Séminaire BOURBAKI Juin 2003
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 920, p. 321 à 333

NOMBRES DE BETTI L^2 ET FACTEURS DE TYPE II_1 [d'après D. Gaboriau et S. Popa]

par **Alain CONNES**

INTRODUCTION

M.F. Atiyah a introduit dans ([1]) les nombres de Betti L^2 pour les groupes discrets. Ces invariants ont ensuite été généralisés dans ([9]) aux feuilletages mesurés. L'intérêt initial de cette généralisation tient à des applications immédiates telles que l'existence de feuilles compactes stables pour tout feuilletage mesuré dont les feuilles sont de dimension 2 et ont une courbure dont l'intégrale (pour la mesure transverse) est positive.

Dans un article récent ([23]), D. Gaboriau a montré que les nombres de Betti L^2 des feuilletages à feuilles contractiles sont en fait des invariants de la relation d'équivalence mesurée associée. Il a de plus défini les nombres de Betti ℓ^2, $\{\beta_n(\mathcal{R})\}$, $n \geqslant 0$ pour toute relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables.

Sa construction généralise aussi les nombres de Betti ℓ^2 d'Atiyah et Cheeger-Gromov ([1], [5]) pour les groupes discrets dénombrables Γ, $\{\beta_n(\Gamma)\}_{n\geqslant 0}$, et Gaboriau démontre que $\beta_n(\Gamma) = \beta_n(R_\Gamma)$, pour toute relation d'équivalence R_Γ engendrée par une action ergodique libre et préservant la mesure du groupe Γ sur un espace de probabilité (X, μ) ([23]).

La notion de coût des relations d'équivalence mesurées a été introduite par Levitt ([31]), le coût $C(\mathcal{R})$ de la relation $\mathcal{R}$ est la borne inférieure des mesures des sous-relations engendrant $\mathcal{R}$. Grâce à la notion d'arborage, due à Gaboriau (*cf.* [22]), le coût permet en particulier de retrouver le nombre de générateurs d'un groupe libre Γ comme invariant des relations d'équivalence mesurées provenant d'une action libre de Γ. L'idée des nombres de Betti des relations d'équivalence a été suggérée à Gaboriau par une remarque d'A. Valette, à savoir la validité, dans les exemples d'actions de groupes où l'on sait calculer les deux membres, de l'égalité

$$C(R_\Gamma) - 1 = \beta_1(\Gamma) - \beta_0(\Gamma)$$

L'on ne sait pas si cette égalité reste valable pour toute action ergodique libre d'un groupe discret Γ.

Le développement de la théorie des relations d'équivalence mesurées est depuis le début parallèle à celui de la théorie des facteurs, et plus précisément des facteurs de type II_1 pour les relations ergodiques préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, μ).

À une telle relation $\mathcal{R}$ correspond canoniquement un facteur $L(\mathcal{R})$ de type II_1 par la construction de Murray et von Neumann (on peut également tordre par un 2-cocycle v (voir [21])). Cette construction n'est ni injective – le même facteur peut provenir de relations ergodiques non-isomorphes [15] – ni surjective même si l'on autorise un 2-cocycle ([49]). Il serait donc simpliste de penser que la « transposition » d'une théorie à l'autre est facile et il a souvent fallu attendre plusieurs années avant que la transplantation d'un résultat d'un côté à l'autre devienne possible. En fait il faut également rajouter à ce dictionnaire une troisième colonne contenant la théorie des groupes discrets. Pour tout groupe discret dénombrable Γ le commutant $L(\Gamma)$ de la représentation régulière droite de Γ est une algèbre de von Neumann finie, c'est un facteur de type II_1 si toutes les classes de conjugaison (hormis celle de 1) sont infinies (on dit alors que Γ est i.c.c). Ici le foncteur $\Gamma \to L(\Gamma)$ est très loin d'être injectif – tous les groupes moyennables (i.c.c.) donnent le même facteur R ([8]) – et n'est pas surjectif car il existe des facteurs de type II_1 non-antiisomorphes à eux-mêmes. Il y a essentiellement trois types de phénomènes bien répertoriés dans les trois colonnes, ce sont

1) Moyennabilité

Les résultats clefs dans ce domaine sont l'unicité du facteur hyperfini (Murray et von Neumann), et celle du facteur injectif (moyennable) ([8]). Ce dernier résultat implique en particulier que le facteur hyperfini R est isomorphe à tous ses sous-facteurs. La contrepartie du théorème de von Neumann pour les relations d'équivalence est le théorème de Dye ([20]). La contrepartie de ([8]) est l'unicité de la relation d'équivalence associée à une action de groupe moyennable ([36], [14]).

2) Liberté

Les résultats clefs dans ce domaine dans le cadre des facteurs sont la propriété d'approximation compacte H de Haagerup ([26]), et la théorie des probabilités libres de Voiculescu ([48]). Dans le cadre des groupes libres l'action sur les arbres ([47]) et dans le cas des relations d'équivalence l'« arborabilité » et le coût, mentionnés plus haut, jouent un rôle important.

3) Rigidité

Les résultats clefs sont ici la propriété T de Kazhdan ([30]) et le théorème de rigidité de Margulis ([33]). Ce théorème a été adapté par R. Zimmer aux relations d'équivalence mesurées ([50]), ce qui a permis des progrès décisifs dans ce domaine. La propriété T d'un groupe discret Γ ne dépend en fait que du facteur $L(\Gamma)$ associé et les facteurs correspondants ont des propriétés de rigidité remarquables ([16]).

S. Popa a réussi récemment à établir un tunnel entre les colonnes « facteurs » et « relations » en combinant les propriétés H de Haagerup et T de Kazhdan pour toute une classe de relations d'équivalence. Les facteurs associés à de telles relations (dites de classe HT) sont isomorphes si et seulement si les relations sont isomorphes. Cela lui a permis de résoudre un problème fondamental de la théorie des facteurs de type II_1, et de construire des facteurs M de type II_1 dont le groupe fondamental est trivial et qui sont en particulier non isomorphes à $M_k(\mathbb{C}) \otimes M$ pour tout entier $k \neq 1$.

Soit N un facteur de type II_∞ ; tout automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$ multiplie la trace normale semi-finie τ sur N par un scalaire

$$\mathrm{Mod}(\theta) := (\tau \circ \theta) \,/\, \tau \ \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le groupe fondamental $F(N) := \{\mathrm{Mod}(\theta) \,|\, \theta \in \mathrm{Aut}(N)\} \subset \mathbb{R}_+^*$ a été défini par Murray et von Neumann dans les années 40. Pour un facteur M de type II_1 on définit $F(M) := F(M \otimes I_\infty)$ où I_∞ est le facteur de type I_∞. Murray et von Neumann ont montré que $F(M) = \mathbb{R}_+^*$ quand M est isomorphe au facteur hyperfini de type II_1, R, et plus généralement quand M est de la forme $P \otimes R$.

Les premiers exemples de facteurs M de type II_1 tels que $F(M) \neq \mathbb{R}_+^*$, ont été donnés dans ([10]). Soit Γ un groupe discret (dont les classes de conjugaison sont infinies) vérifiant la propriété T de Kazhdan, et $M := L(\Gamma)$ le facteur de type II_1 engendré par la représentation régulière de Γ. On montre alors avec $N = L(\Gamma) \otimes I_\infty$ que le groupe $\mathrm{Out}(N)$ des classes d'automorphismes de N modulo les automorphismes intérieurs est dénombrable de sorte que $F(L(\Gamma))$ est dénombrable. De plus pour tout sous-groupe dénombrable $D \subset \mathbb{R}_+^*$, l'existence de facteurs M de type II_1 avec $F(M)$ dénombrable contenant D est démontrée dans ([25], [43]). Mais la détermination exacte de $F(M)$ restait ouverte dans tous ces exemples.

1. NOMBRES DE BETTI ℓ^2

D. Gaboriau a défini les nombres de Betti ℓ^2, $\{\beta_n(\mathcal{R})\}$, $n \geqslant 0$ pour toute relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables préservant la mesure. L'essentiel de sa démarche se comprend simplement si l'on tient compte de la théorie des mesures transverses sur les groupoïdes mesurables développée dans ([9]) pour formuler le théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages mesurés. Il suffit alors d'étendre (en passant du cas des groupes à celui des groupoïdes) les idées que Cheeger et Gromov ont développées dans ([5]) pour définir les nombres de Betti dans le cas « de covolume fini ».

La généralisation au cas des groupoïdes des notions d'action libre (resp. propre) d'un groupe discret sur un complexe simplicial et de la dimension de Murray-von Neumann d'espaces de chaînes L^2 ne pose aucun problème ([9]). Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ergodique à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace de probabilité (X,μ). Munissons $\mathcal{R}\subset X^2$ de sa structure naturelle de groupoïde, les deux projections étant notées r et s, $(r(x,y):=x$ et $s(x,y):=y)$ et la loi de composition $(x,y)\circ(y,z):=(x,z)$. Un $\mathcal{R}$-espace discret est un foncteur mesurable Y de la petite catégorie $\mathcal{R}$ vers celle des ensembles dénombrables. La réunion $\overline{Y}:=\cup_{x\in X}Y(x)$ est un espace borélien standard, la projection $\pi:\overline{Y}\to X$, $\pi(z)=x\,,\forall\, z\in Y(x)$ et l'action $Y(x,y):Y(y)\to Y(x)$ sont boréliennes. On ne s'intéresse qu'aux $\mathcal{R}$-espace discrets *réguliers* obtenus par réduction $\widetilde{\mathcal{R}}_B$ de la somme directe $\widetilde{\mathcal{R}}$ d'une infinité dénombrable de copies du foncteur $\mathcal{R}(x):=r^{-1}(x)$ par un borélien invariant B. L'invariance de la mesure μ montre alors que la mesure $\widetilde{\mu}(F)$ ne dépend ni du choix d'un domaine fondamental F tel que $\mathcal{R}F=B$ ni de l'identification de Y avec $\widetilde{\mathcal{R}}_B$. C'est la *mesure transverse* $\Lambda(Y)$ ([9]). En composant Y avec le foncteur ℓ^2 qui à un ensemble dénombrable Z associe l'espace de Hilbert $\ell^2(Z)$, on obtient un foncteur mesurable (représentation) de $\mathcal{R}$ vers la catégorie des espaces de Hilbert séparables. Son commutant est une algèbre de von Neumann semi-finie $\mathrm{End}_\Lambda(\ell^2(Y))$ qui possède une unique trace normale semi-finie Tr_Λ telle que

$$\mathrm{Tr}_\Lambda(1_Z)=\Lambda(Z)$$

pour tout borélien $\mathcal{R}$-invariant Z. De plus $\mathrm{End}_\Lambda(\ell^2(Y))$ agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ intégrale directe des $\ell^2(Y(x))$ sur (X,μ). C'est l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{H}$ pour la structure évidente de $L(\mathcal{R})$-module hilbertien et la dimension de Murray-von Neumann de ce module est égale à $\mathrm{Tr}_\Lambda(1)$ (Voir ([9]).

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial est un foncteur mesurable Σ vers la catégorie des ensembles simpliciaux dénombrables et l'on ne s'intéresse qu'au cas où le $\mathcal{R}$-espace discret $\Sigma^{(0)}$ des sommets est régulier (il en va alors de même pour les $\Sigma^{(n)}$). Dans le cas des feuilletages des variétés compactes, la compacité ambiante suffisait à régler les problèmes d'uniformité, mais dans le cas général traité par Gaboriau les nombres de Betti ne sont plus nécessairement finis et il faut ajouter une étape intermédiaire (analogue à ([5])) avant de définir ces nombres.

Définition 1.1 ([23]). — *Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est uniformément localement borné ssi il existe $N<\infty$ tel que tout $x\in\Sigma^{(0)}$ soit le sommet d'au plus N simplexes et si $\Lambda(\Sigma^{(0)})<\infty$.*

En composant Σ avec le foncteur qui associe à un complexe simplicial localement borné le complexe de ses chaînes ℓ^2,

$$0\xleftarrow{\partial_0}C_0^{(2)}\xleftarrow{\partial_1}C_1^{(2)}\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_n}C_n^{(2)}\xleftarrow{\partial_{n+1}}C_{n+1}^{(2)}\xleftarrow{\partial_{n+2}}\cdots$$

on obtient un complexe de $L(\mathcal{R})$ modules.

DÉFINITION 1.2 ([23])

(i) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial uniformément borné Σ est le $L(\mathcal{R})$-module*

$$H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) := \operatorname{Ker} \partial_n / \overline{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

(ii) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est la limite inductive des homologies L^2 de ses sous-complexes uniformément bornés.*

Ces deux définitions sont compatibles entre elles. La deuxième ne donne pas nécessairement un $L(\mathcal{R})$-module hilbertien mais W. Luck ([32]) a montré comment prolonger la dimension de Murray-von Neumann : Dim_M au cas des modules généraux sur un facteur fini M. Cela permet de définir les nombres de Betti d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ comme la dimension généralisée,

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}) := \mathrm{Dim}_{L(\mathcal{R})}(H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)).$$

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est dit n-connexe ssi $\Sigma(x)$ est n-connexe pour tout $x \in X$. Le résultat essentiel de D. Gaboriau s'énonce alors ainsi,

THÉORÈME 1.3 ([23]). — *Tous les $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux n-connexes ont le même nombre de Betti $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$.*

On définit alors $\beta_n(\mathcal{R})$ comme la valeur commune des $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$ pour Σ un $\mathcal{R}$-complexe implicial n-connexe. L'existence d'un tel complexe s'obtient en composant le foncteur $\widetilde{\mathcal{R}}$ ci-dessus avec celui qui associe à tout ensemble dénombrable Z le complexe simplicial universel EZ tel que $EZ^{(0)} = Z$.

COROLLAIRE 1.4 ([23])

(i) *Soit Γ un groupe discret agissant librement sur un espace de probabilité (X, μ) alors $\beta_n(R_\Gamma) = \beta_n(\Gamma)$.*

(ii) *Deux groupes discrets orbitalement équivalents ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2.*

(On dit que deux groupes discrets Γ_j sont orbitalement équivalents s'ils possèdent une action ergodique libre sur un espace de probabilité engendrant la même relation d'équivalence.)

2. FACTEURS DE TYPE II_1

S. Popa introduit la classe $\mathcal{HT}$ des facteurs M de type II_1 qui possèdent une sous-algèbre abélienne maximale A telle que l'inclusion $A \subset M$ satisfasse deux propriétés, l'une $(\mathcal{T})$ de rigidité, l'autre $(\mathcal{H})$ d'approximation compacte. Il montre alors que si M possède une telle sous-algèbre abélienne maximale, celle-ci est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur et détermine de manière unique une relation d'équivalence ergodique $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, μ), et un 2-cocycle v à valeurs dans le groupe unitaire de $L^\infty(X, \mu)$ tels que $M = L(\mathcal{R}, v)$. Il en résulte que tout invariant de $\mathcal{R}$ est un invariant de M.

Sous-algèbres de Cartan

Une sous-algèbre (involutive) abélienne maximale d'un facteur M est dite régulière ([19]) (ou « de Cartan » ([21])) quand son normalisateur $\mathcal{N}(A)$ dans M engendre M comme algèbre de von Neumann. Soit M un facteur de type II_1 séparable[(1)]. Il est immédiat (*cf.* ([21])) que $A \subset M$ est une sous-algèbre de Cartan si et seulement si il existe une relation d'équivalence ergodique à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, μ), et un 2-cocycle v à valeurs dans le groupe unitaire de $L^\infty(X, \mu)$ tels que $(A \subset M) \sim (L^\infty(X, \mu) \subset L(\mathcal{R}, v))$. Il s'agit là d'une simple traduction et l'association $(A \subset M) \to (\mathcal{R}, v) \to (A \subset M)$ transforme l'isomorphisme des inclusions $(A \subset M)$ en isomorphisme des relations d'equivalence $\mathcal{R}$ avec 2-cocycles v (voir [21]).

L'outil essentiel qui permet de détecter les sous-algèbres de Cartan est la théorie des « correspondances » où « bimodules de Hilbert » ([11], [13], [42], [46]).

Définition 2.1

(i) *Soient M et N deux algèbres de von Neumann, une correspondance de M vers N est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui est un $N - M$-bimodule.*

(ii) *Une correspondance $\mathcal{H}$ de M vers N est finie quand les algèbres de von Neumann M et N et leurs représentations dans $\mathcal{H}$ sont finies.*

Pour un facteur de type II_1 le bimodule ${}_M L^2(M, \tau)_M$ où τ est la trace normalisée, joue le rôle de la correspondance identique. Si $A_j \subset M$ sont des sous-algèbres de von Neumann on note ${}_{A_1} L^2(M, \tau)_{A_2}$ la correspondance obtenue par restriction.

Le résultat suivant est dû à ([44]), s'appuyant sur ([21]).

Proposition 2.2. — *Soit M un facteur de type II_1 séparable.*

(i) *Une sous-algèbre involutive abélienne maximale $A \subset M$ est de Cartan si et seulement si la correspondance ${}_A L^2(M, \tau)_A$ est somme directe de correspondances finies.*

(ii) *Soient $A_1, A_2 \subset M$ deux sous-algèbres de Cartan de M. Alors A_1, A_2 sont conjuguées par un unitaire de M si et seulement si la correspondance ${}_{A_1} L^2(M, \tau)_{A_2}$ est somme directe de correspondances finies.*

Passons maintenant aux propriétés H d'approximation compacte et T de rigidité.

---
(1) séparable pour la norme $\| \|_2$ donnée par la trace.

Propriété T et inclusions rigides

Un groupe localement compact G a la propriété T de Kazhdan ssi la représentation triviale est isolée dans le spectre de G.

Pour les facteurs ce sont les correspondances qui jouent le rôle des représentations et un facteur N de type II_1 vérifie la *propriété T* ssi la correspondance $L^2(N,\tau)$ (qui joue le rôle de la représentation triviale) est isolée ([16]). Autrement dit, un facteur N de type II_1 a la propriété T ssi

(T) Il existe $n < \infty$, $x_1, x_2, ..., x_n \in N$ et $\varepsilon > 0$ tels que si $\mathcal{H}$ est un N-bimodule Hilbertien et $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur de norme 1 tel que $\|x_i\xi - \xi x_i\| \leqslant \varepsilon, \forall\, i$, alors $\mathcal{H}$ contient un vecteur non nul ξ_0 tel que $x\xi_0 = \xi_0 x, \forall\, x \in N$.

Le facteur $L(\Gamma)$ associé à un groupe discret (i.c.c.) Γ a la propriété T ssi le groupe Γ a la propriété T ([16]). Les facteurs de type II_1 ayant la propriété T vérifient des propriétés remarquables comme ([9]).

Si N vérifie T le groupe $\mathrm{Out}(N) :=\mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Int}(N)$ est dénombrable discret.

Un point essentiel dans la démonstration de la propriété T par Kazhdan pour $SL(n,\mathbb{R})$ (resp. $SL(n,\mathbb{Z})$), $n \geqslant 3$, consiste à montrer que les représentations de $\mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$ proches de la représentation triviale contiennent en fait un vecteur fixe par le sous-groupe $\mathbb{R}^2$. Cette propriété de « rigidité relative » a été formulée par Margulis ([34], [27]) de la manière suivante.

Soit $\Gamma \subset \Gamma'$ une inclusion de groupes discrets. Le couple $\Gamma \subset \Gamma'$ a la propriété T ssi

(T_r) Il existe $n < \infty$, $g_1, g_2, ..., g_n \in \Gamma'$ et $\varepsilon > 0$ tels que si $\pi : \Gamma' \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de Γ' dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\xi \in \mathcal{H}$ vecteur unité satisfait $\|\pi(g_i)\xi - \xi\| < \varepsilon, \forall\, i$, il existe un vecteur non-nul $\xi_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\pi(h)\xi_0 = \xi_0, \forall\, h \in \Gamma$.

Dans le cas $\Gamma = \Gamma'$ cette condition se réduit à la propriété T *de Kazhdan* ([30], [18], [50]).

S. Popa a étendu la propriété T des facteurs au cas des inclusions d'algèbres de von Neumann et cette propriété « relative » joue un rôle crucial dans sa démonstration ([40]). La proposition suivante est un exemple typique de la traduction du langage des correspondances (bimodules) à celui des applications complètement positives lesquelles jouent le même rôle que les « coefficients » des représentations dans la théorie des représentations unitaires. Soient N un facteur de type II_1 et τ sa trace normalisée, $\mathcal{H}$ un N-module hilbertien. Nous dirons d'un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ qu'il est δ-tracial ssi $|\langle x\xi, \xi\rangle - \tau(x)| \leqslant \delta||x||\,,\ \forall\, x \in N$.

PROPOSITION 2.3 ([40]). — *Soient N un facteur de type II_1 et $B \subset N$ une sous-algèbre de von Neumann. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subset N$ fini et $\delta > 0$ tels que pour tout N-bimodule hilbertien $\mathcal{H}$ et tout vecteur unité $\delta-$bitracial tel que $\|y\,\xi - \xi\, y\| \leqslant \delta, \forall\, y \in F$ il existe un vecteur $\xi_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi_0 - \xi\| \leqslant \varepsilon$ et $b\,\xi_0 = \xi_0\, b, \forall\, b \in B$.*

2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $F \subset N$ *fini et* $\delta > 0$ *tels que si* $\phi : N \to N$ *est une application complètement positive normale* $\tau \circ \phi \leqslant \tau, \phi(1) \leqslant 1$ *et* $\|\phi(x) - x\|_2 \leqslant \delta$, $\forall\, x \in F$, *alors* $\|\phi(b) - b\|_2 \leqslant \varepsilon, \forall\, b \in B$, $\|b\| \leqslant 1$.

Définition 2.4. — *Soient* N *un facteur de type* II_1 *et* $B \subset N$ *une sous-algèbre de von Neumann. L'inclusion* $B \subset N$ *est rigide ssi* $B \subset N$ *vérifie les conditions equivalentes de la proposition 2.3.*

Propriété H d'approximation compacte

Dans ([26]) Haagerup démontre que les groupes libres $\Gamma = \mathbb{F}_n$, $2 \leqslant n \leqslant \infty$ vérifient la propriété H suivante : Il existe une suite φ_n de fonctions de type positif telles que

$$(H) \qquad \varphi_n \in c_0(\Gamma) \quad \text{et} \quad \forall\, g \in \Gamma\,, \quad \varphi_n(g) \to 1\,, \quad \text{pour } n \to \infty.$$

Cette propriété d'approximation de Haagerup ou propriété H est héritée par tout sous-groupe. Elle a été démontrée pour de nombreux groupes discrets comme les sous-groupes discrets de $SO(n,1)$ ([4]), et de $SU(n,1)$ ([17]), ou les groupes $SL(2,\mathbb{K})$ pour tout corps de nombres ([6]).

Il est facile de transposer la propriété H pour les facteurs ([12], [7], [16]) : Un facteur N de type II_1 a la propriété H ssi il existe une suite d'applications complètement positives ϕ_k de N dans N telles que $\tau \circ \phi_k \leqslant \tau$, et en notant $\widetilde{\phi_k}$ les opérateurs correspondants dans $L^2(N,\tau)$ tels que l'on ait

$$(\widetilde{H}) \qquad \widetilde{\phi_k} \text{ compact, et } \forall\, x \in N\,, \quad \|\phi_k(x) - x\|_2 \to 0, \quad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Le facteur $L(\Gamma)$ associé à un groupe (i.c.c.) Γ vérifie $\widetilde{H}$ ssi le groupe Γ vérifie H ([7]). La propriété H d'approximation compacte a été étendue au cas d'une inclusion $B \subset N$ dans ([2]). S. Popa considère la variante suivante de cette définition. L'on note $\langle N, B\rangle$ l'algèbre de von Neumann semi-finie commutant de l'action à droite de B dans $L^2(N,\tau)$ et $J(\langle N, B\rangle)$ l'idéal des opérateurs « compacts » de $\langle N, B\rangle$, c'est-à-dire des opérateurs $T \in \langle N, B\rangle$ vérifiant

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un projecteur fini $p \in \langle N, B\rangle$ tel que $\|T(1-p)\| < \varepsilon$.

Définition 2.5. — *Soient* N *un facteur de type* II_1, τ *sa trace normalisée et* $B \subset N$ *une sous-algèbre de von Neumann.*

N *a la propriété H relative à* B *ssi il existe une suite* ϕ_n *d'applications complètement positives de* N *dans* N *telles que* $\tau \circ \phi_n \leqslant \tau$ *vérifiant les trois conditions suivantes*

(i) $\phi_n(b\,x\,b') = b\,\phi_n(x)\,b' \quad \forall\, b,\, b' \in B,\, x \in N$;

(ii) $\widetilde{\phi_n} \in J(\langle N, B\rangle), \forall\, n$;

(iii) $\forall\, x \in N \quad \|\phi_n(x) - x\|_2 \to 0\,, \quad$ pour $n \to \infty$.

La propriété (i) montre que l'opérateur $\widetilde{\phi_n}$ appartient au commutant de B dans $L^2(N,\tau)$. Dans le cas des sous-algèbres de Cartan $A \subset M$ associées à l'action ergodique d'un groupe discret Γ sur un espace de probabilité (X,μ), M a la propriété H relative à A ssi le groupe Γ a la propriété H.

Définition 2.6. — *Soient N un facteur de type II_1, τ sa trace normalisée et $B \subset N$ une sous-algèbre de von Neumann. On dit que B est une HT-sous-algèbre de N quand*

(i) *N a la propriété H relative à B (définition 2.5).*

(ii) *Il existe une sous-algèbre de von Neumann $B_0 \subset B$ telle que $B_0' \cap N \subset B$ et $B_0 \subset N$ rigide (définition 2.4).*

Le résultat clef de S. Popa est alors le suivant

Théorème 2.7 ([40]). — *Soit M un facteur de type II_1.*

1) *Toute sous-algèbre abélienne maximale ayant la propriété* HT *est de Cartan.*

2) *Deux sous-algèbres abéliennes maximales A_j ayant la propriété* HT *sont automatiquement conjuguées par un automorphisme intérieur de M.*

Pour démontrer 2), on utilise la propriété H de M relativement à A_1 (2.5) pour obtenir une suite d'applications complètement positives compactes par rapport à A_1 et convergeant vers l'identité. Par la propriété de rigidité de $A_2 \subset M$, (2.4), ces applications laissent A_2 uniformément invariant, ce qui produit des A_1-A_2-bimodules finis, et la proposition 2.2 achève la preuve.

Ce théorème montre que si M est dans la classe $\mathcal{HT}$, il lui correspond une unique relation d'équivalence ergodique préservant la mesure R_M^{HT} sur l'espace de probabilité (X,μ), associé à la sous-algèbre de Cartan $A = L^\infty(X,\mu)$ vérifiant HT. En particulier, tout invariant de R_M^{HT} est un invariant de $M \in \mathcal{HT}$. C'est le cas pour les nombres de Betti de la relation d'équivalence et l'on définit $\{\beta_n^{HT}(M)\}_{n\geqslant 0}$ pour un facteur M de classe $\mathcal{HT}$ comme les nombres de Betti $\{\beta_n(R_M^{HT})\}_n$ ([23]) de la relation d'équivalence R_M^{HT}.

Étant donnés un facteur M de type II_1 et un nombre réel $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit le facteur M^t de type II_1 comme l'algèbre réduite du facteur $N := M \otimes I_\infty$ par un projecteur de dimension t. Le facteur M^t est isomorphe à M ssi t appartient au groupe fondamental $F(M)$. L'opération $M \to M^t$ est bien définie modulo les automorphismes intérieurs et préserve la classe $\mathcal{HT}$. Il résulte de plus des propriétés générales des nombres de Betti des relations d'équivalence par amplification, ([23]), que l'on a $\beta_n^{HT}(M^t) = \beta_n^{HT}(M)/t, \forall\, n$. On notera aussi que $\mathcal{HT}$ est stable par produit tensoriel et que l'on a comme corollaire de ([5], [32], [23]) une formule de Künneth pour $\beta_n^{HT}(M_1 \overline{\otimes} M_2)$ en termes des nombres de Betti de $M_1, M_2 \in \mathcal{HT}$.

L'exemple le plus simple d'un facteur dans la classe $\mathcal{HT}$ est $M = L(\Gamma)$, où $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$. Pour montrer que M est dans la classe $\mathcal{HT}$, on considère la sous-algèbre abélienne A engendrée par $L(\mathbb{Z}^2)$, et l'on utilise la rigidité de Kazhdan pour l'inclusion $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ et la propriété d'approximation compacte de Haagerup pour le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$. Soit A la sous-algèbre abélienne engendrée par $L(\mathbb{Z}^2)$, elle s'identifie à $L^\infty(\mathbb{T}^2,\mu)$ où $\mathbb{T}^2$ est le groupe dual de $\mathbb{Z}^2$ et l'inclusion $A \subset M$ s'identifie à celle de $L^\infty(\mathbb{T}^2,\mu)$ dans le produit croisé $L^\infty(\mathbb{T}^2,\mu) \rtimes_\sigma SL(2,\mathbb{Z})$, où σ est l'action correspondante de $SL(2,\mathbb{Z})$. La relation d'équivalence R_M^{HT} implémentée par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur A a un seul nombre de Betti non-nul, $\beta_1(R_M^{HT}) = \beta_1(SL(2,\mathbb{Z})) = 1/12$ ([3], [5], [23]), et l'on a donc, avec $M = A \rtimes_\sigma SL(2,\mathbb{Z})$, l'égalité $\beta_1^{HT}(M) = 1/12$ et $\beta_n^{HT}(M) = 0, \forall\, n \neq 1$.

Corollaire 2.8 ([40]). — *Soit* $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$. *Le groupe fondamental du facteur* $M = L(\Gamma)$ *est trivial,* $F(M) = \{1\}$.

En particulier le facteur M est non-isomorphe à l'algèbre $M_n(M)$ des matrices n fois n sur M, pour $n \geqslant 2$, ce qui résout le problème 3 de Kadison ([29]) (voir aussi Sakai, Problem 4.4.38 dans [45]). S. Popa a également construit pour tout sous-groupe dénombrable $D \subset \mathbb{R}_+^*$ un facteur tel que $F(M) = D$ ([41]).

3. REMARQUES

1) N. Ozawa a récemment réussi à pousser plus loin les propriétés de rigidité des facteurs possédant la propriété T. Il montre par exemple dans ([38]) qu'il n'existe aucun facteur de type II_1 séparable « universel », *i.e.* contenant tous les autres. En fait il montre que le groupe unitaire d'un facteur de type II_1 séparable ne peut contenir tous les groupes discrets dénombrables ayant la propriété T.

2) La notion générale d'« hyperbolicité » est bien développée dans la colonne « groupes ». Dans ([37]) N. Ozawa montre que dans le facteur $L(\Gamma)$ associé à un groupe hyperbolique Γ le commutant d'une sous-algèbre diffuse est nécessairement une algèbre injective (moyennable). Il obtient ainsi des exemples simples de facteurs « premiers », c'est-à-dire qui ne peuvent se décomposer comme produit tensoriel de deux facteurs de type II_1. Le premier exemple de tels facteurs est dû à L. Ge ([24]). Enfin Ozawa et Popa ont montré dans ([39]) un résultat d'unique factorisation en facteurs « premiers » associés comme ci-dessus aux groupes hyperboliques. Ce résultat est à rapprocher de celui de Monod et Shalom ([35]) pour les relations d'équivalence.

3) La notion de nombre de Betti est désormais bien établie pour les colonnes « Groupes » et « Relations ». Il reste à l'établir pour la colonne « Facteurs ». Son utilisation discutée plus haut n'est en elle-même pas suffisante car la classe des facteurs $\mathcal{HT}$ est trop restreinte. De plus la notion de coût aurait suffi pour démontrer le corollaire 2.8 en utilisant ([28], [22]). Les nombres de Betti du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ sont tous nuls, car il admet un sous-groupe moyennable normal infini, de sorte que la notion de nombres de Betti pour les facteurs $\mathcal{HT}$ est une notion « relative » et ne correspond pas aux $\beta_n(\Gamma)$ pour $M = L(\Gamma)$. Il serait évidemment très intéressant de développer la notion « absolue » de nombres de Betti pour les facteurs et de les calculer pour les facteurs $L(\Gamma)$ pour les groupes libres.

RÉFÉRENCES

[1] M. Atiyah – « Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras », in *Colloque « Analyse et Topologie » en l'honneur d'Henri Cartan*, Astérisque, vol. 32, Société Mathématique de France, 1976, p. 43–72.

[2] F. Boca – « On the method for constructing irreducible finite index subfactors of Popa », *Pacific J. Math.* **161** (1993), p. 201–231.

[3] A. Borel – « The L^2-cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **10** (1985), p. 95–105.

[4] J. de Cannière & U. Haagerup – « Multipliers of the Fourier algebra of some simple Lie groups and their discrete subgroups », *Amer. J. Math.* **107** (1984), p. 455–500.

[5] J. Cheeger & M. Gromov – « L^2-cohomology and group cohomology », *Topology* **25** (1986), p. 189–215.

[6] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg & A. Valette – *Groups with the Haagerup property (Gromov's a-T-menability)*, Progress in Math., Birkhäuser, 2001.

[7] M. Choda – « Group factors of the Haagerup type », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **59** (1983), p. 174–177.

[8] A. Connes – « Classification of injective factors », *Ann. of Math.* **104** (1976), p. 73–115.

[9] ______, « Sur la théorie non-commutative de l'intégration », in *Algèbres d'opérateurs, Séminaire Les Plans-sur-Bex, 1978*, Lect. Notes in Math., vol. 725, Springer, Berlin, 1979, p. 19–143.

[10] ______, « A type II_1 factor with countable fundamental group », *J. Operator Theory* **4** (1980), p. 151–153.

[11] ______, « Correspondences », Notes manuscrites, 1980.

[12] ______, « Classification des facteurs », Proc. Symp. Pure Math., vol. 38, American Mathematical Society, 1982, p. 43–109.

[13] ______, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[14] A. Connes, J. Feldman & B. Weiss – « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **4** (1982), p. 431–450.

[15] A. Connes & V.F.R. Jones – « A II_1 factor with two non-conjugate Cartan subalgebras », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), p. 211–212.

[16] ______, « Property T for von Neumann algebras », *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), p. 57–62.

[17] M. Cowling & U. Haagerup – « Completely bounded multipliers and the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one », *Invent. Math.* **96** (1989), p. 507–549.

[18] C. Delaroche & A. Kirillov – « Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés », in *Sém. Bourbaki (1967/1968)*, collection hors série de la S.M.F., vol. 10, Société Mathématique de France, 1995, exp. n° 343, p. 507–528.

[19] J. Dixmier – « Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini », *Ann. of Math.* **59** (1954), p. 279–286.

[20] H. Dye – « On groups of measure preserving transformations I, II », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 119–159, & **85** (1963), p. 551-576.

[21] J. Feldman & C.C. Moore – « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), p. 289–324, 325–359.

[22] D. Gaboriau – « Coût des relations d'équivalence et des groupes », *Invent. Math.* **139** (2000), p. 41–98.

[23] ———, « Invariants ℓ^2 de relations d'équivalence et de groupes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2002).

[24] L. Ge – « Prime factors », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **93** (1996), p. 12762–12763.

[25] V.Y. Golodets & N.I. Nesonov – « T-property and nonisomorphic factors of type II and III », *J. Funct. Anal.* **70** (1987), p. 80–89.

[26] U. Haagerup – « An example of non-nuclear C*-algebra which has the metric approximation property », *Invent. Math.* **50** (1979), p. 279–293.

[27] P. de la Harpe & A. Valette – *La propriété T de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, vol. 175, Société Mathématique de France, 1989.

[28] G. Hjorth – « A lemma for cost attained », UCLA preprint, 2002.

[29] R.V. Kadison – « Problems on von Neumann algebras », Baton Rouge Conference 1867, unpublished.

[30] D. Kazhdan – « Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups », *Functional Anal. Appl.* **1** (1967), p. 63–65.

[31] G. Levitt – « On the cost of generating an equivalence relation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), p. 1173–1181.

[32] W. Luck – « Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers II. Applications to Grothendieck groups, L^2-Euler characteristics and Burnside groups », *J. reine angew. Math.* **496** (1998), p. 213–236.

[33] G. Margulis – « Discrete groups of motion of manifolds of non-positive curvature », *Am. Math. Soc. Translations.* **109** (1977), p. 33–45.

[34] ———, « Finitely-additive invariant measures on Euclidian spaces », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **2** (1982), p. 383–396.

[35] N. Monod & Y. Shalom – « Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology », preprint.

[36] D. Ornstein & B. Weiss – « Ergodic theory of amenable group actions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), p. 161–164.

[37] N. Ozawa – « Solid von Neumann algebras », `math/0302082`.

[38] ———, « There is no separable universal II_1-factor », `math/0210411`.

[39] N. Ozawa & S. Popa – « Some prime factorisation results for II_1 factors », `math/0302240`.

[40] S. Popa – « On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants ».

[41] ______, « Strong rigidity of II_1 factors coming from malleable actions of weakly rigid groups », `math/0305306`.

[42] ______, « Correspondences », INCREST preprint, unpublished, 1986.

[43] ______, « Free independent sequences in type II_1 factors and related problems », in *Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992)*, Astérisque, vol. 232, Société Mathématique de France, 1995, p. 187–202.

[44] S. Popa & D. Shlyakhtenko – « Cartan subalgebras and bimodule decomposition of II_1 factors », *Math. Scand.* **92** (2003), p. 93–102.

[45] S. Sakai – *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[46] J.-L. Sauvageot – « Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert », *J. Operator Theory* **9** (1983), p. 237–252.

[47] J.-P. Serre – *Arbres, amalgames, SL(2)*, Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, 1977.

[48] D. Voiculescu – « The analogues of entropy and of Fisher's information theory in free probability II », *Invent. Math.* **118** (1994), p. 411–440.

[49] ______, « The absence of Cartan subalgebras », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), p. 172–199.

[50] R. Zimmer – *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser-Verlag, Boston, 1984.

Alain CONNES

Collège de France
place Marcelin Berthelot
F-75005 Paris
E-mail : `alain@connes.org`