Astérisque

GEORGES SKANDALIS

Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue

Astérisque, tome 276 (2002), Séminaire Bourbaki,
exp. n^{o} 869, p. 105-135

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1999-2000__42__105_0>

Séminaire BOURBAKI
52e année, 1999-2000, n° 869, p. 105 à 135

Novembre 1999

PROGRÈS RÉCENTS SUR LA CONJECTURE DE BAUM–CONNES. CONTRIBUTION DE VINCENT LAFFORGUE

par **Georges SKANDALIS**

Cet exposé fait de nouveau le point sur la conjecture de Baum-Connes après celui de Pierre Julg ([25]) qui rendait compte d'une avancée spectaculaire obtenue par Higson et Kasparov ([19]). Une nouvelle barrière vient juste d'être franchie par V. Lafforgue : celle de la propriété T de Kazhdan. Le but ici est d'exposer les diverses étapes du travail de Lafforgue. En fin d'exposé, nous donnerons quelques autres résultats en relation avec la conjecture de Baum-Connes et celle de Novikov obtenus récemment par G. Yu ([51]), N. Higson ([18]) et quelques autres.

La conjecture de Baum-Connes prédit la K-théorie de la C^*-algèbre (réduite) d'un groupe discret G et, plus généralement, d'un groupe localement compact, et même d'un groupoïde localement compact (par exemple de la C^*-algèbre associée à un feuilletage) *etc.* Cette conjecture a plusieurs conséquences : l'injectivité du morphisme de Baum-Connes a des implications géométriques importantes — la plus fameuse étant la conjecture de Novikov sur les « hautes signatures » ; sa surjectivité a des applications fondamentales dans la théorie des C^*-algèbres (*e.g.* une conjecture de Kadison, déjà ancienne, sur les idempotents).

Malgré les efforts de plusieurs mathématiciens, une barrière subsistait pour la preuve de cette conjecture : la propriété T de Kazhdan (*cf.* [32], [12]), qui empêche certaines idées de démonstration d'aboutir et rend fausses certaines généralisations : en effet, cette conjecture est alors fausse si la C^*-algèbre pleine remplace la réduite (*cf.* [24], voir aussi [10]) ; la généralisation de cette conjecture au bifoncteur de Kasparov (qui généralise la K-théorie) peut elle-même être fausse (*cf.* [44]). Au-delà de cette barrière, les seuls cas connus avant le travail de Lafforgue étaient les groupes de Lie réels réductifs (A. Wassermann [50]) ou p-adiques (Baum-Higson-Plymen [6]) utilisant la description complète de la C^*-algèbre de ces groupes, mais aucun groupe discret infini possédant la propriété T n'avait pu être obtenu.

Lafforgue établit la conjecture de Baum-Connes pour beaucoup de groupes localement compacts ayant la propriété T : tout groupe de Lie semi-simple réel ou réductif p-adique ET les sous-groupes discrets cocompacts des groupes de Lie de rang réel 1 ou de SL_3 d'un corps local.

Dans tous ces cas, l'injectivité du morphisme de Baum-Connes était connue (travaux de Miščenko, Solovjev, Kasparov...). En fait, il y a un élément noté γ par Kasparov dans l'anneau de représentations (défini par Kasparov) $KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ dont la différence avec 1, mesure la non surjectivité du morphisme de Baum-Connes. On doit montrer que $\gamma = 1$ en tant qu'endomorphisme de la K-théorie de la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$ de G. Remarquons que, par la propriété T, γ lui-même n'est pas égal à 1 dans l'anneau $KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ et même dans l'anneau $KK(C_r^*(G), C_r^*(G))$ (du moins si G est un sous-groupe discret cocompact de $Sp(n, 1)$ — *cf.* [44]).

La démonstration de Lafforgue a trois étapes. La première est sa principale contribution conceptuelle ; la seconde est — de loin — la plus difficile techniquement ; dans la troisième, il utilise des travaux de Jolissaint dans le cas $Sp(n, 1)$ et de Ramagge-Robertson-Steger dans le cas de SL_3 d'un corps local non archimédien ; enfin, il adapte la méthode de Ramagge-Robertson-Steger pour obtenir aussi le cas des sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbf{R})$ et $SL_3(\mathbf{C})$.

Plus explicitement :

1. Dans la première étape, Lafforgue construit un bifoncteur $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ pour des algèbres de Banach, en remplacement de la théorie bivariante de Kasparov. Il s'agit là d'une construction nouvelle et très intéressante. Elle suit d'assez près celle de Kasparov. Cependant, les C^*-modules hilbertiens qui sont à la base du travail de Kasparov sont ici remplacés par des paires de modules banachiques en dualité (les modules hilbertiens des C^*-algèbres sont en ce sens autoduaux). Malheureusement, le produit de Kasparov ne se généralise pas directement à ce cadre. Cependant, Lafforgue parvient à étendre plusieurs constructions de Kasparov dans cette « KK-théorie banachique » : il démontre qu'elle opère sur la K- théorie, construit une KK-théorie banachique équivariante par un groupe localement compact, ainsi qu'un analogue de l'homomorphisme de descente $j_G : KK_G(A, B) \to KK(A \rtimes G, B \rtimes G)$ de Kasparov.

2. Dans la deuxième étape il établit l'égalité $\gamma = 1$ dans sa KK-théorie banachique équivariante pour tout groupe localement compact agissant de façon continue, propre et isométrique sur :

– une variété riemannienne complète, connexe, simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (cette classe contient tous les groupes de Lie réels et tous leurs sous-groupes fermés) ;

– sur un immeuble affine (cette classe contient tous les groupes de Lie p-adiques et tous leurs sous-groupes fermés).

C'est la partie la plus technique. Il construit une homotopie qui utilise :

– dans le cas réel des espaces de Sobolev de formes L^p sur des variétés de courbure sectionnelle négative ;

– dans le cas p-adique une combinatoire assez élaborée (ainsi que des espaces ℓ^p).

À l'aide des parties 1 et 2, Lafforgue établit la conjecture de Baum-Connes à valeurs dans la sous-algèbre $L^1(G)$ de $C_r^*(G)$ (ce qui prouve une conjecture de Bost), ainsi que toutes les complétions de $C_c(G)$ pour des « normes inconditionnelles » (dans le langage de Lafforgue) *i.e.* une norme d'algèbre N satisfaisant $N(f) \leq N(g)$ si $f, g \in C_c(G)$ satisfont, pour tout $x \in G$, $|f(x)| \leq |g(x)|$ (notons cependant que la norme de C_r^* n'est malheureusement pas « inconditionnelle »).

3. Pour prouver la conjecture de Baum-Connes, il suffit de construire une « complétion inconditionnelle » de $C_c(G)$, qui soit une sous-algèbre A de $C_r^*(G)$ avec la même K-théorie que $C_r^*(G)$. Pour cela, il suffit que A soit stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*(G)$. Une telle sous-algèbre A existe :

– si G est un groupe de Lie semi-simple, Lafforgue montre qu'une variante de l'algèbre de Harish-Chandra convient (*cf.* [36]) ;

– si G est un groupe hyperbolique *e.g.* un sous-groupe discret cocompact dans $Sp(n, 1)$ (travaux de Haagerup pour les groupes libres, de Jolissaint pour les sous-groupes cocompacts des groupes de Lie de rang 1, et de de la Harpe pour un groupe hyperbolique quelconque [17]) ;

– si G est discret cocompact dans SL_3 d'un corps local non archimédien (ce résultat est dû à Ramagge, Robertson et Steger [41]) ;

– si G est discret cocompact dans $SL_3(\mathbf{R})$ ou $SL_3(\mathbf{C})$: ce résultat est dû à Lafforgue [34].

Dans ces trois derniers cas, l'algèbre A est donnée par des conditions de décroissance rapide au sens ℓ^2.

Nous commencerons cet exposé par quelques rappels, notamment sur les C^*-algèbres de groupes et la théorie de Kasparov. Ensuite, nous rappellerons la conjecture de Baum-Connes et ses généralisations. Nous renvoyons à ce sujet à l'excellent exposé de Pierre Julg [25]. Les trois paragraphes suivants seront consacrés aux trois étapes du travail de Lafforgue citées ci-dessus. Dans le dernier paragraphe, nous décrivons de très récents résultats de Yu ([51]) et Higson ([18]) reliés à la conjecture de Baum-Connes.

Ajout (mars 2000). — Depuis que cet exposé a été écrit, des contre-exemples à la conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages, ainsi que ses analogues pour les « structures à l'infini » ont été donnés (*cf.* [20]). Ceux-ci sont basés sur des idées de M. Gromov (*cf.* [15]).

Je tiens à remercier Vincent Lafforgue pour de nombreuses explications sur ses travaux. Je le remercie aussi, ainsi que Saad Baaj, Jean Renault et Alain Valette, pour une lecture attentive de ce manuscrit. Un grand merci enfin à Alberto Arabia pour son aide amicale.

1. RAPPELS ET NOTATIONS : C*-ALGÈBRES DE GROUPES, THÉORIE DE KASPAROV

1.1. Algèbres de Banach ; C*-algèbres

Toutes les algèbres de Banach que nous considérons dans cet exposé sont complexes. Si A est une algèbre de Banach, on supposera toujours que sa norme vérifie $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, pour tout $a, b \in A$. On ne suppose pas en général que nos algèbres de Banach possèdent un élément unité. Si A est une algèbre de Banach, on note $\widetilde{A}$ l'algèbre de Banach unifère construite de la façon suivante : en tant qu'espace vectoriel $\widetilde{A}$ est isomorphe au produit $A \times \mathbf{C}$; sa norme est donnée par $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ (pour $a \in A$ et $\lambda \in \mathbf{C}$) et son produit est donné par $(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ (pour $a, b \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$). On identifie A avec son image dans $\widetilde{A}$ par l'homomorphisme $a \mapsto (a, 0)$; l'élément $(0,1)$ est l'unité de $\widetilde{A}$.

Un A-module banachique à droite (*resp.* à gauche) est un espace de Banach E muni d'une action à droite (*resp.* à gauche) de A telle que, pour tout $x \in E$ et tout $a \in A$, on ait $\|xa\| \leq \|x\|\|a\|$ (*resp.* $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$). Un A-module banachique à droite (*resp.* à gauche) est un $\widetilde{A}$-module banachique à droite (*resp.* à gauche) : il suffit de poser $x(a,\lambda) = xa + \lambda x$ (*resp.* $(a,\lambda)x = ax + \lambda x$) pour $a \in A$, $x \in E$, et $\lambda \in \mathbf{C}$.

Rappelons qu'une *inolution* sur une algèbre de Banach est une application antilinéaire, antimultiplicative, involutive et isométrique notée $x \mapsto x^*$. Une *algèbre de Banach involutive* est une algèbre de Banach munie d'une involution.

Une C^*-algèbre est une algèbre de Banach involutive A telle que, pour tout $x \in A$, on ait $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Si A est une C^*-algèbre, l'algèbre de Banach obtenue à partir de A en adjoignant une unité est involutive (on pose $(a,\lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$) ; ce n'est cependant pas une C^*-algèbre. Il existe néanmoins une (unique) norme de C^*-algèbre sur $\widetilde{A}$.

1.2. C^*-algèbres de groupes

Soit G un groupe localement compact. Notons dx une mesure de Haar à gauche sur G et $C_c(G)$ l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur G. Rappelons que la convolée $f \star g$ de $f, g \in C_c(G)$ est donnée par la formule

$$f \star g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dy$$

pour tout $x \in G$.

Par ailleurs, on définit une involution $f \mapsto f^*$ sur $C_c(G)$ en posant $f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$ où Δ désigne la fonction module sur G (telle que, pour tout $f \in C_c(G)$, on ait $\int f(x^{-1})\, dx = \int f(x)\Delta(x)\, dx$).

Il y a plusieurs façons de compléter $C_c(G)$ en une algèbre de Banach, c'est-à-dire des normes sur $C_c(G)$ telles que, pour tout $f, g \in C_c(G)$ on ait $\|f \star g\| \leq \|f\|\|g\|$. Nous en utiliserons (au moins) 3 :

1. La plus simple est de prendre la norme $\| \ \|_1$. On obtient l'algèbre de Banach $L^1(G)$.

2. Une autre façon est de considérer $C_c(G)$ comme opérant sur $L^2(G)$ par convolution : pour $f \in C_c(G)$, on note $\lambda(f)$ l'application de $L^2(G)$ dans lui-même donnée par $g \mapsto \lambda(f)(g) = f \star g$. On note $\|f\|_r$ la norme d'opérateur de $\lambda(f)$ (dans $L^2(G)$). Le complété de $C_c(G)$ pour cette norme est une C^*-algèbre appelée la *C^*-algèbre réduite de G* et notée $C_r^*(G)$. De façon équivalente, $C_r^*(G)$ s'identifie avec l'adhérence normique de $\lambda(C_c(G))$ dans l'algèbre des opérateurs de l'espace hilbertien $L^2(G)$. On peut remarquer que :

– pour $f \in C_c(G)$, on a $\|\lambda(f)\| \leq \|f\|_1$, donc la représentation λ s'étend à $L^1(G)$, et que

– la représentation λ est *involutive* : pour tout $f \in C_c(G)$, on a $\lambda(f^*) = \lambda(f)^*$ où, pour un opérateur T d'un espace hilbertien, T^* désigne l'adjoint de T.

3. Considérons toutes les représentations involutives σ de $C_c(G)$ dans un espace hilbertien H_σ telles que, pour tout $f \in C_c(G)$, on ait $\|\sigma(f)\| \leq \|f\|_1$. Posons $\|f\|_p = \sup_\sigma \|\sigma(f)\|$. On obtient encore une norme; le complété de $C_c(G)$ pour cette norme est une C^*-algèbre notée $C^*(G)$ et appelée la C^*-algèbre de G ou la C^*-algèbre pleine de G. L'identité de $C_c(G)$ se prolonge évidemment en un morphisme $C^*(G) \to C_r^*(G)$. Ce morphisme est toujours surjectif. Il est injectif si et seulement si le groupe G est *moyennable.*

1.3. Produits croisés

Soient G un groupe localement compact et A une algèbre de Banach. Une *action de G dans A* est un homomorphisme α de G dans le groupe des automorphismes isométriques de A, tel que, pour tout $a \in A$, l'application $x \mapsto (\alpha(x))(a)$ soit continue. Le plus souvent, pour $x \in G$ et $a \in A$ l'élément $(\alpha(x))(a) \in A$ s'écrira juste $x.a$.

Soit α une action d'un groupe G dans une algèbre de Banach A. L'espace de Banach $L^1(G;A)$ est muni du produit de convolution donné par la formule

$$f \star g(x) = \int_G f(y)\, y.(g(y^{-1}x))\, dy$$

pour tout $f, g \in C_c(G;A) \subset L^1(G;A)$ et $x \in G$.

Si A est une C^*-algèbre et α respecte l'involution ($x.(a^*) = (x.a)^*$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in G$), alors l'algèbre de Banach $L^1(G;A)$ est naturellement munie d'une involution par la formule $(f^*)(x) = \Delta(x^{-1})x.(f(x^{-1}))^*$. Généralisant la construction de $C_r^*(G)$ et $C^*(G)$, on obtient par complétion de $L^1(G;A)$ deux C^*-algèbres $A \rtimes_r G$ et $A \rtimes G$ appelées respectivement produit croisé réduit et plein de A par G.

1.4. Théorie de Kasparov

Nous rappelons ici, très sommairement, certaines constructions et propriétés du bifoncteur de Kasparov (*cf.* [28], [29] ; voir aussi les exposés de T. Fack [13] et P. Julg [25]).

1.4.a. *Modules hilbertiens*

Les *A-modules hilbertiens* sont les espaces hilbertiens avec les scalaires remplacés par A.

Rappelons qu'un élément a d'une C^*-algèbre A est appelé *positif* s'il est de la forme x^*x ($x \in A$). L'ensemble A_+ des éléments positifs joue le rôle de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{C}$.

On appelle *A-module préhilbertien* sur A un A-module à droite E muni d'un « produit scalaire » *i.e.* d'une application sesquilinéaire $E \times E \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in A$, telle que, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est A-linéaire (à droite), satisfaisant $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$ et $\langle x, x\rangle \in A_+$ pour tout $x \in E$.

Si E est un A-module préhilbertien, l'application $x \mapsto \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|}$ est une semi-norme sur E. Si E est séparé et complet pour cette norme on dit que c'est un *A-module hilbertien.*

1.4.b. *Opérateurs ; opérateurs compacts*

Soient E, F des A-modules hilbertiens. L'ensemble des opérateurs de E dans F que nous considérons sont les opérateurs $T : E \to F$ possédant un adjoint, *i.e.* une application $T^* : F \to E$ satisfaisant $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$. Un tel opérateur est automatiquement linéaire, A- linéaire et continu. L'ensemble des opérateurs de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, muni de la norme des applications linéaires continues, est une C^*-algèbre.

En particulier, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, posons $\theta_{y,x} : z \mapsto y\langle x, z\rangle$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\theta^*_{y,x} = \theta_{x,y}$. On note $\mathcal{K}(E, F)$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ engendré par les $\theta_{y,x}$. L'ensemble $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$ est un idéal bilatère fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Il sera utile de considérer les modules hilbertiens $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradués, c'est-à-dire les modules hilbertiens $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, où $E^{(0)}$ et $E^{(1)}$ sont orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle$. Pour $i \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on note $\mathcal{L}(E)^{(i)}$ l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(E)$ tels que $T(x) \in E^{(i+j)}$ pour tout $j \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et tout $x \in E^{(j)}$.

1.4.c. *Cycles en KK-théorie*

Soient A et B des C^*-algèbres. Le groupe de Kasparov $KK(A, B)$ est donné par des cycles et une relation d'équivalence sur ces cycles. Un cycle est un triplet (E, π, F) où E est un B-module hilbertien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradué, $\pi : A \to \mathcal{L}(E)^{(0)}$ est un homomorphisme involutif (tel que $\pi(a^*) = \pi(a)^*$) et $F \in \mathcal{L}(E)^{(1)}$ est tel que $F = F^*$ et, pour tout $a \in A$, les opérateurs $F\pi(a) - \pi(a)F$ et $(F^2 - 1)\pi(a)$ sont dans $\mathcal{K}(E)$.

La somme des cycles (E, π, F) et (E', π', F') est, avec des notations évidentes, $(E \oplus E', \pi \oplus \pi', F \oplus F')$.

1.4.d. *Homotopie*

Notons $B[0,1]$ la C^*-algèbre des applications continues de l'intervalle $[0,1]$ dans B. Un cycle pour $KK(A, B[0,1])$ est une famille (E_t, π_t, F_t) de cycles pour $KK(A,B)$: c'est par définition une homotopie entre (E_0, π_0, F_0) et (E_1, π_1, F_1).

Le groupe de Kasparov $KK(A,B)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de cycles. Ce groupe est fonctoriel en A et en B : pour tout A on a un foncteur covariant $B \to KK(A,B)$ et pour tout B on a un foncteur contravariant $A \to KK(A,B)$.

1.4.e. *Produit de Kasparov*

Kasparov a défini un produit $KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$ (où A, B, C sont des C^*-algèbres) qui est bilinéaire, naturel et associatif. Le fait que ce produit soit hautement non trivial donne toute sa force à la théorie. Muni de ce produit, $KK(A,A)$ est un anneau. Son élément unité noté 1_A est représenté par $(A, \pi, 0)$ où A est gradué par $A^{(0)} = A$ et $\pi(a)b = ab$.

1.4.f. *Action sur la* K*-théorie*

Le groupe $KK(\mathbf{C}, A)$ a été identifié par Kasparov avec le groupe de K-théorie $K_0(A)$. Le produit de Kasparov donne en particulier un morphisme de groupes $KK(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B))$.

1.4.g. *Le cas équivariant*

On suppose à présent qu'un groupe localement compact G opère sur les C^*-algèbres A et B. On définit un groupe $KK_G(A,B)$ en demandant que G opère aussi sur les cycles : un cycle pour $KK_G(A,B)$ est encore donné par un triple (E, π, F), qui est un cycle pour $KK(A,B)$, tel que G opère dans E de façon continue (*i.e.* pour tout $x \in E$ l'application $g \mapsto g.x$ est continue) ; on suppose de plus que, pour tout $x, y \in E$, $a \in A$, $b \in B$ et $g \in G$, on a

$$g.(xb) = (g.x)(g.b)\,, \ \langle g.x, g.y\rangle = g.(\langle x, y\rangle)\,, \ g.(\pi(a)(x)) = \pi(g.a)(g.x)\,;$$

enfin, pour tout $a \in A$ et tout $g \in G$ on a $\pi(a)(g.F - F) \in \mathcal{K}(E)$ et $g \mapsto \pi(a)(g.F)$ est continue en norme — où $g.F$ est donné par $(g.F)(x) = g.(F(g^{-1}.x))$. Le groupe $KK_G(A,B)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de cycles. Toutes les propriétés se généralisent au cas équivariant ; en particulier, le produit de Kasparov se généralise à ce cadre.

Remarque. — Soient G un groupe discret et (H, π, F) un cycle pour $KK_G(A, \mathbf{C})$. L'action de G dans H et la représentation π de A donnent une représentation du produit croisé $A \rtimes G$ dans H. On en déduit que $KK_G(A, \mathbf{C}) = KK(A \rtimes G, \mathbf{C})$. Plus généralement si l'action de G dans B est triviale $KK_G(A,B) = KK(A \rtimes G, B)$.

1.4.h. *Le morphisme j_G*

Si (E, π, F) est un cycle pour $KK_G(A, B)$, on peut former le produit croisé $E \rtimes_r G$ qui est un $B \rtimes_r G$-module hilbertien. On obtient aussi une représentation naturelle $\widetilde{\pi} : A \rtimes_r G \to \mathcal{L}(E \rtimes_r G)$; de plus, on associe à F un opérateur $\widetilde{F} \in \mathcal{L}(E \rtimes_r G)$. Le triplet $(E \rtimes_r G, \widetilde{\pi}, \widetilde{F})$ est un cycle pour $KK(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$. On obtient ainsi un homomorphisme $j_G^r : KK_G(A, B) \to KK(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$, compatible avec les produits de Kasparov.

On construit de même un homomorphisme pour les produits croisés pleins j_G : $KK_G(A, B) \to KK(A \rtimes G, B \rtimes G)$.

2. LA CONJECTURE DE BAUM-CONNES

La conjecture de Baum-Connes (*cf.* [5]) prédit la K-théorie de $C_r^*(G)$.

Si G est un groupe de Lie connexe semisimple, elle prédit que l'induction de Dirac est un isomorphisme de la K-théorie de $C^*(K)$, *i.e.* l'anneau des représentations de K (1) — où K est un sous-groupe compact maximal de G, sur celle de $C_r^*(G)$.

Si G est un groupe discret sans torsion, la conjecture prédit que la K-théorie de $C_r^*(G)$ est décrite par les G-indices sur des revêtements $\widetilde{M}$ de groupe G d'une variété compacte M (au sens de [3]).

Pour l'énoncer correctement dans le cas général, nous aurons besoin de revenir sur la notion d'espace classifiant pour un groupe.

2.1. Espaces classifiants

Soit G un groupe discret. L'espace classifiant BG est un espace muni d'un fibré principal ξ_0 de fibre G. De plus, pour tout espace topologique X (2) et tout fibré principal ξ de fibre G, il existe une application continue $f : X \to BG$, unique à homotopie près, telle que ξ soit isomorphe à $f^*(\xi_0)$. Ces propriétés déterminent BG à équivalence d'homotopie près.

Le groupe G opère sur l'espace total du fibré ξ_0 — traditionnellement noté EG et BG est le quotient EG/G par l'action de G. L'espace EG et l'espace BG sont en général construits comme complexes cellulaires infinis. On peut cependant les supposer localement compacts (à l'aide d'une construction de télescope infini).

L'action de G sur EG est *libre* et *propre*(3). De plus, supposons que G opère librement et proprement sur un espace localement compact $\widetilde{X}$. En considérant le fibré principal sur $\widetilde{X}/G$, on déduit qu'il existe une application continue G-équivariante

(1) à des problèmes mineurs de « K-orientation » près.

(2) On suppose X suffisamment régulier *e.g.* localement compact σ-compact, ou un complexe cellulaire.

(3) Autrement dit, l'application $(x, g) \mapsto (x, gx)$ est injective et propre de $X \times G$ dans $X \times X$.

$g : \widetilde{X} \to EG$, unique à homotopie G-équivariante près. En ce sens, EG est un G-espace libre et propre final dans cette catégorie.

La conjecture de Baum-Connes utilise un G-espace propre final dans la catégorie des G-espaces propres. Un tel espace existe et est unique à G-homotopie près (*cf.* [5], [31]). On le note $\underline{E}G$. La construction de cet espace est en fait plus simple que celle de EG :

– un modèle pour $\underline{E}G$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur G ;

– un modèle localement compact pour $\underline{E}G$ est l'ensemble des mesures positives sur G de masse totale dans $]\frac{1}{2}, 1]$, muni de la topologie de dualité avec l'algèbre $C_0(G)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur G ;

– si G est compact, on peut prendre pour $\underline{E}G$ un espace à un point !

– si G est un groupe de Lie réel connexe, on peut prendre $\underline{E}G = G/K$ où K est un sous-groupe compact maximal ;

– si G est un groupe de Lie réductif p-adique, on prendra pour $\underline{E}G$ la réalisation géométrique de l'immeuble affine associé ;

– si G est discret, une présentation de $\underline{E}G$ *via* un complexe simplicial localement fini rend possible l'utilisation d'arguments de type Mayer-Vietoris.

2.2. Le groupe de K-théorie topologique de Baum-Connes

Le groupe de K-théorie topologique $K_{0,top}(G)$, défini d'abord dans certains cas particuliers (groupes discrets, groupes de Lie, feuilletages... - *cf.* [4]), n'a été bien compris en général que récemment (*cf.* [5], [47]) :

Soit G un groupe localement compact. Le groupe de K-théorie topologique est

$$K_{0,top}(G) = \varinjlim KK_G(C_0(Y), \mathbf{C}),$$

où la limite inductive est prise sur les parties fermées G-invariantes Y de $\underline{E}G$ telles que Y/G soit compact[(4)].

Remarque. — Supposons que le groupe G soit discret. Dans ce cas, $K_{0,top}(G) = \varinjlim KK(C_0(Y) \rtimes G, \mathbf{C})$ (voir remarque en 1.4.g).

Si de plus G est sans torsion, toute action propre de G est libre. Alors, la C^*-algèbre $C_0(Y) \rtimes G$ est équivalente au sens de Morita à $C(Y/G)$ (en fait si G est infini, $C_0(Y) \rtimes G$ est isomorphe à $C(Y/G) \otimes \mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ désigne l'algèbre des opérateurs compacts sur un espace hilbertien). Comme la KK-théorie est invariante par équivalence de Morita, on en déduit que $K_{0,top}(G) = \varinjlim KK(C(X), \mathbf{C})$ la limite inductive étant prise sur les parties compactes X de BG ; en d'autres termes, $K_{0,top}(G)$ est $K_{0,c}(BG)$, la K- homologie à support compact de BG.

(4) À une action continue à gauche de G sur un espace localement compact Y, correspond une action de G sur la C^*-algèbre $C_0(Y)$ par la formule $(g.f)(y) = f(g^{-1}y)$, pour $g \in G$, $f \in C_0(Y)$, $y \in Y$.

2.3. L'homomorphisme de Baum-Connes

Soit Y un espace topologique localement compact muni d'une action propre de G ; on suppose de plus que Y/G est compact.

Si l'action de G est de plus libre, l'équivalence de Morita entre $C_0(Y) \rtimes G$ et $C(Y/G)$ est donnée par un $C_0(Y) \rtimes G$-module hilbertien canonique E, tel que $\mathcal{K}(E)$ soit isomorphe à $C(Y/G)$ et qui est plein, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel fermé de $C_0(Y) \rtimes G$ engendré par les produits scalaires $\langle x, y\rangle$, $x, y \in E$ est $C_0(Y) \rtimes G$.

Si l'action est propre sans être libre, on fait exactement la même construction. La seule chose qui change est que le $C_0(Y) \rtimes G$-module hilbertien canonique E n'est plus plein. Cependant, $\mathcal{K}(E)$ est encore égal à $C(Y/G)$; en particulier, comme $\mathcal{K}(E)$ est unifère, $(E, \pi, 0)$ définit un élément Λ_Y de $KK(\mathbf{C}, C_0(Y) \rtimes G)$.

Une façon équivalente plus élémentaire de définir Λ_Y est la suivante : comme l'action de G dans Y est propre à quotient compact, il existe une fonction continue, positive, à support compact $c : Y \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $y \in Y$, $\int_G c(gy)\, dg = 1$. On note $p \in C_c(Y \times G) \subset C_c(G; C_0(Y)) \subset C_0(Y) \rtimes G$ la fonction $(y, g) \mapsto \Delta(g)^{-1/2} c(y)^{1/2} c(g^{-1}y)^{1/2}$. C'est un projecteur dans $C_0(Y) \rtimes G$ (*i.e.* $p = p^2 = p^*$) ; il définit donc un élément de $K_0(C_0(Y) \rtimes G) = KK(\mathbf{C}, C_0(Y) \rtimes G)$.

La classe de p ne dépend pas de la fonction c. En fait, le module $p(C_0(Y) \rtimes G)$ est isomorphe à E, ce qui fait le lien avec l'autre définition.

Soit maintenant $x \in K_{0,top}(G)$; il est représenté par une partie $Y \subset \underline{E}G$ fermée G-invariante telle que Y/G soit compact et un $y \in KK_G(C_0(Y), \mathbf{C})$. L'élément $\mu_G(x)$ est le produit de Kasparov de $\Lambda_Y \in KK(\mathbf{C}, C_0(Y) \rtimes G)$ et de $j_G(y) \in KK(C_0(Y) \rtimes G, C^*(G))$.

On vérifie que cette construction passe à la limite inductive et qu'on obtient ainsi un homomorphisme $\mu_G : K_{0,top}(G) \to K_0(C^*(G))$. L'homomorphisme de Baum-Connes, ou homomorphisme d'assemblage en K-théorie est l'homomorphisme $\mu_{G,r} : K_{0,top}(G) \to K_0(C^*_r(G))$ obtenu par composition de μ_G avec l'homomorphisme de K-théorie associé à l'homorphisme de C^*-algèbres $\lambda : C^*(G) \to C^*_r(G)$.

CONJECTURE DE BAUM-CONNES. — *L'homomorphisme $\mu_{G,r}$ est un isomorphisme.*

2.4. Lien avec la conjecture de Novikov

Soit M une variété lisse compacte orientée. Notons Γ son groupe fondamental, $\widetilde{M}$ son revêtement universel. L'opérateur de signature de M peut être considéré comme un opérateur Γ-invariant sur $\widetilde{M}$; il définit ainsi un élément de K-homologie équivariante $KK_\Gamma(C_0(\widetilde{M}), \mathbf{C})$, donc de $K_{0,top}(\Gamma)$ (comme l'action de Γ sur $\widetilde{M}$ est propre).

La conjecture de Novikov peut s'énoncer de la façon suivante : l'élément de $K_{0,top}(\Gamma)$ associé à l'opérateur de signature de M est rationnellement invariant par homotopie. Autrement dit, si $f : M \to N$ est une équivalence d'homotopie entre variétés lisses compactes orientées, la différence entre les éléments de $K_{0,top}(\Gamma)$ associés aux opérateurs de signature de M et de N est de torsion.

Miščenko a démontré que l'image par la flèche de Baum-Connes μ_Γ de cet élément est invariant par homotopie (*cf.* [39]). Donc l'injectivité rationnelle de l'homomorphisme de Baum-Connes implique la conjecture de Novikov.

Pour plus de détails sur ce sujet, on peut voir aussi les exposés [13], [45].

2.5. Généralisations et variantes

Conjecture de Baum-Connes à coefficients

Soient G un groupe localement compact et A une C^*-algèbre munie d'une action de G. On construit de même un groupe de K-théorie topologique à coefficients $K_{0,top}(G;A) = \varinjlim KK_G(C_0(Y), A)$ et des homomorphismes de Baum-Connes $\mu_G^A : K_{0,top}(G;A) \to K_0(A \rtimes G)$ et $\mu_{G,r}^A : K_{0,top}(G;A) \to K_0(A \rtimes_r G)$. On conjecture alors que $\mu_{G,r}^A$ est un isomorphisme.

Conjecture de Baum-Connes pour les groupoïdes

Soit G un groupoïde localement compact. On peut encore (*cf.* [42]) lui associer une C^*-algèbre et une C^*-algèbre réduite (c'est de cette manière que Connes construit la C^*-algèbre d'un feuilletage — *cf.* [9]). À l'aide d'une généralisation aux groupoïdes de la K-théorie équivariante due à Le Gall (*cf.* [38]), on peut encore définir la K-théorie topologique et construire l'homomorphisme de Baum-Connes (*cf.* [4], [47]). On peut de plus définir un homomorphisme de Baum-Connes pour un groupoïde G à coefficients dans une G-algèbre.

Conjecture de Baum-Connes à valeurs dans L^1 (due à J.-B. Bost).

En regardant d'un peu plus près la construction de l'homomorphisme de Baum-Connes, on se rend compte que l'on peut construire en fait un homomorphisme $\mu_{G,L^1} : K_{0,top}(G) \to K_0(L^1(G))$ et tel que μ_G est la composée de μ_{G,L^1} avec l'homomorphisme de K-théorie associé à l'homomorphisme $L^1(G) \to C^*(G)$. C'est en fait V. Lafforgue qui, grâce à sa KK-théorie banachique, a défini proprement l'homomorphisme μ_{G,L^1}.

2.6. Le point sur la conjecture

– La conjecture de Baum-Connes à coefficients dans n'importe quelle C^*-algèbre est connue pour tous les groupes (ou groupoïdes) localement compacts moyennables et, plus généralement, ceux opérant proprement par isométries affines sur un espace hilbertien ([19] — *cf.* [48] pour le cas des groupoïdes — voir à ce sujet l'exposé de P. Julg [25]).

Par ailleurs, Oyono ([40]) et Chabert ([8]) ont démontré des résultats de stabilité de la conjecture à coefficients par certaines opérations sur les groupes.

– L'injectivité de l'homomorphisme de Baum-Connes (à coefficients) est de plus connue

a) pour un groupe opérant proprement par isométries sur une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle négative ou nulle ([29]), et en particulier pour un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie réel ;

b) pour un groupe opérant proprement par isométries sur un immeuble affine et en particulier pour un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie p-adique ([30]) ;

c) pour un groupe opérant proprement par isométries sur un espace métrique discret ayant un « bon » comportement à l'infini (faiblement géodésique, à géométrie bornée et « bolique »— [31]) ;

d) pour un groupe admettant une action moyennable sur un espace compact ([18]).

– Lafforgue démontre la conjecture de Baum-Connes :

e) pour tout groupe de Lie semi-simple réel ou p-adique. Ce résultat était connu dans le cas des groupes de Lie réels linéaires connexes réductifs (*cf.* [50]) et les groupes GL_n p-adiques (*cf.* [6]) ;

f) pour les sous-groupes discrets cocompacts des groupes de Lie de rang réel 1 ou de $SL_3(K)$ — avec $K = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_p$. Dans ce cas on peut aussi admettre des coefficients dans une algèbre $C(X)$, où X est une variété riemannienne compacte munie d'une action isométrique de G. Dans le cas de rang 1, on n'a pas besoin de supposer que l'action de G dans X est isométrique.

C'est le résultat f) le plus spectaculaire de son travail, car il franchit la barrière de la propriété T pour un groupe discret, pour lequel il n'y a donc aucune description possible de $C_r^*(G)$.

2.7. L'élément γ de Kasparov

Dans tous les cas cités ci-dessus où l'on connaît l'injectivité de l'homomorphisme μ_G, on a en fait construit un homomorphsime inverse. Dans les cas a), b) et c) ci-dessus on sait décrire l'image de μ_G : on construit (*cf.* [29] dans le cas a), [26] dans le cas b), [31] dans le cas c)) un élément $\gamma \in KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, qui est idempotent pour le produit de Kasparov et satisfait :
L'image de $\mu_{G,r}$ coïncide avec celle de l'endomorphisme idempotent de $K_0(C_r^*(G))$ associé à $j_G^r(\gamma) \in KK(C_r^*(G), C_r^*(G))$.

En d'autres termes, la conjecture de Baum-Connes se ramène à la formulation suivante : l'endomorphisme de $K_0(C_r^*(G))$ associé à $j_G^r(\gamma)$ est l'identité.

2.8. L'obstruction de la propriété T de Kazhdan

Rappelons (*cf.* [12]) qu'un groupe localement compact G possède la propriété T si la représentation triviale est isolée dans son dual. Du point de vue des C^*-algèbres, cela signifie qu'il existe un projecteur $p \in C^*(G)$ tel que, pour toute représentation π de $C^*(G)$ dans un espace hilbertien, $\pi(p)$ soit le projecteur orthogonal sur les vecteurs invariants par G.

Soit G un groupe localement compact non compact possédant la propriété T. Notons $\lambda : C^*(G) \to C_r^*(G)$ l'homomorphisme canonique. Comme la représentation régulière de G ne possède pas de vecteurs G-invariants (car G n'est pas compact), on a $\lambda(p) = 0$. Or la classe de p est un élément non trivial de la K-théorie de $C^*(G)$, puisque son image par la représentation triviale $\varepsilon : C^*(G) \to \mathbf{C}$ n'est pas nulle dans $K_0(\mathbf{C}) = \mathbf{Z}$. Il s'ensuit que λ n'induit pas un isomorphisme en K-théorie, donc que μ_G et $\mu_{G,r}$ ne sont pas tous deux bijectifs. Une démonstration éventuelle de la conjecture de Baum-Connes doit donc nécessairement distinguer entre $C^*(G)$ et $C_r^*(G)$.

Supposons de plus que G est un groupe comme dans a), b) ou c) ci-dessus. En particulier, il possède un élément γ. Par ce qui précède, l'endomorphisme de $K_0(C^*(G))$ associé à $j_G(\gamma)$ s'annule sur la classe de p ; il en résulte que $\gamma \neq 1$.

Par ailleurs, l'élément γ est représenté par un couple (H, F) où la représentation de G dans l'espace hilbertien H est un sous-multiple de la régulière ; comme la représentation triviale est isolée, il est de toute façon impossible d'espérer une homotopie entre γ et 1.

3. KK-THÉORIE BANACHIQUE

On a vu qu'en présence de la propriété T, il n'est pas possible de faire une homotopie de γ à 1 dans $KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Cependant, la représentation triviale est isolée parmi les représentations *unitaires* de G, c'est-à-dire des représentations dans des espaces hilbertiens ; elle ne l'est pas dans les représentations banachiques. Par exemple la famille des représentations naturelles de G dans $L^p(G)$ contient faiblement, quand p tend vers $+\infty$, la représentation triviale.

Il est donc possible d'espérer construire une homotopie entre γ et 1 si on s'autorise des représentations banachiques.

Lafforgue est ainsi amené à construire une KK-théorie, où les espaces hilbertiens sont remplacés par des espaces de Banach - et donc les C^*-algèbres par des algèbres de Banach. C'est la KK-théorie banachique.

3.1. B-paires

Contrairement aux espaces hilbertiens, les espaces de Banach ne sont pas autoduaux. Pour cette raison, Lafforgue remplace les modules hilbertiens par des paires de modules banachiques en dualité.

Soit B une algèbre de Banach. Une *B-paire* est un couple de modules banachiques en dualité. Autrement dit, une B-paire $(E^<, E^>)$ est la donnée d'un B-module banachique à gauche (*resp.* à droite) $E^<$ (*resp.* $E^>$) et d'une application $\langle\ ,\ \rangle : E^< \times E^> \to B$ satisfaisant : $\forall x \in E^>$, $\xi \in E^<$, l'application $\eta \mapsto \langle \eta, x\rangle$ (*resp.* $y \mapsto \langle \xi, y\rangle$) est $\mathbf{C}$-linéaire, B-linéaire à gauche (*resp.* à droite) et $\|\langle \xi, x\rangle\| \leq \|\xi\|\|x\|$.

Soient $E = (E^<, E^>)$ et $F = (F^<, F^>)$ des B-paires. Un *morphisme de B-paires* de E dans F est un couple $f = (f^<, f^>)$ où $f^< : F^< \to E^<$ (*resp.* $f^> : E^> \to F^>$) est une application $\mathbf{C}$-linéaire, B- linéaire à gauche (*resp.* à droite), continue et satisfait : $\forall x \in E^>$, $\eta \in F^<$, on a $\langle \eta, f^>(x) \rangle = \langle f^<(\eta), x \rangle$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace de Banach des morphismes de B-paires de E dans F (muni de la norme $(f^<, f^>) \mapsto \sup(\|f^<\|, \|f^>\|)$).

Si E, F, G sont des B-paires, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ on définit $gf \in \mathcal{L}(E, F)$ en posant $(gf)^> = g^> \circ f^>$ et $(gf)^< = f^< \circ g^<$. Munie de ces opérations $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ est une algèbre de Banach.

Soient $y \in F^>$ et $\xi \in E^<$. On note $\theta_{y,\xi} \in \mathcal{L}(E, F)$ (ou $|y\rangle\langle\xi|$) le morphisme donné par le couple d'applications $F^< \ni \eta \mapsto \langle \eta, y \rangle \xi \in E^<$ et $E^> \ni x \mapsto y\langle \xi, x \rangle \in F^>$. On note $\mathcal{K}(E, F)$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ engendré par les morphismes $\theta_{y,\xi}$.

3.2. Définition de la KK-théorie banachique

Soient A et B des algèbres de Banach. Un cycle pour $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ est encore un triplet (E, π, f) où E est une B-paire $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduée, $\pi : A \to \mathcal{L}(E)^{(0)}$ est un homomorphisme et $f \in \mathcal{L}(E)^{(1)}$ est tel que, pour tout $a \in A$, les morphismes $f\pi(a) - \pi(a)f$ et $(f^2 - 1)\pi(a)$ sont dans $\mathcal{K}(E)$.

La somme des cycles et l'homotopie sont définies comme dans le cas des modules hilbertiens. Il est facile de voir que l'ensemble des classes d'homotopie de cycles (muni de l'addition des cycles) est un groupe abélien.

Le groupe $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de cycles.

La fonctorialité en A ne pose pas de problème. Soit $\varphi : B_1 \to B_2$ un homomorphisme d'algèbres de Banach. Notons encore $\varphi : \widetilde{B}_1 \to \widetilde{B}_2$ son extension unitale. Soit E_1 une B_1-paire. Considérons-la comme une $\widetilde{B}_1$ paire. On définit une B_2-paire $E_2 = \varphi_*(E_1)$ qui est le quotient du produit tensoriel $E_1 \otimes_\pi \widetilde{B}_2$ par le sous-espace fermé engendré par $xb_1 \otimes b_2 - x \otimes \varphi(b_1)b_2$ avec $x \in E_1$, $b_1 \in \widetilde{B}_1$ et $b_2 \in \widetilde{B}_2$. On construit de plus un homomorphisme $\varphi_* : f \mapsto (f \otimes 1)$ de $\mathcal{L}(E_1)$ dans $\mathcal{L}(E_2)$ qui envoie $\mathcal{K}(E_1)$ dans $\mathcal{K}(E_2)$. On en déduit un homomorphisme $\varphi_* : KK^{\mathrm{ban}}(A, B_1) \to KK^{\mathrm{ban}}(A, B_2)$.

3.3. Le cas équivariant

On suppose à présent qu'un groupe localement compact G opère sur les algèbres A et B. On définit le groupe $KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B)$ exactement de la même façon que le groupe de Kasparov correspondant.

Si A et B sont des C^*-algèbres, on a évidemment un homomorphisme naturel $KK_G(A, B) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B)$.

Dans le paragraphe suivant, on esquissera le principal résultat technique de Lafforgue montrant (presque) que l'image de γ est égale à celle de 1 dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Pour en déduire la conjecture de Baum-Connes, il reste à construire les équivalents en KK-théorie banachique

– du morphisme $j_G : KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to KK(C_r^*(G), C_r^*(G))$,

– de l'action de la KK-théorie sur la K-théorie, autrement dit un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(A, B) \to \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B))$.

3.4. Action sur la K-théorie

Rappelons que si A est une algèbre de Banach unifère, le groupe $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck du monoïde des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs de type fini. Un tel module est isomorphe à un pA^n où $p \in M_n(A)$ est un idempotent.

Remarquons que $KK^{\mathrm{ban}}(M_n(A), B)$ est isomorphe à $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$. Par ailleurs, tout idempotent $p \in A$ détermine un homomorphisme $i_p : \lambda \mapsto \lambda p$ de $\mathbf{C} \to A$. De ces faits, on déduit une application bilinéaire $\varphi : (p, x) \mapsto (i_p)^*(x)$ de $K_0(A) \times KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, B)$.

Cet homomorphisme subsiste si A n'est plus supposée unifère.

Lafforgue démontre de plus que, comme dans le cas de la théorie de Kasparov, l'application naturelle $(x \mapsto \varphi(x, 1_A))$ de $K_0(A)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, A)$ est un isomorphisme.

On en déduit donc que la KK-théorie banachique opère encore sur la K-théorie.

3.5. Complétions « inconditionnelles » et le morphisme j_G

La construction de l'homomorphisme $j_G^r : KK_G(A, B) \to KK(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$ n'est malheureusement pas possible telle quelle : pour cela, il faudrait un analogue du produit croisé pour les algèbres de Banach, qui pour une C^*-algèbre donnerait le produit croisé réduit.

Cependant, on peut construire dans le cadre des algèbres de Banach le produit croisé $L^1(G; A)$. On en déduit un homomorphisme

$$j_G^{L^1} : KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B) \to KK^{\mathrm{ban}}(L^1(G; A), L^1(G; B)).$$

À l'aide de cet homomorphisme $j_G^{L^1}$, l'égalité $\gamma = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ implique la conjecture de Baum-Connes dans $L^1(G)$. Pour conclure, il faudrait savoir que l'inclusion $L^1(G) \to C_r^*(G)$ induit un isomorphisme en K-théorie (la surjectivité suffit). Cependant, on n'a pas encore d'outil permettant de démontrer cet isomorphisme (*cf.* la discussion dans [7] où cet isomorphisme est établi dans quelques cas).

Ici intervient une très jolie et simple idée de Lafforgue : celle de « complétion inconditionnelle » : on remarque que pour certaines normes d'algèbre sur $C_c(G)$, en général plus petites que la norme L^1, on peut quand même former le produit croisé banachique :

DÉFINITION 1. — *Une norme N d'algèbre sur $C_c(G)$ sera dite une norme inconditionnelle si, pour tout $f, g \in C_c(G)$, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$, $\forall x \in G \Rightarrow N(f) \leq N(g)$.*

On peut construire des produits croisés relatifs à toute norme inconditionnelle. Soient en effet G un groupe localement compact, N une norme inconditionnelle sur $C_c(G)$ et A une algèbre de Banach munie d'une action isométrique de G. Munissons $C_c(G;A)$ du produit de convolution tordu par l'action de G dans A (voir 1.3).

Notons $p_N : C_c(G;A) \to \mathbf{R}_+$ l'application qui à f associe $N(\varphi)$ où φ est l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ de $G \to \mathbf{R}$. L'application p_N est une norme d'algèbre sur $C_c(G;A)$.

Notons $A \rtimes_N G$ le complété de $C_c(G;A)$ pour la norme p_N. Si E est un espace de Banach muni d'une action isométrique de G, on peut de même construire l'espace de Banach $E \rtimes_N G$. Si $(E^<, E^>)$ est une B-paire, alors $(E^< \rtimes_N G, E^> \rtimes_N G)$ est une $B \rtimes_N G$-paire.

On obtient un homomorphisme $j_G^N : KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes_N G, B \rtimes_N G)$.

Soit G un groupe dans les cas a), b) ou c) de 2.6. Pour montrer la conjecture de Baum-Connes pour G, il suffit donc de

1. Démontrer que $\gamma = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.
2. Construire une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui a la même K-théorie que $C_r^*(G)$.

3.6. Représentations non isométriques de G

En fait, l'homotopie entre γ et 1 n'aura pas lieu dans le groupe $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, mais dans une généralisation.

Soit ℓ une fonction longueur sur G, c'est-à-dire une application continue $G \to \mathbf{R}_+$ telle que $\ell(1) = 0$ et $\ell(xy) \leq \ell(x) + \ell(y)$ pour tout $x, y \in G$ (la plupart des fonctions longueur rencontrées, vérifient de plus $\ell(x^{-1}) = \ell(x)$).

On définit un groupe $KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ [(5)] exactement comme $KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$ sauf qu'ici on suppose que l'action de G dans les B-paires n'est plus isométrique mais elle est *contrôlée par* ℓ c'est-à-dire qu'elle est continue et que la norme de l'action de $x \in G$ est $\leq \exp(\ell(x))$.

Soient ℓ une fonction longueur sur G, N une norme inconditionnelle sur $C_c(G)$ et A une G-algèbre de Banach. Notons N' la norme inconditionnelle $f \mapsto N(e^\ell f)$. Il est facile de construire une application $j_G^{N,\ell} : KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes_{N'} G, B \rtimes_N G)$.

De plus soit ℓ une fonction longueur positive. Pour $s \in \mathbf{R}_+^*$, notons N_s la norme inconditionnelle $f \mapsto N(e^{s\ell} f)$. Pour toute G-algèbre de Banach A, la sous-algèbre $\bigcup_{s \in \mathbf{R}_+^*} A \rtimes_{N_s} G$ de $A \rtimes_N G$ a la même K-théorie que $A \rtimes_N G$.

Pour démontrer que γ agit comme l'identité dans $K_0(A \rtimes_N G)$, il suffit de démontrer l'égalité $\gamma = 1$ dans chacun des groupes $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

---

(5) Lafforgue note ce groupe $KK_{G,e^\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$

4. HOMOTOPIE DE γ À 1

Il y a en fait ici deux cas :

– le cas « géométrique » (groupe opérant proprement et isométriquement sur une variété riemannienne complète de courbure sectionnelle négative ou nulle) ; ce cas contient les groupes de Lie semi-simples réels et leurs sous-groupes fermés.

– le cas « combinatoire » (groupe opérant proprement et isométriquement sur un espace métrique « fortement bolique ») ; ce cas contient les groupes de Lie réductifs p-adiques et leurs sous-groupes fermés ainsi que les sous-groupes discrets cocompacts des groupes de Lie semi-simples réels (et leurs sous-groupes).

Nous nous contenterons ici de donner la construction dans un cas combinatoire : uniquement dans le cas des immeubles de type $\widetilde{A_2}$.

4.1. Le cas des immeubles de type $\widetilde{\mathbf{A_2}}$

Soient X un immeuble de type $\widetilde{A_2}$ (*e.g.* l'immeuble associé à $SL_3(\mathbf{Q}_p)$) et G un groupe localement compact opérant par isométries sur X. Dans ce cas l'élément γ a été construit par P. Julg et A. Valette ([26]).

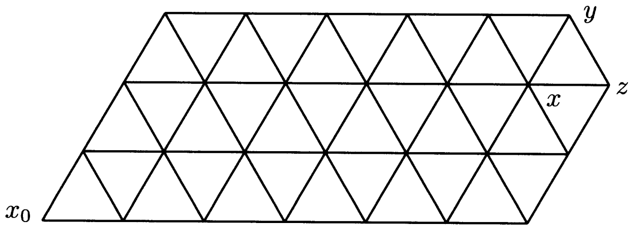
4.1.a. *L'élément γ de Julg-Valette*

On note $X^{(i)}$ $(i = 0,1,2)$ l'ensemble des faces de dimension i de X. Notons $(e_x)_{x\in X^{(0)}}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2(X^{(0)})$. L'élément γ est représenté par un couple (H,F) :

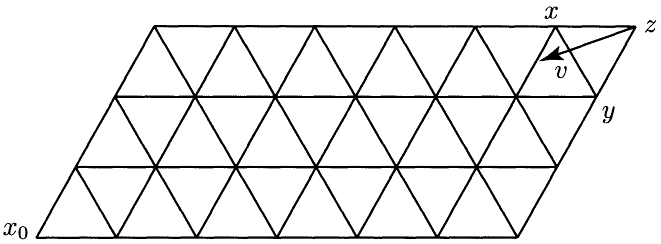
– L'espace hilbertien $H = \bigoplus_{i=0}^{2} H_i$ où $H_0 = \ell^2(X^{(0)})$ et H_1 (*resp.* H_2) est le sous-espace de la deuxième (*resp.* troisième) puissance extérieure de $\ell^2(X^{(0)})$ engendré par les $e_x \wedge e_y$ (*resp.* $e_x \wedge e_y \wedge e_z$) où $\{x,y\} \in X^{(1)}$ (*resp.* $\{x,y,z\} \in X^{(2)}$). Il est gradué sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $H^{(0)} = H_0 \oplus H_2$ et $H^{(1)} = H_1$.

– L'opérateur F s'écrit $F_1 + F_1^*$, où F_1 est défini de la manière suivante : on choisit une origine $x_0 \in X^{(0)}$. Soit $\sigma = \{x,y,z\}$ une chambre et A un appartement contenant x_0 et A. On écrit x_0 dans l'espace affine A à l'aide des coordonnées barycentriques $x_0 = \lambda x + \mu y + \nu z$, $(\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R}$ de somme 1). Quitte à permuter x,y,z, on peut supposer que $\lambda \geq \mu \geq \nu$.

– Si $\lambda > 0 > \mu \geq \nu$, on prendra $F_1(e_y \wedge e_z) = e_x \wedge e_y \wedge e_z$.



– Supposons $\mu \geq 0 \geq \nu$; soit (λ', μ') dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$, positivement proportionnel à (λ, μ) et de norme 1. On pose $v = \lambda' e_x + \mu' e_y$ $F_1(e_z) = v \wedge e_z$, $F_1(e_y \wedge e_z) = v \wedge (e_y \wedge e_z) = \lambda'(e_x \wedge e_y \wedge e_z)$ et $F_1(e_x \wedge e_z) = \lambda' e_x + \mu' e_y \wedge (e_x \wedge e_z) = -\mu'(e_x \wedge e_y \wedge e_z)$.



On vérifie sans peine que F_1 est ainsi bien défini, qu'on a $F = F^*$, que $1 - F^2$ est le projecteur orthogonal sur e_{x_0}. L'action de G ne fait que changer l'origine x_0. Mais si x_0 et y_0 sont deux points de $X^{(0)}$, la différence entre les coordonnées barycentriques de x_0 et de y_0 sont bornées sur tout l'immeuble. On en déduit que $F_{x_0} - F_{y_0}$ est compact, donc que (H, F) est un élément de $KK_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Il résulte de [30] que sa classe est l'élément γ au sens de 2.7.

4.1.b. *L'homotopie*

Dans la construction qui suit, nous ne considérons pas des $\mathbf{C}$-paires mais des espaces de Banach. Cependant, à un espace de Banach E correspond une $\mathbf{C}$-paire (E^*, E).

Notons $\varphi : X \to \mathbf{R}_+$ la fonction qui à une face f associe la distance à x_0 de son point le plus éloigné et $\ell : G \to \mathbf{R}_+$ la fonction $g \mapsto \varphi(g(x_0))$. C'est une fonction longueur puisque $\ell(gh) = d(gh(x_0), x_0) \leq d(gh(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), x_0)$; or, comme l'action de G est isométrique, $d(gh(x_0), g(x_0)) = d(h(x_0), x_0)$.

Le principal résultat technique de Lafforgue se lit dans notre cas :

Théorème 1. — *Pour tout $s > 0$, les classes de γ et de 1 coïncident dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.*

Pour $p \in [1, +\infty]$ notons E_p l'espace de Banach, gradué par $0, 1, 2$ dont la composante de degré i est $\ell^p(X^{(i)})$ (vu comme partie de la puissance extérieure $i^{\text{ème}}$ de $\ell^p(X^{(0)})$).

Considérons l'opérateur $\partial : E_p \to E_p$ donné par $\partial(e_x) = 0$, $\partial(e_x \wedge e_y) = e_y - e_x$ et $\partial(e_x \wedge e_y \wedge e_z) = (e_y \wedge e_z) - (e_x \wedge e_z) + (e_x \wedge e_y)$ (pour tout $(x, y, z) \in X^{(2)}$).

Soit enfin $t \in \mathbf{R}_+$; notons A_t l'opérateur non borné de multiplication par $e^{t\varphi}$ et posons $\partial_t = A_t \circ \partial \circ A_t^{-1}$. C'est encore un opérateur borné. De plus, pour tout $g \in G$, $\partial_t - g.\partial_t$ est compact dans tout E_p. En effet, $g.\partial_t$ est construit comme ∂_t, mais avec l'origine x_0 remplacée par gx_0. Mais dans une chambre située loin de x_0, les fonctions distance à x_0 et à gx_0 diffèrent d'une constante additive.

Le résultat crucial est le suivant :

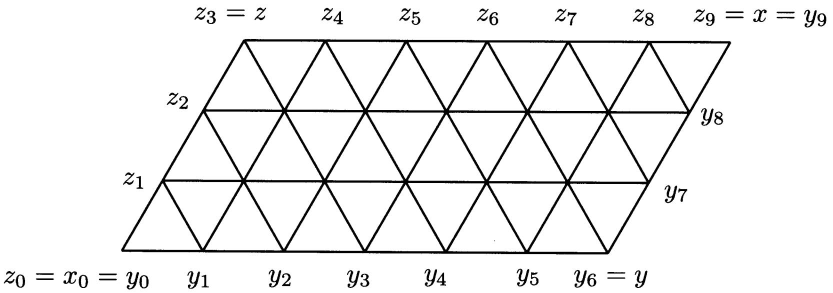
PROPOSITION 1. — *Soit $s > 0$. Il existe $T_s : E_1 \to E_1$ tel que $\mathrm{id}_{E_1} - (T_s\partial_s + \partial_s T_s)$ soit un idempotent de rang 1 et tel que, pour tout $g \in G$, $T_s - g.T_s$ soit compact. De plus, il existe $t > 0$ tel que $T_t = A_{t-s} \circ T_s \circ A_{t-s}^{-1}$ soit continu de E_p dans E_p pour tout $p \in [1,2]$, et vérifie :*

a) *$\mathrm{id}_{E_p} - (T_t\partial_t + \partial_t T_t)$ est un idempotent de rang 1 ;*

b) *pour tout $g \in G$, $T_t - g.T_t$ est compact dans tout E_p.*

L'opérateur T_s est défini (par exemple) de la manière suivante :

Soit $x \in X^{(0)}$. Les points x et x_0 déterminent un parallélogramme x_0, y, x, z dans l'immeuble X. Notons j et $n-j$ les distances respectives de x à y et z. Notons $z_0 = x_0, z_1, \ldots, z_j = z, \ldots, z_n = x$ et $y_0 = x_0, y_1, \ldots, y_{n-j} = y, \ldots, y_n = x$ les points sur les deux trajets de x_0 à x par z et y respectivement.



On pose

$$T_0(e_x) = (1 - \frac{j}{n}) \sum_{k=1}^{n} e_{z_{k-1}} \wedge e_{z_k} + \frac{j}{n} \sum_{k=1}^{n} e_{y_{k-1}} \wedge e_{y_k}$$

Il est clair que $\partial \circ T_0(e_x) = e_x - e_0$.

Pour définir $T_0(e_x \wedge e_y)$ on utilise le lemme suivant :

LEMME 1. — *$e_x \wedge e_y - T_0\partial(e_x \wedge e_y)$ est dans l'image de ∂.*

Il suffit pour démontrer ce lemme de se restreindre à un parallélogramme contenant $\{x_0, x, y\}$ et de remarquer que la restriction de ∂ à ce parallélogramme est exacte en dimension 1 et 2.

On définit $T_0(e_x \wedge e_y)$ comme l'élément ξ tel que $\partial(\xi) = e_x \wedge e_y - T_0\partial(e_x \wedge e_y)$ décrit par le lemme 1 (ou plutôt sa démonstration).

Pour achever la démonstration de la proposition 1, il suffit de poser $T_s = A_s \circ T_0 \circ A_s^{-1}$. On montre que :

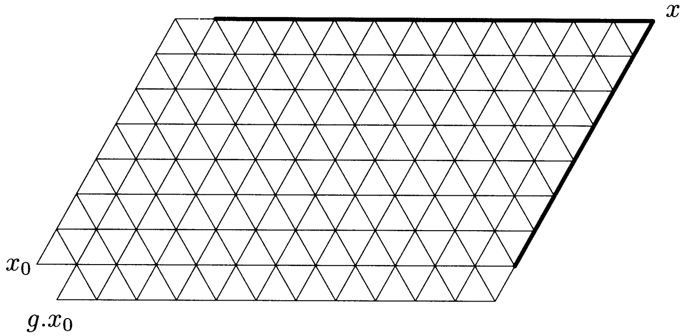
1. *Pour tout $s > 0$, T_s est continu de E_1 dans E_1.*

Pour cela, il suffit de montrer que $\|T_s(e_x)\|$ et $\|T_s(e_x \wedge e_y)\|$ sont bornées indépendamment de $\{x, y\} \in X^{(1)}$: en effet, les faces que font intervenir $T_0(e_x)$ et $T_0(e_x \wedge e_y)$ sont situées dans le parallélogramme considéré ci-dessus ; leur nombre est polynomial en la distance de x à x_0 ; les coefficients apparaissant sont bornés. En conjugant par

A_s, on multiplie ces coefficients par un terme qui décroît exponentiellement, d'où le résultat.

2. *Pour tout* $s > 0$ *et tout* $g \in G$, $T_s - g.T_s \in \mathcal{K}(E_1)$.

Il suffit pour cela de vérifier que, quand $\{x, y\}$ tend vers l'infini, $\|(T_s - g.T_s)(e_x)\|$ et $\|(T_s - g.T_s)(e_x \wedge e_y)\|$ tendent vers 0. Pour cela, remarquons que $g.T_0$ est construit comme T_0 mais avec l'origine x_0 remplacée par gx_0. Si x est loin de x_0, les trajets de x à x_0 et de x à $g.x_0$ utilisés dans la construction de T_0 coïncident près de x. Par ailleurs, ce sont les points près de x qui « comptent » à cause de la conjugaison par A_s.



3. *Il existe* $t > 0$ *tel que, pour tout* $p \in [1, 2]$, T_t *soit continu de* E_p *dans* E_p *et, pour tout* $g \in G$, $T_t - g.T_t \in \mathcal{K}(E_p)$.

La difficulté ici vient de ce que $T_t^*(e_x \wedge e_y)$ fait intervenir tous les points z tels que x, y soit sur le trajet de z à x_0. Le coefficient apparaissant décroît en $\exp(-t\varphi(z))$; le nombre de tels z croît exponentiellement. Cependant, en prenant t suffisamment grand, on peut contrôler la norme ℓ^1 de $T_t^*(e_x \wedge e_y)$ et celle de $T_t^*(e_x \wedge e_y \wedge e_z)$. Il en résulte que T_t^* est continu de E_1 dans E_1, donc que T_t est continu de E_∞ dans E_∞. Comme il est continu de E_1 dans E_1, il est continu de E_p dans E_p pour tout p (par interpolation). Un raisonnement analogue montre que $T_t - g.T_t \in \mathcal{K}(E_p)$ pour tout $g \in G$.

En faisant varier $u \in [s, t]$ puis $p \in [1, 2]$ on dispose à présent d'une homotopie entre $(E_1, \partial_s + T_s)$ et $(E_2, \partial_t + T_t)$.

Maintenant, pour achever la démonstration du théorème, on va utiliser les deux faits suivants : pour s tendant vers 0, ∂_s devient de plus en plus G-invariant « donc » $(E_1, \partial_s + T_s)$ tend vers 1 ; pour t tendant vers $+\infty$, $(E_2, \partial_t + T_t)$ ressemble de plus en plus à γ.

Pour mettre en œuvre cette idée, Lafforgue procède de la manière suivante :

On peut construire une homotopie entre $(E_1, \partial_s + T_s)$ et $(E_1^s, \partial + T_0)$ où E_1^s est l'espace de Banach, gradué par $0, 1, 2$ dont la composante de degré i est l'espace ℓ^1 de $X^{(i)}$ à poids $e^{s\varphi}$. Notons que l'action de G dans E_1^s n'est plus isométrique ; c'est pour cela qu'on doit ici quitter $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ et le remplacer par $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Pour montrer que la classe de $(E_1^s, \partial + T_0)$ est 1 et celle de $(E_2, \partial_t + T_t)$ est γ, on utilise quelques lemmes généraux de KK-théorie banachique.

Soient G un groupe localement compact muni d'une fonction longueur ℓ, A, B des algèbres de Banach, E une B paire $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduée munie d'actions de A et de G « contrôlées par ℓ » (au sens de 3.6). Notons D l'ensemble des morphismes S de E tels que $[S, a]$ (pour tout $a \in A$) et $g.S - S$ (pour tout $g \in G$) soient dans $\mathcal{K}(E)$ et $g \mapsto g.S$ soit normiquement continu. Remarquons que tout $F \in D$ de degré 1 tel que $\mathrm{id}_E - F^2 \in \mathcal{K}(E)$ définit un élément de $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$.

Lemme 2. — *Soit $S \in D$ de degré 1 tel que $S^2 \in \mathcal{K}(E)$.*

a) *Supposons qu'il existe un morphisme $T \in D$ de degré 1 tel que $\mathrm{id}_E - (TS + ST)$ soit compact. Alors, il existe un tel T avec en plus T^2 compact. Dans ce cas $(E, S+T)$ est un élément de $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$.*

b) *Dans ce cas, la classe de $(E, S + T)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ ne dépend pas de T.*

En effet, dans a) il suffit de remplacer T par TST, en remarquant que, modulo $\mathcal{K}(E)$, $ST = (\mathrm{id}_E - TS)$, donc TS et ST commutent, donc $STTS \in \mathcal{K}(E)$; on en déduit aussi que $ST - STST$ qui est égal, modulo $\mathcal{K}(E)$ à $STTS$ est dans $\mathcal{K}(E)$; de même $TS - TSTS \in \mathcal{K}(E)$.

Pour montrer b), il suffit de remarquer que l'ensemble des $T \in D$ tels que $ST + TS - \mathrm{id}_E \in \mathcal{K}(E)$ est un sous-espace affine de D.

Lemme 3. — *Soient $S, S' \in D$ de degré 1 tels que $S^2 \in \mathcal{K}(E)$ et $(S')^2 \in \mathcal{K}(E)$. Supposons que le spectre dans l'algèbre de Banach quotient $D/\mathcal{K}(E)$ de $SS' + S'S$ ne rencontre pas $\mathbf{R}_-$. Alors :*

a) *Il existe $T, T' \in D$ tels que $T^2, (T')^2, \mathrm{id}_E - (ST + TS), \mathrm{id}_E - (S'T' + T'S') \in \mathcal{K}(E)$.*

b) *Les classes de $(E, S + T)$ et $(E, S' + T')$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ coïncident.*

Raisonnons dans l'algèbre de Banach quotient $D/\mathcal{K}(E)$. On a $(SS' + S'S)S = SS'S = S(SS' + S'S)$; de même, $S'(SS' + S'S) = (SS' + S'S)S'$. Donc $(SS' + S'S)^{-1}$ commute avec S et S'. On pose $T = S'(SS' + S'S)^{-1}$ et $T' = S(SS' + S'S)^{-1}$. De plus, comme le spectre de $SS' + S'S$ ne rencontre pas $\mathbf{R}_-$, on peut définir un logarithme de $SS' + S'S$. On obtient une homotopie $S(SS' + S'S)^{-t} + S'(SS' + S'S)^{t-1}$ entre $S + T$ et $S' + T'$.

Lemme 4. — *Soient $S, T \in D$ de degré 1. On suppose $T^2 \in \mathcal{K}(E)$, que S commute exactement à A et à G, que $S^2 = 0$ et , $ST + TS = \mathrm{id}_E$. Alors la classe de $(E, S+T)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ est nulle.*

On peut remplacer T par TST. Dans ce cas on a $T^2 = 0$. Comme S commute avec les éléments de A et de G, le sous-espace $S(E)$ de E est invariant par ces éléments. Dans la décomposition $E = S(E) \oplus T(E)$, la matrice de ces éléments est de la forme $\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}$. Notons que $c_{1,2}$ est dans $\mathcal{K}(E)$ car $T \in D$. Il suffit de changer ces actions en $\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}$ à travers une homotopie $\begin{pmatrix} c_{1,1} & tc_{1,2} \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}$ ($t \in [0,1]$). Au bout de cette homotopie, $S+T$ commute exactement avec A et G et $(S+T)^2 = \mathrm{id}_E$. Le lemme en résulte facilement.

Pour finir la démonstration du théorème, notons u la classe dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbf{C},\mathbf{C})$ de $(E_1^s, \partial + T_0)$; posons $F = E_1^s \oplus \mathbf{C}$ où $\mathbf{C}$ est muni de l'action triviale de G et est de degré 1 pour la graduation. Prolongeons ∂ de F dans F en posant $\partial(e_x) = 1 \in \mathbf{C}$ pour tout $x \in X^{(0)}$ et posons $T_0(1) = e_{x_0}$. Il est facile de voir que la classe de cet élément est $u - 1$ (ou plutôt u — l'image de 1). Par le lemme 4 appliqué à $S = \partial$, on trouve donc que u et l'image de 1 dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbf{C},\mathbf{C})$ coïncident.

Pour montrer que la classe de $(E_2, \partial_t + T_t)$ est l'image de γ, on commence d'abord par modifier très légèrement F_1 en un opérateur F_2 : le vecteur $\lambda' e_y + \mu' e_z$ par lequel on prend le produit extérieur est normalisé en norme 1 au lieu de l'être en norme 2. Il suffit alors, par le lemme 3, de démontrer que le spectre de $\partial_t F_2 + F_2 \partial_t$ est disjoint de $\mathbf{R}_-$. Pour cela, on remarque que l'image par $(\partial_t F_2 + F_2 \partial_t) - \mathrm{id}_{E_2}$ d'une face f est portée par des faces voisines, plus proches de x_0 que f. Donc, pour t assez grand, le rayon spectral de $(\partial_t F_2 + F_2 \partial_t) - \mathrm{id}_{E_2}$ est < 1.

4.2. Les autres cas

4.2.a. *Le cas « combinatoire »*

Dans ce cas, la construction est exactement la même. La seule chose qui devient réellement plus difficile ici est la démonstration du fait que le complexe ∂ est acyclique.

4.2.b. *Le cas « géométrique »*

Soient M une variété riemannienne complète, connexe, simplement connexe, de courbure sectionnelle négative ou nulle (bornée inférieurement) et G un groupe localement compact agissant sur M par isométries.

Soit x_0 un point de M et notons $\varphi : M \to \mathbf{R}$ l'application donnée par $\varphi(x) = \exp(\sqrt{d(x,x_0)^2 + 1})$.

Dans ce cas, on remplace le bord de la cohomologie simpliciale par la cohomologie de de Rham. On est amené à travailler avec des espaces $W(p,k,s-k,\varphi^t)$: espace de Sobolev L^p, des k formes $s-k$ fois différentiables à poids φ^t (s est, par exemple, la dimension de l'espace M).

Une difficulté qui apparaît ici est que le calcul pseudodifféreniel ne marche bien que pour $p \in]0, +\infty[$. Cependant, $t > 0$ étant choisi, le complexe de de Rham $(W(p,k,s-k,\varphi^t), d)$ est acyclique pour p assez proche de $+\infty$.

Le reste de la construction est essentiellement le même que dans le cas « combinatoire ».

Je dois cependant dire que, bien que je sois absolument convaincu que la construction marche aussi bien que dans le cas combinatoire, je n'ai pas encore vérifié tous les détails du cas géométrique.

5. FIN DE LA DÉMONSTRATION

Soit G un groupe localement compact opérant proprement et isométriquement sur une variété riemannienne complète de courbure sectionnelle négative ou nulle ou sur un immeuble affine. D'après ce qui précède, G possède un élément γ et $\gamma = 1$ dans la KK-théorie banachique. Donc, pour établir la conjecture de Baum-Connes, il suffit de construire une complétion inconditionnelle A de $C_c(G)$ telle que le morphisme $A \to C_r^*(G)$ induise une surjection au niveau des groupes K_0.

5.1. Cas des groupes de Lie

Si G est un groupe de Lie semi-simple, réel ou p-adique, Lafforgue ([36]) montre que certaines variantes de l'espace de Schwarz (ou algèbre de Harish-Chandra) de G fournissent des complétions inconditionnelles de $C_c(G)$ qui permettent de terminer la démonstration. On obtient ainsi une preuve plus directe de résultats de Wassermann dans le cas réel ([50]) et une généralisation de Baum, Higson et Plymen dans le cas p-adique ([6]).

5.2. Propriété (RD) de Haagerup-Jolissaint

Soient G un groupe discret, ℓ une fonction longueur sur G (*i.e.* une application $G \to \mathbf{R}_+$ telle que $\ell(e) = 0$, $\ell(xy) \leq \ell(x) + \ell(y)$ pour tout $x, y \in G$). Notons $H^\infty(G,\ell)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : G \to \mathbf{C}$ telles que, pour tout $p \in \mathbf{R}_+$, $\sum_{x\in G} \ell(x)^p |f(x)|^2 < \infty$. Si G est finiment engendré, on note $H^\infty(G)$ l'espace $H^\infty(G,\ell)$ où ℓ est la fonction longueur associée à un système fini de générateurs (l'espace $H^\infty(G)$ n'en dépend pas).

Dans [16], Haagerup a démontré :

PROPOSITION 1. — *Si G est un groupe libre à un nombre fini de générateurs, $H^\infty(G) \subset C_r^*(G)$.*

En effet :

Pour $p \in \mathbf{N}$, notons χ_p la fonction caractéristique des mots de longueur p (pour un système libre de générateurs). Soient $f, g : G \to \mathbf{C}$ des fonctions. On utilise le lemme suivant :

LEMME 1. — *Pour tout $p, q, n \in \mathbf{N}$, on a $\|((f\chi_p) \star (g\chi_q))\chi_n\|_2 \leq \|f\chi_p\|_2 \|g\chi_q\|_2$. De plus si $((f\chi_p) \star (g\chi_q))\chi_n \neq 0$, alors n est compris entre $|p - q|$ et $p + q$ et a la même parité que $p + q$.*

On peut évidemment supposer que $f = f\chi_p$ et $g = g\chi_q$.

La contrainte sur n est claire. Écrivons $p = p_1 + r$, $q = q_1 + r$ et $n = p_1 + q_1$. Notons C_k l'ensemble des mots de longueur k.

Soient $x, y, z \in G$ de longueur respective p, q, n tels que $xy = z$. Écrivons $x = x_1x_2$ où $x_1 \in C_{p_1}$ et $x_2 \in C_r$ et $y = y_2y_1$ où $y_1 \in C_{q_1}$ et $y_2 \in C_r$ (ces éléments sont uniquement déterminés par x et y). Comme xy est de longueur n on voit que nécessairement $z = x_1y_1$ et $y_2 = x_2^{-1}$. Notons que x_1 et y_1 sont entièrement déterminés par z.

Il s'ensuit que

$$|f \star g(z)| = \Big|\sum_{u\in C_r} f(x_1u)g(u^{-1}y_1)\Big| \leq (\sum_{u\in C_r} |f(x_1u)|^2)^{1/2}(\sum_{u\in C_r} |g(uy_1)|^2)^{1/2}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On a alors

$$\begin{aligned}
\|(f \star g)\chi_n\|_2^2 &= \sum_{x_1\in C_{p_1},\, y_1\in C_{q_1},\, x_1y_1\in C_n} |f \star g(x_1y_1)|^2 \\
&\leq \sum_{x_1\in C_{p_1},\, y_1\in C_{q_1},\, x_1y_1\in C_n} \Big(\sum_{u\in C_r} |f(x_1u)|^2\Big)\Big(\sum_{u\in C_r} |g(uy_1)|^2\Big) \\
&\leq \sum_{x_1\in C_{p_1},\, y_1\in C_{q_1}} \Big(\sum_{u\in C_r} |f(x_1u)|^2\Big)\Big(\sum_{u\in C_r} |g(uy_1)|^2\Big) \\
&= \|f\|_2^2\|g\|_2^2.
\end{aligned}$$

La proposition 1 se déduit très facilement du lemme 1 :

On écrit $\ell^2(G)$ comme somme hilbertienne de $\ell^2(C_r)$.

Soient $f \in C_c(G)$ et $p \in \mathbf{N}$. L'opérateur de convolution à gauche par $(f\chi_p)$ peut être vu dans la décomposition ci-dessus comme une matrice $T_{r,s}$ où $T_{r,s} : \ell^2(C_s) \to \ell^2(C_r)$ est un opérateur de norme $\leq \|(f\chi_p)\|_2$, nul si $|r - s| \geq p$, ou si $r - s$ n'est pas de la même parité que p. On peut écrire T comme somme des $p + 1$ opérateurs S_k où S_k est l'opérateur de matrice $T_{r,s}$ avec $r - s = -p + 2k$ $(0 \leq k \leq p)$. Il est clair que $\|\lambda(f\chi_p)\| \leq \sum_k \|S_k\| \leq (p + 1)\|(f\chi_p)\|_2$. Il vient

$$\|\lambda(f)\| \leq \sum(p + 1)\|f\chi_p\|_2 \leq (\sum(p + 1)^{-2})^{1/2} \sum_p((p + 1)^4\|f\chi_p\|_2^2)^{1/2}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, d'où la proposition.

On peut en fait, à partir du lemme 1, démontrer :

PROPOSITION 2. — *Si G est un groupe libre à un nombre fini de générateurs, $H^\infty(G)$ est une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe. En particulier, l'inclusion $H^\infty(G) \to C_r^*(G)$ induit un isomorphisme au niveau de la K-théorie.*

Cette idée est reprise par Jolissaint ([22]). Il donne la définition suivante :

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un groupe finiment engendré G possède la propriété (RD) si $H^\infty(G) \subset C_r^*(G)$.*

Il démontre que si G a la propriété (RD), alors $H^\infty(G)$ est une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ stable par calcul fonctionnel. En fait (*cf.* [23]), il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble $A_r = \{f \in \mathbf{C}^G, \sum_{x\in G} \ell(x)^r |f(x)|^2 < \infty\}$ est une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Remarquons que A_r est une algèbre de Banach et une complétion inconditionnelle.

5.3. Groupes possédant la propriété (RD)

Jolissaint ([22]) étend le travail de Haagerup en démontrant que plusieurs groupes se comportant comme les groupes libres, en particulier les sous-groupes cocompacts des groupes de Lie réels simples de rang 1, ont la propriété (RD).

Ce résultat est lui-même étendu par de la Harpe ([17]) aux groupes hyperboliques de Gromov.

Très récemment, Ramagge, Robertson et Steger ([41]) ont établi la propriété (RD) pour des groupes discrets opérant proprement avec quotient compact sur un immeuble $\widetilde{A}_2$. Leur résultat contient en particulier les réseaux cocompacts de $SL_3(\mathbf{F})$ où $\mathbf{F}$ est un corps local non archimédien.

Comme dans la démonstration de Haagerup, on doit analyser les couples x, y ayant un produit donné. On est amené à étudier les triangles dans l'immeuble. La clé de la démonstration est que tout triangle se contracte uniquement sur un triangle équilatéral dans un appartement.

Lafforgue enfin, en remplaçant certaines égalités par des estimations, a adapté la démonstration de Ramagge, Robertson et Steger au cas des sous-groupes cocompacts de $SL_3(\mathbf{R})$ et $SL_3(\mathbf{C})$ (*cf.* [34]).

5.4. Limite de la méthode

D'après une conjecture de Valette ([49]), tout sous-groupe cocompact d'un groupe de Lie simple devrait posséder la propriété (RD).

Cependant, la méthode a ses limites : plusieurs sous-groupes discrets (non cocompacts) de groupes de Lie ne possèdent pas la propriété (RD) du fait de l'existence d'éléments paraboliques. Par exemple, les seuls groupes moyennables possédant la propriété (RD) sont les groupes à croissance polynomiale (*cf.* [22]). De plus cette méthode marche très mal pour les produits croisés — et ne permet de démontrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients que dans des cas très particuliers (*cf.* [37]).

6. QUELQUES AUTRES AVANCÉES RÉCENTES

En plus du résultat de Lafforgue que nous venons de discuter, il y a eu récemment quelques autres avancées significatives sur la conjecture de Baum-Connes et des sujets connexes.

6.1. Actions moyennables ([18])

N. Higson vient de faire une remarque très simple et astucieuse qui permet d'établir l'injectivité de l'homomorphisme de Baum-Connes (à coefficients) pour les groupes discrets possédant une action moyennable sur un espace compact.

La moyennabilité d'un groupe est une notion dégagée depuis plusieurs décennies. On dispose à présent de plusieurs propriétés équivalentes. De plus, cette notion a été étendue aux actions de groupes et aux groupoïdes. Nous renvoyons à l'excellente monographie [2] pour une discussion très actuelle sur toutes les notions de moyennabilité.

Du point de vue des C^*-algèbres, un groupe localement compact G est moyennable si $C^*(G) = C^*_r(G)$. Une action de G sur un espace compact X est moyennable si $C(X) \rtimes G = C(X) \rtimes_r G$.

Rappelons que Higson et Kasparov ont démontré la conjecture de Baum-Connes pour tout groupe moyennable, et que Tu a étendu ce résultat au cas des groupoïdes moyennables.

Toute action d'un groupe moyennable est moyennable. Cependant, plusieurs groupes, bien que non moyennables, possèdent des actions moyennables sur des espaces compacts. Par exemple, $G = SL_n(\mathbf{R})$ n'est pas moyennable pour $n \geq 2$, mais son action dans l'espace compact des drapeaux G/P est moyennable où P désigne le sous-groupe de $SL_n(\mathbf{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures (à coefficients diagonaux positifs).

La démonstration de Higson est (un peu schématiquement) la suivante :

Si l'action de G dans un espace compact X est moyennable, son action dans l'espace M des mesures de probabilité sur X, muni de la topologie de la convergence vague est moyennable.

Soit A une C^*-algèbre munie d'une action de G. Notons B la C^*-algèbre $C(M; A)$ des fonctions continues de M dans A. L'homomorphisme $A \to B$ qui à $a \in A$ associe la fonction constante égale à a étant équivariant, on obtient un homomorphisme $A \rtimes_r G \to B \rtimes_r G$, d'où un homomorphisme de groupes de K-théorie. De même, on a un homomorphisme $K_{0,top}(G; A) \to K_{0,top}(G; B)$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{0,top}(G;A) & \xrightarrow{\mu_G^A} & A \rtimes_r G \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{0,top}(G;B) & \xrightarrow{\mu_G^B} & B \rtimes_r G \end{array}$$

Or, l'action de G dans M étant moyennable, par la généralisation par Tu ([48]) du théorème de Higson-Kasparov, l'homomorphisme de Baum-Connes μ_G^B est un isomorphisme. De plus, comme M est contractile, l'application $A \to B$ est une équivalence d'homotopie, d'où l'on déduit que l'homomorphisme $K_{0,top}(G; A) \to K_{0,top}(G; B)$ est aussi un isomorphisme. En fait pour avoir l'isomorphisme ici, Higson doit supposer que le groupe G est discret, il utilise un modèle simplicial pour $\underline{E}G$ et une suite exacte de Mayer-Vietoris. Il s'ensuit que l'homomorphisme μ_G^A est injectif (et scindé).

On peut facilement obtenir un résultat légèrement plus fort que celui de Higson en remplaçant la condition de moyennabilité de l'action de G par l'existence d'un plongement uniforme de G dans un espace hilbertien (au sens ci-dessous, *cf.* [46]).

6.2. Conjecture de Baum-Connes et géométrie « à l'infini » ([43], [51])

Le résultat de [18] cité ci-dessus (ainsi que sa généralisation [46]) avait d'abord été démontré par Yu dans [51] sous l'hypothèse que G était sans torsion et BG un complexe cellulaire fini[(6)].

Le démonstration de Yu est tout à fait différente de celle de Higson : elle utilise le langage de la géométrie « grossière » (coarse), je dirais plutôt géométrie à l'infini.

Il s'agit là de tout un monde — et il n'est pas possible de citer ici toutes les contributions importantes dans le sujet. Nous renvoyons à [43] et [51] pour une discussion détaillée de toutes ces notions.

Il est apparu (*cf.* [14]) que la conjecture de Novikov pour un groupe discret G est en fait assez peu dépendante de la structure de groupe. La seule chose qui compte est la structure à l'infini de G.

Soit (X, d) un espace métrique. De même que pour une structure uniforme, une structure à l'infini de X est basée sur les ensembles de la forme $\Delta_r = \{(x, y) \in X \times X,\ d(x, y) < r\}$ (pour $r \in \mathbf{R}_+$). Cependant on s'intéresse à r grand.

On dit qu'une partie $U \subset X \times X$ est un *entourage* pour la structure à l'infini *s'il est contenu* dans un ensemble Δ_r.

Le rôle des applications uniformément continues est joué ici par les applications $f : X \to Y$ telles que l'image directe de tout entourage soit un entourage (autrement dit $\forall r \in \mathbf{R}_+,\ \exists R \in \mathbf{R}_+,\ d(x, x') \leq r \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leq R$).

Une application $f : X \to Y$ est un *plongement uniforme* si, pour toute partie U de $X \times X$, U est un entourage si et seulement si $f(U)$ est un entourage.

À un espace métrique, on associe une C^*-algèbre construite de la manière suivante : on fixe un espace hilbertien H et une représentation $\pi : C_0(X) \to \mathcal{L}(H)$ telle que $\pi^{-1}(\mathcal{K}(H)) = \{0\}$ et $\pi(C_0(X))H = H$. Le support d'un élément $T \in \mathcal{L}(H)$ est le plus petit fermé F de $X \times X$ tel que si $f, g \in C_0(X)$ sont telles que $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est nulle sur F, alors $\pi(f)T\pi(g)$. La C^*-algèbre de X est l'adhérence de l'ensemble

(6) C'est Higson et Roe dans [21] qui ont reformulé le théorème de [51] en termes de moyennabilité.

des opérateurs $T \in \mathcal{L}(H)$ dont le support est un entourage et tels que, pour tout $f \in C_0(X)$, $T\pi(f)$ et $\pi(f)T$ sont compacts.

Il y a aussi une conjecture de Baum-Connes qui prédit la K-théorie de cette C^*-algèbre (*cf.* [43]), du moins si X est à géométrie à l'infini bornée. Rappelons qu'un espace métrique X est dit *à géométrie à l'infini bornée* si, pour tout $r \in \mathbf{R}_+$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que le nombre d'éléments de toute partie de X de diamètre $\leq r$ est borné par N.

Le lien avec la conjecture de Baum-Connes est le suivant : soit G un groupe finiment engendré. Munissons-le de la distance invariante à gauche associée à la longueur de mots (par rapport à un système fini de générateurs). Si G n'a pas de torsion et BG est un complexe cellulaire fini, la conjecture de Baum-Connes à l'infini pour l'espace métrique G implique l'injectivité de $\mu_{G,r}$.

En utilisant une variante de la méthode de Higson-Kasparov, Yu ([51], voir aussi [46] pour une autre démonstration de ce résultat) montre :

THÉORÈME 1. — *Tout espace métrique à géométrie à l'infini bornée qui admet un plongement uniforme dans un espace hilbertien satisfait la « conjecture de Baum-Connes à l'infini ».*

RÉFÉRENCES

[1] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE – *Classification des C^*-algèbres purement infinies nucléaires (d'après E. Kirchberg)*, Sém. Bourbaki 1995/96, exp. n° 805, Astérisque **241** (1997), 7-27.

[2] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE et J. RENAULT *Amenable groupoids* (preprint 1999), à paraître à Ens. Math.

[3] M.F. ATIYAH – *Elliptic operators discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32-33** (1976), 43-72.

[4] P. BAUM and A. CONNES – *K-theory for Lie groups and foliations* (preprint 1982), à paraître à Ens. Math.

[5] P. BAUM, A. CONNES and N. HIGSON – *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, Contemporary Math. **167** (1994), 241-291.

[6] P. BAUM, N. HIGSON and R. P LYMEN – *A proof of the Baum-Connes conjecture for p-adic $GL(n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **325**, n° 2 (1997), 171-176.

[7] J.-B. BOST – *Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs*, Inv. Math. **101** (1990), 261-333.

[8] J. CHABERT – *Stabilité de la conjecture de Baum-Connes pour certains produits semi-directs de groupes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **328**, n° 12 (1999), 1129–1132.

[9] A. CONNES – *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Lect. Notes in Math. **725** (1979), 19-143.

[10] J. CUNTZ – *K-theoretic amenability for discrete groups*, J. Reine ang. Math. **344** (1983), 180-195.

[11] J. CUNTZ – *Bivariante K-theorie für lokalconvexe Algebren und der Chern-Connes Character*, Doc. Math. **2** (1997), 139-182.

[12] C. DELAROCHE et A.A. KIRILLOV – *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kazhdan)*, Sém. Bourbaki 1967/68, exp. n 343, Soc. Math. France **10** (1995), 507-528.

[13] T. FACK – *K-théorie bivariante de Kasparov*, Sém. Bourbaki 1982/83, Astérisque **105-106**, (1983), 149-166.

[14] M. GROMOV – *Geometric reflections on the Novikov conjecture*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **226** Cambridge Univ. Press (1995), 164–173.

[15] M. GROMOV – *Spaces and questions* (1999).

[16] U. HAAGERUP – *An example of a nonnuclear C^*-algebra which has the metric approximation property*, Inv. Math. **50** (1979), 279-293.

[17] P. de la HARPE – *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **307** (1988), 771-774.

[18] N. HIGSON – *Bivariant K-theory and the Novikov conjecture* (1999).

[19] N. HIGSON and G. KASPAROV – *Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Electronic Research Anouncements, AMS **3** (1997), 131-141.

[20] N. HIGSON, V. LAFFORGUE and G. SKANDALIS – *Counterexamples to the Baum-Connes Conjectures*, en préparation.

[21] N. HIGSON and J. ROE – *Amenable group actions and the Novikov conjecture* (1999).

[22] P. JOLISSAINT – *Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 167-196.

[23] P. JOLISSAINT – *K-theory of reduced C^*-algebras and rapidly decreasing functions on groups*, *K*- theory **2** (1989), 723-735.

[24] P. JULG – *Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kaszdan's property T*, Fields Inst. Comm. **13** (1997), 145-153.

[25] P. JULG – *Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes*, Sém. Bourbaki, vol. 1997/98, exp. n 841, Astérisque **252** (1998), 151-183.

[26] P. JULG et A. VALETTE – *Fredholm modules associated to Bruhat-Tits Buildings*, Proc. of the Center for Math. Analysis, Australian National University **16** (1988), 143-155.

[27] G.G. KASPAROV – *Hilbert C^*-modules : theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), 133-150.

[28] G.G. KASPAROV – *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Math. USSR Izv. **16** (1981), n 3, 513-572. *Translated from :* Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **44** (1980), 571-636.

[29] G.G. KASPAROV – *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Inv. Math. **91** (1988), 147-201.

[30] G.G. KASPAROV and G. SKANDALIS – *Groups acting on buidings, Operator K-theory and Novikov's conjecture*, K-theory **4** (1991), 303-337.

[31] G.G. KASPAROV and G. SKANDALIS – *Groupes « boliques » et conjecture de Novikov*, Note C.R.A.S. **319**, Sér. I (1994), 815-820.

[32] D. KAZHDAN – *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. and its Appl. **1** (1967), 63-65.

[33] V. LAFFORGUE – *Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T)*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **327**, n° 5 (1998), 439-444.

[34] V. LAFFORGUE – *A proof of property (RD) for discrete cocompact subgroups of* $SL_3(\mathbf{R})$ (preprint 1998), à paraître à Journal of Lie theory.

[35] V. LAFFORGUE – *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes* (preprint 1998).

[36] V. LAFFORGUE – *Espaces de Schwartz* (preprint 1998).

[37] V. LAFFORGUE – *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes* (preprint en préparation 1999).

[38] P.-Y. LE GALL – *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **324**, n 6 (1997), 695-698.

[39] A.S. MIŠČENKO – *Homotopy invariance of non simply connected manifolds, I : Rational invariance*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 509-519, transl from *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.* **34**, (1970), 501-514.

[40] H. OYONO-OYONO – *La conjecture de Baum-Connes pour les groupes agissant sur les arbres*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **326**, n° 7 (1998), 799-904.

[41] J. RAMAGGE, G. ROBERTSON and T. STEGER – *A Haagerup inequality for $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_1$ and $\widetilde{A}_2$ buildings*, Geometric and Funct. Anal. **8**, n 4 (1998), 702-731.

[42] J.N. RENAULT – *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Math. **793**, Springer-Verlag, New York (1980).

[43] J. ROE – *Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds*, CBMS Regional Conf. Series in Math. **90**, AMS (1996).

[44] G. SKANDALIS – *Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J.Cuntz)*, K-theory **1** (1988), 549-573.

[45] G. SKANDALIS – *Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique. D'après Connes-Gromov-Moscovici*, Sém. Bourbaki, vol. 1990/91, exposé n° 739, Astérisque **201-202-203** (1992), 299-316.

[46] G. SKANDALIS, J.L. TU and G. YU – *Coarse Baum-Connes conjecture and Groupoids* (preprint 1999).

[47] J.L. TU – *La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques*, K-theory **16**, n 2 (1999), 129-184.

[48] J.L. TU – *La conjecture de Novikov pour les feuilletages moyennables*, K-theory **17**, n 3 (1999), 215-264.

[49] A. VALETTE – *Questions*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **226**, Cambridge Univ. Press (1995), p. 74.

[50] A. WASSERMANN – *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **304** (1987), 559-562.

[51] G. YU – *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit uniform embeddings into Hilbert space* (preprint 1999), à paraître à Inv. Math.

Georges SKANDALIS

UMR 7586 du C.N.R.S.
Université de Paris VII
Case Postale 7012
2, place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05
E-mail : `skandal@math.jussieu.fr`