OLIVIER MATHIEU

Classification des algèbres de Lie simples

Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 858, p. 245-286
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1998-1999__41__245_0>

Séminaire BOURBAKI
51ème année, 1998-99, n° 858

Mars 1999

CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

par **Olivier MATHIEU**

Sommaire :

0. Introduction

1. Généralités sur les algèbres de Lie restreintes
   1.1. Identité de Jacobson
   1.2. Dérivations
   1.3. Exemples et remarques

2. Algèbres de Lie simples classiques
   2.1. Définition des algèbres de Lie simples classiques
   2.2. Un exemple de trop bonne réduction
   2.3. La $\mathbf{Z}$-forme canonique de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$

3. Algèbres de Cartan restreintes
   3.1. Définition des algèbres de Cartan restreintes
   3.2. Un critère de simplicité
   3.3. L'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$
   3.4. La cohomologie de De Rham de X
   3.5. Un critère de "restreignabilité"
   3.6. L'algèbre de Lie $S(n, \mathbf{1})$, pour $n \geq 3$
   3.7. Algèbres de Poisson
   3.8. L'algèbre de Lie $H(2m, \mathbf{1})$
   3.9. Un autre critère de simplicité
   3.10. L'algèbre de Lie $K(2m+1, \mathbf{1})$

4. Le théorème de Block et Wilson

5. Défaut au lemme de Darboux et une classe d'algèbres de Lie non restreintes
   5.1. Notations pour la section 5
   5.2. Lemme de Darboux

5.3. Remarques sur les algèbres filtrées
5.4. Formes volumes sur X
5.5. Formes symplectiques
5.6. Exemples d'algèbres hamiltoniennes non restreintes

6. Algèbres de Cartan de niveau arbitraire
6.1. Algèbres à puissances divisées
6.2. Algèbres de Cartan de dimension infinie
6.3. Définition des algèbres de Cartan

7. La classification des algèbres de Lie simples

8. Quelques techniques de preuve
8.1. Sous-algèbres de Cartan
8.2. Construction de grosses sous-algèbres
8.3. Éléments sandwich
8.4. Théorèmes de reconnaissance

Bibliographie

0. INTRODUCTION

Au début du siècle, Killing et Cartan ont classifié les algèbres de Lie simples de dimension finie sur **C** ou, plus généralement, sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. La classification fait apparaître quatre familles infinies $\mathfrak{sl}(l+1)$, $\mathfrak{so}(2l+1)$, $\mathfrak{sp}(2l)$, $\mathfrak{so}(2l)$, et cinq autres algèbres de Lie appelées G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8. Pour les besoins de cet exposé, toutes ces algèbres de Lie seront appelées classiques, bien que la terminologie usuelle la réserve pour les quatre séries infinies. Il n'y a pas de familles continues d'algèbres de Lie simples ou, ce qui est équivalent, pour chaque entier n, il n'existe qu'au plus un nombre fini d'algèbres de Lie simples de dimension n. Afin d'éviter les répétitions, *nous sous-entendrons que toute algèbre de Lie est de dimension finie*, sauf indication explicite du contraire.

Le problème de la classification des algèbres de Lie simples de dimension finie sur un corps algébriquement clos K de caractéristique p a résisté plus longtemps. À partir des années 30, au départ sous l'impulsion de Jacobson, il est apparu qu'en plus des réductions mod. p des algèbres de Lie classiques (appelées encore algèbres de Lie classiques), il existe de nombreuses algèbres de Lie simples de dimension finie, analogues aux pseudo-groupes considérés par Cartan [**Cn**]. Ces algèbres de Lie sont appelées algèbres de Cartan. Dans la terminologie moderne, les pseudo-groupes sont certaines algèbres de Lie de dimension infinie, et les algèbres de Cartan sont donc des analogues de dimension finie en caractéristique finie de structures de dimension infinie en caractéristique zéro. On trouvera dans **[Cn]**,**[Kc1]**, **[G]**, **[Ma]** des énoncés analogues aux résultats exposés ici et qui concernent des classifications d'algèbres de Lie simples de dimension infinie en caractéristique zéro.

Bien que la question de la classification des algèbres de Lie simples ait été un problème clairement posé dès les années 30, ce n'est que dans les années 60 que toutes les classes d'algèbres de Cartan ont été finalement construites, et Kostrikin et Shafarevitch ont pu formuler la conjecture que toute algèbre de Lie simple est classique ou de Cartan **[KS]**. En raison de la structure de l'identité de Jacobi, il semble difficile d'espérer une classification en caractéristique 2 et 3, et en fait, pour ces caractéristiques très petites, il est facile d'obtenir des algèbres de Lie simples qui ne soient pas de Cartan ou classiques. Il est plus surprenant qu'en caractéristique 5, il existe une famille étrange d'algèbres de Lie simples, appelées algèbres de Melikian **[Me]**, qui ne sont ni classiques ni de Cartan. En revanche, il n'existe pas d'autres exemples en caractéristique $p \geq 7$.

Une famille importante d'algèbres de Lie est celle des algèbres de Lie restreintes : ce sont les algèbres de Lie L telles que pour tout $x \in L$, $ad(x)^p$ soit une dérivation intérieure. La première étape de la classification a été obtenue par R. Block et R. Wilson en 1988, qui ont classifié les algèbres de Lie simples restreintes en caractéristique $p > 7$ **[BW1]**. Comme en caractéristique zéro, il n'y a pas de famille continue d'algèbres de Lie simples restreintes.

La classification des algèbres de Lie simples non nécessairement restreintes en caractéristique > 7 a été le point d'orgue d'un article de Strade et de Wilson ([**SW**]) et elle est basée sur de nombreux papiers, en particulier ceux de Strade **[St1-7]**. Les experts espèrent que ce résultat peut s'étendre tel quel en caractéristique 7 et, en ajoutant la famille de Melikian, en caractéristique 5. La classification des algèbres de Lie générales est plus complexe que dans le cas des algèbres de Lie restreintes, car elle contient des familles continues d'algèbres de Lie simples. Elle est aussi moins explicite. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Le but principal de cet exposé est de décrire cette classification. Dans un souci de clarté, nous avons cherché à utiliser systématiquement le formalisme du calcul différentiel pour simplifier de nombreux calculs explicites trouvés dans la littérature.

L'organisation de cet exposé écrit est la suivante. La section 1 est consacrée à la théorie des algèbres de Lie restreintes, notion cruciale par la suite. La section 2 porte sur la définition des algèbres classiques : puisque l'idée de base est claire, nous avons surtout insisté sur des points techniques, et cette section n'a pas vraiment un caractère introductif (on devrait pouvoir la sauter en première lecture). Dans la section 3, nous contruisons les algèbres de Cartan restreintes : dans cette section, nous nous sommes attaché à décrire en détail ces algèbres et nous avons donné des preuves complètes du calcul de leur série dérivée, et de la simplicité du dernier terme de la série dérivée. Il nous semble que l'utilisation de cohomologie de De Rham pour déterminer les séries dérivées fournit une approche plus simple que les calculs en coordonnées locales trouvés dans la littérature. Nous espérons ne pas avoir introduit d'erreurs dans cette section en voulant préciser ou simplifier certains énoncés. La section 4 porte sur le théorème de Block et Wilson. Initialement, la section 5 était surtout destinée à illustrer la complexité de la classification des algèbres de Lie restreintes. Puis nous nous sommes rendu compte qu'il était possible de décrire plus explicitement les algèbres de Cartan par le formalisme introduit dans cette section : faute de temps, il n'a pas été possible d'expliquer cette description dans le cadre le plus général, et une version plus complète fera l'objet d'une publication séparée. La section 6 expose la définition des algèbres de Cartan non restreintes, et elle s'inspire de [**W1**] et [**St7**]. La section 7 contient le résultat principal, aboutissement des travaux de Strade et Wilson. Dans la section 8, nous avons cherché à expliquer les idées les plus simples mises en œuvre dans la classification : en réalité le théorème de classification est très compliqué.

Remerciements : Nous remercions O. Gabber, V. G. Kac et J.-P. Serre pour d'utiles commentaires sur cet exposé.

Conventions : Sauf indication contraire, K désigne un corps algébriquement clos de caractéristique finie p, et à partir de la section 3 on supposera $p > 3$.

Notations : Pour une algèbre de Lie L, nous noterons $Z(L)$ son centre et nous poserons $L^{(1)} = [L, L]$, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$ etc.. et $L^{(\infty)} = \cap_{k\geq 1} L^{(k)}$.

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES ALGÈBRES DE LIE RESTREINTES

Dans cette section, nous allons rappeler la définition des algèbres de Lie restreintes. Je crois que la motivation initiale pour la notion d'algèbre de Lie restreinte était d'établir un analogue de la théorie de Galois pour des extensions de corps purement inséparables. Soit K un corps, et soit $Der(K)$ l'algèbre de Lie des dérivations de K. En fait Jacobson [**J1**] a établi une correspondance entre :

(i) les extensions $K \subset K'$ avec $K' \subset K^{1/p}$, et

(ii) les sous-K espaces vectoriels de $Der(K)$ qui sont des sous-algèbres de Lie restreintes.

La correspondance associe à K' l'algèbre de Lie des dérivations $\delta : K \to K$ telles que $\delta(f^p) = 0$ pour tout $f \in K'$. Les structures d'algèbres de Lie restreintes constituent aussi un point crucial dans la définition de l'opérateur de Cartier (voir exemple 8) et dans une conjecture de Grothendieck (voir exemple 9).

1.1. Identité de Jacobson

Il est connu que l'on a l'identité $(x + y)^p = x^p + y^p$ dans toute $\mathbf{F}_p$-algèbre commutative. Jacobson a trouvé une généralisation de cette identité valable pour toute $\mathbf{F}_p$-algèbre associative mais non nécessairement commutative. Commençons par rappeler la définition des polynômes de Lie, plus exactement les polynômes de Lie en deux variables. Fixons un anneau de base k (dans la suite, $k = \mathbf{Z}$, $k = \mathbf{Q}$ où k est un corps K de caractéristique p).

Un polynôme en deux variables commutatives x, y est un élément $P(x,y) \in k[x,y]$. Pour toute k-algèbre commutative A et tous $a, b \in A$, on peut évaluer l'expression $P(a,b) \in A$. Notons $k < X, Y >$ l'algèbre tensorielle en les deux variables X et Y (i.e. la k-algèbre associative libre en les deux indéterminées X et Y) et soit $Lib_k(X,Y)$ la k-algèbre de Lie libre en X et Y. Plus concrètement, $Lib_k(X,Y)$ est la sous-algèbre de Lie de $k < X, Y >$ engendrée par X et Y. Par définition, un *polynôme de Lie en deux variables* X, Y est un élément $P(X,Y)$ de $Lib_k(X,Y)$. Pour toute k-algèbre de Lie L et $A, B \in L$, on peut définir son évaluation $P(A,B) \in L$. Pour en donner une définition formelle, on remarque qu'il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\phi : Lib_k(X,Y) \to L$ avec $\phi(X) = A$ et $\phi(Y) = B$ et on définit $P(A,B) = \phi(P(X,Y))$. Un exemple de polynôme de Lie est fourni par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$\exp tX \exp tY = \exp\Big(\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n} H_n(X,Y)\Big)$$

qui est valable dans l'algèbre $\mathbf{Q}[[t]] < X, Y >$. Dans cette identité, $H_n(X,Y)$ est un polynôme de Lie à coefficients entiers p-adiques pour tout $n \leq p$.

THÉORÈME 1 (Formule de Jacobson).— *Soit p un nombre premier. Il existe un (unique) polynôme de Lie $J_p(X,Y) \in Lib_{\mathbf{F_p}}(X,Y)$, tel que :*

$$(x + y)^p = x^p + y^p + J_p(x,y),$$

pour tous éléments x, y d'une $\mathbf{F_p}$-algèbre associative.

Preuve : Considérons le facteur de t^p dans la formule de Campbell-Hausdorff et multiplions-le par $p!$. On obtient : $(X + Y)^p = X^p + Y^p + (p-1)!H_p(X,Y) + p\tau$, où

$\tau \in \mathbf{Z} < X, Y >$. Définissons $J_p(X,Y)$ comme la réduction modulo p de $-H_p(X,Y)$. Puisque $(p-1)! = -1 \bmod. p$, l'identité $(x+y)^p = x^p + y^p + J_p(x,y)$ est valide dans toute $\mathbf{F_p}$-algèbre associative. Enfin l'unicité de $J_p(X,Y)$ résulte du fait que l'application naturelle $Lib_{\mathbf{F_p}}(X,Y) \to \mathbf{F_p} < X, Y >$ est injective. C.Q.F.D.

Pour la preuve originelle de Jacobson, on pourra se reporter à **[J2]**.

Exemples : Pour $p = 2$, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + [x,y]$, d'où

$$J_2(X,Y) = [X,Y].$$

Pour $p = 3$, $[x,[x,y]] = x^2y - 2xyx + yx^2 = x^2y + xyx + yx^2$, d'où :

$$J_3(X,Y) = [X[X,Y]] + [Y[Y,X]].$$

Pour $p = 5$, on a :

$$J_5(X,Y) = [X[X[X[X,Y]]]] + 2[Y[X[X[Y,X]]]] + 2[X[Y[Y[X,Y]]]] + [Y[Y[Y[Y,X]]]].$$

1.2. Dérivations

Soit R une $\mathbf{F}_p$-algèbre non nécessairement commutative ou associative (par exemple une algèbre de Lie, une algèbre d'octonions). Une dérivation est une application linéaire $\delta : R \to R$ qui satisfait à l'identité de Leibniz : $\delta(x.y) = (\delta x).y + x.\delta\, y$. On a donc $\delta^n(x.y) = \sum_{a+b=n} \binom{n}{a}(\delta^a\, x).\delta^b\, y$, et en particulier $\delta^p(x.y) = (\delta^p x).y + x.\delta^p\, y$. Par conséquent, l'ensemble $Der\, R$ des dérivations de R est une algèbre de Lie avec une structure supplémentaire, à savoir l'application $\delta \mapsto \delta^p$: cette structure est appelée une *p-structure*, une notion dont la définition formelle suit. Une algèbre de Lie munie d'une p-structure est dite *restreinte.*

Soit L une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique p. Pour tout $x \in L$, $ad(x)^p$ est une dérivation. Nous dirons qu'une algèbre de Lie est "*restreignable*" si $ad(x)^p$ est une dérivation intérieure pour tout $x \in L$ (l'utilisation de cet horrible néologisme nous a semblé particulièrement commode pour cet exposé). Grâce à l'identité de Jacobson, on remarque qu'une algèbre de Lie est "restreignable" dès qu'elle possède une base $(x_i)_{i\in I}$ telle que $ad(x_i)^p$ soit intérieure pour tout $i \in I$. Cependant, il n'est pas suffisant de supposer que $ad(x_i)^p$ est intérieure pour un système $(x_i)_{i\in I}$ de générateurs de l'algèbre de Lie L. Une *p-structure* est une application $x \in L \mapsto x^{(p)} \in L$ telle que $ad(x^{(p)}) = ad(x)^p$ satisfaisant aux conditions de compatibilité suivantes :

(i) $(\lambda x)^{(p)} = \lambda^p\, x^{(p)}$

(ii) $(x+y)^{(p)} = x^{(p)} + y^{(p)} + J_p(x,y)$

pour tous $\lambda \in K$ et x, $y \in L$.

Toute algèbre de Lie "restreignable" L admet une p-structure. En effet soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de L et soit $(y_i)_{i\in I} \in L$ avec $ad(x_i)^p = ad(y_i)$, alors il existe une unique p-structure $x \mapsto x^{(p)}$ telle que $x_i^{(p)} = y_i$. Si l'on choisit un ordre total sur I, la p-structure est donnée par $(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i)^{(p)} = \sum_{i\in I} \lambda_i^p y_i + J(\lambda_i x_i, \sum_{j<i} \lambda_j x_j)$. Pour vérifier que cette application est bien une p-structure, il suffit de remarquer que J_p est un cocycle, i.e. satisfait à $J(x+y,z)+J(x,y) = J(y,z)+J(x,y+z)$. Comme il est clair que deux p-structures diffèrent d'une application p-linéaire de L dans $Z(L)$, une algèbre de Lie "restreignable" et de centre trivial admet une unique p-structure. C'est pourquoi nous dirons qu'une algèbre de Lie de centre trivial est *non restreinte* si elle n'est pas "restreignable".

1.3. Exemples et remarques

1) Si V est un espace vectoriel, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V est restreinte. Plus généralement n'importe quelle algèbre associative A est une algèbre de Lie restreinte : la p-structure est $x \mapsto x^p$. Si V est de dimension finie, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(V)$ des endomorphismes de trace nulle est restreinte. En effet $Tr(x^p) = Tr(x)^p$.

2) Pour n'importe quelle algèbre R, l'agèbre de Lie $Der(R)$ est restreinte. Par exemple l'algèbre de Lie W_X de tous les champs de vecteurs d'une variété X est restreinte.

3) Soit X une variété et β une forme. L'algèbre de Lie $W_X(\beta)$ de tous les champs de vecteurs qui préservent β, c'est-à-dire les champs de vecteurs ξ tels que $\xi.\beta = 0$ est restreinte.

4) Soit G un groupe algébrique et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est restreinte. En effet, $\mathfrak{g}$ est l'espace des champs de vecteurs ξ sur G qui sont invariants relativement aux translations à gauche par G. Or si ξ est G-invariant à gauche, ξ^p est aussi G-invariant à gauche.

5) La définition de p-structure n'impose aucune condition de compatibilité avec le crochet de Lie. En fait pour toute p-structure, l'identité (due également à Jacobson) $[x^{(p)}, y^{(p)}] = -ad^{p-1}(x)ad^p(y)(x)$ est satisfaite. Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une algèbre de Lie restreinte $L \supset \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}$ soit un idéal de L et $L/\mathfrak{g}$ soit commutative. Par exemple, il suffit de prendre pour L la plus petite sous-algèbre de Lie restreinte de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{g}$. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathfrak{g}$, $(x_i^{p^n})_{i\in I, n\geq 0}$ est une base de L.

6) Soit L une algèbre de Lie, et soit Z son centre. Alors si L est restreinte,

L/Z est restreinte, car la p-structure passe au quotient. Réciproquement si L/Z est restreinte, L est "restreignable".

En revanche la dérivée $L^{(1)} = [L, L]$ d'une algèbre de Lie restreinte n'est en général pas restreinte, ni "restreignable". Avant d'en voir des exemples concrets en sections 5 et 6, donnons-en un exemple abstrait. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie non "restreignable" avec $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et soit $L \subset U(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie construite dans l'exemple précédent. Il est clair que $[L, L] = \mathfrak{g}$, donc $L^{(1)}$ n'est pas restreinte.

7) Soit L une algèbre de Lie. L'ensemble L' des éléments $x \in L$ tels que $ad(x)^p$ soit intérieure est un sous-espace vectoriel invariant par tout automorphisme de L, mais ce n'est en général ni un idéal ni même une sous-algèbre de Lie. On peut trouver des exemples où L' engendre L bien que $L' \neq L$.

Néanmoins, si l'algèbre de Lie est engendrée (en tant qu'algèbre) par ses éléments x tels que $ad(x)^{\frac{p+1}{2}} = 0$, alors l'algèbre de Lie est restreinte. En effet pour tout $x \in L$ tel que $ad(x)^{\frac{p+1}{2}}$, l'exponentielle tronquée :

$$\exp ad(x) = \sum_{0 \leq i < \frac{p+1}{2}} ad(x)^i$$

est un automorphisme d'algèbres de Lie. On en déduit que l'algèbre de Lie est linéairement engendrée par les éléments x qui satisfont à $ad(x)^{\frac{p+1}{2}} = 0$, et donc L est "restreignable". Cette hypothèse est satisfaite pour toutes les algèbres de Lie classiques si $p > 5$, puisque avec les notations usuelles (voir section 2) on a $ad(e_i)^4 = ad(f_i)^4 = 0$.

8) Soit X une variété affine lisse, soit W_X l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, soit Ω_X l'espace des formes différentielles et soit d la différentielle extérieure. Il est clair que l'existence de d est intimement liée à la structure d'une application bilinéaire $W_X \times W_X \to W_X$ (le crochet des champs de vecteurs) et la relation $d^2 = 0$ à l'identité de Jacobi. Puisque que W_X est aussi muni d'une application unaire $W_X \to W_X$ (i.e. la p-structure), on doit s'attendre à ce que Ω_X soit muni d'une structure supplémentaire. Cette structure supplémentaire a été inventée par Cartier **[Cr]** : c'est un isomorphisme d'anneaux $Car : \Omega_X^* \to H_{DR}^*(X)$, défini par $Car(f) = [f^p]$ et $C\, df = [f^{p-1} df]$ pour tout $f \in K[X]$ (ici $[\beta]$ désigne la classe de cohomologie de la forme fermée β).

9) On reprend les notations de l'exemple 8. Soit E un fibré vectoriel sur X, et ∇ une connexion. On sait que la première obstruction à trouver des sections horizontales à E est la non-nullité de la courbure R de la connexion : $R(\xi, \eta) = \nabla_{[\xi,\eta]} - [\nabla_\xi, \nabla_\eta]$ pour tous $\xi, \eta \in W_X$. La courbure traduisant la structure d'algèbre de Lie de W_X, on s'attend à une autre obstruction liée à la p-structure : c'est la p-courbure R_p définie par $R_p(\xi) = \nabla_{\xi^p} - \nabla_\xi^p$.

La nullité de R équivaut au fait que $\xi \mapsto \nabla_\xi$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Lorsque $R = 0$, la p-courbure est additive en ξ et $[\nabla_\xi, R_p(\eta)] = 0$ pour tous $\xi, \eta \in W_X$. La nullité simultanée de R et de R_p équivaut au fait que $\xi \mapsto \nabla_\xi$ est un morphisme d'algèbres de Lie restreintes.

Signalons une conjecture fascinante de Grothendieck : Soit Y une variété affine lisse sur un corps de caractéristique 0 et soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une connexion ∇ de courbure nulle. Si les réductions modulo p de ∇ sont des connexions de p-courbure nulle pour $p \gg 0$, la monodromie de ∇ est finie (voir par exemple **[Kz]**).

2. ALGÈBRES DE LIE SIMPLES CLASSIQUES

En première approximation, les algèbres de Lie classiques sont les réductions modulo p des algèbres de Lie simples définies sur **C**. Dans ce paragraphe, nous allons préciser comment ces algèbres de Lie sont définies.

2.1. Définition des algèbres de Lie classiques

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur **C**. Il existe un ouvert dense $\Omega \subset \mathfrak{g}$ tel que le noyau de $ad(x)$ ait une dimension constante l pour tout $x \in \Omega$. Ce nombre l est appelé le *rang* de $\mathfrak{g}$. On peut aussi le définir comme la dimension minimale des noyaux de $ad(x)$. Par un procédé que nous allons rappeler, on associe à $\mathfrak{g}$ un diagramme de Dynkin ayant l sommets, c'est-à-dire l'un des dessins suivants :

$$\begin{array}{ll}
A_l : & \bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet \\
B_l : & \bullet - \bullet \cdots \bullet \Leftarrow \bullet \\
C_l : & \bullet - \bullet \cdots \bullet \Rightarrow \bullet \\
D_l : & \bullet - \bullet \cdots \bullet <{:} \\
E_6 : & \bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{|}}{\bullet} - \bullet - \bullet \\
E_7 : & \bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{|}}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet \\
E_8 : & \bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{|}}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\
F_4 : & \bullet - \bullet \Rightarrow \bullet - \bullet \\
G_2 : & \bullet \equiv> \bullet
\end{array}$$

Notons I l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin. On définit la *matrice de Cartan* $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ de I, par les conditions suivantes : $a_{i,i} = 2$ et pour $i \neq j$,

$a_{i,j} = a_{j,i} = 0$ si i et j ne sont pas connectés,

$a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ si i et j sont connectés comme : ${}^i\bullet - \bullet^j$

$a_{i,j} = -1$, $a_{j,i} = -2$ si i et j sont connectés comme : ${}^i\bullet \Leftarrow \bullet^j$

$a_{i,j} = -1$, $a_{j,i} = -3$ si i et j sont connectés comme : ${}^i\bullet \equiv\!> \bullet^j$.

Définissons $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$ comme l'agèbre de Lie engendrée par les générateurs $(e_i, f_i, h_i)_{i \in I}$ et définie par les relations suivantes :

(i) $[h_i, h_j] = 0$,

(ii) $[h_i, e_j] = a_{i,j} e_j$,

(iii) $[h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j$,

(iv) $[e_i, f_i] = h_i$,

(v) $[e_i, f_j] = 0$ pour $i \neq j$,

(vi) $ad(e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = 0$ pour $i \neq j$,

(vii) $ad(f_i)^{1-a_{i,j}}(f_j) = 0$ pour $i \neq j$,

pour tous $1 \leq i, j \leq l$. Les deux dernières relations sont appelées *relations de Serre.* Le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ est l'unique diagramme de Dynkin I tel que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$. Les algèbres simples de diagramme de Dynkin A_l $(l \geq 1)$, B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 3)$, D_l $(l \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 constituent une famille complète de classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie simples sur $\mathbf{C}$.

Rappelons que l'algèbre de type A_l est $\mathfrak{sl}(l+1)$, celle de type B_l est $\mathfrak{so}(2l+1)$, celle de type C_l est $\mathfrak{sp}(2l)$ et celle de type D_l est $\mathfrak{so}(2l)$. On impose $l \geq 2$ (respectivement $l \geq 3$, $l \geq 4$) pour le type B_l (respectivement pour le type C_l, D_l) pour éviter les répétitions (isomorphismes en basse dimension) ou pour éviter certaines algèbres qui ne sont pas simples. En effet les algèbres de type B_1, C_1 et A_1 sont isomorphes (i.e. $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{sp}(2) \simeq \mathfrak{sl}(2)$), les algèbres de type C_2 et B_2 sont isomorphes (i.e. $\mathfrak{sp}(4) \simeq \mathfrak{so}(5)$), les algèbres de type D_1 et D_2 ne sont pas simples (car $\mathfrak{so}(2)$ est commutative et $\mathfrak{so}(4)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$) et enfin les algèbres de type D_3 et A_4 sont isomorphes (i.e. $\mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{sl}(4)$). Les experts de la caractéristique zéro appellent classiques les algèbres simples de type $ABCD$ et exceptionnelles les cinq autres. Dans la terminologie des experts de caractéristique finie, elles sont toutes appelées *algèbres de Lie classiques*, et nous suivrons ici cette terminologie.

On notera que cette présentation ne fait intervenir que des nombres entiers. Si nous considérons l'algèbre de Lie définie par cette présentation sur un corps de caractéristique finie, on trouve parfois des algèbres de trop grande dimension, et parfois de dimension infinie (ce problème ne se pose qu'en petite caractéristique).

C'est pourquoi la méthode pour obtenir les algèbres de Lie modulo p consiste à définir une $\mathbf{Z}$-forme de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$. Rappelons qu'une $\mathbf{Z}$-*forme* d'une $\mathbf{C}$-algèbre quelconque

L est un sous-anneau Λ de L qui soit un $\mathbf{Z}$-module libre et tel que $\mathbf{C} \otimes \Lambda = L$. La $\mathbf{Z}$-forme de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$ la plus simple à définir est le sous-anneau de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ engendré par les éléments e_i et f_i pour tout $i \in I$. Comme nous le verrons à la fin de cette section, cette forme est la forme canonique, à 6-torsion près. Pour tout corps K, on pose $\mathfrak{g}_K(I) = K \otimes \mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$. Le fait suivant sera prouvé à la fin de cette section :

LEMME 2.— *Supposons $p > 3$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K(I)$ est restreinte. De plus si I n'est pas de type A_l avec $l = -1$ modulo p, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$ est simple.*

L'algèbre de Lie de type A_{np-1} est isomorphe à $\mathfrak{sl}(np)$. La matrice identique 1 est de trace nulle, et l'on pose $\mathfrak{psl}(np) = \mathfrak{sl}(np)/K1$. Il est facile de voir que $\mathfrak{psl}(np)$ est simple.

DÉFINITION 3.— *Soit K un corps de caractéristique > 3. Les algèbres de Lie classiques sont les algèbres $\mathfrak{g}_K(I)$ où I n'est pas de type A_l avec $l = -1$ modulo p et les algèbres $\mathfrak{psl}(np)$.*

2.2. Un exemple de trop bonne réduction

La définition de $\mathfrak{g}_K(I)$ peut sembler compliquée, puisque nous ne sommes intéressé qu'à la définition de $\mathfrak{g}_K(I)$ sur un corps algébriquement clos : en fait le processus de réduction en caractéristique finie fait partie de la définition. Voici un exemple d'une réduction modulo p de $\mathfrak{sl}(p)$ qui fournit une algèbre simple non classique.

Sur l'espace $E = \mathbf{F}_p^2$, choisissons une forme symplectique non nulle à valeur dans $\mathbf{F}_p$ notée $\alpha, \beta \in E \mapsto < \alpha|\beta >$. Soit $q \in \mathbf{C}$ une racine p-ième de l'unité. Notons $\mathcal{A}$ la $\mathbf{C}$-algèbre associative de base $(e_\alpha)_{\alpha\in E}$ dont le produit est donné par $e_\alpha e_\beta = q^{<\alpha|\beta>} e_{\alpha+\beta}$. Il est facile de voir que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées d'ordre p. Pour $\alpha \neq 0$, posons $F_\alpha = 1/(q - q^{-1}) e_\alpha$, et soit $\mathcal{H}_q$ le $\mathbf{Z}[q]$-sous-module de base $(F_\alpha)_{\alpha\neq 0}$. On a

$$[F_\alpha, F_\beta] = \frac{q^{<\alpha|\beta>} - q^{-<\alpha|\beta>}}{q - q^{-1}} F_{\alpha+\beta}.$$

Or $\frac{q^{<\alpha|\beta>} - q^{-<\alpha|\beta>}}{q - q^{-1}}$ appartient à $\mathbf{Z}[q]$, donc $\mathcal{H}_q$ est une $\mathbf{Z}[q]$-algèbre de Lie. Comme $\mathbf{C} \otimes \mathcal{H}_q$ est isomorphe a $\mathfrak{sl}(p)$, $\mathcal{H}_q$ est une $\mathbf{Z}[q]$-forme de $\mathfrak{sl}(p)$. Soit K un corps de caractéristique p. L'algèbre de Lie $\mathcal{H} = K \otimes \mathcal{H}_q$ est une algèbre de Lie de base $(E_\alpha)_{\alpha\neq 0}$ et le crochet est défini par $[E_\alpha, E_\beta] =< \alpha|\beta > E_{\alpha+\beta}$. Il est facile de voir que l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est simple, mais n'est pas restreinte.

Le fait d'avoir trouvé une $\mathbf{Z}[q]$-forme à la place d'une $\mathbf{Z}$-forme est sans importance, mais cela a rendu les calculs plus faciles. En améliorant la construction précédente, on peut trouver une $\mathbf{Z}$-forme de $\mathfrak{sl}(p)$ dont la réduction modulo p est $\mathcal{H}$. Par exemple choisissons une base $(v_n)_{0\leq n<p}$ de $\mathbf{C}^p$ et posons $Y = \{(i,j) \neq (0,0)|0 \leq n,m < p\}$. Pour tout $(n,m) \in Y$, notons $e_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^p$ défini par $e_{i,j}.v_n = (1+p)^{ni}/p\, v_{n+j}$ si $n+j<p$ et $e_{i,j}.v_n = (1+p)^{ni}/p\, v_{n+j-p}$ si $n+j \geq p$. Bien que la définition des endomorphismes $e_{i,j}$ fasse intervenir un dénominateur, il est facile de montrer que $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}} = \oplus_{i,j\in Y}\mathbf{Z}e_{i,j}$ est stable par crochet. De plus $\mathbf{Q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ est isomorphe a $\mathfrak{sl}(p,\mathbf{Q})$ et $K\otimes\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ est isomorphe à $\mathcal{H}$.

En quelque sorte $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ est une meilleure forme en p que la forme naturelle $\mathfrak{sl}(p,\mathbf{Z})$, puisque $K\otimes\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ est simple tandis que $K\otimes\mathfrak{sl}(p,\mathbf{Z})$ ne l'est pas. Pour l'idée de cette réduction, voir **[GM]**.

2.3. La Z-forme canonique de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$

Rappelons que $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique $G_{\mathbf{C}}$ et que Chevalley et Steinberg ont défini une $\mathbf{Z}$-forme naturelle $G_{\mathbf{Z}}$ de ce groupe (voir **[Stb]**, **[T1-3]**). Appelons *$\mathbf{Z}$-forme canonique* de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$ l'anneau de Lie du groupe $G_{\mathbf{Z}}$, et notons-la $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$. Nous allons maintenant comparer la forme canonique à la forme $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ définie à l'alinéa précédent.

Définir le groupe $G_{\mathbf{Z}}$ signifie contruire son anneau de fonctions $\mathbf{Z}[G_{\mathbf{Z}}]$ et le munir d'une structure d'anneau de Hopf. La définition de $\mathbf{Z}[G_{\mathbf{Z}}]$ est la suivante : considérons le sous-anneau $U_{\mathbf{Z}} \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I))$ engendré par les éléments $e_i^{(n)}$ et $f_i^{(n)}$ pour tout $i\in I$ et $n\geq 1$ (la notation $x^{(n)}$ signifie $\frac{1}{n!}x^n$). Comme $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I))$ peut être identifié aux distributions supportées à l'origine, il y a un couplage naturel $U(\mathfrak{g}(I))\times\mathbf{C}[G_{\mathbf{C}}]\to \mathbf{C}$, $(u,f)\mapsto < u|f >$. On définit $\mathbf{Z}[G_{\mathbf{Z}}]$ comme l'ensemble des fonctions $f\in\mathbf{C}[G_{\mathbf{C}}]$ telles que $< u|f >\in\mathbf{Z}$ pour tout $u\in U_{\mathbf{Z}}$, et on vérifie que $\mathbf{Z}[G_{\mathbf{Z}}]$ est un sous-anneau de Hopf et qu'il s'agit d'une $\mathbf{Z}$-forme de $\mathbf{C}[G_{\mathbf{C}}]$. Il est alors facile de montrer le fait suivant :

LEMME 4.— *L'anneau de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$ est le sous-anneau de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(I)$ engendré par les éléments $\frac{1}{n!}ad(f_j)^n(f_i)$ et $\frac{1}{n!}ad(e_j)^n(e_i)$ pour tous i, $j\in I$ et $n\geq 0$.*

En utilisant les relations de Serre, on voit que :

(i) Si I est de type ADE, $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I) = \mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$,

(ii) Si I est de type BDF, notons a,b l'unique paire d'éléments de I tels que $a_{a,b} = -2$. Alors $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$ est engendrée par $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ et les deux éléments $\frac{1}{2}ad(e_a)^2(e_b)$ et $\frac{1}{2}ad(f_a)^2(f_b)$. En particulier, $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ et $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$ coïncident à la 2-torsion près.

(iii) Si I est de type G_2, posons $I=\{a,b\}$ de sorte que $a_{a,b}=-2$. Alors $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$ est engendrée par $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ et les quatre éléments $\frac{1}{2}ad(e_a)^2(e_b)$, $\frac{1}{6}ad(e_a)^3(e_b)$, $\frac{1}{2}ad(f_a)^2(f_b)$, $\frac{1}{6}ad(f_a)^3(f_b)$. En particulier, $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}(I)$ et $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$ coïncident à la 6-torsion près.

Pour tout corps K, posons $\mathfrak{g}_K^{can}(I) = K \otimes \mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}^{can}(I)$. On notera encore par h_i, e_i, f_i les images de ces éléments dans $\mathfrak{g}_K^{can}(I)$, et on pose $\mathfrak{h} = \oplus_{i \in I} K.h_i$ Notons $\mathfrak{z}$ l'ensemble des $h \in \mathfrak{h}$ tels que $[h, e_i] = 0$ pour tout i. Un élément $h = \sum_i x_i h_i$ appartient à $\mathfrak{z}$ si et seulement si $(x_i)_{i \in I}$ est dans le noyau de A mod. p. On a $det(A) = 1$ si I est de type G_2, F_4 ou E_8, $det(A) = 2$ si I est de type BC ou E_7, $det(A) = 3$ si I est de type E_6, $det(A) = 4$ si I est de type D et $det(A) = l + 1$ si I est de type A_l. On en déduit que $\mathfrak{z} = 0$, sauf dans l'un des cas suivants :

cas où $\mathfrak{z} = K$:

si I est de type A_{np-1}, ou

si $p = 3$ et I est de type E_6, ou

si $p = 2$ et I est de type B_l, C_l, D_{2n+1}, E_7.

cas où $\mathfrak{z} = K^2$:

si $p = 2$ et I est de type D_{2n}.

LEMME 5.— *Supposons que I ne soit pas de type A_1, B_l, C_l ou F_4 si $p = 2$ et que I ne soit pas de type G_2 si $p = 3$. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K^{can}(I)/\mathfrak{z}$ est simple et restreinte.*

Preuve : Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_K^{can}(I)/\mathfrak{z}$. Notons $(\alpha_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbf{Z}^l$. L'algèbre de Lie admet une Z^l-graduation naturelle, pour laquelle e_i est de degré α_i, et f_i est de degré $-\alpha_i$ et cette Z^l-graduation induit une décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}/\mathfrak{z} \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où $\mathfrak{g}_\alpha$ est la composante de degré $\alpha \in Z^l$ et $\Delta \subset Z^l$ est l'ensemble $\alpha \in Z^l \setminus 0$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas simple et possède un idéal non nul J. La Z^l-graduation de $\mathfrak{g}$ induit l'action d'un tore $H = (K^*)^l$ dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$. Dans la fermeture de l'orbite de J dans la grassmanienne de $\mathfrak{g}$, on trouvera un idéal de même dimension et stable par H. Donc on peut supposer que J est un idéal Z^l-gradué.

Posons $J_0 = J \cap \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$. On veut montrer que J_0 contient au moins l'un des h_i, et on commence par montrer que J_0 est non nul. On utilise alors que, pour tout $\alpha \in \Delta$, l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Ce fait utilise que c'est le cas pour $\alpha = \alpha_i$ et l'action du groupe de Weyl que nous ne définirons pas (par définition, $\mathfrak{g}_K^{can}(I)$ est un G_K-module). Pour montrer que $J_0 \neq 0$, on peut supposer que J n'est pas réduit à J_0, donc J contient l'un des $\mathfrak{g}_\alpha$ et donc J_0 contient $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, ce qui montre $J_0 \neq 0$. Soit $h \in J_0 \setminus 0$. Par définition de $\mathfrak{z}$, il existe $i \in I$ tel que $[h, e_i] \neq 0$. Donc e_i et f_i appartiennent à I et h_i appartient à J_0.

Maintenant on montre que J_0 contient h_i, pour tout $i \in I$. Pour cela on montre que si i et j sont connectés dans le diagramme de Dynkin, et si $h_i \in I_0$, alors h_j y appartient aussi par le même argument qu'avant, car $[h_i, e_j] \neq 0$ (les hypothèses assurant que $a_{i,j} \neq 0 \bmod . p$). Comme le diagramme de Dynkin I est connexe, J_0 contient tous les h_i.

Il n'est pas difficile de montrer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}/\mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$, d'où $J = \mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}$ est donc simple.

3. ALGÈBRES DE TYPE CARTAN RESTREINTES

Dans cette section, nous allons d'abord définir les algèbres de type Cartan restreintes. Grâce au formalisme du calcul différentiel, nous décrirons en détail leur série dérivée et expliquerons pourquoi elles sont restreintes. Pour une approche basée sur des calculs plus explicites, on pourra se reporter aux références en bibliographie. En ce qui concerne la terminologie, il serait plus agréable d'appeler "algèbres de Cartan" ces algèbres, mais cela pourrait entraîner une confusion avec la notion classique de sous-algèbres de Cartan. "Algèbres de type Cartan" est la traduction de la terminologie anglaise "Cartan type algebras".

3.1. Définition des algèbres de type Cartan restreintes

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Notons $\overline{S}V$ le quotient de SV par l'idéal engendré par v^p pour $v \in V$. Si $x_1, \dots x_n$ est une base de V, alors

$$\overline{S}V = K[x_1, \dots, x_n]/(\sum_{1 \leq i \leq n} K[x_1, \dots, x_n]x_i^p).$$

L'algèbre $\overline{S}V$ admet pour base les monômes $x_1^{m_1} \dots x_1^{m_n}$ où $m_i < p$ pour tout i. En particulier sa dimension est p^n. Il sera commode d'utiliser la terminologie de la géométrie algébrique, et de considérer $X = Spec\,\overline{S}V$ comme une variété et de noter par $K[X] = \overline{S}V$ l'espace des fonctions, par Ω_X^* l'espace des formes sur X et par W_X l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X (i.e. $W_X = Der\,K[X]$). Bien que l'algèbre $K[X]$ contienne beaucoup d'éléments nilpotents, le calcul différentiel sur X est très similaire au calcul différentiel ordinaire sur les variétés lisses. En particulier, Ω_X^* est un $K[X]$-module libre : plus précisément $\Omega_X^* \simeq K[X] \otimes \wedge V$. Pour $\xi \in W_X$ et $\beta \in \Omega_X^*$, on notera par $i_\xi \beta$ le produit intérieur par ξ et par $\xi.\beta$ l'action naturelle de ξ sur β, c'est-à-dire la dérivée de Lie. La formule usuelle $\xi.\beta = i_\xi d\beta + d_\beta \xi$ est également valable dans ce cadre.

En fait Ω_X^* a une structure plus riche qu'une structure d'algèbre : l'espace des formes paires Ω_X^{2*} a une structure d'algèbre à puissances divisées (voir une définition formelle en section 5). Pour toute forme ω de degré $2k > 0$, sa puissance divisée $\omega^{(m)} = \omega^n/m!$ est bien définie. On a $d\omega^{(m)} = (d\omega) \wedge \omega^{(m-1)}$, $\xi.\omega^{(m)} = (\xi.\omega) \wedge \omega^{(m-1)}$ et $i_\xi\omega^{(m)} = (i_\xi\omega) \wedge \omega^{(m-1)}$, pour tout $\xi \in W_X$. Comme nous n'utiliserons que des puissances divisées de 2-formes, nous n'allons en donner une définition que pour celles-ci. Si ω est la 2-forme $1/2\sum_{i,j} a_{i,j}dx_i \wedge dx_j$ avec $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$, alors $\omega^{(m)} = \sum_{k_1<k_2\dots<k_m} \mathrm{Pf}(a_{k_i,k_j})dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_n}$, où Pf désigne le pfaffien.

Introduisons les algèbres de Lie $W(n,\mathbf{1})$, $S(n,\mathbf{1})$, $H(2m,\mathbf{1})$ et $K(2m+1,\mathbf{1})$. Par définition, $W(n,\mathbf{1})$ est l'algèbre de Lie W_X. Il sera commode d'utiliser concurremment ces deux notations, et de penser à $W(n,\mathbf{1})$ comme une classe d'isomorphisme d'algèbre de Lie. Pour toute forme β, on note $W_X(\beta)$ l'algèbre de Lie : $W_X(\beta) = \{\xi \in W_X | \xi.\beta = 0\}$, c'est-à-dire l'agèbre de Lie des champs de vecteurs qui préservent β. La *forme volume standard* est la n-forme $v_0 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ sur X. Par définition $S(n,\mathbf{1})$ est l'algèbre de Lie $W_X(v_0)$. Lorsque $n = 2m$, il sera parfois plus pratique pour décrire une forme symplectique de noter $x_1, y_1, x_2, \dots, y_m$ la base de V. La *forme symplectique standard* est la 2-forme $\omega_0 = \sum_{1\leq i\leq n} dx_i \wedge dy_i$. De même l'algèbre de Lie $W_X(\omega_0)$ sera notée $H(2m,\mathbf{1})$. Lorsque $n = 2m+1$, on notera parfois $z, x_1, y_1, x_2, \dots y_n$ une base de V et on appelle la 1-forme $\alpha_0 = dz + 1/2\sum_{1\leq i\leq n} x_i \wedge dy_i - y_i dx_i$ la *forme de contact standard.* On pose alors $K(n,\mathbf{1}) = \{\xi \in W(n,\mathbf{1}) | \alpha_0 \wedge \xi.\alpha_0 = 0\}$. En fait $K(n,\mathbf{1})$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui préservent la structure de contact définie par α_0, car la condition $\alpha_0 \wedge \xi.\alpha_0 = 0$ signifie que $\xi.\alpha_0 = f\alpha_0$ pour un certain $f \in K[X]$.

La signification du symbole $\mathbf{1}$, que nous appellerons le *niveau* dans les notations $W(n,\mathbf{1})$,..., $K(n,\mathbf{1})$ sera expliquée dans la section 6. À la différence des algèbres de Lie classiques, il n'y a pas d'isomorphismes exceptionnels entre les algèbres des quatre séries W, S, H et K (sauf l'évident $S(2,\mathbf{1}) = H(2,\mathbf{1})$). Rappelons que pour une algèbre de Lie L, $L^{(k)}$ désigne la série dérivée et il sera commode de poser $L^{(\infty)} = \cap_{k\geq 1} L^{(k)}$. Bien sûr, puisque les algèbres de Lie sont tacitement présumées de dimension finie, on a $L^{(\infty)} = L^{(k)}$ pour $k \ll 0$.

PROPOSITION 6.— *Les algèbres $W(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$ (pour $n \geq 1$), $S(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$ (pour $n \geq 2$), $H(2m,\mathbf{1})^{(\infty)}$ (pour $m \geq 1$) et $K(2m+1,\mathbf{1})^{(\infty)}$ (pour $m \geq 1$) sont simples et restreintes.*

DÉFINITION 7.— *Les algèbres $W(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$, $S(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$ $H(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$ et $K(n,\mathbf{1})^{(\infty)}$ (avec les mêmes conditions pour n et m) sont appelées les algèbres de type Cartan* *restreintes.*

Nous allons maintenant décrire de manière plus détaillée les algèbres de type Cartan. Notons d'abord que ces algèbres de Lie possèdent une graduation naturelle. Pour fixer les conventions, rappelons qu'une graduation d'une algèbre de Lie L est une décomposition de L : $L = \oplus_{r\in\mathbf{Z}} L_r$ avec $[L_r, L_s] \subset L_{r+s}$. Comme on a $\overline{S}V = \oplus_{m\geq 0}\overline{S}^r V$, où $\overline{S}^r V$ est le sous-espace engendré par les monômes de degré r, l'algèbre commutative $\overline{S}V$ est graduée et cette graduation induit une graduation de l'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$, pour laquelle le champ de vecteurs $x_1^{m_1} \dots x_1^{m_1} \partial/\partial x_i$ est homogène de degré $-1+m_1 \dots + m_n$. On a donc $W(n, \mathbf{1}) = \oplus_{r\geq -1} W(n, \mathbf{1})_r$, où $W(n, \mathbf{1})_m = \overline{S}^{m+1} V \otimes V^*$. Comme la forme volume standard v_0 et la forme symplectique standard ω_0 sont homogènes, les algèbres de Lie $H(2m, \mathbf{1})$ et $H(2n, \mathbf{1})$ sont naturellement graduées. En revanche la forme de contact standard α_0 n'est pas homogène relativement à cette graduation. Lorsque $n = 2m+1$, on considère la graduation de l'algèbre $\overline{S}V$ telle que les générateurs x_i, y_i soient homogènes de degré 1 et z homogène de degré deux. Relativement à cette graduation, α_0 est homogène et cela induit une graduation de $K(2m+1, \mathbf{1})$ et l'on a $K(2m+1, \mathbf{1}) = \oplus_{r\geq -2} K(2m+1, \mathbf{1})_r$.

3.2. Un critère de simplicité

Soit $G = \oplus_{-1\leq s\leq r} G_s$ une algèbre de Lie graduée. On notera que G_{-1} est abélienne, G_0 est une sous-algèbre de Lie et chaque composante G_s est un G_0-module.

LEMME 8.— *L'algèbre de Lie G est simple dès que $r > 0$ et que les quatre hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(i) *le commutant de G_{-1} dans G est réduit à G_{-1} ;*

(ii) *le G_0-module G_{-1} est simple ;*

(iii) *comme G_{-1}-module, G est engendrée par G_r ;*

(iv) *on a $[G_0, G_r] = G_r$.*

Preuve : Soit I un idéal non nul de G. Puisque $ad(G_{-1})$ agit de manière nilpotente, I contient un élément non nul x avec $ad(G_{-1})(x) = 0$. Par l'hypothèse (i), I coupe non trivialement G_{-1}. Par l'hypothèse (ii), I contient G_{-1}. L'hypothèse (iii) signifie que $[G_{-1}, G_{s+1}] = G_s$ pour tout $s < r$. Donc I contient toutes les composantes G_s avec $s < r$. Comme $r > 0$, I contient G_0, et par l'hypothèse (iv), I contient G_r. Donc $I = G$ et G est simple.

3.3. L'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$

PROPOSITION 9.— *L'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$ est de dimension np^n et elle est simple.*

L'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$ est souvent appelée *algèbre de Jacobson et Witt.*

Preuve : Identifions V^* aux champs de vecteurs à coefficients constants, i.e. de la forme $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \partial/\partial x_i$, où $a_i \in K$. Puisque $W(n, \mathbf{1}) = \overline{S}V \otimes V^*$, sa dimension est bien np^n. Pour prouver la simplicité de $W(n, \mathbf{1})$, nous allons vérifier qu'elle satisfait aux conditions du lemme 8. Notons que $W(n, \mathbf{1})_{-1} = V^*$.

La composante de plus haut degré $\overline{S}^{top}V$ de $\overline{S}V$ est $\overline{S}^{(p-1)n}V$. Il est facile de voir que le $U(V^*)$-module $\overline{S}V$ est engendré par $\overline{S}^{top}V$, et que seules les fonctions constantes sont annulées par V^*. Puisque $W(n, \mathbf{1}) = \overline{S}V \otimes V^*$, les conditions (i) et (iii) du lemme 8 sont satisfaites. Notons aussi que le degré maximal r de $W(n, \mathbf{1})$ est $n(p-1) - 1 \geq 1$.

Notons que $W(n, \mathbf{1})_0 = V \otimes V^* = \mathfrak{gl}(V)$. Comme $\mathfrak{gl}(V)$-modules, on a $W(n, \mathbf{1})_{-1} = V^*$ et $W(n, \mathbf{1})_1 \simeq (\wedge^n V)^{\otimes p-1} \otimes V^*$. Puisque ces deux $\mathfrak{gl}(V)$-modules sont simples et non triviaux, les conditions (ii) et (iv) sont aussi vérifiées. C.Q.F.D.

Remarque : Puisque la preuve n'utilise que l'inégalité $r = n(p-1) - 1 \geq 1$, $W(n, \mathbf{1})$ est aussi simple en caractéristique 3, et même en caractéristique 2 si $n \geq 2$.

3.4. La cohomologie de De Rham de X

Soit $\mathbf{m}$ l'idéal maximal de X. Bien que l'algèbre $K[X]$ soit locale, sa cohomologie de De Rham $H^*_{DR}(X)$ n'est pas triviale. Il existe un morphisme naturel d'anneau, l'opérateur de Cartier, $Car : \Omega^*_X \to H^*_{DR}(X)$ tel que $Car(f) = [f^p]$ et $Car(df) = [f^{p-1}df]$ pour tout $f \in K[X]$ (pour toute forme fermée β, nous notons par $[\beta]$ sa classe de cohomologie). À la différence du cas des variétés lisses, ici Car n'est pas un isomorphisme. Il est facile de montrer que :

LEMME 10.— *L'opérateur de Cartier induit un isomorphisme d'anneaux :*

$$C : \Omega^*_X/(\mathbf{m}\Omega^*_X) \to H^*_{DR}(X).$$

De manière explicite, $H^*_{DR}(X)$ est l'algèbre extérieure sur les générateurs $x_i^{p-1} dx_i$. En particulier, $\dim H^r_{DR}(X) = \binom{n}{r}$. Plus intrinsèquement, notons V^F l'espace vectoriel dont le groupe sous-jacent est V et où l'action de $\lambda \in K$ est la multiplication par λ^p. On a $H^*_{DR}(X) = \bigwedge V^F$.

Notons que $H^*_{DR}(X)$ est un W_X-module trivial, car la dérivée de Lie par ξ vaut $[d, i_\xi]$. En revanche, bien que le groupe $Aut(X)$ des automorphismes de X soit connexe, il agit non trivialement sur $H^*_{DR}(X)$. Par exemple pour tout $g = (g_{i,j}) \in GL(V)$, l'action de g sur V^F est déterminée par la matrice $(g^p_{i,j})$.

3.5. Un critère de “restreignabilité”

Pour toute forme $\beta \in \Omega_X$, l'algèbre de Lie $W_X(\beta)$ des champs de vecteurs qui préservent β est clairement restreinte. Lorsque β est fermée, la condition $\xi.\beta = 0$ est équivalente à la condition $i_\xi\beta$ est fermée. On dit alors que ξ *préserve strictement* β si $i_\xi\beta$ est exacte et l'on note $W'_X(\beta)$ l'ensemble des champs de vecteurs qui préservent strictement β. Par définition, l'application $W_X(\beta)/W'_X(\beta) \to H^*_{DR}(X)$, $\xi \mapsto [i_\xi\beta]$ est injective. Comme $H^*_{DR}(X)$ est un W_X-module trivial, on a $W'_X(\beta) \supset W_X(\beta)^{(1)}$.

Même si $W_X(\beta)$ est toujours restreinte, $W'_X(\beta)$ n'est pas toujours restreinte. Cependant, c'est le cas si β est exacte :

LEMME 11.— *Supposons que β soit exacte. Alors ξ^p appartient à $W'_X(\beta)$, pour tout $\xi \in W_X(\beta)$. En particulier, $W'_X(\beta)$ est une sous-algèbre de Lie restreinte de $W_X(\beta)$.*

Preuve : Choisissons une forme γ telle que $d\gamma = \beta$. On a $d\xi.\gamma = \xi.\beta = 0$. Donc $\xi^2.\gamma = di_\xi\xi.\gamma$ est exacte, et donc $\xi^p.\gamma$ est exacte. Or $\xi^p.\gamma = i_{\xi^p}\beta + di_{\xi^p}\gamma$, donc $i_{\xi^p}\beta$ est exacte, i.e. ξ appartient à $W'_X(\beta)$. C.Q.F.D.

3.6. L'algèbre de Lie $S(n, \mathbf{1})$, pour $n \geq 3$

Soit v_0 la forme volume standard de X. On note $\int_X : K[X] \to H^n_{DR}(X) \simeq K$ la forme linéaire $f \mapsto [f.v_0]$. Comme son noyau est l'analogue des fonctions de moyenne nulle, on le note $K_0[X]$. En fait f appartient à $K_0[X]$ si et seulement si elle ne contient pas le monôme $x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}$. La divergence (relative à v_0) d'un champ de vecteurs $\xi \in W_X$ est définie par $(\operatorname{div}\xi)v_0 = \xi.v_0$. Puisque $i_{W(n,\mathbf{1})}v_0 = \Omega_X^{n-1}$, une fonction f est la divergence d'un champ de vecteurs si et seulement si $\int_X f = 0$.

PROPOSITION 12 ($n \geq 3$).— (i) *L'algèbre de Lie $S(n, \mathbf{1})$ est de dimension* $1 + (n-1)p^n$.

(ii) *On a $W'_X(v_0) = S(n, \mathbf{1})^{(1)}$. Cette algèbre de Lie est simple, restreinte et de dimension* $(n-1)(p^n - 1)$.

Les algèbres de Lie de cette série sont appelées *spéciales*. L'algèbre de Lie $S(1, \mathbf{1})$ est de dimension 1. L'algèbre de Lie $S(2, \mathbf{1})$, isomorphe à $H(2, \mathbf{1})$, sera étudiée dans la suite avec les algèbres $H(2m, \mathbf{1})$.

Preuve : On calcule $\dim S(n, \mathbf{1})$ à l'aide de la suite exacte :

$$0 \to S(n, \mathbf{1}) \to W(n, \mathbf{1}) \to K_0[X] \to 0,$$

où la seconde application est la divergence. Puisque $i_{W(n,\mathbf{1})}v_0 = \Omega_X^{n-1}$, on a aussi une suite exacte :

$$0 \to W'_X(v_0) \to W_X(v_0) \to H^{n-1}_{DR}(X) \to 0,$$

où la seconde application est $\xi \mapsto [i_\xi v_0]$. On en déduit la dimension de $W'_X(v_0)$, et cette algèbre de Lie est restreinte par le lemme 11.

Il reste à montrer la simplicité de $W'_X(v_0)$. On pose $G = W'_X(v_0)$ et on veut vérifier que G satisfait aux quatre hypothèses du lemme 8. On a $G_{-1} = V^*$ et $G_0 = \mathfrak{sl}(V)$. L'assertion (i) a déjà été prouvée pour l'algèbre W_X, et l'assertion (ii) est triviale. Vérifions (iii) et (iv). L'application $\xi \mapsto i_\xi v_0$ identifie W'_X aux $(n-1)$-formes exactes. Il existe donc un morphisme naturel surjectif de W'_X-modules : $\psi : \Omega_X^{n-2} \to W'_X$. Or on a $\Omega_X^{n-2} \simeq \overline{S}V \otimes \bigwedge^2 V^*$ comme $G_0 \oplus G_{-1}$-module. Comme le G_1-module Ω_X^{n-2} est engendré par sa composante de plus haut degré, il en est de même de $W'_X(v_0)$, et le degré de cette composante est $r = n(p-1) - 2$. Ceci vérifie l'assertion (iii). Enfin le G_0-module G_r est isomorphe au G_0-module simple et non trivial $\bigwedge^2 V^*$, ce qui montre l'assertion (iv) (c'est ici que l'hypothèse $n \neq 2$ est utilisée).

Remarque : Puisque la preuve n'utilise que l'inégalité $r = n(p-1) - 2 \geq 1$, $S(n, \mathbf{1})$ est simple en toutes caractéristiques.

3.7. Algèbres de Poisson

On appelle *algèbre de Poisson* toute algèbre commutative unitaire A muni d'une structure d'algèbre de Lie (dont le crochet est noté $\{,\}$) qui satisfasse à l'identité de Leibniz $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

On suppose maintenant que $n = 2m$, on note x_1, y_1, $x_2, \ldots$ une base de V et on rappelle que $\omega_0 = \sum_{1 \leq i \leq m} dx_i \wedge dy_i$ est la forme symplectique standard. Il existe une structure naturelle de structure de Poisson sur $K[X]$, et le crochet $\{f, g\}$ de deux fonctions f, g, appelé *crochet de Poisson*, est défini par l'identité $df \wedge dg \wedge \omega_0^{(m-1)} = \{f, g\}\omega_0^{(m)}$ (ce qui est bien défini car $\omega_0^{(m)}$ est la forme volume standard sur X). De manière explicite, on a :

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i \leq m} f_{x_i} g_{y_i} - g_{x_i} f_{y_i},$$

où la notation h_x signifie $\partial/\partial x h$.

PROPOSITION 13.— *On a $K[X]^{(1)} = K_0[X]$ et l'algèbre de Lie $K_0[X]/K$ est simple (et de dimension $p^{2m} - 2$).*

Preuve : Pour toute fonction f, notons H_f le champ de vecteurs tel que $H_f.g = \{f, g\}$ pour tout $g \in K[X]$. On peut aussi définir H_f par l'identité $df = i_{H_f}\omega$, donc H_f préserve la forme symplectique ω_0. Comme H_f préserve la forme volume $v_0 = \omega_0^{(m)}$, on a $H_f.K[X] \subset K_0[X]$ et on a donc $K[X]^{(1)} \subset K_0[X]$. Comme $\{x_1, y_1\} = 1$, on a aussi $K \subset K[X]^{(1)}$. Donc l'egalité $K[X]^{(1)} = K_0[X]$ résultera de la simplicité de $K_0[X]/K$, ce que nous allons maintenant prouver.

Posons $G = K_0[X]/K$. Il existe une graduation naturelle de G telle que $G_s = K_0[X]_{s+2}$ pour tout $s \geq -1$. Lorsque nous identifions G à une sous-algèbre de W_X, G_0 s'identifie à $\mathfrak{sp}(V)$ et $G_{-1} \simeq V$ aux champs à coefficients constants. Pour prouver la simplicité de G, nous allons vérifier qu'elle satisfait aux quatre assertions du lemme 8.

L'assertion (i) a déjà été vérifiée pour W_X, et l'assertion (ii) est triviale. On a déjà vérifié que le plus grand degré de $K[X]$ est $m(p-1)$ et que l'on a $G_{-1}.K[X]_s = K[X]_{s-1}$ pour tout $s \leq m(p-1)$. Comme $K_0[X] = \oplus_{s<m(p-1)} K[X]_s$, on obtient $G_{-1}.K_0[X]_s = K_0[X]_{s-1}$ pour tout $s < m(p-1)$. Par conséquent le plus grand degré r de G est $2m(p-1)-3$, et l'on a $[G_{-1}, G_{s+1}] = G_s$ pour tout $s < r$. Ceci vérifie l'assertion (iii). Comme G_r est isomorphe à V comme G_0-module, l'assertion (iv) du lemme 8 est vérifiée. Donc G est simple. C.Q.F.D.

Remarque : Puisque la preuve n'utilise que l'inégalité $2m(p-1)-3 \geq 1$, $K_0[X]/K$ est aussi simple en caractéristique 3, et même en caractéristique 2 si $2m \geq 4$.

Nous voulons aussi établir que $K_0[X]/K$ est restreinte, ou de manière équivalente que $K_0[X]$ est "restreignable". La stratégie que l'on va suivre est de se ramener au cas $m = 1$.

Le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux algèbres de Poisson A et B est muni d'une structure d'algèbre de Poisson. Le crochet de Poisson de $A \otimes B$ est défini par $\{a \otimes b, a' \otimes b'\} = \{a, a'\} \otimes bb' + aa' \otimes \{b, b'\}$, pour tous $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Nous dirons qu'une algèbre de Poisson A est *bonne* si et seulement si :

(i) On a $x^p \in \{A, A\}$ pour tout $x \in A$.

(ii) Pour tout $x \in A$, il existe $y \in \{A, A\}$ tel que $ad(x)^p = ad(y)$,

LEMME 14.— *Soient A, B deux algèbres de Poisson.*

(i) *On a $\{A \otimes B, A \otimes B\} = \{A, A\} \otimes B + A \otimes \{B, B\}$.*

(ii) *Si A et B sont bonnes, alors $A \otimes B$ est bonne.*

Preuve : Il est clair que $\{A \otimes B, A \otimes B\} \subset \{A, A\} \otimes B + A \otimes \{B, B\}$. Par ailleurs l'algèbre de Lie dérivée de $A \otimes B$ contient $\{A \otimes B, A \otimes K\} = \{A, A\} \otimes B$ ainsi que $\{A \otimes B, K \otimes B\} = A \otimes \{B, B\}$, d'où l'égalité.

Supposons que A et B soient bonnes. Il est clair que, pour tout $x \in A \otimes B$, x^p appartient à $\{A, A\} \otimes \{B, B\}$ qui est inclus dans $\{A \otimes B, A \otimes B\}$. Il s'agit maintenant de vérifier que :

(*) pour tout $x \in A \otimes B$, il existe $y \in \{A \otimes B, A \otimes B\}$ tel que $ad(x)^p = ad(y)$. Par l'identité de Jacobson (théorème 1), on a $ad(x_1 + x_2)^p = ad(x_1)^p + ad(x_2)^p + ad(J_p(x_1+x_2))$. Or $J_p(x_1+x_2)$ est un commutateur, donc $J_p(x_1+x_2) \in \{A\otimes B, A\otimes B\}$ pour tous x_1, $x_2 \in A\otimes B$. Donc il suffit de vérifier (*) pour un système de générateurs de l'espace vectoriel $A\otimes B$. En particulier, il suffit de le vérifier pour les x de la forme $a \otimes b$.

Soient $a \in A$, $X \in \{A, A\}$, $b \in B$ et $Y \in \{B, B\}$ tels que $ad(a)^p = ad(X)$, $ad(b)^p = ad(Y)$. On a $ad(a \otimes b) = M_a \otimes ad(b) + ad(a) \otimes M_b$ où M_a, M_b désignent la multiplication par a, b. Comme les quatre opérateurs M_a, M_b, $ad(a)$ et $ad(b)$ commutent, on a :

$$ad(a \otimes b)^p = M_{a^p} \otimes ad(b)^p + ad(a)^p \otimes M_b^p.$$

Or $ad(a^p) = ad(b^p) = 0$. D'où :

$$ad(a \otimes b)^p = ad(X \otimes b^p + a^p \otimes Y).$$

Par hypothèse, $X \otimes b^p + a^p \otimes Y$ est bien dans $\{A\otimes B, A\otimes B\}$, ce qui prouve le lemme 14.

PROPOSITION 15.— *Pour tout $x \in K[X]$, il existe $y \in K_0[X]$ tel que $ad(x)^p = ad(y)$. En particulier $K_0[X]/K$ est restreinte.*

Preuve : Par le lemme 14, on se ramène au cas $m = 1$. Rappelons que $K[X] = \overline{S}V$. Pour tout $k < p$, $\overline{S}^k V$ est linéairement engendré par les éléments de la forme v^k où $v \in V$. Donc il existe une base B de $K[X]$ tel que tout élément $f \in B$ est de l'un des deux types suivants :

(i) $f = v^k$ pour un certain $v \in V$, ou

(ii) f est homogène de degré ≥ 4.

En utilisant l'identité de Jacobson, il suffit de prouver que $ad(f)^p$ est intérieure pour tout $f \in B$. En fait, on a $ad(f)^p = 0$ pour tout $f \in B$. Dans le premier cas, $f = v^k$, on a $H_f = kv^{k-1}H_v$. Comme $H_v.v = 0$, on a $H_f^p = k^p v^{p(k-1)} H_v^k = 0$ car $H_v^p = 0$. Dans le second, $ad(f)$ est un opérateur homogène de degré ≥ 2, donc $ad(f)^p$ est homogène de degré $\geq 2p$. Or la différence entre le deux degré de $K[X]$ est bornée par $2(p-1)$, donc $ad(f)^p = 0$.

Remarque : La preuve a utilisé $p > 3$, mais le résultat est aussi vrai pour $p = 2$, 3.

3.8. L'algèbre de Lie $H(2m, \mathbf{1})$

Soit ω_0 la forme symplectique standard sur X. Par définition de $W'_X(\omega_0)$, pour tout $\xi \in W'_X(\omega_0)$, il existe $f \in K[X]$ avec $i_{xi}\omega = df$. Notons $W''_X(\omega_0)$ l'ensemble des $\xi \in W'_X(\omega_0)$ tel que $i_{xi}\omega = df$ avec $\int_X f = 0$. Il est clair que $W''_X(\omega_0)$ est un idéal de $W_X(\omega_0)$. Rappelons la notation $H(2m, \mathbf{1}) = W_X(\omega)$.

PROPOSITION 16.— (i) *Les algèbres de Lie $W''_X(\omega_0) \subset W'_X(\omega_0) \subset H(2m, \mathbf{1})$ sont restreintes, et de dimension $p^{2m} - 2$, $p^{2m} - 1$ et $p^{2m} + 2m - 1$.*

(ii) *Si $m = 1$, $H(2m, \mathbf{1})^{(1)} = W'_X(\omega_0)$, $H(2m, \mathbf{1})^{(2)} = W''_X(\omega_0)$ et $H(2m, \mathbf{1})^{(2)}$ est simple.*

(iii) *Si $m > 1$, $H(2m, \mathbf{1})^{(1)} = W''_X(\omega_0)$ et $H(2m, \mathbf{1})^{(1)}$ est simple.*

Preuve : Reprenons les notations et résultats de l'alinéa précédent. L'application $f \in K[X] \mapsto H_f$ induit un isomorphisme $K_0[X]/K \simeq W''_X(\omega_0)$. Par les propositions 13 et 15, l'algèbre de Lie W''_X est simple, restreinte et de dimension $p^{2m} - 2$. Par le lemme 8, W'_X est restreinte. Les dimensions de $W'_X(\omega_0)$ et $W_X(\omega_0)$ se calculent en utilisant que $W''_X(\omega_0)$ est un idéal de codimension 1 de $W'_X(\omega_0)$ et que l'application $W_X(\omega_0)/W'_X(\omega_0) \to H^1_{DR}(X), \xi \mapsto [i_\xi\omega_0]$ est un isomorphisme. Il ne reste plus qu'à calculer la série dérivée de $H(2m, \mathbf{1})$, ou ce qui revient au même la série dérivée de $W_X(\omega_0)/W''_X(\omega_0)$.

Considérons d'abord le cas $m \neq 1$. Notons que les isomorphismes

$$W'_X(\omega_0)/W''_X(\omega_0) \simeq K[X]/K_0[X] \text{ et } W_X(\omega_0)/W'_X(\omega_0) \simeq H^1_{DR}(X)$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués, à un décalage par 2 près (car ω_0 est homogène de degré 2). Donc $W_X(\omega_0)/W''_X(\omega_0)$ est une algèbre de Lie graduée, et ses deux composantes sont de degré $2m(p-1) - 2$ et $p - 2$. Pour qu'une algèbre de Lie graduée $L = L_a \oplus L_b$ avec $0 < a < b$ ne soit pas commutative, il est nécessaire que $2a = b$. Donc si $m \neq 1$, $W_X(\omega_0)/W''_X(\omega_0)$ est commutative, et l'on a donc $H(2m, \mathbf{1})^{(1)} = W''_X(\omega_0)$.

Pour $m = 1$, il est nécessaire de faire un calcul direct. Une base de $W_X(\omega_0)/W''_X(\omega_0)$ est $x_1^{p-1}\partial/\partial y_1$, $y_1^{p-1}\partial/\partial x_1$ et $H_{x_1^{p-1}y_1^{p-1}}$, et il est facile de voir que

$$[x_1^{p-1}\partial/\partial y_1, y_1^{p-1}\partial/\partial x_1] = -H_{x_1^{p-1}y_1^{p-1}},$$

ce qui achève la preuve. C.Q.F.D.

Remarque : On établit facilement que, pour tout $\xi \in H(2m, \mathbf{1})$, on a $\xi^p \in H(2m, \mathbf{1})^{(\infty)}$ (c'est encore vrai pour $p = 3$, et même $p = 2$ si $m > 1$).

3.9. Un autre critère de simplicité

Pour prouver la simplicité des algèbres de contact, nous aurons besoin d'un critère légèrement différent. Soit $G = \oplus_{-2\leq s\leq r} G_s$ une algèbre de Lie graduée. On pose $G^- = G_2 \oplus G_1$.

LEMME 17 ($p \geq 3$).— *Faisons les hypothèses suivantes :*

(i) *Le commutant de G^- dans G est réduit à G_{-2},*

(ii) $\dim G_{-2} = 1$,

(iii) *Comme G^--module, G est engendré par G_r,*

(iv) *Il existe $h \in [G_{-2}, G_2]$ tel que $ad(h)(x) = nx$ pour tout $x \in G_n$.*

Sous les hypothèses précédentes, on a alors :

(i) *Si $r \neq 0 \bmod p$, l'algèbre de Lie est simple.*

(ii) *Si $[G,G]_r = 0$, alors $[G,G] = \oplus_{-2\leq s<r} G_s$ et $[G,G]$ est simple.*

Preuve : Supposons d'abord que $r \neq 0 \bmod p$, et soit I un idéal non nul de G. Comme $ad(G^-)$ agit de manière nilpotente, I contient un vecteur non nul x avec $ad(G^-)(x) = 0$. Par les hypothèses (i) et (ii), I contient G_{-2}. L'hypothèse (iv) implique que I contient h, et donc aussi $G_{-1} = [h, G_{-1}]$ et $G_r = [h, G_r]$. Comme I contient G^- et G_r, il contient le G^--module engendré par G_r. Par l'hypothèse (iii), $I = G$. Donc G est simple.

Supposons maintenant que $[G,G]_r = 0$, et posons $G' = \oplus_{s<r} G_s$. On a $G' \supset [G,G]$, donc G' est une sous-algèbre de Lie. Puisque $G_2 \neq 0$, on a $r \geq 2$. Comme $[h, G_r] = 0$, on a $r = 0 \bmod p$. En particulier $r \geq 3$ et $G_2 \subset G'$. Soit I un idéal non nul de G'. Par la même preuve qu'avant, on montre que $G^- \subset I$, $h \in I$ et puisque $[h, G_{r-1}] = G_{r-1}$ et $[h, G_{r-2}] = G_{r-2}$, on a aussi $G_{r-1} \oplus G_{r-2} \subset I$. Donc I contient le G^--module engendré par $G_{r-1} \oplus G_{r-2}$.

Or l'hypothèse (iii) implique que l'on a $G_s = [G_{-1}, G_{s+1}] + [G_{-2}, G_{s+2}]$ pour tout $s < r$. Donc G' est engendré par $G_{r-1} \oplus G_{r-2}$ comme G^--module, et on a donc $I = G'$. Donc G' est simple et $G' = [G,G]$. C.Q.F.D.

3.10. L'algèbre de Lie $K(2m+1,\mathbf{1})$

On suppose que $n = 2m+1$. Soit α_0 la forme de contact standard sur X. On rappelle que $K(2m+1,\mathbf{1}) = \{\xi \in W(2m+1,\mathbf{1}) | \alpha_0 \wedge \xi.\alpha_0 = 0\}$. On notera $K_0(2m+1,\mathbf{1})$ l'ensemble des champs de contacts $\xi \in K(2m+1,\mathbf{1})$ tels que $\int_X i_\xi \alpha_0 = 0$. En général, $K_0(2m+1,\mathbf{1})$ n'est pas une sous-algèbre de Lie.

PROPOSITION 18.— (i) *L'algèbre de Lie restreinte $K(2m+1,\mathbf{1})$ est de dimension p^{2m+1}, et lorsque $m+2 \neq 0$ (mod. p), elle est simple.*

(ii) *Si $m+2$ est divisible par p, alors on a $K(2m+1,\mathbf{1})^{(1)} = K_0(2m+1,\mathbf{1})$. De plus $K(2m+1,\mathbf{1})^{(1)}$ est simple, restreinte et de dimension $p^{2m+1}-1$.*

Avant de prouver la proposition 18, nous allons décrire plus explicitement la structure d'algèbre de Lie de $K(2m+1,\mathbf{1})$.

LEMME 19.— (i) *L'application $I : K(2m,\mathbf{1}) \to K[X], \xi \mapsto i_\xi\alpha_0$ est bijective.*

(ii) *Lorsque $m+2 = 0 \,\mathrm{mod.}\, p$, $K_0(2m+1,\mathbf{1})$ est un idéal de codimension 1.*

Preuve : Comme α_0 est une forme de contact, W_X se décompose en somme de deux $K[X]$-modules : $W_X = \alpha_0^\perp \oplus K[X].E$, où $\alpha_0^\perp$ l'ensemble des champs de vecteurs ξ tels que $i_\xi\alpha_0 = 0$ et où E est le *champ d'Euler*, i.e. l'unique champ de vecteurs tel que $i_E\alpha_0 = 1$ et $i_E d\alpha_0 = 0$. Tout champ de vecteurs ξ se décompose de manière unique en $\xi = \xi_1 + \xi_2$, où $x_1 \in \alpha_0^\perp$ et ξ_2 est proportionnel à E. De même toute 1-forme β s'écrit de manière unique comme $\beta = i_{\xi_1}d\alpha_0 + g\alpha_0$, où $\xi_1 \in \alpha_0^\perp$ et $g \in K[X]$.

Prouvons l'injectivité de I. Soit $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in K(2m+1,\mathbf{1})$ avec $I(\xi) = 0$. Donc par hypothèse $\xi_2 = 0$. De plus $\xi.\alpha_0 = i_{\xi_1}d\alpha_0$. Or $\xi.\alpha_0$ est proportionnel à α_0. Donc $\xi_2 = 0$, d'où $\xi = 0$.

Prouvons maintenant la surjectivité de I. Soit $f \in K[X]$. Posons $\xi_2 = f.E$. Il existe un unique $\xi_1 \in \alpha_0^\perp$ et une unique $g \in K[X]$ tels que : $df = i_{\xi_1}d\alpha_0 + g\alpha_0$. Posons $\xi = -\xi_1 + \xi_2$. On a $\xi.\alpha = i_{x_1}d\alpha_0 + di_{x_2}\alpha_0 = i_{x_1}d\alpha_0 + df = -g\alpha_0$, donc ξ appartient à $K(2m+1,\mathbf{1})$. De plus $I(\xi) = f$, d'où la surjectivité de I.

Vérifions maintenant l'assertion (ii). Soit $\xi \in K(2m,\mathbf{1})$. Puisque $\alpha_0 \wedge \xi.\alpha_0 = 0$, il existe une fonction, notée $\mathrm{Div}(\xi)$ telle que $\xi.\alpha_0 = \mathrm{Div}(\xi)\alpha_0$. Comparons sa divergence de contact $\mathrm{Div}(\xi)$ à sa divergence ordinaire. On notera que $\xi.d\alpha_0 = d\xi.\alpha_0 = Div(\xi)d\alpha_0 - \alpha_0 dDiv(\xi)$. Or $\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^{(m)}$ est la forme volume standard, d'où :

$$\begin{aligned}
\xi.v_0 &= (\xi.\alpha_0) \wedge (d\alpha_0)^{(m)} + \alpha_0 \wedge (\xi d\alpha_0) \wedge (d\alpha_0)^{(m-1)} \\
&= \mathrm{Div}(\xi).v + \alpha_0 \wedge d\mathrm{Div}(\xi)\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^{(m-1)} \\
&= (m+1)\mathrm{Div}(\xi).
\end{aligned}$$

Donc $(m+1)\mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{div}(\xi)$.

Pour $\xi, \eta \in K(2m+1,\mathbf{1})$, on a :

$$\begin{aligned}
\xi.I(\eta) &= \xi.i_\eta\alpha_0 \\
&= i_{[\xi,\eta]}\alpha_0 + i_\eta\xi.\alpha_0 \\
&= I([\xi,\eta]) + \mathrm{Div}(\xi)I(\eta).
\end{aligned}$$

D'où $I([\xi,\eta]) = \xi.I(\eta) - \mathrm{Div}(\xi)I(\eta)$.

Donc lorsque $m+2$ est divisible par p, on a : $\mathrm{Div}\,\xi = -\mathrm{div}\,\xi$, et on obtient :

$$I([\xi,\eta]) = \mathrm{div}\,\theta(\eta)\xi,$$

ou de manière équivalente $K(2m+1,\mathbf{1})^{(1)} \subset K_0(2m+1,\mathbf{1})$, ce qui prouve l'assertion (ii) (en notant que tout champ de vecteurs est combinaison linéaire de champs de la forme $f\zeta$, où $f \in K[X]$ et $\zeta \in K(2m+1,\mathbf{1})$, on obtient même $K(2m+1,\mathbf{1})^{(1)} = K_0(2m+1,\mathbf{1})$).

Remarque : Le calcul précédent montre que lorsque $m+1$ est divisible par p, tout champ de contact préserve la forme volume.

La bijection $I : K(2m+1,\mathbf{1}) \to K[X]$ induit une structure d'algèbre de Lie sur $K[X]$ et on notera par $\{f,g\}$ le crochet correspondant. Un calcul direct montre que :

$$\{f,g\} = \sum_{1\le i\le m} f_{x_i}g_{y_i} - g_{x_i}f_{y_i} + g_z\Big(-2f + \sum_{1\le i\le m} x_i f_{x_i} + y_i f_{y_i}\Big) - f_z\Big(-2g + \sum_{1\le i\le m} x_i g_{x_i} + y_i g_{y_i}\Big).$$

À la différence du crochet de Poisson, le crochet de contact n'est pas une bidérivation, puisqu'il contient aussi des termes linéaires. Notons aussi que I n'est pas un morphisme de $K(2m+1,\mathbf{1})$-modules, puisque l'on a $\xi.I(\eta) = I(\xi), I(\eta) + I(\eta)\mathrm{Div}\,\xi$ pour tout $\xi,\eta \in K(2m+1,\mathbf{1})$.

Preuve de la proposition 18 : Nous allons appliquer la proposition 17 pour vérifier la simplicité de $K(2m+1,\mathbf{1})$ (si $m+2 \neq 0$ mod.p) ou de $K_0(2m+1,\mathbf{1})$ (dans le cas contraire). Posons $G = K[X]$. Rappelons que G est une algèbre de Lie graduée, et l'isomorphisme $I : K(2m+1,\mathbf{1}) \to K[X]$ respecte la graduation à un décalage de 2 près. On $G_{-2} = K$, $G_{-1} = \oplus_{1\le i\le m} K.x_i \oplus K.y_i$ et la composante de degré maximale est $G_r = K.z^{p-1}x_1^{p-1}y_1^{p-1}\ldots$, où $r = (2m+1)(p-1)-2$.

L'élément 1 de G_{-2} agit comme $-2\partial/\partial z$, et les éléments x_i et y_i comme $\partial/\partial y_i - x_i\partial/\partial z$ et $-\partial/\partial x_i - y_i\partial/\partial z$. Donc il est clair que G est engendré par G_r comme G^--module, et que le commutant de G^- est G_{-2}. Les hypothèses (i), (ii), (iii) du lemme 16 sont donc vérifiées.

Vérifions maintenant l'hypothèse (iv). Posons $h = -z$. Comme h agit comme $-2 + 2z\partial/\partial z + \sum_{1\le i\le m} x_i\partial/\partial x_i + y_i\partial/\partial y_i$, h agit sur G_n comme n. De plus $4h = \{1, z^2\}$, donc $h \in [G_{-2}, G_2]$, donc h satisfait à l'hypothèse (iv).

Si $m+2 \neq 0$ mod.p, alors $r \neq 0$ mod.p et par le lemme 17 l'algèbre de Lie $K(2m+1,\mathbf{1})$ est simple.

Supposons maintenant $m + 2 = 0 \bmod. p$. Par le lemme 19, on a $[G,G] \subset K_0(2m+1, \mathbf{1})$ et par définition on a $K_0(2m+1,\mathbf{1}) = \oplus_{s<r} G_s$. À nouveau le lemme 17 nous permet de conclure que $K_0(2m+1,\mathbf{1})$ est simple.

4. LE THÉORÈME DE BLOCK ET DE WILSON

Rappelons que K désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. En sections 2 et 3, nous avons décrit certaines algèbres de Lie simples restreintes. Le théorème qui suit a été conjecturé par Kostrikin et Shafarevitch [**KS**] en 1966 et prouvé par Block et Wilson en 1988 [**BW1**][**BW3**].

THÉORÈME 20 (Block et Wilson).— *Supposons $p > 7$. Alors toute algèbre de Lie simple restreinte est isomorphe à une algèbre classique ou à une algèbre de type Cartan restreinte.*

Le cas $p = 11$ présente déjà des difficultés spéciales (mais résolues). Les experts conjecturent que le résultat de Block et Wilson est valable aussi en caractéristique 7, mais les difficultés techniques ne sont pas toutes résolues pour $p = 7$. Pour $p = 5$, ce résultat ne peut se généraliser, car il y a une algèbre de Lie restreinte simple de dimension 125 qui n'est ni classique ni de type Cartan : c'est l'algèbre de Lie de Melikian, voir [**Me**], [**St7**]. Les experts conjecturent qu'en caractéristique 5, il n'y a pas d'autres exceptions. À ce jour, il n' y a pas de conjecture raisonnable pour $p = 3$ et $p = 2$.

5. DÉFAUT AU LEMME DE DARBOUX ET PREMIERS EXEMPLES D'ALGÈBRES DE LIE NON RESTREINTES

Pour illustrer la complexité de la classification des algèbres de Lie simples non restreintes, nous allons d'abord décrire un problème voisin, c'est-à-dire la classification des formes volumes et symplectiques sur X. Une version plus générale et plus technique de cette section fera l'objet d'une publication séparée. On peut aussi comparer les conclusions de cette section avec [**BGOSW**].

5.1 Notations pour la section 5

On reprendra les notations de la section 3. En particulier $K[X]$ désigne l'anneau $K[x_1,\dots,x_n]/(x_1^p,\dots,x_n^p)$. Pour $r \geq 0$, notons $K[X]_{(r)}$ le sous-espace engendré par les monômes de degré $\geq r$, i.e. $K[X]_{(r)}$ est l'ensemble des fonctions qui s'annulent au moins r fois à l'origine. On notera $\mathbf{m} = K[X]_{(1)}$ l'idéal maximal de $K[X]$ et $V = \mathbf{m}/\mathbf{m}^2$. Pour toute forme fermée β, on note $W_X(\beta)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ξ tels que $\xi.\beta = 0$, et $W'_X(\beta)$ la sous-algèbre des champs de vecteurs tels que $i_\xi\beta$ soit exacte.

5.2. Lemme de Darboux

Notons $Aut(X)$ le groupe des automorphismes de la variété X. Un automorphisme de X est de la forme $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto A(x) + \phi(x)$, où $A \in GL(n)$ et où $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots)$, avec $\phi_1, \phi_2, \ldots \in K[X]_2$. Le groupe $Aut(X)$ est un groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\oplus_{r\geq 0} W(n,\mathbf{1})_r$. Son radical unipotent $Aut_1(X)$ est l'ensemble des automorphismes de la forme $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto x + \phi(x)$ et l'on a $Aut(X)$, produit semi-direct de $GL(V)$ par $Aut_1(X)$.

Le groupe $Aut(X)$ agit naturellement sur l'espace des formes Ω_X^*, respecte l'idéal maximal m et commute à d. Il agit donc naturellement sur Ω_X^*/m et sur la cohomologie de X. Bien que $Aut(X)$ soit connexe, son action sur $H_{DR}^*(X)$ est non triviale (c'est un phénomème typique de la caractéristique finie : son action infinitésimale sur $H_{DR}^*(X)$ est triviale). En revanche, le groupe $Aut_1(X)$ agit trivialement sur $H_{DR}^*(X)$. Par le lemme 10, il existe un isomorphisme naturel d'anneaux, $C : \Omega_X^*/m \to H_{DR}^*(X)$ (il ne s'agit pas d'un morphisme d'algèbres, car il n'est pas linéaire). Par conséquent le groupe $GL(V) = Aut(X)/Aut_1(X)$ agit sur deux copies de $\bigwedge V$, via les isomorphismes $\bigwedge V = \Omega_X^*/m$ et sur $\bigwedge V = C^{-1}H_{DR}^*(X)$. Ces deux actions sont les actions naturelles de $GL(V)$ sur $\bigwedge V$.

Bien que l'algèbre $K[X]$ soit locale, elle ne satisfait pas au lemme de Darboux : il existe des formes volumes et des formes symplectiques (lorsque $n = 2m$) qui ne sont pas conjuguées aux formes standard. En fait les formes standards sont exactes, et il existe des formes volumes ou symplectiques qui ne soient pas exactes.

Soit β une forme fermée. Notons $\psi(\beta) \in \bigwedge V \oplus \bigwedge V$ le couple (β_1, β_2) tel que $\beta_1 = \beta$ modulo $\mathbf{m}\Omega_X^*$ et $\beta_2 = C^{-1}[\beta]$. Il est clair que si deux formes fermées β, β' sont conjuguées par $Aut(X)$, alors $\psi(\beta)$ et $\psi(\beta')$ sont conjuguées sous $GL(V)$.

LEMME 21.— *Soient β, β' deux formes volumes ou deux formes symplectiques sur X. Alors β et β' sont conjuguées par $Aut(X)$ si et seulement si $\psi(\beta)$ et $\psi(\beta')$ sont conjuguées sous $GL(V)$.*

Preuve : Posons $r = 2$ si β est une forme symplectique, et $r = n$ si β est une forme volume. Supposons que $\psi(\beta)$ et $\psi(\beta')$ soient conjugués par $GL(V)$, et montrons que β et β' sont conjuguées. Identifions Ω_X^r à $K[X] \otimes \bigwedge^r V$. Décomposons β et β' en composantes homogènes : $\beta = \sum_{t\geq 0} \beta_t$ et $\beta' = \sum_{t\geq 0} \beta'_t$, où β_t, $\beta'_t \in K[X]_t \otimes \bigwedge^r V$. Quitte à conjuguer par $GL(V)$, on peut supposer que $\beta_0 = \beta'_0$ et que $\beta' - \beta$ est exacte.

Soit $s \geq 1$ un entier tel que $\beta'_t = \beta_t$ pour tout $t < s$. On veut montrer qu'il existe un conjugué β'' de β tel que $\beta''_t = \beta_t$ pour tout $t < s+1$ et $\beta'' - \beta$ soit encore exacte. Par définition d'une forme volume ou symplectique, $i_{W_X}\beta_0 = \Omega_X^{r-1}$, donc $W_X.\beta_0 = d\Omega_X^{r-1}$. Il existe donc un champ de vecteurs $\xi \sum_{1\leq i\leq n} f_i\partial/\partial x_i$ tel que $\xi.\beta_0 = \beta_s - \beta'_s$. On peut de plus supposer que chaque f_i est homogène de degré $s+1$. Soit Φ l'automorphisme $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1 + f_1, x_2 + f_2, \ldots)$ et posons $\beta'' = \phi\beta'$. On vérifie facilement que β'' coïncide avec β jusqu'à l'ordre s. Comme $\Phi \in Aut_1(X)$, il agit trivialement sur $H^*_{DR}(X)$ et $\beta'' - \beta$ est encore exacte.

En répétant cette procédure, et en notant que toute composante de degré $> (p-1)n$ est nulle, on conjugue β' et β par un automorphisme de X.

5.3. Remarques sur les algèbres filtrées

Une *algèbre de Lie filtrée* est une algèbre de Lie L avec une filtration décroissante $L = L_{(1)} \supset L_{(0)} \subset L_{(1)} \ldots$ telle que $[L_r, L_s] \subset L_{r+s}$. Le gradué associé à L, i.e. l'espace vectoriel ${}^{gr}L = \oplus_{r\geq -1} L_{(r)}/L_{(r+1)}$, est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Il est facile de voir que L est une déformation de ${}^{gr}L$. Par conséquent toute propriété satisfaisant à un principe de semi-continuité et vérifiée pour ${}^{gr}L$ est aussi vérifiée pour L : par exemple si ${}^{gr}L$ est simple, ou si son centre est trivial, ou si ${}^{grL} = [{}^{gr}L, {}^{gr}L]$, L satisfait à la même propriété. On a aussi : $({}^{gr}L)^{(n)} \subset^{gr} (L^{(n)})$, pour tout $n \geq 1$. Cependant, ${}^{gr}L$ peut être "restreignable" sans que L le soit (en revanche, si ${}^{gr}L$ a un centre trivial et si L est "restreignable", alors ${}^{gr}L$ est "restreignable"). Donnons un critère de simplicité d'une algèbre filtrée :

LEMME 22.— *Soit L une algèbre de Lie filtrée, et soit L' un idéal avec $L' \supset L^{(\infty)}$. Supposons que $({}^{gr}L)^{(\infty)}$ est simple, et de codimension N, et que l'une des hypothèses suivantes soit satisfaite :*

(i) *Si L' est de codimension N, ou*

(ii) *Si L' est de codimension $N-1$, de centre trivial et admet une forme bilinéaire invariante et non dégénérée.*

Alors $L' = L^{(\infty)}$ et $L^{(\infty)}$ est simple.

Preuve : On a ${}^{gr}L' \supset ({}^{gr}L)^{(\infty)}$. Sous l'hypothèse (i), on a donc $L' = L^{(\infty)}$ et $L^{(\infty)}$ est simple. Assumons maintenant l'hypothèse (ii). Soit $I \neq q0$, ${}^{gr}L'$ un idéal de ${}^{gr}L'$. Puisque $({}^{gr}L)^{(\infty)}$ est simple et de codimension 1 dans ${}^{gr}L'$ on a $I = ({}^{gr}L)^{(\infty)}$ (auquel cas I est de codimension 1), ou bien $I \cap ({}^{gr}L)^{(\infty)} = 0$ (auquel cas I est de dimension 1). Or L' ne peut contenir un idéal J de codimension 1 (car sinon $J \supset [L, L]$ et son orthogonal est central), ni de dimension 1 (car son orthogonal serait de codimension 1). Donc L' est simple, et $L' = L^{(\infty)}$. C.Q.F.D.

L'algèbre de Lie $W(n, \mathbf{1})$ a une filtration naturelle :

$$W(n, \mathbf{1}) = W(n, \mathbf{1})_{(-1)} \supset W(n, \mathbf{1})_{(0)} \supset \dots,$$

où $W(n, \mathbf{1})_{(r)}$ est l'ensemble des champs de vecteurs qui s'annulent au moins $r+1$ fois à l'origine, i.e. à coefficients dans $K[X]_{(r+1)}$. Cette filtration induit aussi une filtration de $S(n, \mathbf{1})$ et de $H(2m, \mathbf{1})$ (lorsque $n = 2m$). Les algèbres de contact ont aussi une filtration, mais qui est définie par un procédé un peu différent.

5.4. Formes volumes sur X

Posons $v_1 = du_1/u_1 \wedge \dots du_n/u_n$, où $u_i = 1 + x_i$. Il est facile de voir que $[v_1] \in H^n_{DR}(X)$ est non nulle. Par conséquent, v_1 n'est pas conjuguée sous $Aut(X)$ à la forme volume sandard v_0. D'après le lemme précédent toute forme volume sur X est conjuguée à v_0 ou à λv_1, où $\lambda \in K$. Par conséquent, il n'existe que deux algèbres de Lie spéciales sur X, à savoir $W_X(v_0) \simeq S(n, \mathbf{1})^1$ et $W_X(v_1)$.

L'algèbre $W_X(v_1)$ est restreinte. Comme v_1 n'est pas exacte, nous ne pouvons pas appliquer le lemme 8. En fait l'algèbre de Lie $W'_X(v_1)$ n'est pas restreinte comme le montre le lemme suivant.

LEMME 23 ($n \geq 2$).— *On a $W'_X(v_1) = W_X(v_1)^{(1)}$, et l'algèbre de Lie $W_X(v_1)^{(1)}$ est simple, non restreinte et de dimension $(n-1)p^{n-1}$.*

Preuve : Prouvons d'abord que $W'(v_1)$ n'est pas restreinte. Posons $\xi = u_2 u_1 \partial/\partial u_1$. On a $i_{x_i} v' = du_2 \wedge du_3/u_3 \wedge \dots du_n/u_n = d(u_2 \wedge du_3/u_3 \wedge \dots du_n/u_n)$, donc $\xi \in W'(v_1)$. Notons que $u_1 \partial/\partial u_1 u_1^k = k u_1^k$. Donc $(u_1 \partial/\partial u_1)^p u_1^k = k^p u_1^k = k u_1^k$, donc $(u_1 \partial/\partial u_1)^p = u_1 \partial/\partial u_1$. D'où $\xi^p = u_2^p u_1 \partial/\partial u_1 = u_1 \partial/\partial u_1$. Or $i_{\xi^p} v' = du_2/u_2 \wedge du_3/u_3 \wedge \dots du_n/u_n$ n'est pas exacte, et donc ξ^p n'appartient pas à $W'(v_1)$. Ainsi $W'(v_1)$ n'est pas restreinte (ni "restreignable", car son centre est trivial).

Prouvons maintenant la simplicité de $W'_X(v_1)$ pour $n \geq 3$. Posons $L = W_X(v_1)$, $L' = W'_X(v_1)$. Notons que $W_X(v_1)$ s'identifie à l'espace des $n-1$ formes fermées et $W'_X(v_1)$ s'identifie à l'espace des formes exactes. En particulier, $\dim L = \dim S(n, \mathbf{1})$ et $\dim L' = \dim S(n, \mathbf{1})^1$. On en déduit que ${}^{gr}W_X(v_1) = S(n, \mathbf{1})$. Par le lemme 22, on obtient que $L' = [L, L]$ et que L' est simple.

La simplicité de $W'_X(v_1)$ pour $n = 2$ sera prouvée dans la section suivante.

5.5. Formes symplectiques

Supposons que $n = 2m$, et notons $x_1, y_1, \ldots, y_m$ les générateurs de $K[X]$. En utilisant le lemme on peut complètement classifier les formes symplectiques sur X. Pour $k \leq m$, considérons l'ensemble $C_{m,k}$ des k-uplets $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ où $\mu_i = (\lambda_i, m_i)$ appartient à $K \times \mathbf{Z}_{>0}$ et $\sum_i m_i = m$. On considère comme égaux deux k-uplets qui ne diffèrent que par une permutation simultanée des indices. On posera $C_m = \cup_k C_{m,k}$. En fait C_m est l'ensemble qui paramétrise naturellement les classes de conjugaison de matrices de taille m. Pour $\mu = (\lambda, r) \in K \times \mathbf{Z}_{>0}$, on pose $\operatorname{rk} \mu = r$ si $\lambda \neq 0$ et $\operatorname{rk} \mu = r - 1$ sinon. Le *rang* $\operatorname{rk} \mu_*$ d'un uplet $\mu_* = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in C_m$ est l'entier $\sum_i \operatorname{rk} \mu_i$.

LEMME 24.— *Il existe une bijection naturelle $\mu : \omega \mapsto \mu(\omega)$ des classes de conjugaison de formes symplectiques sur C_n.*

De plus le rang de $\mu(\omega)$ est le plus grand entier r tel que $[\omega^{(r)}] \neq 0$.

Preuve : D'après le lemme 21, les formes symplectiques β sur X sont classifiées par les classes de conjugaison de paires $(\beta_0, \beta_1) \in \bigwedge^2 V \oplus \bigwedge^2 V$, où β_0 est la réduction modulo m de β et $\beta_1 = C^{-1}[\beta]$. Notons que β_0 est une forme symplectique de $\bigwedge^2$, et on peut la ramener à une forme normale, et l'on notera par $< \mid >$ la forme symplectique linéaire correspondante sur V. Par conséquent les classes de conjugaison de formes symplectiques de X sont en bijection avec l'ensemble des orbites $\bigwedge^2 V$ sous le groupe $SP(V)$.

Pour un espace linéaire symplectique W, appelons endomorphisme antisymétrique toute application linéaire $A : W \to W$ telle que la forme $w_1, w_2 \in W \mapsto\ < Aw_1 | w_2 >$ soit antisymétrique. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ des paires (W, A) formées d'un espace linéaire symplectique $W \neq 0$ et d'un endomorphisme antisymétrique A. Pour (W_1, A_1), (W_2, A_2) dans $\mathcal{P}$, on définit leur somme directe $(W_1 \oplus W_2, A_1 \oplus A_2)$ de manière évidente. Une paire indécomposable est une paire qui n'est pas une somme directe. Les paires indécomposables (W, A) de dimension $2d$ sont faciles à classifier : l'endomorphisme A n'admet qu'une seule valeur propre λ, et la matrice nilpotente $N = A - \lambda$ a deux blocs de Jordan de taille d. On pose alors $\mu(W, A) = (\lambda, d)$.

Tout endomorphisme antisymétrique A de V se décompose en somme directe d'indécomposables $(V, A) = \oplus_{i \leq k} (W_i, A_i)$ et l'entier k et le k-uplet $(\mu(W_1, A_1)$, $(\mu(W_2, A_2), \ldots)$ décrivent exactement la classe de conjugaison de A sous $SP(V)$.

Or $\bigwedge^2 V$ s'identifie aux endomorphismes antiymétriques de V, d'où le premier résultat. De plus $\beta^{(m)}$ n'est pas exacte si et seulement si β_1 est symplectique, i.e. aucun des λ_i n'est nul. C.Q.F.D.

Soit $\lambda \in K^*$. Pour $(\lambda, r) \in K \times \mathbf{Z}_{>0}$, on pose $\lambda.(\lambda, r) = (\lambda^{1/p}\lambda, r)$ et pour tout k-uplet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ on pose $\lambda.\mu = ((\lambda.\mu_1, \dots, \lambda.\mu_k)$. Notons $\omega \mapsto \mu(\omega)$ la bijection entre les classes de conjugaison de formes symplectiques qui sont en bijection avec l'ensemble C_n. On a $\mu(\lambda\omega) = \lambda\mu\omega$.

Or $W_X(\omega) = W_X(\lambda\omega)$, donc les algèbres $W_X(\omega)$ sont paramétrisées C_n/K^*, c'est-à-dire par une réunion d'espaces projectifs. Plus précisément, notons C_n^{gen} l'ensemble des m-uplets $(\mu_1, \dots, \mu_m$ avec $\mu_i = (\lambda_i, 1)$ et $\lambda_i \neq 0$. Alors C_n^{gen}/K^* est isomorphe à KP^{m-1}, et $C_n \setminus C_n^{gen}/K^*$ est une réunion d'espaces projectifs de dimension $\leq m-2$. J'ignore si cette paramétrisation est bijective, mais il est très probable que les isomorphismes entre les algèbres de Lie correspondant à deux valeurs du paramètre soient exceptionnels. En bref on s'attend à une classification faisant apparaître $m-1$ paramètres.

Soit ω une forme symplectique sur X. Pour tout $f \in K[X]$, notons $\int_X f.\omega^{(m)}$ la classe de cohomologie de $f.\omega^{(m)}$, et notons $K_0^\omega[X]$ l'ensemble des fonctions $f \in K[X]$ telles que $\int_X f.\omega^{(m)}] = 0$, et $W_X''(\omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs ξ tels que $i_\xi\omega = df$ pour un certain $f \in K_0^\omega[X]$. Il est clair que l'on a $W_X''(\omega) \subset W_X'(\omega) \subset W_X(\omega)$. On a toujours $W_X(\omega)/W_X'(\omega) = H_{DR}^1(X)$, donc $W_X'(\omega)$ est de codimension $2m$. De plus on a $W_X''(\omega) = W_X'(\omega)$ si $[\omega^{(m)}] \neq 0$. Sinon, $W_X''(\omega)$ est de codimension 1 dans $W_X'(\omega)$.

LEMME 25.— *Soit ω une forme symplectique sur X.*

(i) *On a $W_X(\omega)^{(\infty)} = W_X''(\omega)$, et cette algèbre est simple, mais n'est restreinte que si ω est conjugué à ω_0.*

(ii) *La dimension de $W_X(\omega)^{(\infty)}$ est $p^{2m}-2$ si $\omega^{(m)}$ est exacte, ou $p^{2m}-1$ sinon.*

(iii) *Si $\operatorname{rk}\mu(\omega) \neq m-1$, on a $W_X(\omega)^{(1)} = W_X''(\omega)$.*

(iv) Si $\operatorname{rk}\mu(\omega) \neq m-1$, on a $W_X(\omega)^{(1)} = W_X'(\omega)$ et $W_X(\omega)^{(2)} = W_X''(\omega)$.

Preuve : Nous n'allons que prouver les deux premières assertions. On a toujours $W_X(\omega)^{(1)} \subset W_X'(\omega)$ et $W_X(\omega)^{(2)} \subset W_X''(\omega)$. Donc l'identité $W_X(\omega)^{(\infty)} = W_X''(\omega)$ résultera de la simplicité de $W_X''(\omega)$ que nous allons maintenant prouver.

Notons que $K[X]$ a une structure d'algèbre de Poisson, et $K_0^\omega[X]$ est idéal relativement à sa structure d'algèbre de Lie.

Supposons d'abord que $\omega^{(m)}$ soit exacte. On a alors $K \subset K_0^\omega[X]$. Comme ${}^{gr}(K_0^\omega[X]/K) \simeq K_0[X]/K = H(2m, \mathbf{1}^{(\infty)}$, l'algèbre de Lie $K[X]/K$ est simple par la proposition 16 et le lemme 22. Comme $W_X''(\omega) \simeq K_0^\omega[X]/K$, cette algèbre de Lie est simple.

Supposons maintenant que $\omega^{(m)}$ ne soit pas exacte. Il est clair que l'application bilinéaire $f, g \in K[G] \mapsto \int_X f.\omega^{(m)} \in H_{DR}^{2m}(X) \simeq K$ est une forme bilinéaire non dégénérée. Puisque $\int_X 1.\omega^{(m)} \neq 0$, la restriction de cette forme bilinéaire à $K_0^\omega[X]$ est non dégénérée. Posons $L = W_X(\omega)$ et $L' = W'_X(\omega) = W''_X(\omega)$. Puisque L' est isomorphe à $K_0^\omega[X]$, l'algèbre de Lie L' admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée. Par la proposition 16, les algèbres filtrées L et L' satisfont aux hypothèses du lemme 22. Donc $L' = W''_X(\omega)$ est simple. C.Q.F.D.

5.6. Exemples d'algèbres hamiltoniennes non restreintes

Pour finir, nous allons décrire toutes les algèbres de Lie $W_X(\omega)^{(\infty)}$ telles que $\mu(\omega)$ soit de rang maximal, c'est-à-dire telles que $\omega^{(m)}$ ne soit pas exacte.

Posons $E = \mathbf{F_p}^{2m}$, et soit $B : E \times E \to K, \alpha, \beta \mapsto < \alpha|\beta >$ une forme bilinéaire alternée. On considère l'algèbre de Poisson $\mathcal{H}^B$ de base $(E_\alpha)_{\alpha\in E}$ et dont la structure de Poisson est donnée par $E_\alpha E_\beta = E_{\alpha+\beta}$, $E_\alpha, E_\beta =< \alpha|\beta > E_{\alpha+\beta}$.

Il est clair que le sous-espace $\mathcal{H}_0^B$ de base $(E_\alpha)_{\alpha\neq 0}$ est une sous-algèbre de Lie.

LEMME 26.— (i) *L'algèbre de Lie $\mathcal{H}_0^B$ est isomorphe à $W_X(\omega)^{(\infty)}$ pour une certaine forme symplectique ω telle que $[\omega^{(m)}] \neq 0$.*

(ii) *Pour toute forme symplectique ω sur X avec $[\omega^{(m)}] \neq 0$, il existe une forme bilinéaire alternée B telle que $W_X(\omega)^{(\infty)} \simeq \mathcal{H}_0^B$.*

L'assertion (i) est évidente. Nous n'allons pas prouver l'assertion (ii), mais simplement indiquer que cela résulte facilement du résultat suivant (théorème d'isogénie de Lang) : pour tout $M \in GL(m, K)$, il existe $N \in GL(m, K)$ avec $M.N = N^F$, où N^F désigne la matrice dont les coefficients sont les puissances p-ièmes des coefficients de N.

Le groupe $K^* \times GL(E)$ agit narurellement sur l'espace des formes alternées $B : E \times E \to K$ et, si B, B' sont conjuguées par ce groupe, les algèbres de Lie $\mathcal{H}_0^B$ et $\mathcal{H}_0^{B'}$ sont clairement isomorphes. Puisque le groupe $GL(E)$ est fini, les algèbres de Lie $\mathcal{H}_0^B$ sont paramétrées par une famille à $2m(2m-1)-1$ paramètres. Or les classes d'isomorphismes des algèbres $\mathcal{H}_0^B$ ne sont paramétrées que par $m-1$ paramètres. Donc il existe de nombreux isomorphismes non triviaux entre ces algèbres de Lie lorsque $2m \geq 4$.

6. ALGÈBRE DE TYPE CARTAN DE NIVEAU ARBITRAIRE

Nous avons déjà vu que l'on peut produire des algèbres simples non restreintes à partir de formes fermées non exactes. En fait les algèbres à puissance divisée fournissent aussi des algèbres de Lie non restreintes. La définition des algèbres de type Cartan générales est apparue tout d'abord dans **[Kc3]**, mais nous allons suivre celle de **[W1]**.

6.1. Algèbres à puissances divisées

Soit A une K-algèbre commutative locale d'idéal maximal M. Une structure de puissance divisée est une suite d'applications $\gamma_r : M \to A, f \mapsto f^{(r)}$ indexées par les entiers $r > 0$ telles que :

(i) $f^{(0)} = 1$ et $f^{(r)} \in M$ pour $r > 0$.

(ii) $f^{(1)} = f$

(iii)$(f+g)^r = \sum_{a+b=r} f^a g^b$

(iv) $f^{(r)} f^{(s)} = \frac{(r+s)!}{r!s!} f^{(r+s)}$

(v) $(hf)^r = h^r f^{(r)}$

(vi) $(f^{(s)})^{(r)} = \frac{(rs)!}{r!(s!)^r} f^{rs}$,

pour tous $f, g \in M$, $h \in A$ $r \geq 0$ et $s > 0$.

Notons qu'une structure de puissance divisée est entièrement définie par la seule application $\gamma_p : f \mapsto p^{(p)}$. En effet, les axiomes impliquent que l'on a :

(vi) $f^{(r)} = \frac{1}{r!} f^r$ dès que $r < p$,

(vii) $f^{(p^j)} = (f^{(p^{j-1})})^{(p)}$,

(viii) $f^{(r)} = \prod_{j\geq 0} (f^{(p^j)})^{(r_j)}$, si $r = \sum_{j\geq 0} r_j p^j$ où $0 \leq r_j < p$,

et la dernière formule peut s'écrire comme $\gamma_{(r)} = \prod_{j\geq 0} \frac{1}{r_j!} \gamma_p^{(j)}(f^{r_j})$. Dans une algèbre à puissance divisée A, on a $f^p = 0$ pour tout $f \in M$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Puisque V est un groupe, l'algèbre des fonctions polynomiales sur V, à savoir $S\,V^*$, est aussi une cogèbre. Le coproduit $\Delta : S\,V^* \to S\,V^* \otimes S\,V^*$ est défini par $\Delta F(u,v) = F(u+v)$ pour tout $F \in S\,V^*$. Donc $(S\,V^*)^*$ a une structure d'algèbre. Sur un corps de caractéristique 0, cette algèbre est une algèbre de séries formelles, car on a alors $(S^n\,V^*)^* = S^n V$ pour tout entier n. En caractéristique finie p, ce n'est plus le cas car on ne peut identifier les espaces des invariants et des co-invariants pour l'action du groupe symétrique S_n sur $V^{\otimes n}$. C'est pourquoi nous noterons $(S\,V^*)^*$ par $K[\hat{X}]$ et nous dirons que $(S\,V^*)^*$ est l'ensemble des fonctions sur la variété $\hat{X}$. En fait la variété $\hat{X}$ ou, si l'on préfère l'algèbre $K[\hat{X}]$, est munie de structures supplémentaires. Tout d'abord, puisque $K[\hat{X}]$ est un dual, $K[\hat{X}]$ est une algèbre topologique. De plus $K[\hat{X}]$ est muni d'une structure de puissances divisées que nous allons maintenant définir.

Notons que l'opérateur différentiel $\frac{1}{n!}(d/dt)^n : K[t] \to K[t]$ est bien défini : en effet $\frac{1}{n!}(d/dt)^n\, t^m = \binom{m}{n} t^{m-n}$. Pour tout $v \in V$ et $n \geq 0$, on définit l'élément $u^{(n)}$ de

$K[\hat{X}]$ par

$$u^{(n)}F = \frac{1}{n!}(d/dt)^n\, F(tu)|_{t=0}.$$

Soit $M = \prod_{n\geq 1}(S^n V^*)^*$ l'idéal maximal de $K[\hat{X}]$. Il est clair que M est topologiquement engendré par les éléments $u^{(n)}$ pour $u \in V$ et $n \geq 1$. Si $n \geq 1$ n'est pas une puissance de p, on a $(x+y)^n \neq x^n + y_n$ mod. p, i.e. il existe $a \neq 0, p$ tel que le coefficient de $x^a y^{n-a}$ dans le développement de $(x+y)^n$ soit non nul mod. p. Puisque $\binom{n}{a}u^{(n)} = u^{(a)}u^{(n-a)}$, on voit que M/M^2 est topologiquement engendré par les éléments $u^{(p^n)}$ pour $n \geq 0$ et $u \in V$.

L'application γ_p est donc uniquement définie par $\gamma_p(u^{(p^n)}) = u^{(p^{n+1})}$ si $u \in V$ et $\gamma_p(x) = 0$ si $x \in M^2$. Pour vérifier que γ_p est bien définie, il suffit d'observer que les applications $V \to M/M^2, u \mapsto u^{(p^n)}$ sont additives en u. L'application γ_p engendre une p-structure (pour laquelle la puissance divisée n-ième d'un élément u de V est bien $u^{(n)}$).

De manière explicite, choisissons une base $x_1, \ldots, x_n$ de V. Alors les éléments de $K[\hat{X}]$ s'écrivent comme des sommes formelles $\sum_\alpha a_\alpha x^{(\alpha)}$, où α parcourt l'ensemble des n-uplets $\alpha_1, \ldots, \ldots \alpha_n$ et $x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \ldots x_n^{(\alpha_n)}$. Pour tout $r \geq 0$, on note $K[\hat{X}]_{(r)}$ les fonctions $f = \sum_\alpha a_\alpha x^{(\alpha)}$ telles que $a_\alpha = 0$ dès que $\alpha_1 + cdots + \alpha_n < r$. Un isomorphisme Φ de $\hat{X}$ est un isomorphisme continu d'algèbre $\Phi : K[\hat{X}] \to K[\hat{X}]$ tel que $\Phi(f^{(p)}) = \Phi(f)^{(p)}$ pour tout $f \in m$.

Par définition, un champ de vecteurs de $\hat{X}$ est une dérivation continue ξ de $K[\hat{X}]$ telle que $\xi.f^{(p)} = f^{(p-1)}\xi.f$ pour tout $f \in m$. L'ensemble $W_{\hat{X}}$ des champs de vecteurs de $\hat{X}$ est une algèbre de Lie. Définissons l'opérateur continu $\partial/\partial x_i$ par la formule $\partial/\partial x_i\, x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1 - 1)} \ldots x_n^{(\alpha_n)}$. Alors $\partial/\partial x_i$ appartient à $W_{\hat{X}}$ et tout élément ξ de $W_{\hat{X}}$ est de la forme $\sum_{1\leq i\leq n} f_i \partial/\partial x_i$. Pour tout $r \geq 0$, on note $(W_{\hat{X}})_{(r)}$ l'espace des champs de vecteurs $\xi = \sum_{1\leq i \leq n} f_i \partial/\partial x_i$ avec $f_i \in K[\hat{X}]_{(r)}$. Notons tout de suite que $W_{\hat{X}}$ n'est pas restreinte. En effet, on a $\xi^p.f^{(p)} = f^{(p-1)}\xi^p.f + (\xi.f)^p$. En revanche la sous-algèbre $(W_{\hat{X}})_{(1)}$ est restreinte, et c'est l'algèbre de Lie du groupe pro-algébrique $Aut(\hat{X})$.

L'algèbre $\Omega^*_{\hat{X}}$ des formes de $\hat{X}$ est la $K[\hat{X}]$-algèbre topologique engendrée par les symboles $\mathrm{d}f$, pour $f \in K[\hat{X}]$ et soumise aux relations usuelles :

$\mathrm{d}fg = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$

$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f = 0,$

pour tous $f, g \in K[\hat{X}]$, ainsi qu'à la relation additionnelle :

$\mathrm{d}f^{(p)} = f^{(p-1)}\mathrm{d}f$, pour tout $f \in M$.

Comme pour une variété ordinaire, les opérations usuelles du calcul différentiel sur $\Omega^*_{\hat{X}}$ (dérivée de Lie, contractions, différentielle extérieure d) sont bien définies, mais pas l'opérateur de Cartier.

Si l'on note encore par $H^*_{DR}(\hat{X})$ la cohomologie du complexe $(\Omega^*_{\hat{X}}, d)$, on voit que la cohomologie de $\hat{X}$ est triviale : $H^0_{DR}(\hat{X}) = K$ et $H^i_{DR}(\hat{X}) = 0$ pour $i > 0$. Par conséquent, il n'y a pas d'obstruction au lemme de Darboux pour $\hat{X}$.

6.2. Algèbre de type Cartan de dimension infinie

L'algèbre de Lie $W_{\hat{X}}$ est notée $W(n)$. L'algèbre de Lie $W(n)$ admet une filtration $W(n) = W(n)_{(-1)} \supset W(n)_{(0)} \supset W(n)_{(1)} \ldots$, où $W(n)_{(i)}$ est le sous-espace topologiquement engendré par les champs de vecteurs $x^\alpha \partial/\partial x_i$ où $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \geq i+1$. Soit $v_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ la forme volume standard sur $\hat{X}$. L'algèbre de Lie $W_{\hat{X}}(v) = \{\xi \in W_{\hat{X}} | \xi.\alpha = 0\}$ sera aussi notée $S(n)$.

Lorsque $n = 2m$, on notera $x_1, y_1, x_2, \ldots y_n$ une base de V et soit $\omega = \sum_{1 \leq i \leq n} dx_i \wedge dy_i$ la forme symplectique standard. L'algèbre de Lie $W_{\hat{X}}(\omega) = \{\xi \in W_{\hat{X}} | \xi.\omega = 0\}$ sera notée $H(2m)$.

Lorsque $n = 2m+1$, on note $z, x_1, y_1, x_2, \ldots y_n$ une base de V et on pose $K(2m+1) = \{\xi \in W_{\hat{X}}) | \alpha \wedge \xi.\alpha = 0\}$, où $\alpha = dz + 1/2 \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \wedge dy_i - y_i dx_i$ est la forme de contact standard. De même, la condition $\alpha \wedge \xi.\alpha = 0$ signifie que $\xi.\alpha = f\alpha$ pour un certain $f \in K[\hat{X}]$.

Il est facile de montrer que les algèbres de dimension infinie $W(n)$, $S(n)$, $H(2m)$ et $K(2m+1)$ sont simples. Ce sont les *algèbres de type Cartan* de dimension infinie.

6.3. Définition des algèbres de type Cartan

Soit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ un n-uplet d'entiers positifs. On notera $F[n, \mathbf{m}]$ la sous-algèbre de dimension finie de $K[\hat{X}]$ engendrée par les monômes x^α avec $\alpha_i < p^{m_i}$. On pose aussi $W(n, \mathbf{m}) = \oplus_{1 \leq i \leq n} F[n, \mathbf{m}] \partial/\partial x_i$. Il est clair que $W(n, \mathbf{m})$ est une sous-algèbre de Lie de dimension $np^{m_1 + m_2 \cdots}$.

Soit Φ un isomorphisme de $\hat{X}$. Notons que Φ agit naturellement sur $W_{\hat{X}}$ et pour toute sous-algèbre de Lie L de $W_{\hat{X}}$ on note L^Φ sa conjuguée par Φ. On définit quatre séries d'algèbres de Lie $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ (ici Y est un symbole qui désigne W, S, H ou K) par :

$$Y(n, \mathbf{m}, \Phi) = Y(n) \cap W(n, \mathbf{m})^\Phi.$$

Pour un automorphisme Φ arbitraire, l'algèbre de Lie $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ peut être très petite, voire nulle. Considérons les deux assertions suivantes qui assurent que $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ est suffisamment grosse :

(A) Pour tout $i \leq n$, il existe $\xi_i \in Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ tel que $\xi_i = \partial/\partial x_i + \epsilon_i$, où $\epsilon_i \in (W_{\hat{X}})_{(1)}$.

(B) $Y(n, \mathbf{m}, \Phi) \cap W(n)_{(\delta_Y)} \neq 0$, où $\delta_Y = 3$ si $Y = K$ et $\delta_Y = 2$ autrement.

La condition (A) signifie que $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ engendre l'"espace tangent à l'origine".

DÉFINITION 27.— *Si l'algèbre de Lie $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)$ satisfait aux conditions (A) et (B), alors l'algèbre de Lie $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)^{(\infty)}$ est dite algèbre de Lie de la série de type Cartan.*

On peut maintenant expliquer la signification du symbole **1** déjà utilisé en section 3. On note **1** le n-uplet $(1, 1, \ldots)$. Il est clair que $Y(n, \mathbf{1}, Id)$ est l'algèbre de Lie notée $Y(n, \mathbf{1})$ en section 3. Comme en section 3, on peut montrer que les algèbres $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)^{(\infty)}$ sont simples. Elles satisfont à la propriété de compatibilité :

$$Y(n, \mathbf{m}, Id)^{(2)} \subset Y(n, \mathbf{m}, \Phi)^{(\infty)} \subset Y(n, \mathbf{m}, Id).$$

7. LA CLASSIFICATION DES ALGÈBRES SIMPLES

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de classification, annoncé par Strade et Wilson en 1991 [**SW**], et dont la preuve complète est basée sur de nombreux articles, en particulier les 7 articles de Strade [**St1-7**].

THÉORÈME 28 (Strade et Wilson).— *Supposons $p > 7$. Alors toute algèbre de Lie simple de dimension finie est isomorphe à une algèbre classique $\mathfrak{g}_K(I)$ ou à l'une des algèbres de type Cartan $Y(n, \mathbf{m}, \Phi)^{(\infty)}$.*

Comme dans le cas restreint, les experts conjecturent que ce résultat est valable aussi en caractéristique 7. Pour $p = 5$, ils conjecturent un résultat analogue, c'est-à-dire que toute algèbre de Lie simple est classique, de type Cartan ou dans la famille de Melikian [**Me**] (cette famille n'existe qu'en caractéristique 5). À ce jour, il n' y a pas de conjecture raisonnable pour $p = 3$ et $p = 2$.

8. TECHNIQUES DE PREUVES

Dans cette section, nous n'allons dire que quelques mots sur les techniques de preuve et les difficultés de la classification.

8.1. Sous-algèbre de Cartan

Soit L une algèbre de Lie. Une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre nilpotente égale à son normalisateur. Construire des sous-algèbres de Cartan est analogue à la caractéristique zéro. On choisit un élément générique x de sorte que $ad(x)$ ait le maximum de valeurs propres non nulles. Puis on montre que la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{h} = \{y \in L | ad(x)^N(y) = 0 \text{ pour } N \text{ assez grand}\}$$

est une sous-algèbre de Cartan. En caractéristique zéro, toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées (même si L n'est pas simple) et pour une algèbre simple toutes les sous-algèbres de Cartan sont ad-diagonalisables. En caractéristique finie les difficultés sont les suivantes :

(i) En général, les sous-algèbres de Cartan ne sont pas conjuguées : considérons par exemple $L = W(1, \mathbf{1}) = Der(K[x]/(x^p)$, et posons $u = 1 + x$. Les deux sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}_1 = K\frac{d}{dx}$ et $\mathfrak{h}_2 = K\frac{ud}{du}$ ne sont pas conjuguées. En effet il existe beaucoup de sous-algèbres de Lie L' avec $\mathfrak{h}_1 \subset L' \subset L$, alors que $\mathfrak{h}_2$ est une sous-algèbre de Lie maximale.

(ii) En général, les sous-algèbres de Cartan ne sont pas ad-diagonalisables. Par exemple la sous-algèbre de Lie de $S(2, \mathbf{1})$ engendrée par les champs de vecteurs $x_1^j x_2^j (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ pour $j = 1, 2 \ldots$ n'est pas ad-diagonalisable.

(iii) Si L est restreinte, il est facile de montrer que toute sous-algèbre de Cartan est ad-triangulable. Pour des algèbres de Lie simples non restreintes, c'est un résultat très difficile qui n'est vrai que si $p \geq 7$. Pour $p = 5$, ce n'est déjà plus vrai.

8.2. Construction de grosses sous-algèbres

Ce qui différencie les algèbres de Lie classiques des algèbres de type Cartan est la présence de très grosses sous-algèbres de Lie dans les algèbres de type Cartan. Pour une algèbre de Lie L, notons $c(L)$ la codimension minimale d'une sous-algèbre de Lie. Il existe des constantes $C < C'$ telles que :

$$C(\dim L)^{1/2} \leq c(L) \leq C'(\dim L)^{1/2}, \text{ pour toute algèbre simple classique} L.$$

Par contre, lorsque L parcourt l'ensemble des algèbres simples restreintes non classiques, on a :

$$c(L) \simeq \log_p \dim L, \text{ lorsque } \dim L \to \infty.$$

Enfin il existe des algèbres de Lie L simples non restreintes de dimension arbitrairement grande avec $c(L)$ fixé : par exemple $W(1, n)$ possède une sous-algèbre de codimension 1, tandis que $\dim W(1, n) = p^n$. En résumé, les algèbres de type Cartan possèdent de très grosses sous-algèbres de Lie maximales, et elles se distinguent des algèbres classiques par cette propriété.

Par conséquent, il est naturel de chercher à construire des grosses sous-algèbres. En fait si L_0 est une sous-algèbre de codimension n, on peut plonger L dans $W(n)$, car l'espace $Hom_{L_0}(U(L), K)$ a une structure d'algèbre commutative. Notons aussi que L a une filtration naturelle qui est définie inductivement par $L_{(-1)} = L$, $L_{(0)} = L_0$ et $L_{(k)} = \{x \in L | [x, L] \subset L_{(k-1)}\}$ pour $k \geq 1$. Néanmoins pour pouvoir tirer des informations de cette construction, il est nécessaire :

1) de partir avec de grosses sous-algèbres,

2) de pouvoir déterminer quand une algèbre filtrée est une algèbre de type Cartan ou une algèbre classique.

La notion d'éléments sandwich a été développée pour construire de grosses sous-algèbres. Les réponses au second point s'appellent les théorèmes de reconnaissance. Nous allons développer ces deux points dans les alinéas suivants.

8.3. Éléments sandwich

Soit L une algèbre de Lie. Un élément $x \in L$ est dit *élément sandwich* si $ad(x)^2 = 0$. Pour des algèbres classiques, il n'y a pas d'éléments sandwich non nuls x : par le théorème de Morozov, pour tout élément nilpotent x, il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$ qui contient x : on a donc $ad(x)^2(y) = x$ pour un certain $y \in L$.

Il est facile de vérifier que, pour tout élément sandwich y, l'exponentielle tronquée $1 + tad(x)$ est un groupe à un paramètre d'isomorphismes (ce fait requiert $p > 2$). Donc si y est un autre élément sandwich, $y + t[x, y]$ est également sandwich pour tout $t \in K$. Comme dans l'identité $ad^2(y + t[x, y]) = 0$, le terme dominant est $t^2 ad^2([x, y])$, $[x, y]$ est aussi un élément sandwich. Il s'ensuit que le sous-espace vectoriel engendré par les éléments sandwich est une sous-algèbre de Lie $S(L)$, appelée la sous-algèbre sandwich de L. Cette sous-algèbre de Lie n'est pas maximale, mais elle est un point de départ pour construire de grosses sous-algèbres.

Donnons-en un exemple. Partons de l'algèbre de Lie $L = W(1, 1)$ et posons $L_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$ pour $-1 \leq i \leq p - 2$. On a $[L_i, L_j] = (j - i) L_{i+j}$ si $i + j \leq p - 2$ et $[L_i, L_j] = 0$ sinon. L'algèbre $S(L)$ a pour base $(L_i)_{i \geq \frac{p+1}{2}}$. Le normalisateur de $S(L)$ est donc l'algèbre de Lie de codimension 1 engendrée par tous les L_i avec $i \geq 0$. On voit donc dans ce cas qu'on a un moyen naturel pour construire une grosse sous-algèbre.

8.4. Théorèmes de reconnaissance

Les algèbres classiques ont été caractérisées par Mills et Seligman. Soit L une algèbre de Lie contenant une sous-algèbre de Cartan H ad-diagonalisable. Pour tout

$\alpha \in H^* \setminus 0$ posons $L_\alpha = \{x \in L | ad(h)(x) = \alpha(h)x \text{ pour tout } h \in H\}$ et soit $\Delta = \{\alpha \in H^* \setminus 0 | L_\alpha \neq 0\}$. Par conséquent L se décompose en $L = H \oplus \oplus_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$. On rappelle l'hypothèse $p > 3$.

THÉORÈME 29 (Mills et Seligman [MS]).— *Supposons que :*

(i) $Z(L) = 0$ *et* $L^{(1)} = L$;

(ii) *pour tout* $\alpha \in \Delta$, $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ *est de dimension* 1 ;

(iii) *pour tout* α, $\beta \in \Delta$, *il existe* $k \in \mathbf{F_p}$ *tel que* $\alpha + k\beta \notin \Delta \cup \{0\}$.

Alors L est une somme directe d'algèbre de Lie simple classique.

Les hypothèses (i) et (ii) sont naturelles. Expliquons brièvement à quoi sert l'hypothèse (iii). Pour $\alpha \in \Delta$, posons $H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$. En fait le début de la preuve consiste à montrer que la sous-algèbre de Lie $L_\alpha \oplus H_\alpha \oplus L_{-\alpha}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$.

Le premier pas consiste à prouver que $\alpha(H_\alpha) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, on choisit $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ avec $[x, y] \neq 0$. Posons $h = [x, y]$. On a donc $\alpha(h) \neq 0$. Comme le centre de L est non nul, il existe $\beta \in \Delta$ avec $\beta(h) \neq 0$. Grâce à l'hypothèse (iii), on peut en outre supposer que $\beta + \alpha \notin \Delta$. Soit $v \in L_\beta$ un élément non nul. Comme $[x, v]$ appartient à $L_{\alpha+\beta} = 0$, on a $[x, v] = 0$. Pour tout $i \leq p - 1$, on pose $v_i = ad(y)^i(v)$. Il est clair que v_i appartient à $L_{\alpha+i\beta}$ et un calcul facile montre que $[x, v_i] = i\beta(h)v_{i-1}$, donc aucun des v_i n'est nul. Or v_{p-1} appartient à $L_{\beta+\alpha}$, ce qui contredit l'hypothèse (iii).

On peut donc choisir $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ avec $[x, y] \neq 0$, et l'algèbre de Lie engendrée par x et y est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Par des calculs analogues, on établit que $L_{\pm\alpha}$ est de dimension 1, et aussi que $L_{n\alpha} = 0$ pour $n \neq -1, 0$, ou 1.

Les théorèmes de reconnaissance des algèbres de type Cartan sont plus complexes. En fait ils utilisent une technique de filtration plus compliquée que celle décrite plus haut. Partons d'une algèbre de Lie L, d'une sous-algèbre $L_{(0)}$ et d'un $L_{(0)}$-sous-module $L_{(-1)} \supset L_{(0)}$ tel que $L_{(-1)}$ engendre L (auparavant, on n'avait considéré que le cas $L_{(1)} = L$). Cette condition est automatiquement satisfaite si $L_{(0)}$ est maximale. On construit une filtration $L_{(s)}$ de L comme suit : pour définir la partie négative de la filtration, on pose :

$$L_{(-2)} = L_{(-1)} + [L_{(-1)}, L_{(1)}],$$
$$L_{(-3)} = L_{(-2)} + [L_{(-1)}, L_{(-2)}], \ \ldots,$$
$$L_{(-(s+1)} = L_{(-s)} + [L_{(-1)}, L_{(-s)}].$$

Pour définir la partie positive de la filtration, on pose : $L_{(1)} = \{x \in L_{(0)} | [x, L_{(-1)}] \subset L_{(0)}\}$, $L_{(2)} = \{x \in L_{(1)} | [x, L_{(-1)}] \subset L_{(1)}\}$, ..., $L_{(s+1)} = \{x \in L_{(s)} | [x, L_{(-1)}] \subset L_{(s)}\}$. Cette filtration est appelée la *filtration standard* associée à la paire $(L_{(0)}, L_{(-1)})$.

THÉORÈME 30 (Kac **[Kc2]**, Wilson **[W1]**, Benkart, Gregory, Premets) ($p > 3$).— *Soit L une algèbre de Lie simple, et soit $(L_{(0)}, L_{(-1)})$ une paire telle que $L_{(0)}$ soit une sous-algèbre maximale et $L_{(-1)}/L_{(0)}$ soit un $L_{(0)}$-module simple. Soient s, s' les plus petits entiers tels que la filtration standard soit de la forme : $L = L_{(-s')} \supset \ldots \supset L_{(s)} \supset L_{(s+1)} = 0$. Posons $G =^{gr} L$, et supposons :*

((i) G_0 est une somme directe d'idéaux où chacun d'entre eux est une algèbre simple classique, abélienne ou isomorphe à $\mathfrak{gl}(pn)$, $\mathfrak{pgl}(pn)$, ou à $\mathfrak{sl}(pn)$.

(ii) *Pour tout $j \geq 0$, et tout $j \in G_{-j} \setminus 0$, $[x, G_1] \neq 0$,*

(iii) *$s' \leq s$.*

Alors L est une algèbre de Lie classique, une algèbre de type Cartan, ou une algèbre de Melikian si $p = 5$.

Pour des questions de taille de cet exposé écrit, nous n'avons pas décrit les techniques les plus sophistiquées développées par Strade et Wilson ces dernières années, comme la classification des 2-sections, le théorème de structure des 3-sections et les techniques de tores maximaux dans les p-enveloppes. On pourra se reporter à **[St7]** pour un exposé de survey.

BIBLIOGRAPHIE

[BGOSW] G.M. Benkart, T.B. Gregory, J.M. Osborn, H. Strade et R.L. Wilson - *Isomorphism classes of Hamiltonian Lie algebras.* In *Lie algebras*, Madison 1987, Springer. Lecture Notes in Math. **1373** (1989), 42-57.

[BOS] G.M. Benkart, J.M. Osborn et H. Strade - *Contributions to the classification of simple modular Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 227-252.

[BW1] R.E. Block et R.L. Wilson - *The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **81** (1984), 5271-5274.

[BW2] R.E. Block et R.L. Wilson - *Restricted simple Lie algebras.* In *Lie algebras and related topics* (Windsor, Ont., 1984), Amer. Math. Soc. CMS Conf. Proc. **5** (1986), 3-17.

[BW3] R.E. Block et R.L. Wilson - *Classification of the restricted simple Lie algebras*, J. Algebra **114** (1988), 115-259.

[Cn] E. Cartan, *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **26** (1909), 93-161.

[Cr] P. Cartier - *Une nouvelle opération sur les formes différentielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 426-428.

[J1] N. Jacobson - *Abstract derivation and Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 206-224.

[J2] N. Jacobson - *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **10** (1962).

[GM] I. M. Gelfand et O. Mathieu - *On the cohomology of the Lie algebra of hamiltonian vector fields*, J. of Funct. Anal. **108** (1992), 347-360.

[G] V. Guillemin - *Infinite dimensional primitive Lie algebra*, J. differential geometry **4** (1970), 257-282.

[Kc1] V. G. Kac - *Simple graded Lie algebras of finite growth*, Math. USSR Izv. **2** (1968), 1271-1311.

[Kc2] V. G. Kac - *The classification of the simple Lie algebras over a field with non-zero characteristic*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 385-408.

[Kc3] V. G. Kac - *Global Cartan pseudogroups and simple Lie algebras in characteristic* p (en russe), Usp. Math. Nauk 26 (1971), 199-200.

[Kz] N. M. Katz - *A conjecture in the arithmetic theory of differential equations*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 203-239.

[KS] A. I. Kostrikin et I. R. Shafarevitch - *Cartan pseudo-groups and Lie p-algebras*, Soviet Dokl. **7** (1966), 715-718.

[Ma] O. Mathieu - *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth*, Inv. Math. **108** (1992), 455-519.

[Me] G. M. Melikian -*Simple Lie algebras of characteristic* 5, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), 203-204.

[MS] W. H. Mills et G.B. Seligman -*Lie algebras of classical type*, J. Math. Mech. **6** (1957), 519-548.

[PS] A. Premet et H. Strade - *Simple Lie algebras of small characteristic*, I, Sandwich elements. J. Algebra **189** (1997), 419-480.

[Se1] G.B. Seligman - *On a class of semisimple restricted Lie algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 726-728.

[Se2] G.B. Seligman - *A survey of Lie algebras of characteristic p*, Report of a conference on linear algebras, National Academy of Sciences-National Research Council. **502** (1956), 24-32.

[Se3] G.B. Seligman - *Some remarks on classical Lie algebras*, J. Math. Mech. **6** (1957), 549-558.

[Stb] R. Steinberg - *Lectures on Chevalley groups.* Notes, Yale University (1967).

[St1] H. Strade - *The classification of the simple modular Lie algebras*, III. Solution of the classical case. Ann. of Math. **133** (1991), 577-604.

[St2] H. Strade - *The classification of the simple modular Lie algebras: a revised approach, Hadronic mechanics and nonpotential interactions*, Part 1 (Cedar Falls, IA, 1990), Nova Sci. Publ. (1992), 79-99.

[St3] H. Strade - *The classification of the simple modular Lie algebras*, II. The toral structure. J. Algebra **151** (1992), 425-475.

[St4] H. Strade - *The classification of the simple Lie algebras over algebraically closed fields with positive characteristic, Jordan algebras* (Oberwolfach 1992), de Gruyter (1994), 281-299.

[St5] H. Strade - *The classification of the simple modular Lie algebras, V. Algebras with Hamiltonian two-sections*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **64** (1994), 167-202.

[St6] H. Strade - *The classification of the simple modular Lie algebras. VI. Solving the final case*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 2553-2628.

[St7] H. Strade - *The classification of simple modular Lie algebras*, Preprint.

[SW] H. Strade et R. L. Wilson - *Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic*, Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 357-362.

[T1] J. Tits - Résumé de cours, annuaire du Collège de France (1980-1981), 75-86, et (1981-1982), 91-105.

[T2] J.Tits - *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*, Sém. Bourbaki, Exp. n° 700 (novembre 1988), Astérisque **177-178** (1989), 7-31.

[T3] J. Tits - *Group and group functors attached to Kac-Moody data*, Lecture Notes in Math. **1111**, Springer-Verlag (1985), 193-223.

[W1] R. L. Wilson - *A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic*, J. Algebra **40** (1976), 418-465.

[W2] R. L. Wilson - *Simple Lie algebras of type S*, J. Algebra **62** (1980), 292-298.

[W3] R. L. Wilson - *The classification problem for simple Lie algebras of characteristic p*. In *Algebra*, Proc. Conf. Carbondale 1980, Springer. Lecture Notes in Math. **848** (1981), 13-32.

Olivier MATHIEU

Université Louis Pasteur
IRMA
7, rue rené Descartes
67084 Strasbourg Cedex
mathieu@math.u-strasbg.fr

Université Paris 7
U.F.R. de mathématiques
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05