in S$, $Q \subset Q(S)$.
(2) Si $Q \in S$ et si $Q' \in \Delta$ vérifie $Q \subset Q' \subset Q(S)$, alors $Q' \in S$.

En suivant les idées de Tolsa, pour construire une région de temps d'arrêt en dessous d'un carré « raisonnable » Q_0, nous considérons ses fils, puis ses petits-fils et nous stoppons quand nous rencontrons un carré R_0 pour lequel $D_\mu(Q_0) \gg D_\mu(R_0)$, ou $D_\mu(Q_0) \ll D_\mu(R_0)$ (c'est-à-dire quand la densité de μ dans R_0 est devenue trop « grande » ou trop « petite » par rapport à celle de Q_0) ou la courbure de Menger de μ dans R_0 est devenue trop « grande ». Les hypothèses sur la mesure, à savoir qu'elle est à croissance linéaire et de courbure de Menger finie, nous permettent d'espérer que nous ne stoppons pas trop souvent en effectuant cette procédure. Ceci est primordial car, dans le cas contraire, nous aurions presque autant de cubes dyadiques que de régions de temps d'arrêt ! Pour nous, un cube « raisonnable » est un cube (a,b)-doublant, c'est-à-dire tel que $\mu(aQ) \leqslant b\mu(Q)$ avec a et b bien choisis. Cette notion est importante car, dans un tel cube, la mesure se comporte presque comme une mesure doublante. Pour des raisons techniques, les carrés maximaux de Tolsa ne sont pas dyadiques, mais des carrés 4-dyadiques, c'est-à-dire de la forme $[k.2^{-j}, (k+4)\cdot 2^{-j}]\times[l\cdot 2^{-j}, (l+4)\cdot 2^{-j}]$.

En utilisant toutes ces idées, X. Tolsa construit une famille, notée $\mathrm{TOP}(\mu)$, de carrés 4-dyadiques qui sont $(16, 5000)$-doublants tels que

(P1) $\sum_{Q\in\mathrm{TOP}(\mu)} D_\mu(Q)^2\mu(Q) \leqslant C(\mu(\mathbb{C}) + c^2(\mu))$.

Ces carrés de $\mathrm{TOP}(\mu)$ sont les carrés maximaux décrits précédemment. Ainsi, $(P1)$ est la formulation mathématique du fait que nous ne stoppons pas souvent. De plus, $\mathrm{supp}(\mu)$ est bien approximé dans $Q \in \mathrm{TOP}(\mu)$ par une courbe Ahlfors-réguière, en un sens que nous allons maintenant expliciter. Soit $Q \in \mathrm{TOP}(\mu)$; notons $\mathrm{Stop}(Q)$ l'ensemble des carrés $R \in \mathrm{TOP}(\mu)$ tels que

(i) $R \cap 3Q \neq \varnothing$.
(ii) $\mathrm{diam}(R) \leqslant (1/8)\,\mathrm{diam}\,Q$.
(iii) Il n'existe pas de $R' \in \mathrm{TOP}(\mu)$ qui satisfait (i) et (ii) et qui contient R.

Les carrés de $\mathrm{Stop}(Q)$ sont les carrés en dessous de Q pour lesquels nous avons stoppé dans la procédure décrite précédemment. De plus, notons $B_Q = (3Q \cap \mathrm{supp}\,\mu) \smallsetminus (Z \cup \bigcup_{R\in\mathrm{Stop}(Q)} R)$ (où Z est un ensemble de points qui ne sont pas contenus dans beaucoup de carrés doublants ; il satisfait en fait à $\mu(Z) = 0$). Les points de B_Q sont ceux pour lesquels nous n'avons jamais stoppé. Le point-clé est que, par construction, nous contrôlons la densité ainsi que la courbure de Menger de μ dans la région de temps d'arrêt en dessous de Q (à toutes les échelles pour un point de B_Q et à l'échelle de R pour un point de $R \in \mathrm{Stop}(Q)$). Nous pouvons alors utiliser les résultats du paragraphe 2.1.3. Ainsi, il existe une courbe Ahlfors-régulière $\Gamma(Q)$ de constante uniforme (c'est-à-dire ne dépendant que des données de μ) telle que

(P2) $B_Q \subset \Gamma(Q)$.

(P3) Pour tout $R \in \mathrm{Stop}(Q)$, il existe un carré $\widetilde{R}$ contenant R tel que $\delta(R, \widetilde{R}) \leqslant CD_\mu(R)$ et $\widetilde{R} \cap \Gamma_Q \neq \varnothing$.

Ici, $\delta(R, S) = \int_{S_R\smallsetminus R} \frac{1}{|y-c_R|} d\mu(y)$ où c_R est le centre de R et S_R est le plus petit carré concentrique avec R et contenant S. Dans certains cas, (P3) dit que $d(R, \Gamma(Q)) \leqslant C \cdot \mathrm{diam}\,R$, c'est-à-dire que les points de R sont proches de $\Gamma(Q)$, à l'échelle de R. Enfin, les carrés de $\mathrm{TOP}(\mu)$ vérifient une condition technique sur la densité d'un carré R par rapport à celle de son cube maximal Q, à savoir

(P4) Soit R un carré tel que $\mathrm{diam}\,R \leqslant \mathrm{diam}\,Q$. Supposons que $R \cap B_Q \neq \varnothing$, ou bien qu'il existe un carré $\widetilde{R} \in \mathrm{Stop}(Q)$ tel que $R \cap \widetilde{R} \neq \varnothing$ et $\mathrm{diam}\,\widetilde{R} \leqslant \mathrm{diam}\,R$. Alors $\mu(R) \leqslant CD_\mu(Q)l(R)$.

La décomposition de la couronne associée à μ est la donnée d'une famille de carrés $\mathrm{TOP}(\mu)$ qui satisfait (P1), (P2), (P3) et (P4). Il est important de noter que ces conditions sont stables par homéomorphismes bilipschitziens. Notons aussi que cette décomposition de la couronne a permis à Tolsa [49] de démontrer que la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy implique la continuité L^2 de tous les opérateurs de Calderón-Zygmund (associés à des noyaux antisymétriques que nous devons supposer en plus suffisamment réguliers), tous ces opérateurs étant définis par respect à une mesure qui n'est pas supposée doublante.

4. CAPACITÉ ANALYTIQUE ET LONGUEUR DE FAVARD

D'après le fait 4 et le théorème 2.2, tout ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est effaçable si et seulement si $\mathrm{Fav}(E) = 0$ *sous la condition que* $H^1(E) < +\infty$. Si nous supprimons cette dernière hypothèse, le résultat devient faux comme l'avait démontré P. Mattila dans [25]. En fait, il prouvait que la condition d'être effaçable est invariante par représentations conformes, ce qui n'est pas le cas pour la condition d'être de longueur de Favard nulle (pour les ensembles de 1-mesure de Hausdorff infinie). Ainsi, son argument ne permettait pas de déterminer quelle implication était fausse. Plus tard, P. Jones et T. Murai [19] construirent un ensemble du plan complexe qui est de longueur de Favard nulle, mais qui n'est pas effaçable. Un exemple plus simple a été donné par H. Joyce et P. Mörters récemment [20]. Ceci nous amène donc au

Problème 1. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ compact. Supposons que $\mathrm{Fav}(E) > 0$. L'ensemble est-il ou non effaçable ?

D'après le théorème de Tolsa, il suffit de construire une mesure supportée sur E qui soit à croissance linéaire et de courbure de Menger finie. Un exemple typique d'ensemble qui a de « grosses projections » est un continuum non réduit à un point. Dans ce cas-là, une telle mesure est construite dans [40], mais il n'est pas clair que cet argument puisse être adapté au cas général. En fait, il faudrait dans un premier temps comprendre le lien entre la longueur de Favard et la courbure de Menger. Nous allons dans la suite de ce paragraphe discuter de quelques problèmes dans cette direction.

Nous avons vu que le théorème de Besicovitch (théorème 2.2) permet de caractériser les ensembles purement non rectifiables en termes de longueur de Favard (toujours sous l'hypothèse de finitude de la mesure de Hausdorff). Il serait intéressant d'avoir une version plus quantitative de ce résultat.

Problème 2. — Soit $\delta > 0$. Existe-t-il une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que, pour tout compact $E \subset \mathbb{C}$ vérifiant $H^1(E) < +\infty$ et $\mathrm{Fav}(E) \geqslant \delta$, il existe une courbe rectifiable Γ satisfaisant $H^1(E \cap \Gamma) \geqslant C$?

Dans le même ordre d'idée, nous aimerions comprendre le lien entre longueur de Favard et rectifiabilité uniforme. N'oublions pas que celle-ci est équivalente à la condition de courbure locale (théorème 2.6).

Problème 3. — Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Supposons qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in \,]0, \mathrm{diam}\, E[$,

$$\mathrm{Fav}(E \cap B(x, R)) \geqslant \eta R.$$

Alors, E est-il uniformément rectifiable ?

Cette question est abordée (sous une forme légèrement différente) dans [13] où il est démontré que la réponse est positive sous une hypothèse de platitude en termes des nombres β de Peter Jones. Cependant, les arguments de G. David et S. Semmes ne permettent pas de conclure dans le cas général. Notons que, d'après le théorème 2.2, un ensemble vérifiant les hypothèses du problème 3 est rectifiable. Considérons maintenant l'ensemble de Cantor 4-coins que nous noterons E. Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 que $E = \cap_{N\in\mathbb{N}} E_N$ où E_N est formé de 4^N carrés de longueur de côtés 4^{-N}, qui sont situés dans les coins des carrés de E_{N-1}. Nous avons aussi vu que $\mathrm{Fav}(E) = 0$, mais il serait intéressant de voir à quelle vitesse $\mathrm{Fav}(E_N)$ tend vers 0.

Problème 4. — Existe-t-il une constante $C \geqslant 1$ telle que $\mathrm{Fav}(E_N) \leqslant C/N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$?

Il découle du théorème 1.4 de [26] qu'il existe une constante $c \leqslant 1$ telle que $\mathrm{Fav}(E_N) \geqslant c/N$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Une réponse positive au problème 4 impliquerait que $\mathrm{Fav}(E_N)$ et $1/c^2(E_N)$ (où $c^2(E_N)$ est la courbure de la restriction de H^1 au bord de E_N) doivent être comparables, puisque $c^2(E_N)$ est comparable à N (voir [40]). Ceci est à première vue assez surprenant ! Dans [42], il est donné un majorant dans lequel le N est remplacé par un logarithme itéré. Y. Peres et B. Solomyak proposent à la fin de leur article une approche plus générale, en relation avec la théorie quantitative de la rectifiabilité. Ainsi, si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$, posons pour tout $\varepsilon > 0$,

$$l(E,\varepsilon) = \sup H^1_\infty(\Gamma(\varepsilon) \cap E)$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les courbes rectifiables de $\mathbb{C}$ de longueur 1 et où $\Gamma(\varepsilon)$ désigne le ε-voisinage de Γ. Le contenu de Hausdorff H^1_∞ est défini par

$$H^1_\infty(F) = \inf \left\{ \textstyle\sum_i (\operatorname{diam} U_i) \mid F \subset \cup_i U_i \right\}.$$

En particulier, si F est compact, $H^1_\infty(F) \leqslant \operatorname{diam} F$. Peres et Solomyak demandent si $\mathrm{Fav}(E(\varepsilon)) = O(l(E,\varepsilon))$ quand $\varepsilon \to 0$ (où $E(\varepsilon)$ désigne toujours le ε-voisinage de E). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier qu'une réponse positive à la question précédente implique une réponse positive au problème 4.

Soit $\lambda = (\lambda_j)$ une suite de réels telle que

(i) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1/4 \leqslant \lambda_j \leqslant 1/3$.

(ii) La suite λ tend vers $1/4$ en décroissant.

Nous allons associer à cette suite λ un ensemble de Cantor de type 4-coins, noté $E(\lambda)$, de la façon suivante. Posons $\sigma_j = \Pi_{k=1}^{j} \lambda_k$; soit E_0 le carré unité $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{C}$. L'ensemble E_1 est l'union des quatre carrés situés dans les coins de E_0 et de longueur de côté σ_1. L'ensemble E_2 est l'union des 16 carrés de longueur de côté σ_2 situés dans les coins des carrés de E_1. De manière générale, E_j est l'union de 4^j carrés de longueur de côté σ_j, chacun de ces carrés étant dans le coin d'un carré de E_{j-1}. Alors, $E(\lambda) = \cap_j E_j$. L'ensemble de Cantor 4-coins de Garnett correspond à la suite constante égale à $1/4$. Notons que $H^1(E(\lambda)) < +\infty$ si et seulement si $\sup_j 4^j \sigma_j < +\infty$. Nous savons grâce à [24] que $E(\lambda)$ est effaçable si et seulement si $\sum_j 4^{-2j}\sigma_j^{-2} = \infty$ (car dans ce cas, la courbure de Menger associée à la mesure naturelle sur $E(\lambda)$ est infinie, voir le théorème 44 de [40]). Cependant, les projections de $E(\lambda)$ sont mal comprises.

Problème 5. — Pour quelles suites λ, a-t-on $\mathrm{Fav}(E(\lambda)) = 0$?

Il est important de noter que la résolution d'un des problèmes précédents passe par une meilleure compréhension des rapports entre les nombres géométriques que sont les nombres β, la courbure de Menger et la longueur de Favard, et donc que résoudre un de ces problèmes devrait permettre d'avoir des éléments de réponse concernant les autres. Nous renvoyons à [29] pour d'autres problèmes concernant les projections et la rectifiabilité (et des commentaires sur les problèmes décrits plus haut).

5. ET EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES ?

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est effaçable pour les fonctions harmoniques lipschitziennes si pour tout ouvert U contenant E, toute fonction localement lipschitzienne $f : U \to \mathbb{C}$ qui est harmonique dans $U \setminus E$ est harmonique dans U tout entier. Notre problème est alors de caractériser géométriquement ces ensembles effaçables. Ceci est un analogue naturel dans $\mathbb{R}^n$ du problème de Painlevé, dans la mesure où nous pouvons aussi lui associer une capacité et des intégrales singulières comme nous allons le voir maintenant. Notons aussi que, si $n = 2$, l'effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées implique l'effaçabilité pour les fonctions harmoniques lipschitziennes, puisque si f est harmonique lispchitzienne, alors $\partial f/\partial z$ est holomorphe bornée. En fait, si nous nous restreignons aux ensembles de 1-mesure de Hausdorff finie, ces deux notions d'effaçabilité coïncident d'après le fait 4 et le résultat principal de [10]. Introduisons maintenant une famille de capacités. Soit α avec $0 < \alpha < n$. Pour tout compact $E \subset \mathbb{R}^n$, sa capacité associée aux potentiels de Riesz signés $R_{i,\alpha} = x_i/|x|^{1+\alpha}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), que nous noterons $\gamma_\alpha(E)$, est définie par

$$\gamma_\alpha(E) = \sup |\langle T, 1\rangle|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les distributions réelles T supportées sur E telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $T * (x_i/|x|^{1+\alpha})$ soit une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$ par 1. Ici, $\langle T, 1\rangle$ est l'action de la distribution T sur la fonction constante 1. Le lien avec la capacité analytique γ est clair en notant que, pour tout ensemble compact $E \subset \mathbb{C}$, $\gamma(E) = \sup |\langle T, 1\rangle|$, où la borne supérieure est prise sur toutes les distributions complexes T supportées sur E telles que $T * (1/z)$ soit une fonction bornée sur $\mathbb{R}^2$ par 1. Le cas $\alpha = n - 1$ est particulier et, dans ce cas-là, la capacité γ_{n-1} s'appelle la capacité harmonique lipschitzienne. Alors, $E \subset \mathbb{R}^n$ est effaçable (pour les fonctions harmoniques lipschitziennes) si et seulement si $\gamma_{n-1}(E) = 0$. Voir [31] où il est aussi démontré des analogues des faits 1, 2 et 3. Ainsi, si $H^{n-1}(E) = 0$, alors E est effaçable alors que, si $\mathrm{Hdiam}(E) > n - 1$, il n'est pas effaçable. De plus, si E est contenu dans une hypersurface régulière (par exemple, une image lipschitzienne ou bilipschitzienne de $\mathbb{R}^{n-1}$), $H^{n-1}(E)$ et $\gamma_{n-1}(E)$ sont comparables. Qu'en est-il du fait 4 ? Nous avons vu que l'ingrédient miraculeux dans $\mathbb{R}^2$ est la courbure de Menger qui permet de faire le lien entre les propriétés de rectifiabilité et la continuité de l'opérateur de Cauchy. Dans le cas de l'effaçabilité pour les fonctions harmoniques lipschitziennes dans $\mathbb{R}^n$, les intégrales singulières qui interviennent naturellement sont les transformées de Riesz R_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ qui sont associées aux noyaux $x_i/|x|^n$. Nous ne savons pas si une courbure adaptée aux transformées de Riesz existe si $n > 2$ (et il est peut-être même impossible d'en trouver une, voir [15]). Dans ces conditions, c'est un véritable tour de force qu'a réalisé A. Volberg dans [53] où il démontre que la capacité harmonique lipschitzienne est semi-additive (en suivant plus ou moins le plan de la preuve de X. Tolsa dans le cas de la capacité analytique). Le manque de courbure est suppléé par les techniques d'analyse harmonique sans doublement du volume qu'ont développées Nazarov-Treil-Volberg. Notons aussi que des estimations précises de la capacité harmonique lipschitzienne d'analogues n-dimensionnels des ensembles de Cantor 4-coins sont données dans [23]. Dans ce cas, le fait que ces ensembles sont décrits de façon explicite permet de pallier l'absence de courbure.

Signalons enfin qu'une étude systématique des capacités γ_α est initiée dans [22] et [43]. En particulier, L. Prat démontre que $\gamma_\alpha(E) = 0$ si $0 < \alpha < 1$ et E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $H^\alpha(E) < \infty$ ou si α n'est pas entier $(0 < \alpha < n)$ et E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ qui est de plus Ahlfors-régulier de dimension α.

En paraphrasant un (très) récent premier ministre français, concluons en disant que la route menant à la résolution de tous ces problèmes dans $\mathbb{R}^n$ paraît bien longue et plutôt sinueuse...

RÉFÉRENCES

[1] L. Ahlfors – « Bounded analytic functions », *Duke Math. J.* **14** (1947), p. 1–11.

[2] L. Ahlfors & A. Beurling – « Conformal invariants and function theoretic null-sets », *Acta Math.* **83** (1950), p. 101–129.

[3] A.P. Calderón – « Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), p. 1324–1327.

[4] M. Christ – « A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral », *Colloq. Math.* **60-61** (1990), p. 601–628.

[5] ______, *Lectures on singular integral operators*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, 1990.

[6] R. Coifman, A. McIntosh & Y. Meyer – « L'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 sur les courbes lipschitziennes », *Ann. of Math.* **116** (1982), p. 361–388.

[7] R. Coifman & G. Weiss – *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lect. Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, 1971.

[8] G. David – *Wavelets and singular integral operators on curves and surfaces*, Lect. Notes in Math., vol. 1465, Springer-Verlag, 1991.

[9] ______, « Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity », *Rev. Mat. Iberoamericana* **14** (1998), p. 369–479.

[10] G. David & P. Mattila – « Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane », *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), p. 137–215.

[11] G. David & S. Semmes – *Singular integrals and rectifiable sets in* $\mathbb{R}^n$ *: Au-delà des graphes lipschitziens*, Astérisque, vol. 193, Société Mathématique de France, 1991.

[12] ______, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 38, American Mathematical Society, 1993.

[13] ______, « Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), p. 855–889.

[14] A. Denjoy – « Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues », *C. R. Acad. Sci. Paris* **149** (1909), p. 258–260.

[15] H. Farag – « The Riesz kernels do not give rise to higher dimensional analogues to the Menger-Melnikov curvature », *Publ. Mat.* **43** (1999), p. 251–260.

[16] J.B. Garnett – « Positive length but zero analytic capacity », *Proc. Amer. Math. Soc.* **24** (1970), p. 696–699.

[17] J.B. Garnett & J. Verdera – « Analytic capacity, bilipschitz maps and Cantor sets », *Math. Res. Lett.* **10** (2003), p. 515–522.

[18] P. Jones – « Rectifiable sets and the traveling salesman problem », *Invent. Math.* **102** (1990), p. 1–15.

[19] P. Jones & T. Murai – « Positive analytic capacity, but zero Buffon needle probability », *Pacific J. Math.* **133** (1988), p. 99–114.

[20] H. Joyce & P. Mörters – « A set with finite curvature and projections of zero length », *J. Math. Anal. Appl.* **247** (2000), p. 126–135.

[21] J.-C. Léger – « Rectifiability and Menger curvature », *Ann. of Math.* **149** (1999), p. 831–869.

[22] J. Mateu, L. Prat & J. Verdera – « The capacity associated to signed Riesz kernels and Wolff potentials », *J. reine angew. Math.* **578** (2005), p. 201–223.

[23] J. Mateu & X. Tolsa – « Riesz transforms and harmonic Lip_1-capacity of Cantor sets », *Proc. London Math. Soc. (3)* **89** (2004), p. 676–696.

[24] J. Mateu, X. Tolsa & J. Verdera – « The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$ theorem », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 19–28.

[25] P. Mattila – « Smooth maps, null-sets for integral geometric measures and analytic capacity », *Ann. of Math.* **123** (1986), p. 303–309.

[26] ______, « Orthogonal projections, Riesz capacities, and Minkowski content », *Indiana Univ. Math. J.* **39** (1990), p. 185–198.

[27] ———, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, 1995.

[28] ———, « On the analytic capacity and curvature of some Cantor sets with non-σ-finite length », *Publ. Mat.* **40** (1996), p. 195–204.

[29] ———, « Hausdorff dimension, projections, and the Fourier transform », *Publ. Mat.* **48** (2004), p. 3–48.

[30] P. Mattila, M. Melnikov & J. Verdera – « The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability », *Ann. of Math.* **144** (1996), p. 127–136.

[31] P. Mattila & P.V. Paramonov – « On geometric properties of harmonic Lip_1-capacity », *Pacific J. Math.* **171** (1995), p. 469–491.

[32] M. Melnikov – « Analytic capacity : discrete approach and curvature of measure », *Sb. Math.* **186** (1995), p. 827–846.

[33] M. Melnikov & J. Verdera – « A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves », *Internat. Math. Res. Notices* **7** (1995), p. 325–331.

[34] F. Nazarov, S. Treil & A. Volberg – « Cauchy integral and Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces », *Internat. Math. Res. Notices* **15** (1997), p. 703–726.

[35] ———, « Nonhomogeneous Tb theorem which proves Vitushkin's conjecture », Preprint n° 519, CRM Barcelona, 2002.

[36] ———, « Tb theorems on nonhomogeneous spaces », *Acta Math.* **190** (2003), p. 151–239.

[37] K. Okikiolu – « Characterizations of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$ », *J. London Math. Soc. (2)* **46** (1992), p. 336–348.

[38] P. Painlevé – *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*, Hermann, 1897.

[39] H. Pajot – « Conditions quantitatives de rectifiabilité », *Bull. Soc. math. France* **125** (1997), p. 15–53.

[40] ———, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lect. Notes in Math., vol. 1799, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[41] ———, « Le problème géométrique du voyageur de commerce, et ses applications à l'analyse complexe et harmonique », in *Autour du centenaire Lebesgue*, Panoramas & Synthèses, vol. 18, Société Mathématique de France, 2004, p. 123–156.

[42] Y. Peres & B. Solomyak – « How likely is Buffon's needle to fall near a planar Cantor set ? », *Pacific J. Math.* **204** (2002), p. 473–496.

[43] L. Prat – « Potential theory of signed Riesz kernels : Capacity and Hausdorff measures », *Internat. Math. Res. Notices* **19** (2004), p. 937–981.

[44] R. Schul – « Subset of rectifiable curves in Hilbert space and the Analyst's TSP », Thèse, Yale University, 2005.

[45] E.M. Stein – *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, 1993.

[46] X. Tolsa – « L^2-boundedness of the Cauchy integral for continuous measures », *Duke Math. J.* **98** (1999), p. 269–304.

[47] ———, « On the analytic capacity γ_+ », *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), p. 317–343.

[48] ———, « Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity », *Acta Math.* **190** (2003), p. 105–149.

[49] ———, « The L^2 boundedness of the Cauchy transform implies L^2 boundedness of all antisymmetric Calderón-Zygmund operators », *Publ. Mat.* **48** (2004), p. 445–479.

[50] ———, « Bilipschitz maps, analytic capacity, and the Cauchy integral », *Ann. of Math. (2)* (à paraître).

[51] J. Verdera – « The Fall of the doubling condition in Calderón-Zygmund theory », in *Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial 2000)*, Publ. Mat., 2002, numéro spécial, p. 275–292.

[52] A.G. Vitushkin – « The analytic capacity of sets in approximation theory », *Uspekhi Mat. Nauk* **22** (1967), p. 141–199, en russe ; traduction en anglais dans *Russian Math. Surveys* **22** (1967), p. 139-200.

[53] A. Volberg – *Calderón-Zygmund capacities and operators on nonhomogeneous spaces*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 100, American Mathematical Society, 2003.

Hervé PAJOT

Institut Fourier
Université de Grenoble I
UMR 5582 CNRS
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : herve.pajot@ujf-grenoble.fr