Astérisque

DANIEL BENNEQUIN

Dualités de champs et de cordes

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 899, p. 117-148
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__117_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 2002
54^{e} année, 2001-2002, n^{o} 899, p. 117 à 148

DUALITÉS DE CHAMPS ET DE CORDES
[d'après 't Hooft, Polyakov, Witten et al.]

par **Daniel BENNEQUIN**

L'auteur souhaite seulement présenter, pour des mathématiciens, le cadre géométrique des dualités en physique. En particulier, faute de temps et de place, l'exposé écrit ne développe pas les principales applications en mathématique : symétrie miroir et théorie de Seiberg-Witten.

1. DUALITÉS CLASSIQUES

1.1. Une dualité s'installe lorsque deux points de vue opposés sont nécessaires pour décrire un même ensemble de phénomènes. La dualité est l'échange de points de vue complémentaires. Elle est partout présente en physique.

Une première manifestation de dualité est expliquée dans le cours de Feynman : la description d'un champ doit passer par la description du mouvement d'une particule test ou d'un appareil amplificateur (par exemple de la limaille de fer pour un champ magnétique ou des antennes pour les ondes gravitationnelles). À un niveau plus fin, la particule crée des champs; plus fondamentalement, particule et appareil sont eux-mêmes des champs; comment décrire cette interaction entre champs sans choisir un point de vue extérieur aux champs ?

La perception visuelle fait aussi intervenir une dualité, que B. Julia m'avait signalée : les photons qui renseignent sur une position de la matière ne communiquent que des impulsions; à partir d'une fonction des impulsions et des fréquences (p, ω), notre système nerveux extrait une fonction des positions et du temps (q, t). La transformation de Fourier est une expression mathématique de cette dualité. Elle traduit en Analyse la plus ancienne dualité développée en mathématique : la dualité projective de Poncelet.

En mécanique quantique, la transformation de Fourier devient un changement de repère (W. Heisenberg, [38]), exprimant la *dualité onde-corpuscule.* Le principe d'incertitude limite la compatibilité des points de vue mis en dualité, mais la mécanique quantique rétablit aussi un équilibre entre la matière et les champs d'interaction, en introduisant la fonction d'onde de Schrödinger.

Le domaine classique impose des équations différentielles à ses champs, par exemple l'équation de Maxwell pour le champ électromagnétique, l'équation d'Einstein pour le champ gravitationnel. La Mécanique quantique relativiste ajoute les équations de Dirac pour les fonctions d'ondes. Dualement, le champ de Maxwell peut être vu comme fonction d'onde du photon.

Dans le vide sur $\mathbb{R}^4$, les équations de Maxwell pour les champs électrique et magnétique E et B s'écrivent

$$\begin{array}{ll} \nabla \times B = \dfrac{\partial E}{\partial t}, & \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0, & \nabla \cdot E = 0 \end{array}$$

elles sont symétriques pour la transformation

$$E \longmapsto B, \qquad B \longmapsto -E.$$

C'est surtout cette sorte de symétrie qui s'appelle *dualité* dans les développements récents (Misner et Wheeler, *cf.* [57]).

Pour que cette symétrie reste valable en présence de charges et de courants, Dirac a proposé, en 1931, d'ajouter des charges et des courants magnétiques aux côtés des charges et des courants électriques usuels ([14], [15]). Ce fut l'invention du *monopôle magnétique*, activement recherché mais toujours non détecté.

Cependant, le potentiel magnétique est un vecteur et le potentiel électrique, lui, est un scalaire, ce qui fait penser qu'à un niveau plus profond, notamment en mécanique quantique, des difficultés s'opposent à la dualité électrique–magnétique (*cf.* Witten, 1997, [97]).

Dans la théorie des interactions faibles (principales responsables des effets radioactifs), on rencontre une généralisation des équations de Maxwell, les équations de Yang-Mills-Higgs (*cf.* § 1.2). Pour des équations analogues, en 1974, 't Hooft et Polyakov ont découvert des *monopôles magnétiques non abéliens*, et établi une forme de dualité échangeant magnétisme et électricité (*cf.* § 2.3). Pourtant, là aussi, les degrés de liberté des potentiels sont différents.

C. Montonen et D. Olive (1977) ont conjecturé une vraie dualité électrique–magnétique, mais dans une *théorie de jauge* super-Yang-Mills-Higgs, avec 4 *supersymétries*, en dimension 4. Après des progrès notables de D. Olive, E. Witten (1978) et N. Seiberg (1988), la conjecture a été établie en 1994 par A. Sen (*cf.* § 2.4).

Une propriété remarquable de cette dualité est qu'elle échange deux *échelles* différentes de la théorie : les propriétés à courte distance avec celles aux grandes distances.

La *dualité* se révèle être un principe fondamental en théorie quantique des champs. Elle transforme le principe de correspondance de Bohr : une théorie quantique est associée à une théorie de champ classique, mais, une fois la théorie quantique développée, il apparaît d'autres théories classiques représentant certaines limites, certains points de vue différents, sur la même théorie quantique. Comme une variété peut avoir besoin de plusieurs cartes.

De plus, la plupart des dualités connues proviennent de dualités en théorie des cordes. Le creuset des dualités semble être la M-théorie (§ 3.3).

La fin du § 1 expose brièvement le cadre des champs classiques, avec des fermions à partir de 1.3 et des super-champs à partir de 1.4. Le § 2 donnera une idée de la renormalisation, ce qui est nécessaire pour préciser la définition d'une dualité et il exposera quelques exemples de dualité de champs. Le § 3 fera une introduction aux dualités de cordes qui semblent détenir le secret des dualités de champs.

1.2. En théorie de Yang-Mills (*cf.* [40], [56]), la variable est une connection ∇ sur un fibré principal P en groupe de Lie G au-dessus d'une variété W de dimension D. En choisissant une trivialisation locale de P, on écrit $\nabla = d + A$, avec une 1-forme différentielle A à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. La courbure F, ou F_A, de ∇ est la 2-forme définie par $F_A = dA + A \wedge A$; à l'origine classique, c'est F qui s'appelait le champ. Soit d_A la dérivée extérieure covariante, étendant ∇ en une dérivation graduée du module des formes différentielles à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (sur l'algèbre des formes différentielles scalaires), l'identité de Bianchi, toujours satisfaite, est $d_A F_A = 0$. Pour écrire l'équation de Yang-Mills, on choisit une métrique sur W, lorentzienne, de signature $(D-1,1)$ si on souhaite un temps réel, riemannienne si on préfère le temps imaginaire pur, et l'on note $*$ l'opérateur de Hodge-de Rham associé, échangeant les formes extérieures de degré p et $D-p$. Dans le vide, l'équation est

$$d_A * F_A = 0.$$

S'il y a des courants j, l'équation devient

$$d_A * F_A = *j.$$

Les équations de Maxwell sont obtenues dans le cas particulier $D = 4$, $G = U_1$; alors F est une 2-forme différentielle ordinaire. En signature lorentzienne, et en choisissant une coordonnée t pour le temps, la courbure F se décompose en un champ de (co)vecteurs E (les composantes en $dt \wedge dx^i$) et un champ de (bi)vecteurs B (les composantes en $dx^i \wedge dx^j$). Alors l'action de l'opérateur $*$ se traduit par $E \longmapsto B$, $B \longmapsto -E$.

Dans ce formalisme, avec $W = M \times \mathbb{R}$, M de dimension 3, pour toute surface fermée $\Sigma \subset M$, on définit les charges électriques et magnétiques par

$$Q_e(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{*F}{2\pi}, \qquad Q_m(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{F}{2\pi}.$$

Le fait que F est la courbure d'un fibré impose à $Q_m(\Sigma)$ d'être un nombre entier. En l'absence de mouvement des courants, $Q_e(\Sigma)$ est indépendant de t en vertu des équations de Maxwell. On dit que Q_e est une charge de Noether et que Q_m est une charge topologique.

Les équations de Yang-Mills sont les équations d'Euler-Lagrange de l'action dans le vide

$$S = \frac{1}{4g^2} \int_W \mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A).$$

On dit que $\frac{1}{4g^2} \mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A)$ est le lagrangien de la théorie.

La théorie est invariante par *changement de jauge*, c'est-à-dire par automorphisme de P induisant l'identité de W.

La variable de la gravitation d'Einstein est une métrique $\mathbf{g}$ (lorentzienne pour un temps réel) sur W et le lagrangien est celui de Hilbert, c'est-à-dire $R \cdot \mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}$, où $\mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}$ est l'élément de volume de $\mathbf{g}$ et R la courbure scalaire de $\mathbf{g}$. Einstein a aussi pensé au lagrangien plus général $(R - 2\Lambda) \cdot \mathrm{Vol}_{\mathbf{g}}$, pour une constante Λ, la *constante cosmologique* (*cf.* [37], [93]). La théorie est invariante par difféomorphisme de W. Afin d'obtenir les équations du mouvement en présence d'autres champs, comme ceux de Maxwell ou de Yang et Mills, on ajoute les actions entre elles et on prend les équations variationnelles d'Euler-Lagrange. Les théories d'Einstein et de Maxwell ou Yang-Mills ensemble deviennent invariantes par tout automorphisme de P. (*Cf.* [9], [37], [42].)

Un des exemples les plus étonnants de dualité classique est celui d'Ehlers et Geroch pour la gravitation en dimension 4 ([23], [28]) :

Lorsqu'existe un champ de vecteurs K préservant $\mathbf{g}$, c'est-à-dire un champ de Killing, on peut voir la théorie d'Einstein comme une théorie de dimension 3 sur le quotient par K ; les champs étant la métrique quotient $\mathbf{h}$, un champ scalaire λ, venant de la norme de K, et une 1-forme $\mathbf{A}$ exprimant le produit scalaire par K des vecteurs transverses. Cette forme $\mathbf{A}$ hérite d'une invariance de jauge U_1, et l'équation d'Einstein en dimension 4 impose l'équation de Maxwell : $d * d\mathbf{A} = 0$. J. Ehlers a donc pu introduire le *champ scalaire* dual, au sens de Poincaré-Hodge : $d\omega = *d\mathbf{A}$. Pour écrire les équations différentielles sur $\mathbf{h}, \lambda, \omega$, le mieux selon R. Geroch est de poser $\tau = \omega + i\lambda$ et $\widetilde{\mathbf{h}} = \lambda \mathbf{h}$; dès lors, en notant $\widetilde{\nabla}$ la dérivée covariante associée à $\widetilde{\mathbf{h}}$, on a

$$\widetilde{R} = \frac{1}{2} (\mathrm{Im}\, \tau)^{-2} (\widetilde{\nabla}\tau) \circ (\widetilde{\nabla}\bar{\tau}), \qquad d^{\widetilde{\nabla}} * d^{\widetilde{\nabla}}\, \tau = (\mathrm{Im}\, \tau)^{-1} |\widetilde{\nabla}\tau|^2.$$

Le miracle de dualité est l'invariance par $SL_2(\mathbb{R})$ de ces équations : en posant $\widetilde{\mathbf{h}}' = \widetilde{\mathbf{h}}$, et

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

pour tout ensemble de nombres réels a, b, c, d, tels que $ad - bc = 1$, on déduit d'une solution $\mathbf{h}, \tau$ une autre solution $\mathbf{h}', \tau'$.

C'était le rêve d'Einstein de trouver une théorie unitaire mettant tous les champs sur le même pied que la métrique $\mathbf{g}$. Une proposition dans ce sens fut celle de Th. Kaluza (1921), précisée par O. Klein (1926). L'idée est présente dans l'exemple précédent : la réduction dimensionnelle (*cf.* [8], [9], [21]).

Partant du lagrangien d'Einstein en dimension D, on impose à W d'être le produit d'une variété X par une variété M de dimension k, et on impose à la métrique le long de M de varier dans une famille de dimension finie, par exemple $M = G/H$ et $\mathbf{g}_{|M}$ G-invariante, ou encore $(M, \mathbf{g})$, variété riemannienne d'Einstein-Kähler. Alors le champ $\mathbf{g}$ sur W se réinterprète comme un ensemble de champs sur X. Dans le cas le plus simple, $M = S^1$, $X = \mathbb{R}^4$, on trouve le couplage sur X des équations d'Einstein et de Maxwell, mais accompagné d'un champ scalaire supplémentaire qui ne peut pas être pris constant dans les solutions. Lorsque $M = G$, groupe de Lie compact, on trouve à côté de $\mathbf{g}$ sur X un champ de Yang-Mills ∇, et comme champ supplémentaire, une métrique invariante (des deux côtés) sur G. Lorsque $M = G/H$, on trouve une métrique, une théorie de jauge (pour le normalisateur N de H dans G) et des champs de Higgs φ_1, encore accompagnés de champs scalaires φ_2 (*cf.* [9]). Ces *champs scalaires ajoutés* φ, et leurs généralisations en présence d'autres champs que $\mathbf{g}$ sur W, par exemple en présence d'un champ anti-symétrique $\mathbf{b}$ sur W vont fournir le principal réservoir de dualité, par un mécanisme analogue à celui de l'exemple d'Ehlers ([10], [11], [47], [49]).

1.3. En face des tenseurs comme $\mathbf{g}$, F, φ véhiculant des interactions entre particules et se manifestant quantiquement comme des bosons, il y a, pour la matière ordinaire, des champs de spineurs ψ qui ont le comportement quantique des fermions.

Lorsque $\mathbf{g}$ est une métrique définie positive, ou de signature lorentzienne $(D-1, 1)$, sur un espace vectoriel de dimension $D \geq 3$, la composante connexe de l'identité dans le groupe des rotations, $SO(\mathbf{g})$, possède un groupe fondamental à deux éléments. Le groupe $Spin(\mathbf{g})$ est le revêtement universel de $SO(\mathbf{g})$; c'est donc un revêtement à deux feuillets. Une *représentation spin* est une représentation linéaire complexe de $Spin(\mathbf{g})$ ayant la plus petite dimension possible. En dimension D impaire, il existe une représentation spin unique à isomorphisme près S de dimension $2^{(D-1)/2}$ sur $\mathbb{C}$; en dimension D paire, il y en a deux S^+, S^- de dimension $2^{D/2}$, dites de Weyl ([13], [33]). La somme $S = S^+ \oplus S^-$ s'appelle espace des spineurs de Dirac. Quand S est la complexifiée d'une représentation réelle $S_{\mathbb{R}}$, on dit que $S_{\mathbb{R}}$ est un espace de spineurs de Majorana. S'il existe $S_{\mathbb{R}}^+$ et $S_{\mathbb{R}}^-$, on parle de Majorana-Weyl.

Une structure spin sur une variété riemannienne orientée W est un revêtement double du fibré des repères orthonormés directs qui induit le revêtement $Spin(\mathbf{g})$ de $SO(\mathbf{g})$ en chaque point de W. Lorsqu'une structure spin existe, on peut définir des fibrés de spineurs encore notés S et un opérateur de Dirac $D : S \to S$; l'équation de Dirac sans masse $D\psi = 0$ dérive du lagrangien $\widetilde{\psi} \cdot D\psi$ ([13]).

En présence d'un fibré principal $P \to W$ en groupe G muni d'une connexion ∇ et en choisissant un fibré vectoriel E associé à P, on a un opérateur de Dirac tordu $D_A : S \otimes E \to S \otimes E,\ D_A = D \otimes 1 + 1 \otimes \nabla$; le lagrangien associé est $\widetilde{\psi} \cdot D_A\psi$.

Si l'on ajoute à ∇ et ψ les *champs de Higgs*, qui sont des sections de certains fibrés associés à P, on obtient tous les champs du « modèle standard ».

La théorie des représentations unitaires du groupe de Poincaré-Lorentz selon E. Wigner associe à toute particule une composante irréductible de la représentation du groupe des spineurs sur une puissance tensorielle $S \otimes S \otimes \cdots \otimes S$ avec n facteurs ; dans ce cas, on parle d'*hélicité* $\frac{n}{2}$, ou encore de *spin* $\frac{n}{2}$. Par exemple, l'électron est de spin $\frac{1}{2}$; le photon, un champ de vecteurs, un champ de covecteurs, une connexion ∇ est de spin 1 ; une métrique est de spin 2, la particule quantique associée est le *graviton*. Les particules de spin demi-entier sont les *fermions*, celle de spin entier, les *bosons*.

Élie Cartan a montré que le couplage des équations d'Einstein avec celles de Dirac exige un changement de point de vue : il ne suffit plus de considérer $\mathbf{g}$, il faut ajouter une torsion des connexions métriques, car le tenseur énergie-moment d'un spineur n'est pas symétrique. La méthode retenue pour résoudre le problème (Sciama-Kibble, 1961) consiste à introduire un sous-fibré réel V de $S \otimes S^*$, isomorphe au fibré tangent $T(W)$, et à faire varier l'isomorphisme $\varepsilon : T(W) \to V$, nommé *vielbein* et noté e_μ^α. Un choix de ε détermine une métrique. Les variables de la théorie sont alors ε, ψ et une connexion lorentzienne auxiliaire ω sur V (*cf.* [33]).

1.4. Toutes ces interactions, tous ces lagrangiens qui s'ajoutent font intervenir des échelles de grandeurs extrêmement différentes (des rapports de 10^{20}). La *supersymétrie*, introduite au début des années 70 (pour les besoins des cordes), se propose d'échanger les bosons avec les fermions ; si elle n'était qu'approximativement réalisée, cela pourrait expliquer les différences d'échelles.

Salam et Strathdee ont introduit la notion de *super-espace* dans ce contexte ; elle a depuis envahi toute la théorie des champs et des cordes (*cf.* [85], [56], [33], [13]).

Remarque. — Il y a là un point qui gêne souvent le dialogue entre mathématiciens et physiciens, car les définitions adoptées couramment en mathématique et en physique sont différentes. Mais A.S. Schwartz [74] a montré qu'elles sont équivalentes :

Pour $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note L_d l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, $L_d^0 = \mathbb{R}$ l'ensemble de ses éléments de degré 0, L_d^+ et L_d^- les facteurs de degré pair > 0 et de degré impair respectivement.

Le modèle local d'une *super-variété* au sens de De Witt de dimension $(m|n)$ et de dimension cachée $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un produit $U \times (\mathbb{R}^m \otimes L_d^+) \times (\mathbb{R}^n \otimes L_d^-)$, pour U ouvert de $\mathbb{R}^m$, que l'on note $U^{m|n}$. (*Cf.* [73], [85].)

Pour toute fonction C^∞, $f : U \to \mathbb{R}$, on note $Z[f]$ la fonction de $U \times (\mathbb{R}^m \otimes L_d^+)$ dans L_d définie par la formule

$$Z[f](u_1, \dots, u_m) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (u^+)^\alpha ,$$

en décomposant les coordonnées : $u_i = a_i + u_i^+$ avec $a_i \in L_d^0$ et $u_i^+ \in L_d^+$.

Une *super-fonction* Φ de $U^{m|n}$ dans L_d est une fonction de $U^{m|n}$ dans L_d de la forme suivante, pour $u \in U \times (\mathbb{R}^m \otimes L_d^+)$ et $v \in \mathbb{R}^n \otimes L_d^-$:

$$\Phi(u, v) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} Z[f_\beta](u) \cdot v^\beta ,$$

où les f_β sont des fonctions C^∞ de U dans $\mathbb{R}$.

On dit que Φ est paire (resp. impaire) si son image appartient à $L_d^+ \oplus L_d^0$ (resp. L_d^-).

À partir de là, on définit les *morphismes* $F = (\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Psi_1, \dots, \Psi_q)$ de $U^{m|n}$ dans $V^{p|q}$ par leurs composantes super-fonctions, les Φ_i étant paires et les Ψ_j impaires. Ces morphismes s'appellent applications de classe H^∞ dans [73].

En recollant les modèles, on obtient une catégorie de super-variétés. Cette catégorie pour $d = \infty$ est équivalente à la catégorie des super-variétés de Berezin, Kostant, Manin ([13], [56], [73], [74]), c'est-à-dire celle des espaces annelés avec le modèle local de faisceaux $\Lambda^{m|n}(U) = C^\infty(U, L_n)$, pour U ouvert dans $\mathbb{R}^m$, les morphismes étant les morphismes pairs d'algèbres graduées (*cf.* [13], p. 66, lemme de Leites et Manin).

Le super-espace-temps est le produit de l'espace-temps usuel W de dimension D avec le produit $(\mathbb{R}^D \otimes L_d^+) \times (S^N \otimes L_d^-)$, pour d assez grand. Le nombre N se nomme *nombre de super-symétrie*. L'espace qui sert pour la dimension impaire est l'espace S d'une représentation spinorielle. La super-algèbre de Lie des *super-translations* est construite à partir d'une application bilinéaire symétrique $\Gamma : S \otimes S \to W$ envoyant la diagonale dans le cône du futur. L'espace total des super-translations est le super-espace temps et le super-crochet est donné par $\{s_1, s_2\} = -2\Gamma(s_1, s_2)$ sur chaque composante S. La super-algèbre de Lie dite de super-Poincaré est l'extension de l'algèbre de Lie $so(\mathbf{g})$ du groupe de Lorentz, ou plutôt de $so(\mathbf{g}) \otimes (L_d^0 \oplus L_d^+)$, par l'algèbre des super-translations. Elle agit naturellement sur le super-espace-temps.

Les théories de jauge s'étendent en théories de « super-Yang-Mills-Higgs », mais aucune de ces théories n'est évidente à construire. Il était encore plus difficile de construire des théories de *supergravité*. C'est pourtant ce qu'ont fait, pour $D = 4$, $N = 1$, d'abord, Freedman et Van Nieuwenhuizen, Deser et Zumino en 1976 (*cf.* [24]). Puis la « théorie maximale » $D = 4$, $N = 8$, fut construite par E. Cremmer et B. Julia (1979, [10]) en compactifiant, selon une recette Kaluza-Klein super, l'extraordinaire théorie $D = 11$, $N = 1$ de Cremmer, Julia, Scherk (1978, [12]).

Un argument de W. Nahm, joint au parathéorème affirmant que les champs de spin > 2 n'ont pas d'évolution causale, entraîne que, pour la physique, $N = 8$ est un maximum en $D = 4$ et $N = 1$ est un maximum en $D = 11$. D'où l'importance de la supergravité en dimension 11.

En plus de la métrique $\mathbf{g}$ et de son super-partenaire, qui est un vecteur de spineurs appelé *gravitino*, il faut faire appel à une 3-forme $A_{\mu\nu\rho}$ pour construire cette théorie.

Les théories de supergravité contiennent souvent des champs antisymétriques $F_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho}, \ldots$. Les compactifications à la Kaluza-Klein font apparaître des champs scalaires φ couplés à des formes. Une conséquence des symétries de la fibre compacte et de la dualité de Hodge sur les espaces de solutions est que l'ensemble de ces champs $F, A, \varphi, \ldots$ forme des sections de fibrés en *espaces riemanniens symétriques* de Cartan G/H de type non compact (voir [8], [21]).

Par exemple, en compactifiant sur un tore $\mathbb{T}^k$ la supergravité $D = 11$, Cremmer et Julia ont détecté comme espace G/H : pour $k = 1$, $\mathbb{R}_+^\times$; $k = 2$, $(SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+^\times)/U_1$; $k = 3$, $(SL_3(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}))/SO_3 \times U_1$; $k = 4$, SL_5/SO_5 ; $k = 5$, $SO_{5,5}/SO_5 \times SO_5$; $k = 6$, $E_{6(6)}/Sp_4$; $k = 7$, $E_{7(7)}/SU_8$; $k = 8$, $E_{8(8)}/SO_{16}$, à l'aide d'Ehlers pour le dernier cas.

Pour la supergravité $D = 4$, $N = 4$, couplée avec 22 champs de vecteurs A_μ, on trouve $G = SL_2(\mathbb{R}) \times O(6, 22)$, $H = U_1 \times O_6 \times O_{22}$. Pour $D = 4$, $N = 8$, on a vu $G = E_{7(7)}$, $H = SU_8$. Pour $D = 4$, $N = 2$, il y a plusieurs théories, l'une d'entre elles donne $G = E_{7(-25)}$, $H = E_6 \times U_1$. On rencontre les espaces AI, BDI, EI, EV, EVII, EVIII en formes réelles normales (Helgason).

On trouvera les dualités quantiques de champs et de cordes à l'intérieur d'un sous-groupe discret $G(\mathbb{Z})$ du groupe de symétrie G (*cf.* [11], [19], [30], [47], [59], [92]).

2. DUALITÉS QUANTIQUES

2.1. En vertu du principe de correspondance de Bohr, une théorie quantique de champs, abrégée en TQC, est associée à un ensemble $\mathcal{A}$ de champs classiques $A_1, A_2, \ldots$, comme des connexions, des métriques ou des spineurs, sur une variété (ou une super-variété) W de dimension D, et à un lagrangien $\mathcal{L}(A_1, A_2, \ldots)$ qui est une fonction sur W, dont la valeur en $x \in W$ ne dépend des A_i qu'à travers leurs jets en x.

En mécanique quantique, la densité de probabilité de présence d'une particule est le carré du module d'une fonction d'onde ; en TQC, on suppose que la probabilité de trouver les particules correspondant aux champs $A_1, A_2, \ldots$ avec des impulsions-énergies données $p_1, p_2, \ldots$ à l'entrée ou à la sortie d'une collision s'obtient à partir de nombres complexes notés $\langle A_1(p_1)A_2(p_2)\cdots\rangle$, appelés *amplitudes.* Il est pratique de rassembler les amplitudes pour toutes les valeurs $p_1, p_2, \ldots$ possibles en prenant les transformées de Fourier inverses de ces fonctions des p_i : d'où une distribution notée (abusivement) $\langle A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots\rangle$, et interprétée comme amplitude de probabilité de présence. (*Cf.* [31], [48], [63], [77].)

On se donne en plus une famille de fonctions des champs, certaines locales, d'autres non $F(A_1, A_2, \dots)$, les quantités observables, et l'on souhaite calculer leurs amplitudes aussi $\langle F(A)\rangle$. Pour simplifier, nous noterons momentanément A la collection $A_1, A_2, \dots$. Richard Feynman a proposé de faire comme s'il existait une mesure de volume $\mathcal{D}A$ pour laquelle les amplitudes s'écriraient

$$\langle F(A)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}\int_W \mathcal{L}(A)} F(A),$$

où $Z = \int \mathcal{D}(A) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\int_W \mathcal{L}(A)\Big)$ s'appelle la *fonction de partition.* L'intégrale sur W de $\mathcal{L}(A)$ est l'*action classique* $S(A)$. Les intégrales suivant $\mathcal{D}A$ portent le nom d'*intégrales de Feynman.*

A priori, cette écriture n'est qu'un guide formel, un programme à réaliser. La théorie de la *renormalisation* a pour but de réaliser ce programme quand c'est possible (*cf.* [5], [43, 44], [48], [63], [72]).

La plupart des résultats sont *perturbatifs* : c'est-à-dire que les physiciens ont dû choisir des paramètres, considérés comme petits, comme la valeur du g dans le $\frac{1}{g^2}$ devant le $\mathcal{L}$ de Yang-Mills, ou $\hbar$, et procéder ordre par ordre en les puissances de g ou de $\hbar$ (voir l'exposé de L. Boutet de Monvel à ce séminaire sur les travaux de Connes et Kreimer). Mais quelques constructions rigoureuses, comme celles des champs conformes, où les calculs numériques impressionnants de E. Wilson sur la discrétisation de la théorie de Yang-Mills justifient l'espoir d'une théorie non-perturbative.

Remarque. — G. Segal ([77]) donne une définition plus précise des TQC, inspirée de son axiomatisation (1987) des théories de champs conformes et de celle donnée par Atiyah (1988) pour les théories topologiques des champs. Dans ces derniers cas, la théorie toute renormalisée peut être définie directement. Le point de vue de Segal fait le lien entre le point de vue, dit constructif, d'une vraie mesure euclidienne $\mathcal{D}A \exp(-S(A))$ et la quantification géométrique à la Souriau-Kostant-Weinstein.

Bien qu'on ne puisse pas entrer ici dans les détails, il me semble indispensable d'indiquer en peu de mots l'idée géométrique de la renormalisation ou plutôt comment elle devrait se passer en suivant l'approche de Wilson au début des années 70. En effet, la définition même d'une dualité en TQC et, comme on le verra, en théorie des cordes repose sur les concepts de la renormalisation. Et ne rien savoir de la renormalisation en TQC est à peu près comme ne rien savoir de la notion de limite quand on parle de vitesse et d'équation différentielle ordinaire.

D'abord les pionniers Feynman, Schrödinger, Tomonoga ont découvert qu'il n'y a pas de définition univoque des amplitudes, leur valeur dépend de l'*échelle d'observation.* (Aujourd'hui, l'un des principaux tests de la théorie des interactions fortes (QCD) est l'évolution de la charge renormalisée en fonction de l'échelle de l'énergie mise en jeu.)

Pour les théories de jauge, les principales recettes sont la « troncature », élimination des A de trop grandes et trop petites impulsions, la « régularisation dimensionnelle », déplacement en dimension non entière par prolongement analytique ou la « discrétisation sur réseaux ». Mais, dans un deuxième temps, il faut s'affranchir de ces régularisations arbitraires : des années 40 aux années 70 furent élaborés des procédés pour définir la « partie finie » des amplitudes en adaptant arbitrairement la limite d'un nombre fini de quantités (*cf.* [48], [63], [13], [72]). Au début des années 70, l'approche de Wilson par le groupe de renormalisation a bien éclairci la situation ([86], [87], [88], [5], [64]). Voici la démarche :

Soit $\mathcal{L}$ un lagrangien de champ classique ; par exemple

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{a}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{24}\varphi^4$$

pour la théorie dite φ^4 d'un champ scalaire (juste une fonction à valeur réelle sur l'espace-temps, modèle simplifié du magnétisme si l'on rend le temps et la masse imaginaires purs). Et soit U_0 la variété des paramètres dont $\mathcal{L}$ dépend ; dans l'exemple, U_0 est l'espace de coordonnées (a, m^2, λ), a se nomme l'« intensité de champ », m la « masse » et λ la « constante de couplage » ; dans un $\mathcal{L}$ plus général, on trouve des coordonnées naturelles pour U_0, avec des coefficients de monômes de dérivées des champs ; on les appelle toutes « constantes de couplages » pour simplifier.

L'échelle d'observation des particules (que $A_1, A_2, \ldots$ sont censés décrire) est donnée par l'inverse d'une distance ; elle est mesurée par un nombre Λ réel strictement positif, i.e. $\Lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Dans une théorie relativiste quantique, avec des unités où $c = \hbar = 1$, ce nombre Λ fixe aussi l'ordre de grandeur d'une fréquence, d'une énergie, d'une masse ou d'une impulsion.

La théorie achevée de $\mathcal{L}(A)$ doit prévoir des amplitudes $\langle A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots A_n(x_n)\rangle$ bien définies à une échelle donnée, pour des valeurs données des constantes de couplages :

une théorie quantique relativiste est décrite par une variété V munie d'un isomorphisme π sur un ouvert de $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$ et d'un feuilletage ρ de dimension 1.

Un point de V représente une collection cohérente d'amplitudes et ρ représente l'évolution des champs quantiques en fonction de Λ. L'application π correspond aux *conditions de renormalisation*, interprétation des constantes de couplages physiques par certaines amplitudes bien choisies.

Par exemple dans la théorie φ^4, la masse (fois i) donne le pôle des fonctions à deux points $\langle\varphi(p_1)\varphi(p_2)\rangle$ en fonction de l'impulsion $p = p_1 - p_2$, et la constante λ donne la valeur d'une amplitude (convenablement normalisée) à quatre points $\langle\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(p_4)\rangle$.

Comme le choix d'une unité d'échelle est indifférent, les feuilles de ρ se projettent sur les trajectoires d'un champ de vecteurs β sur U_0 ; si bien que β sur un ouvert de $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$ peut servir à paramétrer les amplitudes de V. Si l'on maintient (V, π, ρ), c'est pour indiquer qu'un point de V n'est pas un lagrangien de U_0, mais un lagrangien en général bien plus compliqué, non polynomial.

Le champ β, ainsi que son action (simple) sur les amplitudes (Gell-Mann et Low), porte le nom de *flot de renormalisation* ou *groupe de renormalisation.* (Selon la convention la plus répandue, le champ β est orienté dans le sens des énergies décroissantes.)

Donnons une idée de la construction de V, ρ et π, ou plutôt racontons l'histoire comme elle devrait se passer en général. Pour fixer les idées, travaillons avec la régularisation tronquant les grandes impulsions ([64]) ; les autres cas se laissent décrire de manière analogue ([43, 44], [87]). On commence par plonger U_0 dans un espace U assez grand de lagrangiens (en général U est de dimension infinie), en supposant que chaque point de U donne une valeur finie de l'intégrale fonctionnelle tronquée au-delà d'une certaine fréquence. En outre, pour tout couple (Λ_0, Λ_1) dans $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$ tel que $\Lambda_0 < \Lambda_1$, on se donne une fibration $\pi_{\Lambda_1,\Lambda_0}$ de U sur U_0 qui impose la valeur de certaines amplitudes tronquées par Λ_0 à l'échelle d'observation Λ_1. (Dans l'exemple φ^4, les valeurs de a, m^2, λ sont données par le développement en impulsions de l'intégrale du lagrangien jusqu'aux monômes de degré ≤ 4 en φ.) On suppose en plus que, partant de $\mathcal{L}$ dans U, tronquant l'intégrale de Feyman au-dessus de Λ_0 et calculant la moyenne sur les Λ dans l'intervalle $[\Lambda_1, \Lambda_0]$, on obtient les mêmes amplitudes qu'en tronquant simplement à Λ_1 un autre lagrangien $\mathcal{L}' = R_{\Lambda_1,\Lambda_0}(\mathcal{L})$, quitte à faire un changement de variables $x' = f(x)$ et normaliser autrement les champs $A_i' = Z_i A_i$. Ce $\mathcal{L}'$ est le *potentiel effectif* selon Wilson, associé à $\mathcal{L}$, à l'échelle Λ_1 et à la troncature au-dessus de Λ_0.

Le *(semi-)groupe de renormalisation* est l'action multiplicative de $]0,1[$ sur $U \times \mathbb{R}_+^\times$ définie par la formule suivante : $R_\lambda(\mathcal{L}, \Lambda) = (R_{\lambda\Lambda,\Lambda}(\mathcal{L}), \lambda\Lambda)$, pour $\lambda \in]0,1[$, $\mathcal{L} \in U$ et $\Lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. On a $R_{\lambda_2,\lambda_1} \circ R_{\lambda_1,\lambda_0} = R_{\lambda_2,\lambda_0}$ donc $R_{\lambda\mu} = R_\lambda \circ R_\mu$, $\lambda < 1$, $\mu < 1$. La variété $U_{\Lambda_1,\Lambda_0} = R_{\Lambda_1,\Lambda_0}(U_0)$ est censée couper transversalement les fibres de $\pi_{\Lambda_1,\Lambda_0}$. Tout cela est espéré pour que la théorie soit renormalisable mais c'est surtout le point suivant qui constitue un « théorème de renormalisation » : lorsque Λ_0 tend vers $+\infty$ la variété U_{Λ_1,Λ_0} converge vers une sous-variété U_{Λ_1} de U et la restriction de $\pi_{\Lambda_1,\Lambda_0}$ à U_{Λ_1,Λ_0} converge vers une application π_{Λ_1} de U_{Λ_1} sur U_0. Pour tout couple $\Lambda_1 < \Lambda_2$, on a $R_{\Lambda_1,\Lambda_2}(U_{\Lambda_2}) = U_{\Lambda_1}$. Les $U_\Lambda \times \{\Lambda\}$ forment une sous-variété V de $U \times \mathbb{R}_+^\times$ que la collection des π_Λ envoie dans $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$; le semi-groupe R induit un flot sur V ; c'est l'invariance d'échelle qui assure que ce flot provient d'un champ de vecteurs β sur U_0. On peut voir V et son feuilletage ρ comme la « vraie théorie » (ou l'ensemble des vraies théories), l'identification à $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$ et le champ β sont des souvenirs du lagrangien classique ; ce sont eux qui expriment qu'une théorie classique a été quantifiée.

Attention : Très peu de théories sont renormalisables au-dessus de $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$ tout entier ; en particulier, les rôles des Λ petits et des Λ grands sont en général dissymétriques dès le début de la construction. Dire que π projette bien V sur un ouvert où Λ tend vers ∞ signifie que la théorie s'analyse bien en ultraviolet, c'est-à-dire pour des distances de plus en plus petites ; au contraire, au-dessus d'un ouvert où Λ tend vers 0, on décrit le comportement infrarouge, pour les grandes distances.

L'adjectif « renormalisable » est souvent réservé aux théories qui sont renormalisables perturbativement en ultraviolet, cependant en mécanique statistique, qui est une version de la théorie euclidienne des champs quantiques ([69]), la renormalisation se fait surtout en infrarouge comme l'a expliqué K.G. Wilson ([87], [88], [5]). Qu'il existe aussi une théorie perturbative infrarouge en TQC est signalé entre autres par E. Witten (*cf.* [13], p. 1141).

La renormalisabilité perturbative UV dépend des poids des constantes de couplage g vis-à-vis des dilatations d'espace $x \mapsto t^{-1}x$: la théorie est formellement renormalisable si tous les poids sont positifs ou nuls. Exemple : φ^4 pour $D \leq 4$, mais pas $D > 4$; φ^3 pour $D = 6$; φ^6 pour $D = 3$; φ^k quel que soit k pour $D = 2$; Einstein, $D = 2$; Yang-Mills-Higgs, $D = 4$.

La dynamique β sur U_0 a des conséquences importantes pour la dynamique des champs dans l'espace-temps. *A priori* β pourrait engendrer un flot compliqué, cycles limites, attracteurs étranges, *etc.*, mais une conjecture qui tient bon prétend que β est le gradient d'une fonction. D'ailleurs ce sont surtout les points d'équilibre qui ont retenu l'attention.

Les points de U_0 qui sont des attracteurs de β lorsque $\Lambda \to \infty$ sont dits *stables dans l'ultraviolet* (ou UV-stables), ceux qui sont attracteurs quand $\Lambda \to 0$ sont dits *stables dans l'infrarouge* (ou IR-stables). Les limites 0 et ∞ sont les deux racines de l'arc-en-ciel. Lorsqu'un point correspondant à une théorie découplée, sans interaction, est UV-stable, la théorie est dite *asymptotiquement libre* ; c'est alors que la théorie des perturbations est pleinement justifiée. D'après 't Hooft, c'est le cas de la théorie de Yang-Mills non abélienne qui décrit les interactions fortes (QCD), interactions entre quarks, au contraire de l'électrodynamique quantique (QED) où l'absence d'interaction est plutôt IR-stable (le propre des théories de jauge abéliennes). Donc, aux grands moments de transfert (c'est-à-dire Λ grand), le couplage entre quarks et gluons tend vers zéro ; la théorie perturbative peut faire des prédictions. Le problème est à grande échelle (c'est-à-dire Λ petit). Là, logiquement, la théorie des perturbations ne peut plus dire grand chose.

C'est la volonté de comprendre le comportement infrarouge de ces théories qui mène à la dualité.

Il est temps d'indiquer ce qui s'appelle *dualité* dans une théorie quantique des champs :

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux théories de champs renormalisées avec des algèbres d'observables $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ et des ensembles U_0, U_0' de lagrangiens classiques (ou de constantes de couplages) ; une *dualité* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une application α d'une partie de $\mathcal{A}$ dans une partie de $\mathcal{A}'$ et une application φ d'une partie de $U_0 \times \mathbb{R}_+^\times$ dans une partie de $U_0' \times \mathbb{R}_+^\times$ envoyant le flot de β sur celui de β', de telle sorte que les amplitudes se correspondent :

$$\langle \alpha(F(A)) \rangle_{\varphi(u,\Lambda)} = \langle F(A) \rangle_{u,\Lambda}.$$

(Pour une parfaite dualité, on considère la collection complète des amplitudes, mais il peut arriver que la collection se réduise à une fonction de partition.)

Une dualité est un changement de coordonnées ; le plus proche analogue en Analyse classique est la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$. Un exemple d'identité d'amplitude est la formule de Plancherel $\|f\|_2 = C\|\widehat{f}\|_2$. On peut aussi penser aux généralisations en Analyse harmonique non commutative.

Les exemples les plus intéressants échangent une théorie descriptible en UV avec une théorie descriptible en IR.

Les principales dualités sont des « dualités faible/fort », c'est-à-dire qu'elles échangent les couplages faibles de $\mathcal{C}$ avec les couplages forts de $\mathcal{C}'$ et réciproquement.

Par exemple, pour la théorie φ^4 en dimension $D = 2$, le groupe de renormalisation β agissant sur le cadran $\{\lambda \in \mathbb{R}_+, m^2 \in \mathbb{R}_+\}$ possède deux sources $(0,0)$, $(\infty,0)$ et un col $(\lambda_c, 0)$. Il existe une dualité de la théorie φ^4 avec elle-même qui préserve le col et échange les sources.

Une discrétisation remarquable de φ^4 en dimension 2 (euclidienne) est le système d'Ising décrivant un ensemble de spins classiques $\sigma_{i,j} \in \{\pm 1\}$ aux sommets du réseau $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, avec une statistique de Boltzmann $\exp\big(-\frac{1}{kT}\, H(\sigma)\big)$ (*cf.* [27], [69]). La théorie duale provient du réseau dual Γ^* dont les sommets sont les centres des faces de Γ, avec les variables de *désordre* $\mu_{i^*,j^*} \in \mathbb{R}$, qu'on peut définir par des formules (non locales) à partir des corrélations des spins (*cf.* [69]). À la température exactement critique $T = T_c$, les corrélations des σ sur Γ coïncident avec les corrélations des μ sur Γ^*. On peut prendre la *limite continue critique* des systèmes d'Ising au voisinage de la température critique : en partant d'une boîte finie de côté n, on fait tendre T vers T_c et n vers ∞ de sorte que $n(T - T_c)$ tende vers une limite finie $\lambda_c^1 - \lambda^1$, et le plan continu est rapporté aux coordonnées $(x,y) = \lim \frac{1}{n}(i,j)$. L'ensemble des corrélations tend vers l'ensemble des amplitudes d'une théorie quantique des champs qui peut être identifiée à la théorie φ^4 (*cf.* Polyakov, Zamolodchikov).

Les formules de la théorie des champs holonomes de Jimbo, Miwa, Sato offrent ainsi l'un des rares cas où il est possible d'expliciter les applications $\alpha : \sigma \mapsto \mu$ et $\varphi : \frac{\lambda}{\lambda_c} \mapsto \frac{\lambda_c}{\lambda}$ de la définition d'une dualité.

Un autre exemple de dualité en dimension 2 a l'intérêt d'échanger magnétisme et électricité : le modèle de Thirring est dual de la théorie de Sine-Gordon. Comme dans le cas d'Ising, il s'agit de théories *complètement intégrables*, c'est-à-dire qu'on connaît des formules fermées pour des amplitudes renormalisées.

2.2. Dualités abéliennes

Quelques exemples simples de dualités quantiques faibles/fortes en petites dimensions exploitent la dualité de Poincaré-Hodge (*cf.* Witten *in* [13]). On peut traiter ces exemples rigoureusement à partir d'intégrales de Feynman gaussiennes, qui se ramènent à des mesures de Wiener ; leur exposé se fait donc dans le cadre des variétés riemanniennes. Les équations de champs classiques associées sont linéaires.

a) Le plus simple est en dimension $D = 2$, sur une surface de Riemann Σ. (Il est connu comme « équivalence $R \longleftrightarrow 1/R$ ».) On considère un champ scalaire unitaire, c'est-à-dire une fonction $\varphi : \Sigma \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. (On note aussi φ le relèvement aux revêtements universels $\widetilde{\Sigma} \to \mathbb{R}$.) Le lagrangien est $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{R^2}{4\pi}\, d\varphi \wedge *d\varphi$. L'équation classique est $\Delta\varphi = 0$, dont les solutions sont les fonctions harmoniques. Localement, si φ est harmonique, il existe une fonction σ à valeurs réelles telle que $*d\sigma = d\varphi$; on a aussi $\Delta\sigma = 0$. Et, à une constante additive près, σ et φ se déterminent l'une l'autre, $*d\varphi = -d\sigma$.

Afin de réaliser au mieux la dualité sous la forme d'une transformation de Fourier, on introduit un espace de champs φ plus grand ; celui de toutes les sections de tous les fibrés en cercle triviaux L au-dessus de Σ. Et à côté de φ et σ, on considère aussi les champs ∇, connexions unitaires sur L ; leur courbure est notée F. Le lagrangien complet est

$$\mathcal{L}(\varphi, \nabla, \sigma) = \frac{R^2}{4\pi}\, \nabla\varphi \wedge *\nabla\varphi - \frac{i}{2\pi}\, \sigma F.$$

Son équation d'Euler-Lagrange donne $F = 0$. Localement l'annulation de F permet d'utiliser ∇ pour trivialiser L et on retrouve dans cette trivialisation l'équation $\Delta\varphi = 0$. L'intégrale fonctionnelle de Feynman justifie cette trivialisation globalement : en intégrant d'abord sur σ, on trouve $F = 0$, mais en intégrant ensuite sur les classes d'équivalence de jauge de ∇, on trouve que ∇ ne peut avoir d'holonomie non triviale.

Surtout, en intégrant d'abord sur φ et ∇ sans toucher à σ (ce qui se fait avec la méthode des fantômes de Faddeev-Popov, *cf.* [33]), on obtient la formule suivante :

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{R^2}{4\pi}\int d\varphi\wedge *d\varphi} = \left(\frac{R}{\pi}\right)^{\chi(\Sigma)} \int \mathcal{D}\sigma e^{-\frac{1}{4\pi R^2}\int d\sigma\wedge *d\sigma},$$

qui généralise le calcul de la transformée de Fourier des gaussiennes en dimension finie.

Cette formule recouvre la propriété modulaire des fonctions thêta, *cf.* le cours de K. Gawędski dans [13].

Mais les calculs ne s'arrêtent pas aux fonctions de partitions : par exemple, (mêmes références) l'observable $e^{i(\varphi(P)-\varphi(Q))}$ pour deux points P et Q de Σ, correspond par dualité à la fonction de partition des champs σ, tels que la forme $d\sigma$ s'étend à $\Sigma\backslash(P \cup Q)$ en une forme fermée avec résidus 1 en P et -1 en Q. On voit que le dual d'un observable local peut ne pas être local. Il peut arriver aussi qu'il le soit : par exemple le dual de $d\varphi$ est $\frac{1}{iR^2} \star d\sigma$.

b) En dimension 3, la dualité échange les champs scalaires $\varphi : \Sigma \to S^1$ comme ci-dessus, avec les 1-formes A modulo équivalence de jauge $A \sim A + df$. La théorie duale de celle des fonctions harmoniques est la théorie magnétostatique de Maxwell. Le champ qui couple les deux, comme ∇ au a), est une connexion ∇_B sur un fibré L_B dont φ est une section :

$$\mathcal{L}(\varphi, \nabla_B, A) = \frac{R^2}{4\pi} \nabla_B \varphi \wedge * \nabla_B \varphi - \frac{i}{2\pi} A \wedge F_B.$$

Pour les fonctions de partition, on a

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{R^2}{4\pi} \int d\varphi \wedge * d\varphi} = C \sum_{L_A} \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{4\pi R^2} \int F_A \wedge * F_A}.$$

L'observable « boucle de Wilson » $e^{i\mu \oint_C A}$, donnée par l'holonomie de A sur un lacet C dans M^3, correspond aux sections φ d'un fibré L_B singulières le long de C, avec une monodromie prescrite $e^{2\pi i \mu}$.

c) Sur une variété W de dimension 4, la dualité abélienne, ou gaussienne, échange une connexion ∇_A sur un fibré en cercle L et une connexion ∇_C sur un fibré N, toutes les deux en théorie électromagnétique de Maxwell. C'est l'étoile de Hodge du § 1, $F_C = * F_A$, qui fournit la dualité. Le champ intermédiaire est une 2-forme ordinaire G.

't Hooft et Polyakov ont montré qu'on gagne beaucoup en ajoutant le terme topologique $\frac{i\theta}{4\pi^2} F_A \wedge F_A$ au lagrangien, qui devient :

$$\mathcal{L}(A) = \frac{1}{2e^2} F_A \wedge * F_A + \frac{i\theta}{4\pi^2} F_A \wedge F_A.$$

L'action associée, si W est compacte, est modifiée par un élément de $2\pi i \mathbb{Z}$. En posant $\tau = \frac{\theta}{\pi} + i\frac{2\pi}{e^2}$, et en introduisant les composantes autoduales et antiautoduales $F_\pm = \frac{1}{2}(F_A \pm * F_A)$, on a

$$\mathcal{L}(A) = \Big(\frac{i\bar{\tau}}{4\pi} \|F_+\|^2 - \frac{i\tau}{4\pi} \|F_-\|^2 \Big) \operatorname{Vol}_{\mathbf{g}}.$$

Mais pour établir une dualité, on introduit à côté de A une 2-forme G et une connexion C sur un fibré en droite N, et on considère le lagrangien

$$\mathcal{L}(A, G, C) = \Big(\frac{i\bar{\tau}}{4\pi} \|\mathcal{F}_+\|^2 - \frac{i\tau}{4\pi} \|\mathcal{F}_-\|^2 \Big) \operatorname{Vol}_{\mathbf{g}} - \frac{i}{2\pi} F_C \wedge G,$$

où $\mathcal{F} = F_A - G$. La dualité s'énonce ainsi : la fonction de partition du côté A avec la constante τ est égale (à une constante multiplicative près) à celle du côté C, mais avec la constante $-1/\tau$. D'après E. Witten :

$$Z(\tau) = \tau^{-\frac{(\chi+\sigma)}{4}} \bar{\tau}^{-\frac{(\chi-\sigma)}{4}} Z\Big(-\frac{1}{\tau}\Big),$$

où χ et σ sont les nombres d'Euler et la signature de W.

Comme tout est manifestement invariant (sur W compacte) par le changement $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ (et invariant par $\theta \mapsto \theta + \pi$ si W est spinorielle), rien ne change par $\tau \mapsto \tau + 2$ (resp. $\tau \mapsto \tau + 1$), et Z est une forme modulaire.

Lorsque $W = M \times \mathbb{R}$, on peut écrire la théorie sous forme hamiltonienne, le moment conjugué π_A de A est l'étoile de Hodge de

$$F_A^\vee = 2\pi i \frac{\partial \mathcal{L}(A)}{\partial F_A} = \frac{2\pi i}{e^2} * F_A - \frac{\theta}{\pi} F_A.$$

La dualité est la transformation de Legendre $F_A^\vee = F_C$, $F_C^\vee = -F_A$. Elle échange les charges électriques et magnétiques ; pour $\Sigma \subset M^3$:

$$Q_e(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{F_A^\vee}{2\pi} = \int_\Sigma \frac{F_C}{2\pi}, \quad Q_m(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{F_A}{2\pi} = -\int_\Sigma \frac{F_C^\vee}{2\pi}.$$

Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit alors sur l'espace de Hilbert des états associé à M.

2.3. Dualités non abéliennes

Le premier exemple de dualité non linéaire est dû à A.M. Polyakov (1975) : il s'agissait d'une théorie de jauge en dimension 3, avec une connexion ∇ sur un fibré en groupe SO_3 et un champ vectoriel $\vec{s}$ à valeur dans la représentation standard $\mathbb{R}^3$. Un mécanisme de « brisure de symétrie » (*cf.* ci-dessous) fait apparaître un champ de jauge abélien A ; le champ principal de la théorie duale φ provient de solutions particulières $(\vec{s}, \nabla)$, les « monopôles » de la théorie initiale, à travers l'équation $*d\varphi = F_A$. Ce champ acquiert un potentiel transcendant $\cos(2\varphi)$, renormalisable en infrarouge mais pas en ultraviolet (*cf.* [13], tome 2).

Les monopôles de 't Hooft et Polyakov sont des solutions particulières des équations de Yang-Mills-Higgs, version classique du « modèle standard » pour les particules en « interaction faible » ([42]). La théorie standard n'est pas purement celle de Yang et Mills : il y a bien un groupe de jauge G (ici $SU_2 \times U_1$ ou $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ si l'on veut tenir compte des quarks et des gluons) et une connexion ∇, mais il y a aussi au moins un champ φ, appelé *champ de Higgs*, section du fibré adjoint en algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le lagrangien de Yang-Mills-Higgs est

$$\mathcal{L}(A, \varphi) = \frac{1}{4g^2}(\mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A) + |d_A\varphi|^2 + \lambda(|\varphi|^2 - a^2)^2).$$

Cependant, les monopôles les plus étudiés (nous ne parlerons que de ceux-là) sont des solutions statiques des équations de Bogomolny en dimension 3

$$F_A = *d_A\varphi.$$

Ce sont les équations dérivées de $\mathcal{L}$ dans la limite $\lambda \to 0$, introduite par Prasad et Sommerfield (1975). Pour que ces monopôles correspondent à des solutions de Yang-Mills-Higgs dans $\mathbb{R}^4$ d'énergie finie, on impose qu'à l'infini dans $\mathbb{R}^3$ (à temps fixé), on ait dans chaque direction $|\varphi| = a$; si bien que la configuration à l'infini du champ de Higgs φ fournit un invariant topologique, une classe caractéristique. Par exemple, pour le groupe de jauge $G = SU_2$, φ définit une application de la sphère à l'infini de $\mathbb{R}^3$ dans la sphère de rayon a de l'algèbre de Lie so_3 de SO_3 ; son degré est un nombre entier k qui s'interprète comme une charge magnétique, $b = 2\pi k g^{-1}$. Autrement dit, les plans perpendiculaires aux directions de φ définissent, en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^3$, un fibré en plans, de groupe structural SO_2 ; le nombre k est sa classe d'Euler.

On dit alors que φ a *spontanément brisé* le groupe de jauge SU_2 sur le sous-groupe $H = SO_2$. (Attention : à proprement parler aucune symétrie n'est brisée, la symétrie de jauge est intacte.) Suivant B. Julia et A. Zee (1974, [51]) et M.K. Prasad et C.M. Sommerfield (1975, [70]), il existe aussi des *dyons*, devinés par J. Schwinger, possédant à la fois une charge magnétique et une charge électrique ; alors la condition qui remplace $bg \in 2\pi\mathbb{Z}$ s'écrit $e_n b_m - e_m b_n \in 2\pi\mathbb{Z}$, pour chaque paire de particules n et m de charges électriques e_n, e_m et magnétiques b_n, b_m (J. Schwinger, [76], D. Zwanziger, [99], 1968). C'est la condition de quantification généralisant celle que Dirac avait trouvée pour le monopôle magnétique.

Polyakov et 't Hooft (1975, 1976, *cf.* [42], [69]) évaluèrent l'effet des instantons et des monopôles dans la théorie des perturbations : si g est la constante de couplage de jauge, les contributions aux amplitudes calculées par intégrales de Feynman viennent avec un facteur de l'ordre de $\exp(-8\pi^2/g^2)$. 't Hooft et Polyakov remarquèrent aussi l'importance du facteur $\exp(i\theta)$ qui intervient devant les amplitudes. Cet angle θ n'apparaît que dans la combinaison complexe $(\theta/2\pi) + i(4\pi/g^2)$; il vient de la possibilité d'ajouter un terme $\frac{g^2\theta}{32\pi^2}\mathrm{Tr}(F_A^2)$ au lagrangien de Yang-Mills-Higgs. Ce terme est de nature topologique, il ne modifie pas la théorie classique, mais s'avère fondamental pour la théorie quantique.

Dans une théorie de jauge en dimension 4, pour $G = SU_n$ avec des champs de Higgs, mais sans brisure de symétrie, après un fixage de jauge (c'est-à-dire une trivialisation unitaire des fibrés), 't Hooft montre que la théorie renferme des champs vectoriels avec ou sans masse, des champs scalaires et des SU_2-monopôles. En couplage fort, on espère que la théorie se réexprime, dualement, en séries de $1/g^2$ à partir de monopôles. Les physiciens attendent un comportement statistique analogue à celui des supraconducteurs, mais avec les rôles de l'électricité et du magnétisme échangé : plus précisément, ils suspectent un comportement en troupeau de moutons des paires de monopôles. Or il est établi que les champs magnétiques, qui ne sont pas piégés dans les supraconducteurs, en sont rejetés ; c'est ce qui s'appelle l'« effet Meissner ». Dès lors un effet Meissner dual exclurait, ou confinerait, les courants électriques. C'est le scénario de confinement des quarks que 't Hooft proposa.

Justifier ce scénario est un des principaux problèmes de la physique des particules.

't Hooft détailla même la description d'un portrait de plusieurs phases pour la chromodynamique quantique renormalisée ; au moins trois phases : le mode du confinement, dual du mode de Higgs et une « phase de Coulomb » autoduale où l'électricité et le magnétisme sont symétriques, qui permet des forces de longue portée. La théorie duale pour une théorie de jauge pour SU_n a pour groupe de jauge le groupe adjoint PSU_n.

Plus généralement, on peut tenter l'analyse des théories de Yang-Mills avec tout groupe de jauge compact G et des champs de Higgs ramenant spontanément la symétrie à un sous-groupe H. Goddard, Nuyts et Olive ([32]) ont démontré que la « charge magnétique » des monopôles de 't Hooft et Polyakov se généralise naturellement en une représentation d'un groupe de Lie compact $H^\vee$ qu'on peut construire explicitement à partir de H, le « groupe dual ». On a $(H^\vee)^\vee = H$. Par exemple, $U_1^\vee = U_1$, alors la charge est un entier. La conjecture est qu'il existe une vraie dualité faible/fort échangeant H et $H^\vee$. Les nombres quantiques de Noether (électriques) et topologiques (magnétiques) s'échangeraient. Les monopôles pour H formeraient une théorie de jauge pour $H^\vee$.

Il est très remarquable, mais aussi rarement signalé (A.J. Schwartz l'a pourtant fait), que le groupe dual $H^\vee$ est exactement celui que R.P. Langlands avait défini à la fin des années 60 pour les besoins de l'arithmétique et de la théorie des groupes ([54]). Par exemple, $SU_n^\vee = PSU_n = SU_n/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. La dualité induit la transposition des matrices de Cartan, ainsi les séries A, D, E, F, G sont auto-duales mais B et C s'échangent. Le groupe dual de Langlands intervient dans un vaste ensemble de conjectures reliant l'analyse harmonique, les formes automorphes et la théorie des nombres, pour donner des lois de réciprocité nouvelles. (Langlands parle de groupes réductifs complexes ; ce sont les complexifications des groupes compacts. Il travaille aussi avec des adèles et pas seulement sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.) Il serait merveilleux qu'une même théorie mathématique à venir éclaire à la fois la vraie nature des quarks et la correspondance de Langlands (dont un cas particulier traité par A. Wiles a entraîné la démonstration de la conjecture de Fermat).

2.4. En considérant des théories de jauge avec suffisamment de super-symétrie, le scénario du confinement a pu être établi presque entièrement.

Dans les théories de super-Yang-Mills-Higgs, les variables sont une super-connexion $\mathcal{A}$ sur un G-fibré et un super-champ vectoriel Φ dont on note Φ_i, $i \in I$, les super-fonctions coordonnées (*cf.* § 1.4). On décompose $\Phi = \varphi + \psi + F$ suivant L_d^0, L_d^-, L_d^+. Le champ φ est à valeurs dans un multiple de la représentation adjointe $\mathfrak{g}$ de G. Le lagrangien est somme de deux termes $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \Phi)$ et $\mathcal{K}(\Phi, \overline{\Phi})$. Le premier, $\mathcal{F}$, est une fonction holomorphe des Φ_i appelée super-potentiel, alors que le second, $\mathcal{K}$, est la fonction génératrice d'une métrique kählérienne $g_{i\bar{j}} = \partial^2 K/\partial\Phi_i\partial\overline{\Phi}_j$ (*cf.* [85], [33]).

Le principal paramètre dont dépend la théorie est issu du coefficient u du terme quadratique en Φ dans $\mathcal{F}$; après renormalisation, $u = C\langle \mathrm{Tr}\varphi^2\rangle$. Il s'appelle « vide » et il est responsable des brisures de symétrie par un mécanique de Higgs.

Pour $G = SU_2$, spontanément brisé sur U_1, on a $|\varphi| = a$ à l'infini dans $\mathbb{R}^3$, alors $u = a^2$.

Dans $\mathcal{F}$, en facteur du terme quadratique en les super-courbures, on trouve

$$\tau(\Phi) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}\,,$$

avec $\theta, g \in \mathbb{R}$. Lorsque $N = 2$, il existe des relations entre τ et $\mathcal{K}$, par exemple la métrique kählérienne sur la droite complexe engendrée par a s'écrit $ds^2 = \frac{1}{2\pi}\Im(\tau\, da d\bar{a})$.

Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le super-potentiel renormalisé ; on introduit la « variable duale » de a, en posant $a_D = \partial\widetilde{\mathcal{F}}/\partial a$. On a donc $\tau = da_D/da$.

Le groupe de renormalisation β s'exprime par la dépendance de a, a_D, o, en fonction de u et de la fréquence Λ. Seiberg et Witten ([78], [79]) démontrent l'existence d'une série

$$\tau(u,\Lambda) = \frac{i}{\pi}\,\ell n \frac{u}{\Lambda^2} + \sum_0^\infty F_n \frac{\Lambda^n}{u^{2n}}.$$

Donc, quand $\Lambda \to \infty$, on a $a_D \sim 2i(a/\pi)\, ln\,(a/\Lambda) + i\, a/\pi$.

Ainsi la monodromie à l'infini en u de a_D est non triviale, il doit donc exister une singularité au moins dans le plan des u. Seiberg et Witten montrent que la positivité de ds^2 force l'existence d'un groupe de monodromie global non abélien, d'où l'existence d'au moins deux singularités $\pm u_c$. Une bonne normalisation des singularités pour rendre compte de la limite $\Lambda \to \infty$ est $u_c = \Lambda^2$.

Toujours selon Seiberg et Witten, a et a_D sont des périodes de la forme différentielle holomorphe $\frac{1}{2\pi}(x-u)\frac{dx}{y}$ sur la courbe elliptique d'équation $y^2 = (x^2 - \Lambda^4)(x-u)$.

Plus généralement, pour un groupe de jauge compact simple G de rang r, la théorie de champs renormalisée est décrite par une courbe complexe Σ de genre r variant au-dessus d'un tore de dimension r (la « branche de Coulomb »). Le groupe de renormalisation fait évoluer les couplages, interprétés comme des périodes d'une forme holomorphe, en fonction de Λ et des coordonnées sur le tore, suivant le système complètement intégrable associé à G par Hitchin (*cf.* [13]).

La limite de basse énergie en un point singulier u_c est la théorie duale infrarouge de la théorie de jauge $N = 2$. Elle s'appelle « théorie de Seiberg-Witten ». Ses champs fondamentaux, un champ de spineurs et une connexion, sont des dégénérescences de masse 0 d'états quantiques massifs très particuliers qui existent pour tout $u \neq \pm u_c$: les *états BPS*.

En effet, on trouve dans la théorie super-YMH, $N = 2$, des super-monopôles magnétiques et des super-dyons de charge électrique Q_e et de charge magnétique Q_m, qui sont invariants par la moitié des super-symétries ; on les appelle états BPS pour Bogomolny, Prasad, Sommerfield. Leur masse satisfait à $M^2 = C^2(Q_e^2 + Q_m^2)$. Dans cette théorie, on n'a qu'une action projective de l'algèbre de super-Poincaré $N = 2$ ([61], [98]), c'est-à-dire une action linéaire d'une extension centrale de la super-algèbre : pour un super-dyon, la charge centrale est égale à $Z = aN_e + a_D N_m$, où $N_e = Q_e - \frac{\theta}{2\pi}Q_m$ et $N_m = Q_m$ sont des nombres entiers en vertu de l'effet θ de Witten ([91]). Ces nombres Z forment un réseau dans $\mathbb{C}$ lorsque $u \neq \pm u_c$. Le groupe de monodromie de (a, a_D) agit sur Z ; il est d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

C'est seulement pour $N = 4$, avec deux super-symétries de plus, que A. Sen [80] a pu démontrer l'existence d'états BPS pour N_e, N_m premiers entre eux quelconques, établissant ainsi la conjecture de dualité $N = 4$ de Montonen et Olive [58].

Notons $N_m = r$ et $N_e = s$. L'espace des modules de monopôles de charge magnétique r pour les équations de Bogomolny sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\mathbb{R}^3 \times (S^1 \times \mathcal{M}_r^0)/(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}),$$

où $\mathcal{M}_r^0$ est une variété hyperkählérienne de dimension $4r - 4$, l'espace des monopôles réduits, sur laquelle le sous-groupe $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ de S^1 agit librement ([3]). D'après Witten, Manton et Sen ([80]), les états quantiques de la théorie $N = 4$ sont des formes différentielles sur $\mathcal{M}_r^0$; la conjecture de Montonen et Olive se ramenait à prouver l'existence d'une unique forme harmonique L^2 (de degré $2r - 2$) sur laquelle l'action de $t \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ est la multiplication par $\exp(-2\pi i\, ts/r)$.

A. Sen a d'abord traité le cas de $r = 2$, les autres cas ont été résolus peu après par Segal, Selby, Parrati. Pour G simple compact quelconque, *cf.* [26], [29], [55].

3. DUALITÉS DE CORDES

3.1. Depuis plus de 20 ans, la théorie des cordes, et surtout celle des supercordes, était considérée comme la meilleure chance pour unifier toutes les interactions avec la gravitation. Elle avait éclipsé les tentatives de champs unitaires, en particulier la supergravité $D = 11$. Mais depuis 6 ou 7 ans, à la suite des découvertes de dualités étranges dans le monde des cordes (Schwarz, Sen, Duff, Hull-Townsend, Witten,...), le paysage a changé ; une mystérieuse théorie M en dimension 11 (ou peut-être F en dimension 12), rassemblant des cordes qui se propagent, mais aussi des membranes (surfaces dans l'espace, variétés de dimension 3 dans l'espace-temps), des trous noirs et des variétés spéciales de toutes dimensions, s'est dévoilée. Ses limites les plus intéressantes sont des supercordes, mais aussi une de ses limites est la supergravité en dimension 11. Ainsi c'est difficile de dire qui a mangé l'autre, de la corde ou de la supergravité.

L'idée des cordes est d'attribuer aux particules très énergétiques la forme d'une ficelle d'une longueur de l'ordre de 10^{-32} cm, et de « quantifier deux fois » les mouvements et les accidents de cette ficelle relativiste dans l'espace-temps de Minkowski pour retrouver, sans contradiction, toute la physique connue. D'où vient cette idée ? Quel est son rapport avec la gravitation ? Pour le comprendre, reportons-nous à la plus naïve des questions qui se pose en théorie quantique des champs : comment un champ devient-il une particule ? En effet, dans quelle approximation passe-t-on des amplitudes des connexions et des sections de fibrés spin à des particules ayant des trajectoires comme des projectiles ? La relation se fait en deux temps, en « deux quantifications » : une première quantification mène de l'action du point matériel (sans masse) dans l'espace de Minkowski à l'équation de Klein-Gordon $d * d\varphi = 0$; c'est l'équation de Schrödinger de la particule. La deuxième quantification fait passer à une assemblée d'oscillateurs, pour tenir compte des créations et annihilations.

Afin de rendre compte des interactions, il est possible d'introduire un potentiel, par exemple φ^4, ce qui donne une théorie de champ scalaire. Pour les particules chargées, les photons ou les super-points, les interactions peuvent s'expliquer en couplant les équations de Dirac, de Maxwell et d'Einstein. De même les quarks, les bosons W et Z, les gluons sont soumis au couplage de Dirac et de Yang-Mills. L'exigence de la renormalisation sélectionne sévèrement le choix des interactions mais laisse encore un goût d'arbitraire.

Avec les cordes, la vision des interactions est changée : dans une limite où $\hbar$ serait négligeable, mais pas la longueur typique des cordes, mesurée par la constante α', inverse de la *tension de la corde*, on aurait affaire à des objets possédant une dimension d'espace et une de temps. Les trajectoires sont remplacées par des cylindres. Et, pour décrire les *interactions* de cordes, il suffit de remplacer le cylindre par des surfaces dont le bord a plus de deux composantes.

Le nombre n de trous compte le nombre de cordes à l'entrée et à la sortie de l'accident. On montre que le genre k de la surface (son nombre d'anses) mesure l'ordre des *corrections quantiques* dans les amplitudes de cordes quantiques.

La deuxième bonne nouvelle apportée par les cordes est la présence naturelle de particules véhiculant des interactions gravitationnelles : les *gravitons*. La première quantification des théories des cordes est une théorie de champ bidimensionnelle qui incorpore comme condition de renormalisation, au premier ordre en α',la théorie de la gravitation d'Einstein classique à côté de la théorie de Yang-Mills classique dans l'espace ambiant. D'ailleurs la constante α' vaut $\hbar\frac{G}{c^3}$, où G est la constante de gravitation universelle de Newton.

Mais aux ordres plus élevés en α' des corrections arrivent qui pourraient bien régulariser la gravitation aux grandes énergies et guider sa quantification. Notons que les théories de cordes conservent un sens, au moins perturbatif, si l'on remplace l'espace-temps plat de Minkowski par des variétés lorentziennes munies de métriques d'Einstein, i.e. solutions des équations d'Einstein classiques.

Une autre « prédiction » est la *super-symétrie* : sans elle, c'est-à-dire sans passer aux *supercordes*, des particules aberrantes violant les principes de la relativité, se propageant plus vite que les photons, s'imposeraient subrepticement.

Enfin, et surtout, déjà la première quantification des cordes et supercordes est une théorie quantique de champ très exigeante : si l'on veut y maintenir, au niveau quantique, les symétries de la corde, ou supercorde classique (à savoir le groupe de (super) Poincaré ambiant, les difféomorphismes de la surface source, les dilatations locales de sa métrique (transformations de Weyl), les super-symétries de super-surface), il n'y a que 5 possibilités, toutes en dimension 10 d'espace-temps. Celles-ci portent les noms suivants : Type I, Type IIA, Type IIB, Hétérotique SO_{32}, Hétérotique $E_8 \times E_8$.

3.2. Suivant Polyakov (*cf.* [69], [2], [6], [33]), une théorie de cordes à valeurs dans la variété W, de dimension D, équipée d'une métrique lorentzienne $(D-1,1)$, est composée de deux champs en dimension 2 : une métrique sur Σ (de signature $(1,1)$) et une application X de Σ dans W ; le lagrangien est l'*énergie* $-\frac{1}{2\alpha'}\|\nabla X\|^2$.

Lorsque W est l'espace plat de Minkowski, un choix convenable des coordonnées ramène X à $D-2$ solutions de l'équation des ondes (les coordonnées transverses à $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ ou $[0,1] \times \mathbb{R}$), et deux constantes (*cf.* [33], [13]). La première quantification donne une algèbre de Weyl et sa représentation de Fock, et les symétries, la reparamétrisation des branches du cône de lumière fournissent une représentation ρ de l'algèbre de Virasoro $\mathrm{Vir} \otimes \overline{\mathrm{Vir}}$ dans l'espace de Fock.

Si N est l'opérateur de nombre, la masse d'un état pur est donnée par une formule $\alpha' M^2 = C_0 + N$, où C_0 est une constante à déterminer. L'invariance lorentzienne externe (de W) force $C_0 = -1$ et l'invariance conforme (de Σ) force $D = 26$. Alors, en décomposant la représentation ρ en facteurs irréductibles (les champs primaires) (*cf.* [27]), on peut identifier les vecteurs de masse 0 ; ils forment diverses représentations irréductibles de $SO(D-1,1)$: on y trouve les espaces de sections des fibrés en $S^2, \Lambda^2, \mathbb{R}$, c'est-à-dire les 2-formes symétriques, $G_{\mu\nu}$, les 2-formes antisymétriques $B_{\mu\nu}$ et un champ scalaire Φ.

Les conditions de renormalisation du premier ordre en α' s'expriment comme des équations aux dérivées partielles sur $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ ; c'est la surprise : on tombe sur une pertubation des équations d'Einstein, celle qui dérive du lagrangien :

$$\mathcal{L}(G,B,\Phi) = \frac{1}{2\kappa^2} e^{-\Phi}(R_G + 4|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{12}|dB|^2).$$

On voit que $\alpha' \sim \kappa^2 e^{2\langle\Phi\rangle}$, donc Φ, nommé le *dilaton*, fixe la « constante de couplage » α'. C'est la morale des cordes : toutes les constantes y deviennent des champs.

La présence d'une particule de masse imaginaire (le « vertex » ordinaire) rend la théorie peu physique, mais cela ne l'empêche pas d'être riche de propositions mathématiques.

Avec les *supercordes*, les physiciens semblent avoir eu plus de chance, et ils ont fait un cadeau encore plus beau aux mathématiciens.

Il y a *a priori* deux définitions différentes : celle dite de Green et Schwarz, où une super-surface de Riemann s'envoie dans un espace de super-Minkowski modelé sur une puissance du fibré des spineurs S^N, et celle dite de Neveu-Schwarz-Ramond, où la super-surface s'envoie dans le super-espace modelé sur le fibré tangent $T(W)$. Mais, compte tenu des symétries, les deux approches s'avèrent équivalentes.

Pour maintenir les invariances super-Poincaré et super-conformes, il faut $D = 10$; en cette dimension, l'espace des spineurs de Dirac est de dimension 32. À côté des vecteurs de l'espace transverse à la corde, on trouve les spineurs de l'espace de dimension 8, S^+, S^- tous deux de dimension 8 aussi. (La *trialité* est l'équivalence par automorphisme extérieur des trois représentations.)

Pour décrire les solutions classiques, on doit tenir compte de plusieurs possibilités pour les ondes de spineurs $\psi(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) \in S^N$

1) elles se propagent soit à droite soit à gauche,

2) elles appartiennent à l'un ou l'autre des deux fibrés spin sur S^1.

On met un indice + pour les ondes se déplaçant vers la droite, c'est-à-dire les fonctions de z et un indice − pour celles qui se déplacent vers la gauche, c'est-à-dire les fonctions de $\bar{z}$. La seconde distinction sépare l'espace des multiples de $(zdz)^{\frac{1}{2}}$, noté R (comme Ramond) de l'espace des multiples de $(dz)^{\frac{1}{2}}$, noté NS (comme Neveu-Schwarz).

Toutes les possibilités sans tachyons ont été classifiées (c'est le contenu du Théorème de projection GSO, Goddard, Sent, Olive).

Le type I, avec une super-symétrie $N = 1$ sur W (mais toujours 32 pour Σ). Ses états de masse 0, déterminés par la représentation des algèbres super-Virasoro, appelés *champs effectifs*, sont une métrique $G_{\mu\nu}$ (NS $\otimes$ NS), un dilaton Φ (NS $\otimes$ NS), une 2-forme anti-symétrique $B_{\mu\nu}$ $(R \otimes R)$, un champ de covecteur-spineur ξ_μ^α, le *gravitino*, et un champ de spineurs λ_α, le *dilatino*. C'est tout pour les cordes fermées. Mais, en type I, on permet des cordes ouvertes, il s'ajoute alors un champ de jauge A_μ pour le groupe SO_{32} et un champ de gaugino ψ^σ.

Le type IIA, $N = 2$, champs effectifs : G, B, Φ, tous trois $\mathrm{NS}_+ \otimes \mathrm{NS}_+$, ξ_1, λ_1 $(\mathrm{R}_+ \otimes \mathrm{NS}_+)$, ξ_2, λ_2 $(\mathrm{NS}_+ \otimes \mathrm{R}_-)$, plus une 1-forme A_μ et une 3-forme $A_{\mu\nu\rho}$, de type $\mathrm{R}_+ \otimes \mathrm{R}_-$.

Le type IIB (dit *chiral*), $N = 2$, champs effectifs : G, B, Φ $(\mathrm{NS}_+ \otimes \mathrm{NS}_+)$, ξ_1, λ_1 $(\mathrm{NS}_+ \otimes \mathrm{R}_-)$, ξ_2, λ_2 $(\mathrm{NS}_+ \otimes \mathrm{R}_+)$, mais trois formes paires (toutes de type $\mathrm{R}_+ \otimes \mathrm{R}_+$) : A^0 l'*axion*, $A^2_{\mu\nu}$ une 2-forme, et une 4-forme $A_{\mu\nu\rho\sigma}$, avec la restriction $dA = *dA$.

En plus de ces trois possibilités, fut inventée la théorie des *cordes hétérotiques* ; une mise en forme géométrique fait appel à une notion de super-feuilletage dans une super-variété de dimension $4|n$ (*cf.* [52]) ; elle correspond à une corde (bosonique) pour les champs allant à droite, et à une supercorde (fermionique) pour les champs allant à gauche. Elle vient sous deux formes, avec des champs de Yang-Mills supplémentaires, soit SO_{32}, soit $E_8 \times E_8$. Ses champs effectifs sont G,B,Φ,A (de jauge), uniquement NS, et χ,λ,ψ, de type R, comme pour le type I.

Lorsqu'on pratique une réduction à la Kaluza-Klein pour descendre en dimension < 10, les cinq types n'en donnent plus que trois : I, II, Het.

Les lagrangiens effectifs, qui sont les limites effectives de basses énergies des supercordes, ont été construits : ils donnent les théories de supergravité à 10 dimensions.

Par exemple, pour le type I, la partie bosonique de l'action est

$$S_{\mathrm{I}} = \frac{1}{16\pi\alpha'^4}\int \mathrm{Vol}_{10}\left(e^{-\Phi}(R_G + |\nabla\Phi|^2) - \frac{1}{12}|H_3|^2 - \frac{1}{4}e^{-\frac{\Phi}{2}}|F_2|^2\right),$$

où F_2 est la courbure du champ de Yang-Mills SO_{32} et $H_3 = dB_2$.
Pour les théories hétérotiques, avec mes mêmes conventions,

$$S_{\mathrm{Het}} = \frac{1}{16\pi\alpha'^4}\int \mathrm{Vol}_{10}\, e^{-\Phi}(R_G + |\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{12}|H_3|^2 - \frac{1}{4}|F_2|^2).$$

Pour la théorie de type IIA,

$$S_{\mathrm{IIA}} = \frac{1}{16\pi\alpha'^4}\int \mathrm{Vol}_{10}\left(e^{-\Phi}(R_G+|\nabla\Phi|^2-\frac{1}{12}|H_3|^2)-\frac{1}{4}|F_2|^2-\frac{1}{48}|F_4|^2\right)+\frac{1}{2}B_2\wedge F_4\wedge F_4\,,$$

où $H_3 = dB_2$, $F_2 = dA_1$, $F_4 = dA_3$ et $F_4' = F_4 + A_1\wedge H_3$.
Pour la théorie de type IIB,

$$S_{\mathrm{IIB}} = \frac{1}{16\pi\alpha'^4}\int \mathrm{Vol}_{10}\Big(e^{-\Phi}(R_G + |\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{12}|H_3|^2) - \frac{1}{2}|\nabla A^0|^2 - \frac{1}{12}|H_3' + A^0 H_3|^2$$
$$- \frac{1}{240}|F_5|^2\Big) + A_4\wedge H_3\wedge H_3'\,,$$

où $H_3 = dB_2, H_3' = dB_2'$ et $F_5 = dA_4 + B_2'\wedge H_3$.

3.3. Si l'on ajoute aux cinq théories toutes les théories de cordes en dimension plus petite obtenues par compactification de Kaluza-Klein, on a une grande famille qui a beaucoup embarrassé les chevaliers de la théorie unique de tout. L'espoir est revenu lorsque Witten, Hull, Townsend, Duff, Sen et al., entre 1995 et 1996, ont observé que, par dualité, toutes ces théories avaient l'air d'être équivalentes ([47], [92], [66]).

Afin de préserver une partie des super-symétries, les compactifications ont surtout été faites le long de tores $\mathbb{T}^k$, de produits $M\times\mathbb{T}^{k-4}$ avec M une surface $K3$ ou de produits $Y\times\mathbb{T}^{k-6}$ avec une variété de Calabi-Yau Y de dimension complexe 3. Ces variétés possèdent des espaces de modules (ne serait-ce que le rayon d'un cercle, ou le volume) qui forment pour chaque théorie $\mathcal{T}$ un espace $U_{\mathcal{T}}$. Cet espace se projette sur des axes de constantes de couplages, en particulier celui de α' ou $\langle\Phi\rangle$.

Une *dualité* entre deux théories de cordes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est une bijection f d'une partie $\mathcal{O}_1$ des observables de $\mathcal{T}_1$ sur une partie $\mathcal{O}_2$ des observables de $\mathcal{T}_2$, et une bijection f^* d'une partie V_1 de $U_{\mathcal{T}_1}$, sur V_2 dans $U_{\mathcal{T}_2}$ qui échangent les amplitudes, c'est-à-dire $\langle f(F_1)\rangle_{f^*(u_1)} = \langle F_1\rangle_{u_1}$.

À proprement parler, il n'y a que des *conjectures de dualité* mais elles ont franchi des tests qui portent, soit sur les théories de supergravités effectives, soit sur les solutions classiques invariantes par une partie des super-symétries, encore appelées solutions BPS (*cf.* [81]).

Certaines dualités échangent les couplages forts et faibles des cordes ; ce sont les *S-dualités* ([75], [19], [20], [47], [59], [60]).

Exemples. — Pour $D = 10$, type I $\longleftrightarrow$ Het_{32}, pour $D = 6$, IIA/$K3$ $\longleftrightarrow$ Het/$\mathbb{T}^4$ (i.e. la théorie de type IIA compactifiée sur une surface K3 est duale de la théorie hétérotique compactifiée sur un tore $\mathbb{T}^4$), pour $D = 10$, IIB $\longleftrightarrow$ IIB.

D'autres dualités respectent les couplages faibles et peuvent être détectées sur la théorie perturbative ; ce sont les *T-dualités*, T comme target ([25], [30], [39]).

Exemples. — IIA $\longleftrightarrow$ IIB si on compactifie sur des cercles de rayons inverses (i.e. IIA/S^1_R $\longleftrightarrow$ IIB/$S^1_{R^{-1}}$). Dans les mêmes conditions $\mathrm{Het}_{E_8\times E_8} \longleftrightarrow \mathrm{Het}_{SO_{32}}$.

Les T-dualités constituent des sous-groupes discrets des symétries signalées à la fin du § 1. Par exemple Het/$\mathbb{T}^6$ a un $O(6,22;\mathbb{Z})$ de T-dualités dans le $O(6,22;\mathbb{R})$. Mais dans ce cas, il y a aussi un $SL_2(\mathbb{R})$ mieux caché de S-dualités agissant sur $\tau = \langle A + ie^{-\Phi}\rangle$, A l'axion, Φ le dilaton. Dedans, un $SL_2(\mathbb{Z})$ passe aux cordes quantiques. On retrouve la dualité de Sen (§ 2.4) comme une des conséquences de basse énergie.

Pour la théorie de type II compactifiée sur $\mathbb{T}^6$, le groupe E_7 des symétries de la super-gravité $N = 8$ contient un sous-groupe discret $E_7(\mathbb{Z})$ dont les éléments sont appelés U-dualités, formé à partir d'un $O(6,6;\mathbb{Z})$ de T-dualités et du $SL_2(\mathbb{Z})$ de S-dualités de la théorie IIB en dimension 10.

La difficulté à chaque fois est de construire les états BPS, analogues des dyons, avec des charges quantifiées.

C'est là que les *branes* apparaissent :

Dans toutes les théories de supercordes, l'examen non perturbatif (mais spéculatif) a révélé l'existence de solutions (semi-)classiques particulières électriquement et/ou magnétiquement chargées, jouant le rôle des instantons, des solitons et des monopôles en théorie des champs : les *p-branes*. Ainsi nommées car elles définissent soit comme lieu singulier, soit comme centre, des sous-variétés de dimension $p + 1$ de l'espace-temps, donc des sous-variétés dimension p dans l'espace (au moins pour les solitons et les monopôles). Les 2-branes s'appellent simplement des membranes.

Sur ces variétés, on peut intégrer les $(p+1)$-formes différentielles du lagrangien de supergravité effective ou leurs formes duales.

La dualité de Poincaré accompagne les dualités de cordes et associe des q-branes duales aux p-branes. La duale d'une p-brane est donc une $(D - p - 4)$-brane.

Par exemple, avec $D = 10$, en théorie IIA, la corde est une 1-brane et donne une 5-brane. En théorie IIB, on trouve une 3-brane autoduale.

Les théories de supercordes induisent sur les p-branes des théories de jauge dont les constantes de couplage proviennent de la géométrie en dimension D.

Les branes associées comme courants aux formes différentielles de type NS $\otimes$ NS furent assez faciles à construire ; on trouve par exemple les 0-branes associées aux dilatons Φ de toutes les théories, une 1-brane pour Het, courant de la jauge A, duale d'une 5-brane, des membranes associées aux formes B_2 des théories de type II et Het.

La construction de courants pour les formes R $\otimes$ R fut plus longue à venir. J. Polchinski ([65], [67]) les trouva sous formes de $\mathcal{D}$-branes, $\mathcal{D}$ comme Dirichlet ; ce sont des solutions singulières, comme des déchirures et des trous noirs dans l'espace-temps, le long desquelles les cordes, *a priori* toutes fermées de IIA et IIB peuvent s'ouvrir. Elles ont permis de compléter la liste BPS conjecturée pour la S-dualité de IIB$/S^1$ ou la T-dualité du type I. En théorie de type IIA (resp. IIB), il y a une p-brane qui est $\mathcal{D}$-brane pour tout entier pair entre 0 et 8 (resp. impair entre -1 et 9). La T-dualité échange les $\mathcal{D}$-branes de IIA avec celles de IIB. En théorie de type I, il y a des $\mathcal{D}$-branes pour $p = 1, 5, 9$ (*cf.* [4], [8], [18], [30]).

La dernière révolution fut la découverte de la M-théorie (Townsend, Witten, 1996, [47], [92]) : en cherchant à comprendre le couplage fort de IIA, on trouve quelque chose de dual en dimension 11 dont la limite de basse énergie est la supergravité $D = 11$ de Cremmer, Julia, Scherk !

Ce « quelque chose » fut baptisé M-théorie, comme membrane, merveille ou mystère. Cette théorie est encore largement conjecturale, sa fonction principale est de compléter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{M-théorie} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Supercorde IIA} \arrow[d] \\
\text{Supergravité, } D = 11 \arrow[r] & \text{Supergravité IIA, } D = 10
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des compactifications sur un cercle S^1 et les flèches verticales sont les limites de basse énergie ([16], [17], [46], [59], [81]).

Par compactification sur un intervalle compact, on trouve la duale de $\mathrm{Het}_{E_8\times E_8}$ en dimension 10. La M-théorie possède une membrane et une 5-brane duale.

En compactifiant une théorie de supercorde ou la M-théorie sur une variété X de dimension k, on peut enrouler une p-brane sur un d-cycle de X et obtenir dans $\mathbb{R}^{D-k}$ une $(p-d)$-brane ([1], [16], [19], [20], [82], [95]).

Ainsi la corde IIA est la membrane de M enroulée sur S^1, la 2-brane de IIA est la projection de la membrane, sa 4-brane est la 5-brane de M enroulée et sa 5-brane non singulière est la projection de la 5-brane de M. Il y a aussi en M-théorie des branes noires analogues de trous noirs de dimensions 2, 4 et 6 ([16], [34]).

Les ressources mathématiques de la M-théorie semblent inépuisables :

1) Selon Strominger, Yau, Zaslow, toute variété de Calabi-Yau X de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ contient une famille à trois paramètres réels de 0-branes pour IIA compactifiée sur X. Si on applique la dualité T, on trouve une famille de 3-branes pour IIB formant la variété miroir Y de X. *Cf.* [36], [39], [41], [45], [53], [83].

2) Selon Witten, les états BPS de la théorie super-Yang-Mills $N = 2$, $D = 4$ qui permettent d'établir la dualité électrique-magnétique quantique et de construire la

théorie de Seiberg-Witten viennent de configurations de branes de IIA qui correspondent par dualité à des 2-branes, de la forme $D^2 \times \mathbb{R}$ en M-théorie accrochées sur des 5-branes de la forme $\Sigma \times \mathbb{R}^4$ dans $S^1 \times \mathbb{R}^{10}$ ([97], [96]).

Par un glissement de sens, l'ultime théorie dont les limites variées sont IIA, IIB, I, supergravité $D = 11$, $\mathrm{Het}_{E_8 \times E_8}$, $\mathrm{Het}_{SO_{32}}$, s'est aussi appelée M. Schwarz et Sen ont bien proposé la lettre U comme unité, mais notre époque est plus mystique.

3.4. Paracelse avait deviné la théorie M en 1525 au cours de ses recherches sur l'Astrologie. Il n'a pas dit M comme quoi. Sans doute comme Mysterium. Il a même parlé du M.m. en précisant plus loin M.magnum.

Écoutons d'abord Lucien Braun dans son commentaire récent ([7]) à la traduction du Volumen Paramirum ([62]) :

« ...La recherche sur l'*ens astrale* le conduit à s'interroger, à partir de l'Astre, sur les conditions d'existence de la vie humaine. L'homme est incapable de penser sa propre origine, estime Paracelse. Dès 1525, il se heurte, dans sa réflexion têtue, au « toujours déjà-là », au primordial, au primexistant : avant tout surgissement d'un existant quelconque, quelque chose est toujours déjà donné d'où il procède. Pour le faire entendre, Paracelse se sert de l'air comme comparaison (ailleurs aussi appelé *chaos*) et comme métaphore (qui doit nous *conduire plus loin*). Nous respirons l'air, écrit-il, sans lui nous ne pouvons exister. En filant la métaphore suffisamment loin, l'air lui-même finit par procéder de quelque chose que décidément on ne peut plus nommer – même par métaphore ! Paracelse désigne cet « abyssal-toujours-premier » par la lettre M (qui est mystère). Toujours déjà il y a quelque chose, avant tout donné, qui est la condition d'apparition de tout donné possible ; et qui est réfractaire à toute analyse subséquente. »

Écoutons Paracelse lui-même avant que, quelques lignes plus loin, il ne parle du poison contenu dans le M.m. qui risque d'infecter le corps de l'homme :

« ... Vous dites que si l'air n'existait pas, toutes choses dépériraient, disparaîtraient ; tout ce qui vit étoufferait et mourrait. On peut dire de même : il existe quelque chose qui maintient et conserve le corps (qui contient la vie) ; la perte de ce « quelque chose » serait aussi dommageable pour le corps que serait pour le vivant le défaut de l'air. Il convient donc de le préserver. L'air lui-même est conservé dans et par ce « quelque chose », et si cela venait à manquer, l'air aussi disparaîtrait. Le firmament en vit également, et si cela n'était, il disparaîtrait. Ce « quelque chose », je l'appelle M. Il n'existe rien de plus éminent dans tout le domaine de la création, et pour un médecin il n'y a rien de plus utile à méditer.

Je m'efforce de vous l'expliquer : le M. ne provient pas du firmament ; il n'y est pas né ; ce n'est pas le firmament qui nous l'envoie, etc. Rien de tout cela ne vaut. Mais le M. maintient toutes les créatures en leur être, que ce soit dans le ciel ou sur la terre ; tous les éléments vivent en lui et par lui... ».

Remerciements. — L'auteur est seul responsable des fautes dans le texte, mais il tient à remercier ceux qui l'ont aidé à entrer dans le sujet : C. Bachas, A. Bahraini, J. Dunaud, B. Julia, O. Maspfuhl, S. Paycha, M. Slupinski et J.-B. Zuber.

RÉFÉRENCES

[1] O. Aharony – « String theory dualities from M-theory », *Nuclear Physics B* **476** (1996), p. 470–483.

[2] I. Antoniadis, E. Cremmer & K.S. Stelle – « Les supercordes », in *Gazette des Mathématiciens*, Soc. Math. France, 2001, 1ère partie, n° 87, janvier; 2ème partie, n° 88, avril.

[3] M.F. Atiyah & N.J. Hitchin – *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, Princeton U.P., 1988.

[4] C. Bachas – « Lectures on D-branes », in *Duality and supersymmetric theories* [60].

[5] G. Benfatto & G. Galavotti – *Renormalization group*, Physics Notes, vol. 1, Princeton University Press, 1995.

[6] J.-B. Bost – « Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes », in *Sém. Bourbaki*, Astérisque, vol. 152-153, Soc. Math. France, 1987, exp. n° 676, p. 113–149.

[7] L. Braun – *Paracelse, de l'Astrologie*, Presses Universitaires de Strasbourg, 2002.

[8] P. Breitenlohner, D. Maison & G. Gibbons – « 4-dimensional black holes from Kaluza-Klein theories », *Comm. Math. Physics* (1988), p. 295–333.

[9] R. Coquereaux & A. Jadczyk – « Symmetries of Einstein-Yang-Mills fields and dimensional reductions », *Comm. Math. Physics* **98** (1985), no. 1, p. 79–104.

[10] E. Cremmer & B. Julia – « The $SO(8)$ supergravity », *Nuclear Physics B* **159** (1979), p. 141–212.

[11] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü & C. Pope – « Dualisation of dualities », *Nuclear Physics B* **523** (1998), p. 73–144.

[12] E. Cremmer, B. Julia & J. Scherk – « Supergravity theory in 11 dimensions », *Physics Letters B* **76** (1978), p. 409–412.

[13] P. Deligne, P. Etingof & al. (éds.) – *Quantum fields and strings : A course for mathematicians*, AMS, IAS, 1999.

[14] P.A.M. Dirac – « Quantised Singularities in the Electromagnetic Field », *Proc. Roy. Soc. A* **133** (1931), p. 60–72.

[15] ______, « The Theory of Magnetic Poles », *Phys. Review* **74** (1948), p. 817–830.

[16] M.J. Duff – « M-theory (the theory formerly known as strings) », *International Journal of Modern Physics A* **11** (1996), no. 32, p. 5623–5641.

[17] ______, « The world in eleven dimensions : a tribute to Oskar Klein », `arXiv:hep-th/0111237`, 38 pp, 2001.

[18] M.J. Duff, R.R. Khuri & J.X. Lu – « String solitons », *Physics Reports* **259** (1995), p. 213–326.

[19] M.J. DUFF, J.T. LIU & R. MINASIAN – « Eleven-dimensional origin of string/string duality : a one-loop test », *Nuclear Physics B* **452** (1995), p. 261–282.

[20] M.J. DUFF, J.T. LIU & J. RAHMFELD – « Four-dimensional string/string/string triality », *Nuclear Physics B* **459** (1996), p. 125–159.

[21] M.J. DUFF, B.E.W. NILSSON & C.N. POPE – « Kaluza-Klein supergravity », *Physics Reports* **130** (1986), no. 1 & 2, p. 1–142.

[22] M.J. DUFF & K.S. STELLE – « Multi-membrane solutions of $D = 11$ supergravity », *Physics Letters B* **253** (1991), p. 113–118.

[23] J. EHLERS – « Exterior solutions of Einstein's gravitational field equations admitting a two-dimensional abelian group of isometric correspondences », in *Colloque sur la théorie de la relativité 1959*, Centre Belge Rech. Math., 1959, p. 49–57.

[24] S. FERRARA, J. SCHERK & B. ZUMINO – « Algebraic properties of extended supergravity theories », *Nuclear Physics B* **121** (1977), p. 393–402.

[25] A. FONT, L.E. I. NEZ, D. LÜST & F. QUEVEDO – « Strong-weak coupling duality and non-perturbative effects in string theory », *Physics Letters B* **249** (1990), p. 35–43.

[26] J. GAUNLETT – « Supersymmetric monopoles and duality », in *Duality and supersymmetric theories* [60].

[27] K. GAWĘDSKI – « Conformal field theory », in *Sém. Bourbaki*, Astérisque, vol. 177-178, Soc. Math. France, 1989, exp. n° 704, p. 95–126.

[28] R. GEROCH – « A method for generating solutions of Einstein's equations », *Journal of Math. Physics* **12** (1971), no. 6, p. 918–924.

[29] G.W. GIBBONS – « The Sen conjecture for fundamental monopoles of distinct types », *Physics Letters B* **382** (1996), p. 53–59.

[30] A. GIVEON, M. PORRATI & E. RABINOVICI – « Target space duality in string theory », *Physics Reports* **244** (1994), p. 77–202.

[31] J. GLIMM & A. JAFFE – *Quantum physics, a functional integral point of view*, Springer-Verlag, 1981.

[32] P. GODDARD, J. NUYTS & D. OLIVE – « Gauge theory and magnetic charge », *Nuclear Physics B* **125** (1977), p. 1–28.

[33] M.B. GREEN, J.H. SCHWARZ & E. WITTEN – *Superstring theory*, vol. 1 & 2, Cambridge University Press, 1987.

[34] R. GÜVEN – « Black p-brane solutions of $D = 11$ supergravity theory », *Physics Letters B* **276** (1992), p. 49–55.

[35] A. HANANY & E. WITTEN – « Type IIB superstrings, PBS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics », *Nuclear Physics B* **492** (1997), p. 152–190.

[36] J.A. HARVEY & G. MOORE – « Algebras, BPS states, and strings », *Nuclear Physics B* **463** (1996), p. 315–368.

[37] S. HAWKING & G. ELLIS – *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[38] W. HEISENBERG – *Les principes de la théorie de quanta*, Gauthier-Villars, 1972.

[39] M. HENNINGSON & G. MOORE – « Counting curves with modular forms », *Nuclear Physics B* **472** (1999), p. 518–528.

[40] N. HITCHIN – « The Yang-Mills equation and the topology of 4-manifolds (after Simon K. Donaldson) », in *Sém. Bourbaki*, Astérisque, vol. 105-106, Soc. Math. France, 1983, exp. n° 606, p. 167–178.

[41] ______, « Lectures on special Lagrangian submanifolds », `arXiv:math.DG/9907034` v1, 6/7/99.

[42] G. 'T HOOFT – *Under the spell of the gauge principle*, Advanced Series in Mathematical Physics, vol. 19, World Scientific, 1994.

[43] ______, « The renormalization group in QFT », in *Under the spell of the gauge principle* [42].

[44] G. 'T HOOFT & M. VELTMAN – « Diagrammar », in *Under the spell of the gauge principle* [42].

[45] K. HORI & C. VAFA – « Mirror Symmetry », `arXiv:hep-th/00022V3`, mars 2000.

[46] P. HOŘAVA & E. WITTEN – « Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions », *Nuclear Physics B* **460** (1996), p. 506–524.

[47] C.M. HULL & P.K. TOWNSEND – « Unity of superstring dualities », *Nuclear Physics B* **438** (1995), p. 109–137.

[48] C. ITZYKSON & J.B. ZUBER – *Quantum field theory*, McGraw-Hill, 1980.

[49] B. JULIA – « Dualities in the classical supergravity limits », `arXiv:hep-th/9805083`.

[50] ______, « Magics of M-gravity », `arXiv:hep-th/0105031` v1.

[51] B. JULIA & A. ZEE – « Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory », *Phys. Rev. D* **11** (1975), p. 22–27 à 22–32.

[52] A. KONECHNY & A.S. SCHWARTZ – « On $(k \oplus \ell|q)$-Dimensional Supermanifolds », in *Supersymmetry and Quantum Field Theory, Proc. Kharkov, Ukraine 1997* (J. Weiss & V.P. Akulov, éds.), L. N. in Physics, vol. 509, Springer, 1998, p. 201–206.

[53] M. KONTSEVICH – « Mirror symmetry in dimension 3 », in *Sém. Bourbaki*, Astérisque, vol. 237, Soc. Math. France, 1996, exp. n° 801, p. 275–293.

[54] R.P. LANGLANDS – « Problems in the theory of automorphic forms », in *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, Lect. Notes in Math., vol. 170, Springer, 1970.

[55] K. LEE, E. WEINBERG & P. YI – « Moduli space of many BPS monopoles for arbitrary gauge groups », *Phys. Rev D* **54** (1996), p. 1633–1643.

[56] Y.I. MANIN – *Gauge field theory and complex geometry*, Springer-Verlag, 1984.

[57] C.W. MISNER, K.S. THORNE & J.A. WHEELER – *Gravitation*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.

[58] C. MONTONEN & D. OLIVE – « Magnetic monopoles as gauge particles », *Physics Letters B* **72** (1977), p. 117–120.

[59] N.A. OBERS & B. PIOLINE – « U-duality and M-theory », *Physics Reports* **318** (1999), p. 113–225.

[60] D. OLIVE & P. WEST (éds.) – *Duality and supersymmetric theories*, Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1999.

[61] H. OSBORN – « Topological charges for $N = 4$ supersymmetric gauge theories and monopoles of spin 1 », *Physics Letters B* **83** (1979), p. 321–326.

[62] T. PARACELSE – *Volumen (Medicinae) Paramirum*, Sudhoff, 1525.

[63] M.E. PESKIN & D.V. SCHROEDER – *An introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[64] J. POLCHINSKI – « Renormalization and effective lagrangians », *Nuclear Physics B* **231** (1984), p. 261–295.

[65] ______, « Combinatorics of boundaries in string theory », *Physical Review D* **50** (1994), p. 6041–6045.

[66] ______, « String duality », *Reviews of Modern Physics* **68** (1996), p. 1245–1258.

[67] ______, « Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges », `arXiv:hep-ph/9510017` V3, novembre 1995.

[68] J. POLCHINSKI & E. WITTEN – « Evidence for heterotic-Type I string duality », *Nuclear Physics B* **460** (1996), p. 525–540.

[69] A.M. POLYAKOV – *Gauge fields and strings*, Contemporary concepts in Physics, vol. 3, Harwood Academic Publishers, 1987.

[70] M.K. PRASAD & C.M. SOMMERFIELD – « Exact Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon », *Phys. Rev. Letters* **35** (1975), p. 760–762.

[71] S.-J. REY – « Confining phase of superstrings and axionic strings », *Physical Review D* **43** (1991), p. 526–538.

[72] V. RIVASSEAU – *From perturbative to constructive renormalization*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1991.

[73] A. ROGERS – « A global theory of supermanifolds », *J. Math. Phys.* **21** (1980), no. 6, p. 1352–1365.

[74] A.S. SCHWARTZ – « On the definition of superspace », *Theoret. and Math. Phys.* **60** (1984), no. 1, p. 657–660.

[75] J.H. SCHWARZ & A. SEN – « Duality symmetries of $4D$-heterotic strings », *Physics Letters B* **312** (1993), p. 105–114.

[76] J. SCHWINGER – « Magnetic Charge in Quantum Field Theory », *Phys. Rev.* **144** (1966), p. 1087–1093.

[77] G. SEGAL – « Notes on quantum field theory », `http://online.itp.ucsb.edu/online/geom99/segal1_n/`.

[78] N. SEIBERG & E. WITTEN – « Electric magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory », *Nuclear Physics B* **426** (1994), p. 19–52.

[79] ______, « Monopoles, duality and chiral symmetric breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD », *Nuclear Physics B* **431** (1994), p. 484–550.

[80] A. SEN – « Dyon monopole bound states, self-dual harmonic forms on the multimonopole moduli space, and $SL_2(\mathbb{Z})$ invariance in string theory », *Physics Letters B* **329** (1994), p. 217–221.

[81] ______, « An introduction to non-perturbative string theory », in *Duality and supersymmetric theories* [60], p. 297–413.

[82] D. Sorokin – « Superbranes and superembeddings », *Physics Reports* **329** (2000), p. 1–101.
[83] A. Strominger, S.-T. Yau & E. Zaslow – « Mirror symmetry is T-duality », *Nuclear Physics B* **479** (1996), p. 243–259.
[84] P.K. Townsend – « The eleven-dimensional supermembrane revisited », *Physics Letters B* **350** (1995), p. 184–188.
[85] J. Wess & J. Bagger – *Supersymmetry and supergravity*, 2ème éd., Princeton University Press, 1992.
[86] K.G. Wilson – « Renormalization of a scalar field theory in strong coupling », *Physical Review D* **6** (1972), no. 2, p. 419–426.
[87] ______, « The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem », *Review of Modern Physics* **47** (1975), p. 773–840.
[88] ______, « The renormalization group and critical phenomena », *Reviews of Modern Physics* **55** (1983), no. 3, p. 583–600.
[89] E. Witten – « Overview of K-theory applied to strings », `arXiv:hep-th/0007175` v1.
[90] ______, « Deconstruction, G_2 holonomy, and Doublet-Triplet splitting », `arXiv:Hep-ph/0201018` V2, 15.01.2002.
[91] ______, « Dyons of charge $e\theta/2\pi$ », *Physics Letters B* **86** (1979), p. 283–287.
[92] ______, « String theory dynamics in various dimensions », *Nuclear Physics B* **443** (1995), p. 85–126.
[93] ______, « Strong coupling and the cosmological constant », *Modern Physics Letters A* **10** (1995), p. 2153–2155.
[94] ______, « Bound states of strings and p-branes », *Nuclear Physics B* **460** (1996), p. 335–350.
[95] ______, « Five-branes and M-theory on an orbifold », *Nuclear Physics B* **463** (1996), p. 383–397.
[96] ______, « Solutions of four-dimensional field theories via M-theory », *Nuclear Physics B* **500** (1997), p. 3–42.
[97] ______, « Duality, spacetime and quantum mechanics », *Physics today* (May 1997), p. 28–33.
[98] E. Witten & D. Olive – « Supersymmetry algebras that include topological charges », *Physics Letters B* **78** (1978), p. 97–101.
[99] D. Zwanziger – « Exactly Soluble Non-relativistic Model of Particles with Both Electric and Magnetic Charges », *Phys. Rev.* **176** (1968), no. 5, p. 1480–1495.

Daniel BENNEQUIN

Université Denis-Diderot (Paris VII)
Équipe de Géométrie et Dynamique
Institut de Mathématique de Jussieu
UMR 9994 du CNRS
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05