MICHEL BOILEAU

Uniformisation en dimension trois

Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 855, p. 137-174
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1998-1999__41__137_0>

Séminaire BOURBAKI
51ème année, 1998-99, n^o 855

Mars 1999

UNIFORMISATION EN DIMENSION TROIS

par **Michel BOILEAU**

INTRODUCTION

En 1977, W. Thurston a annoncé le théorème suivant :

Théorème de Thurston d'hyperbolisation.— *Soit M une variété compacte, orientable, de dimension trois. On suppose que toute sphère plongée S^2 borde une boule dans M et qu'il existe une surface orientable, de caractéristique d'Euler strictement négative, proprement plongée et dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de M. L'intérieur de la variété M admet une structure hyperbolique complète si et seulement si tout sous-groupe abélien $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ du groupe fondamental de M est conjugué à un sous-groupe du groupe fondamental d'une composante du bord de M.*

Ce théorème donne une condition simple sur la topologie d'une variété de dimension 3 pour que son intérieur admette une structure hyperbolique, c'est-à-dire une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle constante égale à -1. Il est au centre de beaucoup de résultats importants en dimension 3.

Un cas particulier important de ce théorème concerne une variété qui *fibre sur le cercle*, avec pour fibre une surface compacte orientable F et pour monodromie un difféomorphisme $\phi \in \mathit{Diff}^+(F)$ (cf. l'exposé de D. Sullivan [Su1]). La variété M ne dépend alors que de la classe de conjugaison de ϕ dans le groupe des difféotopies $\pi_0 \mathit{Diff}(F)$. La condition d'atoroïdalité est équivalente au fait que le difféomorphisme ϕ est *pseudo-Anosov* : son action sur l'ensemble des classes de conjugaison de lacets non triviaux dans $\pi_1(F)$ n'admet pas d'orbite périodique.

Le cas fibré peut alors s'énoncer sous la jolie forme suivante :

Théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées sur le cercle ([Th4] ; voir aussi [Ota1]).— *Soit M une variété compacte, orientable, de dimension 3, qui admet une fibration sur le cercle de monodromie ϕ. L'intérieur de M porte une métrique hyperbolique complète de volume fini si et seulement si la monodromie ϕ est pseudo-Anosov.*

Historique de la preuve. Dans ces notes [Th0] Thurston a établi les techniques et les résultats sur lesquels se fondent la preuve de son théorème d'hyperbolisation. En 1980, il a présenté un plan détaillé et précis de celle-ci dans des notes sur les conférences qu'il avaient données à Bowdoin [Th1] (cf. [Th2], [Mor1]). Dans [Th3, Th4, Th5] il a écrit en détail la première partie de sa preuve (cf. § 4.1 le *théorème de l'image bornée*), ainsi que la preuve du cas fibré sur le cercle. Ces articles présentent les résultats nécessaires pour la preuve, ne figurant pas dans les notes [Th0]. Le reste de la preuve (cf. § 4.2) devait alors être reconstituée à l'aide de [Th1] et des chapitres 8, 9 et 13 de [Th0] (cf. [Mor1]).

En 1985, les travaux de F. Bonahon sur les bouts des variétés hyperboliques [Bon] (cf. § 4.2) ont permis de simplifier la partie de la preuve utilisant les chapitres 8 et 9 de Thurston.

À la même époque J. Morgan et P. Shalen [MS1, MS2, MS3] ont donné une preuve différente, de nature plus algébrique, des résultats principaux de [Th3, Th5] (cf. § 4.1).

En suivant une approche complètement différente de celle de Thurston, C. McMullen [McM1, McM2, McM3] a donné en 1989 une preuve du *théorème du point fixe* (cf. § 4), qui est le cœur de la démonstration du théorème d'hyperbolisation des variétés qui ne fibrent pas sur le cercle. Cette approche trouve son origine dans l'observation par J. Hubbard d'un lien entre la conjecture de Kra, sur la norme de l'opérateur Théta associé au revêtement d'une surface de Riemann, et le théorème du point fixe de Thurston.

En utilisant les travaux de McMullen, J.P. Otal [Ota2] a écrit en 1996 une preuve complète du théorème d'hyperbolisation des variétés qui ne fibrent pas sur le cercle. Entre-temps, il avait donné une nouvelle preuve pour le cas des variétés fibrées dans [Ota1].

À la même époque M. Kapovich [Ka] a écrit lui aussi une preuve complète du théorème d'hyperbolisation pour les variétés qui ne fibrent pas sur le cercle, mais en reconstituant l'approche originale de Thurston.

Dans ce texte M désignera toujours une variété compacte orientable. De même une surface sera par définition compacte et orientable.

Une variété M de dimension 3 est *irréductible* si tout plongement de la sphère $S^2 = \partial B^3 \hookrightarrow M$ se prolonge en un plongement de la boule B^3 dans M.

La variété M est *atoroïdale* si tout sous-groupe abélien de rang 2 du groupe fondamental de M est conjugué à un sous-groupe *périphérique* (i.e contenu dans le groupe fondamental d'une composante du bord).

Ces deux conditions, irréductibilité et atoroïdalité, sont nécessaires pour que l'intérieur de M admette une structure hyperbolique complète. C'est une conséquence directe de l'irréductibilité du revêtement universel $\mathbb{H}^3$ et de la classification des sous-groupes abéliens d'un sous-groupe discret et sans torsion de $PSL_2(\mathbb{C})$.

Une surface F, proprement plongée dans la variété irréductible M, est *essentielle* si le groupe fondamental de chaque composante connexe de F s'injecte dans celui de M (F est dite alors *incompressible*) et qu'aucune composante connexe de F ne borde une boule ou ne peut être déformée dans le bord ∂M.

Une variété M est *hakenienne* si elle est compacte, irréductible et qu'elle contient une surface essentielle. Le théorème d'hyperbolisation est donc un théorème d'uniformisation des variétés hakeniennes atoroïdales, dont le groupe fondamental n'est pas virtuellement abélien.

Il existe beaucoup d'exemples importants de variétés hakeniennes : toute variété irréductible ayant un premier groupe d'homologie infini est hakenienne. En particulier toute variété irréductible à bord non vide est hakenienne. Un exemple typique est l'extérieur d'un nœud dans $\mathbb{S}^3$.

Le théorème d'hyperbolisation de Thurston s'applique à l'extérieur d'un nœud non trivial dans $\mathbb{S}^3$ qui n'est ni un nœud torique, ni un nœud satellite. C'est R. Riley [Ril], qui le premier a explicitement construit des exemples de structures hyperboliques sur le complémentaire de certains nœuds et entrelacs dans $\mathbb{S}^3$.

L'existence d'une structure hyperbolique complète de volume fini sur le complémentaire de ces nœuds est cruciale dans la preuve de la conjecture de Smith sur le redressement des actions non libres sur $\mathbb{S}^3$ d'un groupe cyclique fini. Pour la preuve de cette conjecture nous renvoyons aux actes édités par H. Bass et J. Morgan [BaM], ainsi qu'à l'exposé de J. Morgan [Mor2].

La condition d'être hakenienne n'est pas du tout nécessaire pour que l'intérieur de M porte une structure hyperbolique. C'est une conjecture toujours ouverte qu'elle peut être remplacée par la condition (cette fois-ci nécessaire) que le groupe fondamental de M est infini.

La variété hyperbolique fermée de Seifert et Weber [WS], obtenue en recollant par des isométries les faces d'un dodecaèdre hyperbolique d'angles dièdres $\frac{2\pi}{3}$, n'est pas hakenienne.

Le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston montre comment construire beaucoup de variétés fermées, hyperboliques qui ne sont pas hakeniennes. Partant d'une variété irréductible M, ne contenant aucune surface fermée essentielle et à bord un tore incompressible, Thurston déforme la structure hyperbolique complète (donnée par le théorème d'hyperbolisation) en une structure hyperbolique non complète, mais dont le complété est topologiquement une variété fermée, obtenue en collant un tore solide le long du bord ∂M.

Théorème de chirurgie hyperbolique ([Th0, Ch. 5]).— *Soit M une variété hakenienne atoroïdale et $T^2 \subset \partial M$ une composante torique incompressible. Excepté pour un nombre fini de recollements, une variété, obtenue en collant un tore solide le long du tore T^2, admet une structure hyperbolique complète.*

Pour plus de détails sur ce théorème nous renvoyons aux notes de Thurston [Th0, Ch. 5] et à l'exposé de M. Gromov [Gro].

L'importance des variétés atoroïdales dans l'étude des variétés de dimension 3 a été clairement mise en évidence par les travaux de Jaco-Shalen [JS] et Johannson [Jo]. Leurs résultats montrent que toute variété hakenienne M admet une décomposition (canonique), le long d'une famille finie (peut-être vide) de tores plongés, essentiels, disjoints et deux à deux non parallèles, en sous-variétés atoroïdales ou admettant une fibration en cercles (fibration de Seifert) ou en tores.

Ce résultat a donné le cadre topologique de la conjecture de géométrisation ci-dessous. Celle-ci est due à Thurston et domine depuis plus de 20 ans toute la topologie en dimension trois.

Les morceaux fibrés de la décomposition de Jaco-Shalen et Johannson peuvent être munis d'une métrique riemannienne homogène, complète, unique et localement isométrique à l'un des six modèles suivants : les géométries à courbure constante $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{E}^3$, la géométrie produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, et enfin trois géométries fibrées modelées sur les groupes de Lie Nil, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ et Sol.

Thurston [Th8] (voir aussi [Sco3]) a montré, qu'avec la géométrie hyperbolique, ce sont là les seules géométries homogènes que puisse admettre une variété irréductible et compacte de dimension 3. Ceci l'a conduit à formuler la conjecture suivante, qu'il a donc démontrée pour les variétés hakeniennes :

Conjecture de géométrisation (Thurston).— *L'intérieur d'une variété compacte, orientable, irréductible, de dimension 3, admet une décomposition canonique le long d'une famille finie de tores essentiels, en sous-variétés possédant une structure géométrique homogène complète.*

Cette conjecture englobe la conjecture de Poincaré, pour laquelle elle privilégie une approche beaucoup plus géométrique que topologique.

Sortant du cadre des variétés hakeniennes et des méthodes classiques de dimension 3, les travaux de P. Scott [Sco1, Sco2], P. Tukia [Tu], G. Mess [Me], D. Gabai [Ga1], A. Casson et D. Jungreis [CJ] ont permis de montrer qu'une variété irréductible, de groupe fondamental infini, admet une fibration de Seifert si et seulement si son groupe fondamental a un centre non trivial. Une conséquence de ce résultat est :

Théorème du tore ([CJ],[Ga1]).— *Soit M une variété de dimension 3, fermée, orientable et irréductible. Si la variété M a un groupe fondamental infini et qu'elle n'est pas atoroïdale, soit elle contient un tore plongé et essentiel, soit elle admet une fibration de Seifert.*

Ce résultat ramène la conjecture de géométrisation de Thurston à deux conjectures d'uniformisation, ne faisant plus intervenir que les géométries sphériques et hyperboliques. La première conjecture est une extension de la conjecture de Poincaré, englobant la conjecture de Smith sur le redressement des actions libres des sous-groupes finis de $Diff^+(\mathbb{S}^3)$.

Conjectures d'uniformisation.— *Soit M une variété orientable, fermée et irréductible :*

1. (Poincaré-Smith) *La variété M admet une métrique sphérique si et seulement si elle a un groupe fondamental fini.*

2. (Thurston) *La variété M admet une structure hyperbolique si et seulement si elle a un groupe fondamental infini et qu'elle est atoroïdale.*

À ce jour, ces conjectures restent largement ouvertes. Elles sont a priori indépendantes l'une de l'autre. C'est une idée fondamentale du programme de Thurston que d'avoir su lier ces deux conjectures en montrant que dans certains cas la géométrie sphérique peut être obtenue à partir d'un effondrement d'une suite de métriques hyperboliques singulières sur la variété considérée.

En 1981 Thurston [Th2] a annoncé le théorème suivant qui a pour conséquence immédiate la conjecture de Smith pour les actions cycliques finies, non libres sur $\mathbb{S}^3$.

Théorème de redressement des symétries ([Th6]).— *Soit M une variété de dimension* 3 *fermée, orientable, irréductible et atoroïdale. Soit $f \in Diff^+(M)$ un difféomorphisme périodique non trivial.. Si f n'agit pas librement sur M, la variété M admet une métrique sphérique ou hyperbolique invariante par f.*

Cet énoncé est un cas particulier du théorème des orbifolds de Thurston [Th6], qui montre l'analogue naturel de sa conjecture de géométrisation pour une orbifold compacte irréductible et dont le lieu de ramification est de dimension ≥ 1. Nous renvoyons à [BS] et [Th0, Ch. 13] pour la notion d'orbifold en général.

Dans le théorème ci-dessus, l'orbifold apparaît naturellement comme le quotient $\mathcal{O}$ de la variété M par l'action engendrée par le difféomorphisme f. Le point de départ de la preuve de ce théorème est là encore le théorème d'hyperbolisation qui permet de se ramener au cas où le complémentaire $\mathcal{O} - \Sigma$ de l'image Σ des points fixes de f admet une structure hyperbolique complète. On montre alors que soit cette structure hyperbolique peut être déformée en une structure hyperbolique dont le complété est topologiquement l'orbifold $\mathcal{O}$, soit l'orbifold $\mathcal{O}$ admet une structure sphérique. Pour plus de détails nous renvoyons à [BoP] et [CHK].

Nous achevons ce panorama de résultats sur l'uniformisation des variétés de dimension 3 par les résultats récents de D. Gabai [Ga2, Ga3], et D. Gabai, R. Meyerhoff, N. Thurston [GMT], qui eux aussi sortent du cadre des variétés hakeniennes. Une conséquence de leurs travaux est un théorème de rigidité hyperbolique, qui généralise en dimension 3 le théorème de rigidité de Mostow [Mos].

Théorème de rigidité hyperbolique ([GMT]).— *Une variété orientable fermée de dimension* 3 *admet une structure hyperbolique si et seulement si elle admet un revêtement fini qui a le type d'homotopie d'une variété hyperbolique.*

Voici un corollaire immédiat de ce théorème et du théorème d'hyperbolisation :

Corollaire.— *Si une variété orientable atoroïdale et fermée admet un revêtement fini qui est une variété hakenienne, elle admet une structure hyperbolique.*

La conjecture de Waldhausen suivante implique donc la conjecture de géométrisation de Thurston pour les variétés fermées, orientables et de groupe fondamental infini :

Conjecture du revêtement (Waldhausen).— *Toute variété fermée, orientable, irréductible et de groupe fondamental infini, admet un revêtement fini qui est une variété hakenienne.*

Cette conjecture est largement ouverte, même dans le cas d'une variété hyperbolique. On espère en fait qu'il existe toujours un revêtement fini ayant un premier groupe d'homologie infini.

Dans la preuve de beaucoup des résultats présentés dans cette introduction, le théorème d'hyperbolisation de Thurston joue un rôle central. On peut le considérer comme le résultat fondateur du programme de géométrisation des variétés de dimension 3, développé par Thurston. C'est pourquoi la suite de cet exposé lui est entièrement consacrée.

La preuve du théorème d'hyperbolisation, comme beaucoup de théorèmes profonds en dimension 3, utilise de façon essentielle l'hypothèse que la variété M est hakenienne. L'existence d'une surface essentielle F, proprement plongée dans M, permet de découper la variété le long de cette surface et d'obtenir ainsi une nouvelle variété M_F qui est irréductible. Si M_F n'est pas une réunion finie de boules, elle est hakenienne et le processus peut être itéré. Le théorème de finitude de Haken, qui borne le nombre de surfaces essentielles, disjointes, deux à deux non parallèles et proprement plongées dans la variété M, entraîne qu'en un nombre fini de pas ce processus donne une réunion finie de boules : une telle suite finie de variétés, obtenues par découpage, est appelée une *hiérarchie* de M. La preuve du théorème d'hyperbolisation s'effectue alors par récurrence sur la longueur maximale de certaines hiérarchies de M (cf. § 5). Le cœur de la démonstration est un théorème de recollement de structures hyperboliques (cf. § 3,4), auquel se réduit l'étape de récurrence par une jolie construction de ciselage et de miroitage de certaines composantes du bord (cf. § 5).

Ce texte ne prétend pas donner une preuve complète du théorème d'hyperbolisation de Thurston, mais seulement en présenter les étapes les plus marquantes.

À cet effet, les résultats ne sont pas énoncés dans leur plus grande généralité, mais uniquement dans le contexte de la preuve du théorème d'hyperbolisation.

La plupart des démonstrations sont seulement esquissées. Les détails complets peuvent être trouvés dans les articles originaux de W. Thurston [Th0, Th1, Th2, Th3, Th4, Th5], de C. McMullen [McM1, McM2], de J. Morgan et P. Shalen [MS1, MS2, MS3], ainsi que dans la monographie de M. Kapovich [Ka], l'article de J. Morgan [Mor1], et les monographies de J. P. Otal [Ota1, Ota2]. Il est clair que l'exposition présentée ici repose pour la plus grande partie sur ces références.

L'auteur tient à remercier L. Potyagailo pour l'avoir guidé d'un arbre à l'autre dans la théorie de Rips, et J.P. Otal pour son aide et ses suggestions qui ont permis d'améliorer substantiellement l'exposition. Il remercie aussi M. Burger et le Forschungsinstitut für Mathematik ETH Zürich pour leur hospitalité durant la préparation de ce texte.

1. VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET GROUPES KLEINIENS

Définition.— *Un* groupe kleinien *est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{C})$, de type fini et sans torsion.*

Nous supposerons toujours ici que le groupe kleinien Γ n'est pas virtuellement abélien.

L'action de Γ sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ s'étend en une action conforme sur la sphère à l'infini que l'on identifie à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Le *domaine de discontinuité* Ω est l'ouvert Γ-invariant maximal de la sphère à l'infini, sur lequel l'action de Γ s'étend de façon libre et discontinue. Son complémentaire $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \Omega$ est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments de Γ. On l'appelle l'*ensemble limite de* Γ.

Le quotient $\overline{N} = \mathbb{H}^3 \cup \Omega/\Gamma$ est une *variété kleinienne*, dont l'intérieur $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ porte une structure hyperbolique complète et le bord $\partial N = \Omega/\Gamma$ une structure conforme. La variété $\overline{N}$ est naturellement orientée par l'orientation de $\mathbb{H}^3$.

Une surface de Riemann est de *type fini* si elle est conformément équivalente au complémentaire d'un nombre fini de points (appelés *pointes*) d'une surface de Riemann compacte. Elle est dite *hyperbolique* si chacune de ses composantes connexes a une caractéristique d'Euler strictement négative.

Le théorème suivant d'Ahlfors [Ah] (voir aussi [Su2]) est fondamental pour l'étude des variétés kleiniennes.

1.1. Théorème de finitude ([Ah])

Soit Γ un groupe kleinien non virtuellement abélien et dont le domaine de discontinuité Ω est non vide. La surface de Riemann Ω/Γ est hyperbolique de type fini. De plus, une pointe correspond à un élément parabolique de Γ. □

On dit que le groupe kleinien Γ admet un *parabolique accidentel* γ si $\gamma \in \Gamma$ est un élément parabolique qui correspond à un lacet de la surface Ω/Γ non homotope à une pointe.

Le *cœur convexe* $C(N)$ de la variété hyperbolique N est le quotient par Γ de l'enveloppe convexe $C(\Lambda)$ de Λ dans $\mathbb{H}^3$. C'est le plus petit convexe fermé, dont l'inclusion dans N est une homotopie d'équivalence. Ce n'est pas en général une sous-variété différentiable de N, car son bord peut être plissé le long de géodésiques. Il n'est pas non plus nécessairement de dimension 3. Par exemple il est de dimension 2 lorsque $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ est un groupe fuchsien, c'est-à-dire un sous-groupe discret et de covolume fini dans $PSL_2(\mathbb{R})$.

Pour éviter ce problème, on remplace souvent $C(N)$ par son δ-voisinage fermé $C_\delta(N)$, qui est l'ensemble des points de N à distance au plus δ de $C(N)$ pour un $\delta > 0$ fixé. Pour tout $\delta > 0$, $C_\delta(N)$ est une sous-variété de N, de dimension 3, de classe C^1, à bord strictement convexe et qui est difféomorphe à la variété kleinienne $\overline{N}$.

On note $N_{]0,\varepsilon[}$ la partie ε-mince de N : c'est l'ensemble des points de N dont le rayon d'injectivité est $< \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe alors une constante universelle ε_0, appelée constante de Margulis, telle que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ toute composante connexe de la partie ε-mince est soit un bout cuspidal de rang 1 ou 2, soit le voisinage tubulaire d'une géodésique (qu'on appelle *tube de Margulis*). On appelle alors *partie cuspidale* N^{cusp} de N, la réunion des bouts cuspidaux de la partie ε-mince pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. On notera N_0 le complémentaire dans N de la partie cuspidale.

La variété hyperbolique N est *géométriquement finie* si son cœur convexe $C_\delta(N)$ est de volume fini. C'est équivalent à ce que la partie ε-épaisse $C_\delta(N) - N_{]o,\epsilon[}$ soit compacte. De plus, pour un ε suffisamment petit (dépendant de Γ), le type topologique de la variété compacte $M = C_\delta(N) - N_{]0,\epsilon[}$ est indépendant de ε et $P = \partial C_\delta(N) \cap N_{]0,\epsilon[}$ est une réunion finie d'anneaux et de tores correspondant respectivement aux cusps de rang 1 et 2.

Définition.— *On appelle* type topologique *de la variété hyperbolique géométriquement finie N la paire (M, P), où $P \subset \partial M$ est la sous-surface compacte de caractéristique d'Euler nulle, correspondant à la trace des cusps tronqués.*

La paire (M, P) a les propriétés topologiques suivantes :

1) M est une variété de dimension 3, compacte et irréductible ;

2) $P \subset \partial M$ est une sous-surface compacte, incompressible dans N, dont les composantes connexes sont des anneaux ou des tores. De plus P contient toutes les composantes toriques de ∂M ;

3) tout sous-groupe abélien $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \subset \pi_1(M)$ est conjugué au groupe fondamental d'une composante connexe torique de P ;

4) il n'existe pas d'anneau essentiel $(A, \partial A) \hookrightarrow (M, P)$, s'appuyant sur P ;

5) M n'est pas homéomorphe au produit $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$, excepté si $P = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$, ni à un I-fibré tordu sur la bouteille de Klein.

Définition.— *Une paire (M, P) ayant les propriétés* 1) *à* 5) *est appelée* variété apprêtée atoroïdale. *La sous-surface $P \subset \partial M$ est appelée le* lieu parabolique *de la variété apprêtée et la surface compacte $\partial_0 M = \partial M - int(P)$ son* bord.

On dit que la variété apprêtée (M, P) est *acylindrique* si tout anneau essentiel dans $(M, \partial_0 M)$ peut être homotopé dans P.

Remarque : La variété apprêtée $(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \mathbb{T}^2 \times \{0\})$ est le type topologique d'un cusp de rang 2.

Définition.— *Une variété apprêtée (M, P) est dite* hyperbolique *si elle est le type topologique d'une variété hyperbolique géométriquement finie.*

Une version précise du théorème d'hyperbolisation de Thurston est :

1.2. Théorème d'hyperbolisation pour les variétés apprêtées ([Th1])

Soit M une variété hakenienne, compacte, orientable, de dimension 3. La variété apprêtée (M, P) est hyperbolique si et seulement si elle est atoroïdale.

Cette version du théorème d'hyperbolisation est nécessaire pour l'étape de récurrence. En effet les variétés apprêtées apparaissent naturellement au cours de la hiérarchie, par exemple lorsqu'on découpe une variété le long d'une surface essentielle s'appuyant sur une composante torique du bord.

La construction de miroitage décrite au § 5 permet à Thurston de ramener l'étape de récurrence à l'étape finale où le recollement fait intervenir tout le bord de la variété apprêtée.

2. LE THÉORÈME DE RECOLLEMENT

Dans toute la suite, (M, P) désigne une variété apprêtée atoroïdale à bord non vide et *strictement incompressible.* C'est-à-dire que $\partial_0 M$ est incompressible et qu'il n'existe pas d'anneau essentiel dans M s'appuyant à la fois sur $\partial_0 M$ et P.

On désignera toujours par τ une involution du bord $\partial_0 M$ de (M, P), qui échange les composantes connexes par paires et renverse leur orientation. C'est-à-dire que l'on a une partition $\partial_0 M = \partial_0^+ M \sqcup \partial_0^- M$ et un difféomorphisme renversant l'orientation $f : \partial_0^+ M \to \partial_0^- M$ tel que $\tau = (f, f^{-1})$.

On note alors M/τ la variété quotient, obtenue en identifiant deux à deux les composantes connexes de $\partial_0 M$ par τ. C'est une variété à bord vide ou une famille finie de tores $\partial(M/\tau) = P/\tau$. En tant que variété apprêtée, son bord est vide et le lieu parabolique est tout le bord $\partial(M/\tau)$.

Avec ces notations, l'étape principale de la preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston est le théorème de recollement suivant :

2.1. Théorème de recollement ([Th1])

Soit (M, P) une variété apprêtée,à bord non vide $\partial_0 M$ strictement incompressible. Soit $\tau : \partial_0 M \to \partial_0 M$ une involution qui échange les composantes connexes par paires en renversant leur orientation. On suppose que chaque composante connexe de la variété apprêtée (M, P) est hyperbolique. Alors, l'intérieur de la variété quotient M/τ admet une structure hyperbolique complète de volume fini si et seulement si elle est atoroïdale.

La preuve du théorème de recollement distingue deux cas suivant que la variété apprêtée (M, P) admet ou non un revêtement fini qui est le produit d'un intervalle par une surface compacte $(F, \partial F) \times I$. La démonstration dans les deux cas est entièrement différente.

Dans le premier cas, quitte à passer à un revêtement fini, on peut supposer que la variété apprêtée $(M, P)/\tau$ fibre sur le cercle, avec pour fibre la surface $(F, \partial F)$ et pour monodromie $f \in \mathit{Diff}^+(F)$, telle que $\tau = (f, f^{-1})$. La condition d'atoroïdalité est alors équivalente au fait que le difféomorphisme f est pseudo-Anosov.

Pour une preuve détaillée de ce cas nous renvoyons à [Ota1] et [Th2], ainsi qu'à [McM4] et [Su1].

Remarque : Dans beaucoup de cas la preuve du théorème d'hyperbolisation pour une variété non fibrée peut s'appliquer à un revêtement fini d'une variété fibrée. En fait, excepté pour une variété fermée dont le premier nombre de Betti est égal à 1, toute variété compacte qui fibre sur le cercle admet un revêtement fini qui contient une surface essentielle, proprement plongée et qui n'est la fibre d'aucune fibration sur le cercle. Pour un tel revêtement la preuve du cas non fibré s'applique. C'est une conjecture ouverte qu'un tel revêtement fini existe toujours.

À partir de maintenant, nous nous restreindrons au cas des variétés hakeniennes qui ne fibrent pas sur le cercle : c'est en quelque sorte le cas générique.

Nous allons expliquer maintenant comment Thurston ramène dans ce cas-là la preuve du théorème de recollement à un théorème de point fixe.

Rappelons que l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(F)$ d'une surface compacte connexe F est l'espace des classes d'équivalence de structures conformes d'aire finie sur int(F). Deux telles structures (F, s_1) et (F, s_2) sont équivalentes s'il existe une application conforme $h : F_1 \to F_2$ proprement homotope à l'identité.

On définit alors la distance de Teichmüller $\Delta(s_1, s_2)$ comme $\frac{1}{2} inf\{log(K(h))\}$, où $h : (F, s_1) \to (F, s_2)$ parcourt l'ensemble des applications quasi-conformes proprement homotopes à l'identité, et K(h) est l'excentricité de h.

Cette distance fait de $\mathcal{T}(F)$ un espace métrique complet, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n = -3\chi(F)$, où $\chi(F)$ est la caractéristique d'Euler de F.

Dans toute la suite l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ désigne le produit des espaces de Teichmüller des composantes connexes de $\partial_0 M$. On le munit de la distance de Teichmüller définie comme le maximum des distances de Teichmüller pour les composantes connexes.

Voici l'analogue de l'espace de Teichmüller pour une variété apprêtée hyperbolique.

Définition.— *Soit (M, P) une variété apprêtée connexe, hyperbolique et à bord strictement incompressible. On note $\mathcal{GF}(M, P)$ l'ensemble* des classes d'équivalences de stuctures hyperboliques géométriquement finies sur (M, P). *C'est l'ensemble des paires $(N, [f])$, où N est une variété hyperbolique géométriquement finie et $[f]$ est la classe d'homotopie* *propre d'une équivalence d'homotopie de paires, respectant l'orientation,* $f : (M, \partial M - P) \to (\overline{N}, \partial \overline{N})$. *Deux telles paires* $(N_1, [f_1])$ *et* $(N_2, [f_2])$ *sont équivalentes si la classe d'homotopie propre* $[(f_2)^{-1} \circ f_1]$ *peut être réalisée par une isométrie.*

Dans le cas général on définit $\mathcal{GF}(M, P)$ *comme le produit fini* $\prod \mathcal{GF}(M_i, P_i)$ *des ensembles* $\mathcal{GF}(M_i, P_i)$ *pour les composantes connexes* M_i *de* M.

Remarques : 1) Lorsque M est connexe, d'après A. Marden [Mard] et F. Waldhausen [Wa] la classe d'homotopie propre $[(f_2)^{-1} \circ f_1]$ peut toujours être réalisée par un homéomorphisme $\phi : \overline{N_1} \to \overline{N_2}$ dont la restriction au bord est quasi-conforme. L'ensemble $\mathcal{GF}(M, P)$ s'identifie donc à *l'espace des déformations quasi-conformes* d'une variété hyperbolique (ou d'un groupe kleinien) ayant pour type topologique la variété apprêtée (M, P).

2) Lorsque M est connexe, la remarque précédente permet de définir la distance de Teichmüller δ sur l'ensemble $\mathcal{GF}(M, P)$ comme suit :

$\delta((N_1, [f_1]), (N_2, [f_2])) = \frac{1}{2} inf\{log(K(\phi))\}$, où $\phi : N_1 \to N_2$ décrit tous les homéomorphismes dans la classe d'homotopie propre $[(f_2)^{-1} \circ f_1]$, qui sont quasi-conformes au bord, et $K(\phi)$ est l'excentricité de la restriction de ϕ au bord. Le théorème de Teichmüller montre que ce minimum est réalisé par un homéomorphisme, quasi-conforme au bord et d'excentricité minimale, unique dans la classe d'homotopie propre de $[(f_2)^{-1} \circ f_1]$.

Dans le cas général, on munit le produit $\mathcal{GF}(M, P)$ de la distance définie comme le maximum des distances sur les facteurs. Pour cette distance $\mathcal{GF}(M, P)$ est un espace métrique complet.

3) Si M est connexe, pour tout élément $(N, [f]) \in \mathcal{GF}(M, P)$ et pour toute composante connexe $P_i \subset P$, $f_*(\pi_1 P_i)$ est un sous-groupe parabolique du groupe kleinien $\pi_1(N)$, par définition de P. De plus toute transformation parabolique dans $\pi_1(N)$ est contenue, à conjugaison près, dans un des sous-groupes $f_*(\pi_1 P_i)$, où P_i parcourt l'ensemble des composantes connexes de P. Du fait que le bord $\partial_0 M$ de la variété apprêtée (M,P) est strictement incompressible, le groupe kleinien $\pi_1(N)$ n'admet pas de parabolique essentiel.

À partir de maintenant, et durant toute la preuve des théorèmes de recollement et du point fixe, nous supposerons que la variété apprêtée (M, P) *est connexe pour alléger les notations. Le cas où la variété apprêtée* (M, P) *n'est pas connexe ne présente pas vraiment de difficultés supplémentaires.*

Soit $\partial : \mathcal{GF}(M, P) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$ l'application de restriction qui à une variété hyperbolique géométriquement finie N, de type topologique (M, P), fait correspondre la structure conforme d'aire finie (d'après le théorème d'Ahlfors), induite sur le bord $\partial \overline{N}$ de la variété kleinienne $\overline{N}$ associée.

Le théorème suivant est crucial pour la preuve du théorème de recollement :

2.2. Théorème d'Ahlfors-Bers ([AB])

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, à bord non vide strictement incompressible. Alors, l'application de restriction $\partial : \mathcal{GF}(M, P) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est un homéomorphisme. □

Remarque : Si $\partial_0 M$ est vide et que $\mathcal{GF}(M, P)$ n'est pas vide, il est réduit à un point d'après le théorème de rigidité de Mostow [Mos].

La preuve de la surjectivité de l'application de restriction ∂ découle du théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation de Beltrami ([AB]). Son injectivité repose sur le théorème d'Ahlfors [Ah] qui montre que l'ensemble limite d'un groupe kleinien géométriquement fini et de covolume infini a une mesure de Lebesgue nulle.

Cette paramétrisation de l'espace $\mathcal{GF}(M, P)$ par l'espace de Teichmüller du bord $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ a permis à Thurston de traduire le théorème de recollement en un théorème de point fixe pour un certain homéomorphisme de $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ dans lui-même.

À cet effet, Thurston a introduit *l'application d'épluchage* $\sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 \widetilde{M})$, où $\partial_0 \widetilde{M}$ est le bord de la variété apprêtée (M, P), avec l'orientation renversée. Nous définissons maintenant cette application. Dans ce qui suit l'indice F signifie la projection sur le facteur de $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ correspondant à l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(F)$ de la composante $F \subset \partial_0 M$.

D'après le théorème d'Ahlfors-Bers, une classe de structures conformes $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est induite par une structure hyperbolique M_s, géométriquement finie, sur (M, P). La variété hyperbolique M_s représente la classe $\partial^{-1}(s) = (M_s, [f_s]) \in \mathcal{GF}(M, P)$.

Comme M_s est sans parabolique accidentel, chaque composante connexe $F \subset \partial_0 M$ détermine un revêtement *quasi-fuchsien* M_s^F de la variété hyperbolique M_s, d'après B. Maskit [Mas1, Mas2]. C'est une variété hyperbolique géométriquement finie qui a pour type topologique la variété apprêtée produit $(F, \partial F) \times I$. En fait le groupe kleinien $\pi_1(M_s^F)$ est une déformation quasi-conforme d'un groupe fuchsien et son ensemble limite est une courbe de Jordan dans la sphère à l'infini $\hat{\mathbb{C}}$.

Soit $\tilde{f}_s : F \times I \to (\overline{M}_s^F, \partial \overline{M}_s^F)$ l'équivalence d'homotopie de paires obtenue par relèvement de $f_s : (M, \partial M - P) \to (\overline{M_s}, \partial \overline{M_s})$. L'application de restriction induit (d'après le théorème d'Ahlfors-Bers) un homéomorphisme $\partial_F : \mathcal{GF}((F, \partial F) \times I) \to \mathcal{T}(F) \times \mathcal{T}(\widetilde{F})$ tel que $\partial_F(M_s^F, [\tilde{f}_s]) = (s_F, s'_F)$, où $s_F \in \mathcal{T}(F)$ est la composante sur le facteur $\mathcal{T}(F)$ de $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$.

Définition.— *L'application d'épluchage $\sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 \widetilde{M})$ fait correspondre au point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ le point $\sigma(s) \in \mathcal{T}(\partial_0 \widetilde{M})$ dont la composante sur le facteur $\mathcal{T}(\widetilde{F})$ est $\sigma(s)_F = s'_F$.*

Dans la suite on note $\tau^\star : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 \widetilde{M})$ l'involution induite par l'involution τ.

Thurston a traduit le critère de recollement de Maskit [Mas1, Mas2] en un critère de point fixe pour la composée $\tau^\star \circ \sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$.

2.3. Critère de recollement de Thurston ([Th1])

Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème de recollement 2.1. *Si l'application $\tau^\star \circ \sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$ admet un point fixe, l'intérieur de la variété quotient M/τ admet une structure hyperbolique complète de volume fini.* □

Nous rappelons maintenant le critère de recollement de Maskit [Mas1, Mas2]. Nous nous restreignons au cas où la variété kleinienne $\overline{N}$ que l'on recolle est connexe. On note N son intérieur. On suppose que $\overline{N}$ est géométriquement finie, sans parabolique accidentel et à bord incompressible. On suppose aussi que $\overline{N}$ n'est pas un fibré en intervalles.

Soient F^+, F^- deux composantes connexes disjointes de $\partial\overline{N}$ et $f : F^+ \to F^-$ un difféomorphisme renversant les orientations. Le critère de Maskit donne une condition suffisante sur le recollement f pour que la variété quotient $\overline{N}/\tau$ soit une variété kleinienne géométriquement finie, où l'involution τ est l'involution $(f, f^{-1}) : (F^+ \sqcup F^-) \to (F^- \sqcup F^+)$.

Soient $\overline{N}^+$ et $\overline{N}^-$ les revêtements quasi-fuchsiens de $\overline{N}$, associés respectivement aux sous-groupes $\pi_1(F^+)$ et $\pi_1(F^-)$. L'hypothèse que $\overline{N}$ n'est pas un fibré en intervalles implique que ces revêtements sont de degré infini. On note $F_0^+ \subset \partial\overline{N}^+$ (respectivement $F_0^- \subset \partial\overline{N}^-$) la composante connexe dont la structure conforme s'identifie par revêtement à celle de $F^+ \subset \partial\overline{N}$ (respectivement $F^- \subset \partial\overline{N}$). On note $N^+ = int(\overline{N}^+)$ et $N^- = int(\overline{N}^-)$.

Avec les notations ci-dessus, le critère de Maskit s'énonce :

2.4. Critère de recollement de Maskit ([Mas1, Mas2])

Si l'équivalence d'homotopie propre $\tilde{f} : N^+ \to N^-$ induite par le difféomorphisme f est homotope à une isométrie $h : N^+ \to N^-$ dont l'extension au bord envoie F_0^+ sur $\partial\overline{N}^- - F_0^-$, la variété quotient $\overline{N}/\tau$ est une variété kleinienne géométriquement finie. □

Remarque : Soit (M,P) le type topologique de N. Par définition de l'application d'épluchage, la condition suffisante de Maskit est équivalente à la condition suivante :

$\tau^\star((\partial\rho_N)_{F^+}) = (\sigma(\partial\rho_N))_{F^+}$, où $\rho_N \in \mathcal{GF}(M,P)$ est la classe d'équivalence représentée par la variété hyperbolique $N = int(\overline{N})$.

Dans le théorème de recollement de toutes les composantes connexes de $\partial_0 M$ par paires, cette condition se traduit bien par le fait que $\partial\rho_N \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est un point fixe de l'application $\tau^\star \circ \sigma$.

3. LE THÉORÈME DU POINT FIXE

Le critère de recollement de Thurston montre que le Théorème de recollement est une conséquence du théorème suivant :

3.1. Théorème de Thurston du point fixe

Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, qui n'est pas fibrée en intervalles et dont le bord $\partial_0 M$ est non vide et strictement incompressible. Soit $\tau : \partial_0 M \to \partial_0 M$ une *involution qui échange les composantes par paires en renversant leur orientation. Alors, l'application $\tau^\star \circ \sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$ a un point fixe si et seulement si la variété quotient M/τ est atoroïdale.*

La proposition suivante montre que l'application $\tau^\star \circ \sigma$ contracte strictement la distance de Teichmüller sur l'espace métrique complet $\mathcal{T}(\partial_0 M)$. C'est une conséquence du fait que l'application quasi-conforme de Teichmüller, d'excentricité minimale dans sa classe d'homotopie propre, est analytique réelle excepté en un nombre fini de points.

3.2. Proposition.— *Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. Alors, l'application $\tau^\star \circ \sigma : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 M)$ contracte strictement la distance de Teichmüller sur $\mathcal{T}(\partial_0 M)$:*

$\Delta(\tau^\star \circ \sigma(s), \tau^\star \circ \sigma(s')) < \Delta(s, s').$ □

Remarques : 1) En général la contraction n'est pas uniforme sur $\mathcal{T}(\partial_0 M)$.

2) Comme $\tau^\star : \mathcal{T}(\partial_0 M) \to \mathcal{T}(\partial_0 \widetilde{M})$ est une isométrie pour la distance de Teichmüller, il suffit de montrer que l'application d'épluchage σ contracte la distance de Teichmüller.

3) Si la variété apprêtée (M,P) est un fibré en intervalles sur une surface compacte orientable $(F, \partial F)$, l'application d'épluchage $\sigma : \mathcal{T}(F) \times \mathcal{T}(\widetilde{F}) \to \mathcal{T}(\widetilde{F}) \times \mathcal{T}(F)$ est définie par $\sigma(s, \tilde{s}') = (\tilde{s}', s)$. C'est une isométrie pour la distance de Teichmüller.

La proposition 3.2 implique l'unicité du point fixe pour l'application $\tau^\star \circ \sigma$ s'il existe. De plus, elle ramène son existence à celle d'un sous-ensemble compact de $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ globalement invariant par $\tau^\star \circ \sigma$.

Pour un point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ on note $\mathcal{O}(s) = \{(\tau^\star \circ \sigma)^n(s); n \in \mathbb{Z}\}$ son orbite par l'action de $\tau^\star \circ \sigma$. Son adhérence $\overline{\mathcal{O}}(s)$ est un fermé invariant par $\tau^\star \circ \sigma$. C'est donc un candidat naturel pour être un compact invariant par $\tau^\star \circ \sigma$. Comme l'espace métrique $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ est complet, il suffit de trouver une orbite $\mathcal{O}(s)$ bornée. Le théorème suivant est le cœur de la preuve du théorème du point fixe.

3.3. Théorème de l'orbite bornée

Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. Si la variété quotient M/τ est atoroïdale, l'orbite $\mathcal{O}(s)$ de tout point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est bornée dans $\mathcal{T}(\partial_0 M)$ pour la distance de Teichmüller.

Il existe deux preuves très différentes de ce théorème.

La première preuve est due à Thurston et utilise beaucoup d'outils géométriques qu'il a forgés à cet effet et qui sont maintenant fondamentaux dans l'étude des variétés hyperboliques de dimension 3. C'est en particulier le cas des *surfaces plissées* et des *laminations mesurées terminales*, pour décrire les bouts des variétés hyperboliques qui ne sont pas géométriquement finies. On peut pour ces notions se reporter aux chapitres 8 et 9 de [Th0], à [CEG] et à [Bon].

Une autre preuve a été donnée en 1989 par C. McMullen. Elle suit une approche complètement différente, plus directe et plus proche de la théorie de Teichmüller classique. C. McMullen a d'abord prouvé une version plus générale de la conjecture de Kra, en montrant que la norme de l'opérateur Théta, associé à un revêtement de surfaces de Riemann hyperboliques, est < 1 si et seulement si le revêtement n'est pas moyennable [McM1]. À partir de ce résultat, il obtient une très jolie majoration de la norme de la dérivée de l'application d'épluchage en un point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$: $\|d\sigma(s)\| < 1 - \eta$, où la constante η ne dépend que de la caractéristique d'Euler de $\partial_0 M$ et de la systole de la structure conforme s sur $\partial_0 M$. L'atoroïdalité de la variété M/τ lui permet alors de conclure par un argument analogue à celui du lemme 4.2.7 (cf. [McM2]; voir aussi [Ota2, § 6]).

Voici un énoncé du théorème de McMullen qui implique le théorème de l'orbite bornée :

3.4. Théorème de McMullen de contraction ([McM2])

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. On suppose que la variété quotient M/τ est atoroïdale. Il existe un entier $K > 0$ (ne dépendant que de la topologie de $\partial_0 M$) tel que $\|d(\tau^\star \circ \sigma)^K(s)\| \leq c < 1$ en tout point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ pour lequel $\Delta(s, \tau^\star \circ \sigma(s)) \leq \Delta(s_0, \tau^\star \circ \sigma(s_0))$, où la constante c est uniforme pour tous ces points et $s_0 \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est un point arbitrairement choisi.

Remarque : Dans le cas où la variété apprêtée (M, P) est acylindrique, McMullen [McM2] montre le résultat plus fort que l'application $\tau^\star \circ \sigma$ est une contraction de constante uniforme sur tout l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\partial_0 M)$. Il faut remarquer que dans ce cas-là l'atoroïdalité de la variété quotient M/τ est toujours vérifiée indépendamment de l'involution τ.

Pour une preuve du Théorème de contraction, nous renvoyons aux articles originaux de McMullen [McM1, McM2], ainsi qu'à la monographie de J.P. Otal [Ota2]. Pour une présentation concise des résultats de McMullen le lecteur pourra se reporter à [McM3].

Nous allons maintenant expliquer la preuve du théorème de l'orbite bornée suivant l'approche de Thurston. Nous suivrons pour cela la présentation qui en est donnée par M. Kapovich dans son livre [Ka].

4. LA PREUVE DU THÉORÈME DE L'ORBITE BORNÉE

Soit (M, P) une variété aprêtée hyperbolique.

Définition.— *$\mathcal{X}(M, P)$ est l'espace des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de $\pi_1(M)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ telles que $\pi_1(P_i)$ soit parabolique pour toute composante connexe $P_i \subset P$.*

On munit cet espace de la topologie quotient de la topologie de la convergence simple sur l'ensemble des morphismes du groupe discret $\pi_1(M)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$.

Comme $\pi_1(M)$ n'est pas virtuellement abélien, $\mathcal{X}(M,P)$ est un espace métrisable et complet. C'est en fait un sous-espace fermé de la variété affine des caractères de $\pi_1(M)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$.

En oubliant la condition d'être géométriquement finie, on obtient une application naturelle de l'espace $\mathcal{GF}(M,P)$ sur l'ouvert suivant de $\mathcal{X}(M,P)$: l'ensemble des classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(M)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ provenant des déformations quasi-conformes d'une structure hyperbolique géométriquement finie de type topologique (M,P). Lorsqu'on munit $\mathcal{GF}(M,P)$ de la distance de Teichmüller δ cette application est un homéomorphisme.

Ceci permet d'identifier $\mathcal{GF}(M,P)$ à un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X}(M,P)$. Cependant L. Bers [Ber] a montré que $\mathcal{GF}(M,P)$ n'est pas complet pour la topologie induite.

La preuve du théorème de l'orbite bornée, suivant Thurston, consiste à montrer que, pour une orbite $\mathcal{O}(s) \subset \mathcal{T}(\partial_0 M)$, son image $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ est relativement compacte dans $\mathcal{GF}(M,P)$. Elle comporte deux étapes :

1) On montre d'abord que l'image $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ est bornée, donc relativement compacte, dans l'espace $\mathcal{X}(M,P)$.

2) Puis on montre que l'adhérence de $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ dans $\mathcal{X}(M,P)$ est en fait contenue dans $\mathcal{GF}(M,P)$.

Aucune de ces deux étapes ne s'obtient aisément. Elles correspondent aux deux énoncés suivants :

4.1. Théorème de l'image bornée

Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. Si la variété quotient M/τ est atoroïdale, l'image $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ de l'orbite d'un point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ est bornée dans $\mathcal{X}(M,P)$.

4.2. Théorème de la limite géométrique

Soit (M,P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. Si la variété quotient M/τ est atoroïdale, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

1) *Tout point d'accumulation $\rho_\infty \in \overline{\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))} \subset \mathcal{X}(M,P)$, est limite d'une suite $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ telle que la suite de variétés hyperboliques pointées $\{(\mathbb{H}^3/\rho_k(\pi_1 M), x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement vers la variété hyperbolique pointée $(\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1 M), x_\infty)$. Les points bases sont choisis avec un rayon d'injectivité minoré par la constante de Margulis.*

2) *Tout point d'accumulation $\rho_\infty \in \overline{\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))} \subset \mathcal{X}(M,P)$ appartient à $\mathcal{GF}(M,P)$.*

Le terme de *convergence géométrique* fait référence à la convergence bilipschitz pointée, introduite par M. Gromov [GLP] sur l'espace des variétés riemanniennes de dimension donnée et à courbure sectionnelle pincée.

Nous allons maintenant décrire la logique de la preuve du théorème de l'image bornée.

4.1. Preuve du théorème de l'image bornée

Nous suivons la preuve donnée par M. Kapovich dans son livre ([Ka]), via la théorie des actions de groupes sur les arbres réels et la théorie de Rips. Il s'agit en quelque sorte d'une approche duale de celle de Thurston dans [Th3, Th5], qui utilise des triangulations du revêtement universel de M, équivariantes par l'action de $\pi_1(M)$.

J. Morgan et P. Shalen dans [MS1, MS2, MS3] sont les premiers à avoir développé et utilisé la théorie des actions de groupes sur les arbres réels pour compactifier l'espace $\mathcal{X}(M, P)$. Ils ont pour cela développé tout un programme d'étude des actions de groupes, sans point fixe global et à petits stabilisateurs d'arêtes, sur les arbres réels, qui est à l'origine du théorème de Rips.

Nous rappelons maintenant quelques définitions sur les actions de groupes sur les arbres. Pour plus de détails nous renvoyons à l'exposé de F. Paulin [Pau2].

Un arbre réel est un espace métrique T tel que toute paire de points distincts $(x, y) \in T \times T$ soit les extrémités d'un unique arc topologique dans T et que cet arc soit isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. *Un arbre simplicial* est un 1-complexe simplicial, connexe et simplement connexe, muni de la métrique des chemins, rendant chaque arête isométrique à un intervalle.

Une action isométrique d'un groupe G sur un arbre réel est dite *triviale* si elle admet un point fixe global. Elle est dite *minimale* si elle ne laisse invariant aucun sous-arbre propre. Elle est dite *petite* si le stabilisateur de toute arête (non réduite à un point) ne contient pas de sous-groupe libre non abélien.

Pour tout élément $g \in G$ on définit la *longueur de translation* $\ell_T(g) = \inf\{d(x, g(x)), x \in T\}$. Cette longueur est atteinte dans T. L'élément g est dit *elliptique* si $\ell_T(g) = 0$.

Soit G un groupe de type fini, non virtuellement nilpotent. Les actions isométriques de G sur des arbres réels apparaissent naturellement pour compactifier l'espace $\mathcal{X}(G)$ des classes de conjugaison fidèles et discrètes de G dans $PSL_2(\mathbb{C})$. La première construction est due à M. Culler et P. Shalen [CS], en utilisant les points idéaux des courbes de la variété des caractères de G dans $PSL_2(\mathbb{C})$. Elle a été ensuite utilisée et généralisée par J. Morgan et P. Shalen [MS1, MS2, MS3].

Nous allons ici rappeler rapidement la méthode, plus géométrique, due indépendamment à M. Bestvina [Bes] et F. Paulin [Pau1]. Pour plus de détails nous renvoyons à [Pau2].

Étant donné un groupe G de type fini, on se donne un système fini $\mathcal{S}$ de générateurs. La construction qui suit est indépendante du système de générateurs choisi. Pour une suite de représentations $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}(G)$, on définit la suite de nombres réels $\lambda_n = inf\{max\{d(x, \rho_n(\gamma)(x)), \gamma \in \mathcal{S}\}; x \in \mathbb{H}^3\}$. Comme G n'est pas virtuellement nilpotent, il existe un point $x_n \in \mathbb{H}^3$ tel que $\lambda_n = max\{d(x_n, \rho_n(\gamma)(x_n)), \gamma \in \mathcal{S}\}$.

Si la suite de représentations $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{X}(G)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. On considère la suite d'espaces métriques pointés rééchelonnés $(\frac{1}{\lambda_n}\mathbb{H}^3, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, munis pour chaque n de l'action isométrique de G induite par la représentation ρ_n. Il existe alors une suite extraite, convergeant pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante vers un arbre réel T (non réduit à un point) et muni d'une action isométrique de G qui est minimale, petite et non triviale. De plus : $\lim_{n\to\infty} \ell(\rho_n(g)) = \ell_T(g), \forall g \in G$, où $\ell(\rho_n(g))$ est la longueur de translation de $\rho_n(g) \in PSL_2(\mathbb{C})$.

On dit que la suite (non bornée) de représentations $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}(G)$ admet une suite extraite qui converge (pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante) vers une action (isométrique) de G sur un arbre réel.

La proposition suivante découle de la construction précédente :

4.1.1. Proposition

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. Si l'image $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ de l'orbite d'un point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$ n'est pas bornée dans $\mathcal{X}(M, P)$, il existe une suite de représentations $\{\rho_n\} \subset \partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$ qui converge pour la topologie Hausdorff-Gromov équivariante vers une action isométrique minimale, petite et non triviale, de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel T. De plus, pour chaque composante connexe $P_i \subset P$ l'action du sous-groupe $\pi_1(P_i)$ est triviale sur T. □

La démonstration du théorème de l'image bornée résulte alors, par contradiction, de la proposition suivante :

4.1.2. Proposition

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses du théorème du point fixe. On suppose que la variété quotient M/τ est atoroïdale. Alors, toute action isométrique de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel T, obtenue comme limite (pour la topologie Hausdorff-Gromov équivariante) d'une suite de représentations dans $\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$, $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$, est triviale.

Démonstration de la Proposition 4.1.2 (cf. [Ka, §, 14]) : On considère une action isométrique de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel T, vérifiant les hypothèses de la Proposition 4.1.2. La démonstration consiste à montrer d'abord que tout sous-groupe périphérique (i.e. provenant du bord) agit trivialement sur l'arbre réel T. Puis on utilise la décomposition de Jaco-Shalen [JS] et Johannson [Jo] de la variété apprêtée (M, P), pour conclure que l'action du groupe $\pi_1(M)$ est triviale sur T.

Étant donnée une variété apprêtée atoroïdale (M, P), à bord strictement incompressible, une conséquence de la théorie de Jaco-Shalen [JS] et Johannson [Jo] est l'existence d'une paire de sous-variétés $(W, \partial_0 W) \subset (M, \partial_0 M)$ ayant les propriétés suivantes :

1) Chaque composante connexe de $(W, \partial_0 W)$ est un fibré en intervalles, qu'on appellera *une fenêtre* de la variété apprêtée (M, P).

2) La frontière $\partial_1 W = \overline{\partial W - (\partial_0 W \cup P)}$ est une réunion finie d'anneaux essentiels proprement plongés dans $(M, \partial_0 M)$.

3) Chaque composante connexe M_i de $\overline{M - W}$ est soit un tore solide V dont le bord contient un anneau essentiel de $\partial_1 W$, soit *acylindrique* (tout anneau essentiel, proprement plongé dans $(M_i, \overline{\partial M_i \cap \partial_0 M})$ est parallèle dans M_i à un des anneaux $(\partial_1 W \cap M_i, \partial(\partial_1 W \cap M_i))$.

4) La paire $(W, \partial_0 W)$ est unique, à isotopie de paire près, dans $(M, \partial_0 M)$.

Remarque : La sous-variété caractéristique de Jaco-Shalen et Johannson pour la paire $(M, \partial_0 M)$ est la réunion de W et des composantes connexes de $\overline{M - W}$ qui sont des tores solides. De plus, la paire $(M, \partial_0 M)$ est acylindrique si et seulement si W est vide.

Le théorème suivant de J. Morgan et P. Shalen est le cœur de la démonstration de la Proposition 4.1.2. Il donne une nouvelle démonstration des résultats principaux de [Th3, Th5].

4.1.3. Théorème ([MS3])

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, à bord strictement incompressible et qui n'est pas un fibré en intervalles. Soit $W \subset M$ la réunion des fenêtres de (M, P). On suppose que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ admet une action isométrique minimale et petite sur un arbre réel T, telle que l'action induite par le groupe fondamental de chaque composante connexe de P est triviale. Alors l'action induite par le groupe fondamental de chaque composante connexe de $\overline{M - W}$ est triviale sur T.

Le résultat de compacité suivant, dû à Thurston, est un corollaire direct de la proposition 4.1.1 et du théorème de Morgan et Shalen.

4.1.4. Corollaire ([Th3], [MS3])

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, à bord strictement incompressible. Si (M, P) est acylindrique, l'espace $\mathcal{X}(M, P)$ est compact. □

Démonstration du Théoreme 4.1.3.— Nous allons maintenant esquisser la preuve de ce théorème suivant un argument qui nous a été expliqué par L. Potyagailo. Cet argument utilise une version plus précise du théorème de Rips, qui est due à V. Guirardel [Gui].

Le théorème de Rips fournit une action minimale, non triviale et petite de $\pi_1(M)$ sur un arbre simplicial (cf. [BeF], [Pau2]). Le théorème de Guirardel précise ce résultat, en fournissant des actions de $\pi_1(M)$ sur des arbres simpliciaux qui sont du même type et arbitrairement proches pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante de l'action de $\pi_1(M)$ sur l'arbre réel T.

La preuve du théorème 4.1.3 découle alors du fait que les actions non triviales de $\pi_1(M)$ sur ces arbres simpliciaux induisent des scindements non triviaux du groupe $\pi_1(M)$ le long de sous-groupes $\mathbb{Z}$ correspondant à des anneaux essentiels de $\partial_1 W$. La maximalité de la sous-variété W impose alors que les groupes fondamentaux $\pi_1(M_i)$ des composantes connexes de $\overline{M - W}$ agissent trivialement sur ces arbres simpliciaux.

La continuité de l'application $T \to \ell_T(\gamma)$ dans la topologie Hausdorff-Gromov équivariante, pour un élément fixé $\gamma \in \pi_1(M)$, et le théorème de Guirardel [Gui] montrent alors que les actions des groupes $\pi_1(M_i)$ sur l'arbre réel T doivent être triviales. □

Une conséquence de l'atoroïdalité de la variété quotient M/τ et du théorème 4.1.3 de Morgan et Shalen est :

4.1.5. Corollaire ([Ka, §14.17])

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, vérifiant les hypothèses de la Proposition 4.1.2. *L'action du groupe fondamental de toute composante connexe de ∂M sur T est triviale.*

Démonstration du Corollaire 4.1.5.— Le théorème de Skora [Sko] (cf. [Ka, Ch. 12], [Ota1, Ch. 8]) montre qu'il existe une sous-surface compacte maximale $S \subset \partial M$ dont le groupe fondamental contient, à conjugaison près dans $\pi_1(M)$, tous les lacets $\gamma \subset \partial M$ qui agissent trivialement sur T. En particulier S contient P.

La maximalité de la surface S et les lemmes 4.1.6 et 4.1.7 ci-dessous montrent que, par une homotopie du bord, S peut être rendue globalement invariante par l'involution de recollement τ.

Le lemme classique suivant (cf. [Mor2, Lemme 11.8]) découle de la définition de la métrique de Teichmüller sur $\mathcal{T}(\partial_0 M)$:

4.1.6. Lemme

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, à bord strictement incompressible. Soient ρ_1 et ρ_2 deux points dans $\mathcal{GF}(M, P)$, tels que $\Delta(\partial\rho_1, \partial\rho_2) \leq \kappa$. Alors, pour tout lacet $\gamma \in \pi_1(M)$:

$(\exp -2\kappa)\ell(\rho_1(\gamma)) \leq \ell(\rho_2(\gamma)) \leq (\exp 2\kappa)\ell(\rho_1(\gamma)).$ □

Le lemme 4.1.7 est une conséquence du lemme précédent et du fait que l'application $\tau^\star \circ \sigma$ contracte strictement les distances (lemme 3.2).

4.1.7. Lemme

Il existe une constante $0 < \kappa \leq \Delta(s, \tau^\star \circ \sigma(s))$, telle que pour toute représentation $\rho \in \partial^{-1}\mathcal{O}(s)$ et pour tout lacet $\gamma \subset \partial M$:

$(\exp -2\kappa)\ell(\rho(\tau \circ \gamma)) \leq \ell(\rho(\gamma)) \leq (\exp 2\kappa)\ell(\rho(\tau \circ \gamma)).$ □

Par passage à la limite, le lemme 4.1.7 implique pour un lacet $\gamma \subset \partial M$ l'inégalité suivante : $(\exp -2\kappa)\ell_T(\tau \circ \gamma) \leq \ell_T(\gamma) \leq (\exp 2\kappa)\ell_T(\tau \circ \gamma)$.

D'où $\tau(S)$ peut être déformée dans S, et est isotope à S par maximalité de S.

Si la surface S n'est pas tout ∂M, d'après le théorème 4.1.3 de Morgan et Shalen et le lemme 4.1.7, son bord ∂S est une famille finie, non vide, de courbes essentielles sur ∂M, qui est globalement invariante par τ et contenue dans l'intérieur int$(\partial_0 W)$ du bord des fenêtres W de (M, P).

Le fait que le bord ∂S de la surface S soit invariant (à homotopie près dans ∂M) par une homotopie globale de M permet de construire des anneaux ou des bandes de Möbius essentiels (peut-être singuliers), non parallèles à P et s'appuyant sur les composantes de ∂S. Ces anneaux ou bandes de Möbius s'obtiennent en poussant les courbes de ∂S à travers les fenêtres. Puisque ∂S est globalement invariant par τ, ils se referment en des tores ou des bouteilles de Klein essentiels (peut-être singuliers) dans la variété quotient M/τ, contredisant ainsi son atoroïdalité. □

Ce corollaire montre que l'action du groupe fondamental de chaque composante connexe de $\overline{M - \partial_1 W}$ est triviale sur T. C'est déjà vrai pour les composantes connexes de $\overline{M - W}$ par le théorème 4.1.3 de Morgan et Shalen. C'est vrai pour une fenêtre, car c'est un fibré en intervalles et que l'action du groupe fondamental d'une composante de son bord sur T est triviale et factorise par l'action du groupe fondamental de la fenêtre.

Le fait que l'action du groupe $\pi_1(M)$ est triviale sur T se démontre alors par récurrence. On utilise la structure de graphe de groupes de $\pi_1(M)$, associée au scindage de M le long des anneaux essentiels de $\partial_1 W$, dont tous les stabilisateurs des sommets ont une action triviale sur T. Pour plus de détails nous renvoyons à [Ka, §, 14.17]. □

Nous allons maintenant décrire la dernière étape de la preuve du théorème du point fixe selon Thurston.

4.2. Preuve du théorème de la limite géométrique

Nous commençons par rappeler la définition de la convergence géométrique.

Définition.— *Une suite de variétés hyperboliques pointées $\{(N_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement vers une variété hyperbolique pointée (N_∞, x_∞) si, pour tout $R > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un entier n_0 tel que, pour $n > n_0$, il existe une application $(1+\varepsilon)$-bilipschitz $f_n : B(x_\infty, R) \to C_n$ qui vérifie :*

(1) $d(f_n(x_\infty), x_n) < \varepsilon$,

(2) $B(x_n, R-\varepsilon) \subset f_n(B(x_\infty, R)) \subset B(x_n, R(1+\varepsilon)+\varepsilon)$.

En général, l'holonomie $\rho_\infty \in \mathcal{X}(\pi_1(N_\infty))$ de la variété hyperbolique limite est différente de la limite simple des holonomies des variétés hyperboliques N_n. Cela reste cependant vrai sur les compacts de N_∞.

4.2.1. Lemme

Soit $\{(N_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés hyperboliques pointées qui converge géométriquement vers une variété hyperbolique pointée (N_∞, x_∞). Soit ρ_n (resp. ρ_∞) l'holonomie de la variété hyperbolique N_n (resp. N_∞). Soit $A \subset N_\infty$ un compact contenant le point base x_∞. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un plongement $(1+\varepsilon_n)$-quasi-isométrique $f_n : A \to N_n$, avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ et tel que : $\forall \gamma \in \pi_1(A, x_\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(f_{n*}(\gamma)) = \rho_\infty(\gamma).$$

□

Le théorème de compacité suivant, dû à Gromov dans le cadre plus général des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle pincée, est le point de départ de la preuve du théorème 4.2 de la limite géométrique.

4.2.2. Théorème de compacité

Soit $\{(N_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés hyperboliques pointées, dont les points bases ont un rayon d'injectivité uniformément minoré (par exemple par la constante de Margulis).Alors, il existe une suite extraite $\{(N_{n_k}, x_{n_k})\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ qui converge géométriquement vers une variété hyperbolique (N_∞, x_∞). □

On peut trouver une preuve de ce théorème, pour le cas particulier énoncé, dans [CEG] et [Th0].

Soit ρ_∞ un point d'accumulation de $\overline{\partial^{-1}(\mathcal{O}(s))}$. Une conséquence du lemme de Margulis et du théorème de compacité de Gromov est l'existence d'une suite de représentations $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \partial^{-1}(\mathcal{O}(s))$, qui converge vers ρ_∞ dans $\mathcal{X}(M,P)$ et telle que la suite de variétés hyperboliques pointée $\{(\mathbb{H}^3/\rho_k(\pi_1 M), x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement vers une variété hyperbolique pointée (Q_∞, x_∞) (pour une suite de points bases $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convenablement choisis).

Dans toute la suite, nous noterons N_k et N_∞ les variétés hyperboliques $(\mathbb{H}^3/\rho_k(\pi_1 M))$ et $(\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1 M))$. Nous dirons que la variété hyperbolique N_∞ est la *limite algébrique* de la suite de variétés hyperboliques $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Le lemme 4.2.1 montre qu'après une conjugaison convenable dans $PSL_2(\mathbb{C})$, on peut supposer que $\pi_1(N_\infty) = \rho_\infty(\pi_1(M))$ est un sous-groupe du groupe $G = \pi_1(Q_\infty) \subset PSL_2(\mathbb{C})$. En fait, on peut identifier le groupe G à *l'enveloppe* de la suite $\{\rho_k(\pi_1(M))\}_{k\in\mathbb{N}}$ (cf. [JM], [MT, Ch. 7]) :

$G = \{g = \lim_{k\to\infty} g_k \in PSL_2(\mathbb{C}), g_k \in \rho_k(\pi_1(M))\}$.

La limite algébrique N_∞ est donc un revêtement localement isométrique de la limite géométrique Q_∞. Pour démontrer le théorème de la limite géométrique il suffit de montrer que ce revêtement est de degré fini, grâce au lemme suivant :

4.2.3. Lemme

Avec les notations ci-dessus, $\rho_\infty(\pi_1(M)) = G$ si et seulement si $\rho_\infty(\pi_1(M))$ est d'indice fini dans G.

Démonstration du lemme 4.2.3.— Soit $g = \lim_{k\to\infty} \rho_k(\gamma_k) \in G$, avec $\gamma_k \in \pi_1(M)$. S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n = \rho_\infty(\gamma)$, avec $\gamma \in \pi_1(M)$, alors $\lim_{k\to\infty} \rho_k(\gamma^{-1}\gamma_k^n) = 1$. Comme G est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{C})$, $\gamma^{-1}\gamma_k^n = 1$ pour presque tout $k \in \mathbb{N}$. D'où γ_k est la racine k-ième de γ pour presque tout $k \in \mathbb{N}$ et $g \in \rho_\infty(\pi_1(M))$. □

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des variétés hyperboliques géométriquement finies. La difficulté de la preuve du théorème de la limite géométrique réside dans le fait qu'a priori la limite algébrique N_∞ n'est pas géométriquement finie, pas plus que la limite géométrique Q_∞, dont on ne contrôle même pas le groupe fondamental.

Comme le groupe $\pi_1(N_\infty)$ est de type fini, N_∞ admet un cœur compact relatif $M_\infty \subset N_\infty$. C'est une sous-variété compacte dont l'inclusion est une équivalence d'homotopie, et telle que la trace sur ∂M_∞ de la partie cuspidale N_∞^{cusp} est une réunion disjointe d'anneaux et de tores que l'on note P_∞.

Par abus de langage, on appellera *bout non cuspidal* de N_∞ l'adhérence d'une composante connexe de $N_\infty - \{M_\infty \cup N_\infty^{cusp}\}$. Les bouts non cuspidaux de N_∞ sont alors en bijection avec les composantes connexes de $\partial_0 M_\infty = \overline{\partial M_\infty - P_\infty}$.(cf. [Bon]).

Un bout non cuspidal $E \subset N_\infty$ est dit *géométriquement fini* si son intersection avec le cœur convexe $C(N_\infty)$ est compacte. Sinon il est dit *géométriquement infini.*

Un bout non cuspidal E, associé à une composante $F \subset \partial_0 M_\infty$, est dit *simplement dégénéré* si pour tout compact $K \subset E$ il existe une courbe fermée simple $\beta \subset F$ qui soit homotope dans N_∞ à une géodésique fermée $\gamma \subset E - K$. C'est une façon très restrictive d'être géométriquement infini. En particulier, un tel bout est difféomorphe au produit $F \times [0, +\infty[$.

Puisque, par hypothèse, la surface $\partial_0 M$ est incompressible dans M, la surface $\partial_0 M_\infty$ est incompressible dans M_∞. Le groupe kleinien $\pi_1(N_\infty)$ vérifie donc la condition de Bonahon [Bon]. Le théorème de Bonahon montre que N_∞ est difféomorphe à l'intérieur de la variété compacte M_∞. En particulier chaque bout non cuspidal de N_∞ est difféomorphe au produit $F \times [0, +\infty[$, pour une composante connexe $F \subset \partial_0 M_\infty$. Plus précisément, F. Bonahon a démontré le théorème suivant :

4.2.4. Théorème des bouts ([Bon])

Soit N une variété hyperbolique, dont le groupe fondamental est de type fini, non cyclique et possède la propriété suivante : pour toute décomposition en produit libre de $\pi_1(N)$, il existe un élément parabolique qui n'est conjugué dans aucun des facteurs. Alors, tout bout géométriquement infini de N est simplement dégénéré. □

Pour plus de détails sur les bouts des variétés hyperboliques et la preuve du théorème des bouts nous renvoyons à [Bon].

Pour achever la preuve du théorème de l'orbite bornée on doit montrer que la limite algébrique N_∞ est géométriquement finie, c'est-à-dire que ses bouts non cuspidaux sont géométriquement finis.

Le théorème suivant de Thurston permet de contrôler le revêtement $q : N_\infty \to Q_\infty$ sur les bouts géométriquement infinis de N_∞.

4.2.5. Théorème du revêtement ([Th0, Ch. 9])

Soit $p : N \to Q$ un revêtement localement isométrique d'une variété hyperbolique Q de volume infini. On suppose que $\pi_1(N)$ est de type fini, sans parabolique accidentel et qu'il vérifie la condition de Bonahon. Pour tout bout géométriquement infini $E \subset N$, il existe un compact $K \subset E$ tel que la restriction de l'application de revêtement p à $E - K$ est propre et de degré fini.

Remarque : Il existe un énoncé plus général, dû à R. Canary [Ca].

Démonstration du théorème du revêtement (cf. [Th0, Thm. 9.2.2], [Oh, Lemme 2.2]) : Soit $M \subset N - N^{cusp}$ le cœur compact de N. Soit $E \subset N - \{M \cup N^{cusp}\}$ un bout non cuspidal et géométriquement infini, correspondant à une composante $F \subset \partial_0 M$. On note encore q la restriction de l'application de revêtement au bout E. Comme ce bout est difféomorphe au produit $F \times [0, +\infty[$, cette restriction est de degré fini si et seulement si $q^{-1}(q(F))$ est compact. On raisonne alors par contradiction en supposant $q^{-1}(q(F))$ non compact. Deux cas peuvent se produire :

a) Il existe une composante $\Sigma \subset q^{-1}(q(F))$ qui n'est pas bornée dans E.

b) L'ensemble $q^{-1}(q(F))$ admet une infinité de composantes connexes compactes, qui sont des surfaces incompressibles immergées dans E.

Dans le premier cas a), puisque $\pi_1(F)$ n'admet pas de parabolique accidentel, le théorème des bouts montre qu'il existe une suite de courbes simples fermées $\beta_n \subset F$ qui sont homotopes à des géodésiques $\gamma_n \subset E$, telles que toute suite extraite non stationnaire de $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s'échappe de tout compact de E et que les courbes γ_n restent à distance uniformément bornée de Σ. D'où la suite de géodésiques $q(\gamma_n)$ reste à distance uniformément bornée de la surface compacte immergée $q(F) \supset q(\Sigma)$. Comme le normalisateur de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(Q)$ est réduit à lui-même, il existe une suite extraite de la suite $q(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une géodésique fermée $\bar{\gamma}$, homotope dans Q à l'image $q(\beta)$ d'une courbe simple fermée sur $\beta \subset F$. Il existe alors une suite extraite de $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans N vers une géodesique fermée homotope à β, ce qui contredit le choix de la suite $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le second cas b), $q^{-1}(q(F))$ admet des composantes S_1 et S_2 qui sont des surfaces immergées, disjointes et incompressibles dans E. Comme E est difféomorphe au produit $F \times [0, +\infty[$, une fois les surfaces F, S_1 et S_2 orientées, il existe des entiers $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ tels que les cycles $k[F]$, $\ell[S_1]$ et $m[S_2]$ soient homologues dans $\mathcal{Z}_2(E, E \cap N^{cusp})$. Il existe donc une 3-chaîne $C \subset \mathcal{C}_3(E, E \cap N^{cusp})$ telle que $\partial C = \ell[S_1]$ - $m[S_2] \in \mathcal{Z}_2(E, E \cap N^{cusp})$. D'où $\partial q_*(C) = 0$ dans $\mathcal{Z}_2(Q - Q^{cusp}, \partial(Q - Q^{cusp}))$, et $q_*(C)$ est un cycle non trivial dans $\mathcal{Z}_3(Q - Q^{cusp}, \partial(Q - Q^{cusp}))$. La variété $Q - Q^{cusp}$ serait alors compacte et Q aurait donc un volume fini contrairement à l'hypothèse. $\square$

Nous allons maintenant montrer comment déduire le théorème de convergence géométrique du théorème du revêtement.

On peut remarquer d'abord que la variété hyperbolique Q_∞ a un volume infini, comme limite géometrique de variétés hyperboliques de volume infini.

L'hypothèse d'atoroïdalité de la variété quotient M/τ va permettre d'éviter les paraboliques accidentels dans $\rho_\infty(\pi_1(M)) = \pi_1(N_\infty)$.

4.2.6. Lemme

Avec les hypothèses du théorème de la limite géométrique, le groupe kleinien $\rho_\infty(\pi_1 M)$ n'admet pas de parabolique accidentel.

Démonstration du lemme 4.2.6 : L'ensemble des paraboliques accidentels de $\rho_\infty(\pi_1 M)$ correspond à une famille finie $\mathcal{P}$ de courbes simples, fermées et disjointes sur $\partial_0 M$, qui ne sont pas parallèles entre elles, ni parallèles à ∂P. Ceci découle de l'étude des cusps accidentels dans le revêtement hyperbolique N_∞^F de N_∞, associé à une composante connexe $F \subset \partial_0 M$ (cf. [Ka, § 6.21], [Mor1, Ch. 12]).

Ces courbes $\gamma \in \mathcal{P}$ sont caractérisées par le fait que : $\lim_{k\to\infty} \ell(\rho_k(\gamma)) = 0$.

En particulier, toute courbe simple fermée sur $\partial_0 M$, qui est homotope dans M à une courbe de $\mathcal{P}$, est parallèle sur $\partial_0 M$ à une courbe de $\mathcal{P}$.

Si l'on suppose que l'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide, le lemme 4.1.7 montre que l'involution τ laisse globalement invariant cet ensemble : $\tau(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Le lemme 4.2.7, ci-dessous, montre que l'on peut pousser les courbes de $\mathcal{P}$ dans la sous-variété caractéristique de M. En particulier, on peut supposer que $\mathcal{P} \subset \{\partial_0 W \cup A\}$, où $\partial_0 W \subset \partial_0 M$ est le bord des fenêtres W et $A \subset \partial_0 M$ est une réunion d'anneaux, appartenant au bord des composantes connexes de $\overline{M - W}$ qui sont des tores solides.

On utilise alors la structure de I-fibré des fenêtres W et les anneaux essentiels de $A \cap \partial_1 W$ pour construire un tore (ou une bouteille de Klein) essentiel (peut-être singulier) dans la variété quotient M/τ, contredisant ainsi son atoroïdalité. □

4.2.7. Lemme

Soit (M, P) une variété apprêtée hyperbolique, à bord strictement incompressible et qui n'est pas un fibré en intervalles. Soit un point $s \in \mathcal{T}(\partial_0 M)$. Il existe une constante $\eta > 0$, ne dépendant que du point s et du type topologique (M, P), telle que tout élément non parabolique $\gamma \in \pi_1(\partial_0 M)$, ayant une longueur de translation $\ell(\rho(\gamma)) < \eta$ pour une représentation $\rho \in \partial^{-1}(\mathcal{O}(s)$, est conjugué dans le groupe fondamental d'une composante connexe de la sous-variété caractéristique de M. □

La preuve de ce lemme est assez technique et délicate. Elle utilise les tubes de Margulis, associés aux lacets de longueur suffisamment petite sur $\partial_0 M$, dans les revêtements quasi-fuchsiens correspondant aux composantes de bord qui les portent. Une analyse précise de ces tubes permet de construire des anneaux essentiels (peut-être singuliers) dans M, s'appuyant sur ces courbes dans $\partial_0 M$. On peut alors pousser ces anneaux dans la sous-variété caractéristique de M. Pour une exposition détaillée de cette construction nous renvoyons à [Ka, § 17.2.3], [Mor1, § 12].

Nous pouvons maintenant expliquer la preuve de la première assertion du Théorème de la limite géométrique (cf. [Th0, Thm. 9.6.1.a], [Oh, Thm. 2.1]).

Démonstration de l'assertion 1) *du théorème* 4.2 : Soit $q : N_\infty \to Q_\infty$ le revêtement de la limite géométrique par la limite algébrique. On veut montrer que son degré est fini.

Une surface plissée dans une variété hyperbolique N est une application $f : S \to N$ d'une surface hyperbolique complète S dans N, telle que :

(i) tout point $x \in S$ appartient à l'intérieur d'un arc géodésique dont l'image par f est un arc géodésique de N,

(ii) l'application f est injective au niveau des groupes fondamentaux.

Dans ce qui suit, nous identifierons une surface plissée avec son image $f(S)$ dans N. En particulier, le bord du cœur convexe de N est constitué de surface plissée, lorsque N vérifie la condition de Bonahon.

Soit $F \subset \partial_0 M$ une composante connexe. Comme le bout de la variété hyperbolique N_k correspondant à $\rho_k(\pi_1(F))$ est géométriquement fini, il existe une surface plissée $S_k \subset \partial C(N_k)$ dans le bord du cœur convexe de N_k, telle qu'une composante connexe de $N_k - S_k$ ne rencontre pas $C(N_k)$. Une telle surface est unique et induit une structure hyperbolique marquée sur F. On peut donc lui associer un point $[S_k]$ dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(F)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite des points $\{[S_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans la compactification de Thurston $\overline{\mathcal{T}(F)}$ de l'espace de Teichmüller de F. On rappelle que $\overline{\mathcal{T}(F)} = \mathcal{T}(F) \cup \mathcal{PL}(F)$, où $\mathcal{PL}(F)$ est l'espace projectif des laminations mesurées sur F (cf. [FLP], [Th7]). On distingue alors deux cas :

a) la suite $\{[S_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{T}(F)$. On peut réaliser la limite par une surface plissée $S_\infty \subset \partial C(N_\infty)$ dans le bord du cœur convexe de N_∞, qui correspond à $\rho_\infty(\pi_1(F))$ (cf. [CEG], [EM]). Comme $\rho_\infty(\pi_1(F))$ n'admet pas de parabolique accidentel, le théorème de Thurston de compacité des surfaces plissées (cf. [Th0, §, 8.5], [CEG, Thm 5.2]) permet de montrer que l'image $q(S_\infty) \subset \partial C(Q_\infty)$ est la limite géométrique des surfaces plissées $S_k \subset \partial C(N_k)$. On en déduit que le bout non cuspidal E_∞ de N_∞, associé à S_∞, est géométriquement fini. De plus la restriction de l'application de revêtement q à ce bout est un plongement. En effet, si $\tilde{S}_\infty \subset \mathbb{H}^3$ est un relevé de S_∞, la convergence géométrique des variétés N_k (respectivement des surfaces plissées S_k) vers Q_∞ (respectivement $q(S_\infty)$) implique que les translatés de $\tilde{S}_\infty$ par les éléments de $\pi_1(Q_\infty)$, qui ne normalisent pas $q_*(\pi_1(S_\infty))$, sont disjoints. Or par hypothèse, le normalisateur de $q_*(\pi_1(S_\infty))$ dans $\pi_1(Q_\infty)$ est lui-même ;

b) la suite $\{[S_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathcal{T}(F)}$ vers une lamination mesurée $\mathcal{L}_\infty$. Comme $\rho_\infty(\pi_1(F))$ n'admet pas de parabolique accidentel, le théorème de Thurston de compacité des surfaces plissées (ayant un type d'homotopie fixé) (cf. [Th0, § 8.5], [CEG, Thm 5.2.18]), montre que $\mathcal{L}_\infty$ est la *lamination terminale* d'un bout géométriquement infini du revêtement N_∞^F de N_∞, associé au sous-groupe $\rho_\infty(\pi_1(F))$. D'après le théorème du revêtement, $\rho_\infty(\pi_1(F))$ est d'indice fini dans le groupe fondamental $\pi_1(E_\infty)$ du bout correspondant $E_\infty \subset N_\infty$.

La discussion des deux cas précédents montre que le bord du cœur compact M_∞ de N_∞ a les propriétés suivantes :

(i) le groupe fondamental de chaque composante connexe de $\partial_0 M_\infty$ contient, comme sous-groupe d'indice fini, l'image par ρ_∞ du groupe fondamental d'une composante connexe de $\partial_0 M$;

(ii) deux composantes connexes de $\partial_0 M_\infty$ ne sont jamais homotopes dans N_∞, car le groupe fondamental $\pi_1(N_\infty) = \pi_1(M)$ ne contient pas un sous-groupe de surface d'indice fini.

Comme M et M_∞ sont des variétés irréductibles, ayant le même type d'homotopie, leurs bords ont la même caractéristique d'Euler. Les propriétés (i) et (ii) montrent alors que, pour chaque composante connexe $F_\infty \subset \partial_0 M_\infty$, il existe une unique composante connexe $F \subset \partial_0 M$ telle que $\rho_\infty(\pi_1(F)) = \pi_1(F_\infty)$. En particulier l'isomorphisme $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \pi_1(M_\infty)$ préserve la structure périphérique et peut donc être réalisé par un difféomorphisme d'après le théorème de F. Waldhausen [Wa].

Il en découle que la restriction de l'application de revêtement q sur les bouts non cuspidaux de N_∞ est de degré fini, car elle est de degré 1 (d'après ce qui précède) sur les bouts géométriquement finis et de degré fini sur les bouts géométriquement infinis (d'après le théorème du revêtement).

Puisque la partie non cuspidale de N_∞ est réunion de son cœur compact M_∞ et des bouts non cuspidaux, la restriction de q à $N_\infty - N_\infty^{cusp}$ est de degré fini. Comme q envoie la partie cuspidale de N_∞ sur la partie cuspidale de Q_∞, $\pi_1(N_\infty)$ est d'indice fini dans $\pi_1(Q_\infty)$ et le lemme 4.2.3 permet de conclure. □

Nous achevons maintenant la preuve du théorème de la limite géométrique en démontrant l'assertion 2). Ceci achèvera donc la preuve du théorème du point fixe 3.1, et par là même la preuve du théorème de recollement 2.1.

Démonstration de l'assertion 2) *du théorème* 4.2 (cf. [Ka, §, 17.2.4]) : Le but est de montrer, en utilisant l'assertion 1), que tous les bouts non cuspidaux de la limite algébrique N_∞ sont géométriquement finis.

Soient $E^+ \subset N_\infty$ un bout non cuspidal, correspondant à une composante $F^+ \subset \partial_0 M$ et $E^- \subset N_\infty$ le bout correspondant à la composante $F^- = \tau(F^+) \subset \partial_0 M$. On considère les revêtements $p_+ : \hat{N}^+ \to N_\infty$ et $p_- : \hat{N}^- \to N_\infty$ respectivement associés aux sous-groupes $\pi_1(F^+)$ et $\pi_1(F^-)$ de $\pi_1(N_\infty)$.

Ces revêtements ont respectivement une paire de bouts $(\hat{E}_0^+, \hat{E}_1^+)$ et $(\hat{E}_0^-, \hat{E}_1^-)$. Du fait que l'isomorphisme $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \pi_1(N_\infty)$ préserve la structure périphérique, la restriction des applications de revêtements p^+ et p^- à un des bouts de chaque paire, par exemple $\hat{E}_0^+$ et $\hat{E}_0^-$, est une isométrie.

De plus, si $\tau = (f, f^{-1}) : F^+ \sqcup F^- \to F^- \sqcup F^+$, la convergence géométrique implique que l'application d'identification $f : F^+ \to F^-$ induit un homéomorphisme quasi-conforme au bord $\hat{f}_\infty : \hat{N}^+ \to \hat{N}^-$ qui transpose les paires de bouts : $\hat{f}_\infty(\hat{E}_0^+) = \hat{E}_1^-$ et $\hat{f}_\infty(\hat{E}_1^+) = \hat{E}_0^-$.

Si le bout non cuspidal E^+ de N_∞ est géométriquement fini, le revêtement $\hat{N}^+$ est quasifuchsien, d'où le revêtement $\hat{N}^-$ est quasifuchsien, et le bout E^- est lui aussi géométriquement fini. En particulier, si le bout E^+ est géométriquement infini, les bouts $\hat{E}_0^+ \subset \hat{N}^+$ et $\hat{E}_0^- \subset \hat{N}^-$ sont géométriquement infinis. Puisque $\hat{f}_\infty(\hat{E}_1^+) = \hat{E}_0^-$, le bout

$\hat{E}_1^+ \subset \hat{N}^+$ est lui aussi géométriquement infini. Le théorème du revêtement montrerait alors que p^+ est un revêtement fini, contredisant l'hypothèse que M et donc N_∞ n'est pas un fibré en intervalles. □

5. VARIÉTÉS MIROITÉES

Nous allons maintenant décrire la partie topologique de la récurrence, qui permet de ramener la preuve du théorème d'hyperbolisation à celle du théorème de recollement final. Il s'agit de la partie la plus classique de la preuve du théorème d'hyperbolisation. C'est dans cette étape qu'on utilise l'existence d'une *hiérarchie finie* pour une variété hakenienne de dimension 3. Cela permet de lui associer une complexité et donc de raisonner par récurrence sur cette complexité. Nous suivons ici l'approche adoptée dans [Ota2, § 7], auquel nous référons pour les détails.

Dans cette étape, il est nécessaire de considérer des hiérarchies adaptées à la notion de variétés apprêtées. Ce type de hiérarchie avait déjà été considéré par K. Johannson [Jo] dans la preuve de son théorème sur les équivalences d'homotopie et la finitude du groupe des difféotopies d'une variété hakenienne atoroïdale.

Définition.— *Une surface essentielle $(F, \partial F) \hookrightarrow (M, \partial M)$ est dite* strictement essentielle *dans la variété apprêtée (M, P) si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) *∂F est transverse à ∂P et minimise le cardinal de $\partial F \cap \partial P$ dans sa classe d'isotopie ;*

2) *toute composante connexe de ∂F parallèle à ∂P appartient à P ;*

3) *il n'existe pas d'anneau incompressible plongé $(S^1 \times [0,1], S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\}) \hookrightarrow (M, \partial M, F)$, tel que la composante de bord $S^1 \times \{1\} \subset F)$ ne soit pas parallèle à ∂F.*

La proposition ci-dessous décrit une notion de hiérarchie qui est une extension naturelle aux variétés apprêtées de la construction classique d'une hiérarchie pour une variété hakenienne (cf. [Jo], [Mor1, § 4], [Ota2, § 7]).

5.1. Proposition

Si M est une variété hakenienne, toute variété apprêtée atoroïdale (M,P) admet une hiérarchie du type suivant : il existe une suite finie (M_0, P_0),...,(M_n, P_n) de variétés apprêtées atoroïdales telles que :

(i) $(M_0, P_0) = (M, P)$;

(ii) *pour $k \leq n-1$, il existe une surface connexe strictement essentielle $F_k \subset M_k$ (qui n'est pas un disque et dont le bord est non vide si $\partial_0 M_k \neq \emptyset$) telle que M_{k+1} est obtenue en coupant M_k le long de F_k. De plus, P_{k+1} est obtenu en coupant P_k le long de ∂F_k et en oubliant les composantes qui sont des disques ;*

(iii) *M_n est une réunion de corps à anses (ou bretzels).*

On appelle n la longueur de la hiérarchie. L'existence d'une telle hiérarchie et le fait que sa longueur soit bornée par une constante ne dépendant que du type topologique de M résultent des deux lemmes classiques suivants :

5.2. Lemme de finitude de Haken-Kneser

Dans une variété compacte orientable irréductible de dimension 3, il existe au plus un nombre fini $h(M)$ de surfaces essentielles, disjointes et deux à deux non parallèles. □

5.3. Lemme

Une variété hakenienne est un corps à anses si et seulement si toute surface essentielle dans M est un disque. □

On définit alors la *complexité de la variété apprêtée (M,P)* comme la paire $c(M,P) = (\ell(M,P), g(\partial M)) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, où $\ell(M,P)$ est la plus grande longueur possible pour une hiérarchie de la variété apprêtée (M,P), donnée par la proposition 5.1, et $g(\partial M)$ est le genre du bord de M. On munit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'ordre lexicographique.

Une variété de complexité minimale est alors une réunion disjointe de boules $(B^3, \emptyset)$. De plus la complexité d'une variété apprêtée **décroît strictement** lorsqu'on la découpe le long d'une surface strictement essentielle.

La jolie idée de Thurston est d'associer à une variété atoroïdale apprêtée (M,P) une variété atoroïdale *miroitée*, à bord vide ou constitué de tores.

Définitions.— *On appelle variété miroitée un couple $(\hat{M}, H)$ formé d'une variété compacte orientable irréductible $\hat{M}$, à bord vide ou constitué de tores incompressibles, et d'un sous-groupe abélien fini $H = (\mathbb{Z}_2)^k \subset Diff(\hat{M})$ engendré par des symétries par rapport à des surfaces essentielles dans $\hat{M}$.*

On appelle type topologique de la variété miroitée $(\hat{M}, H)$ la variété apprêtée (M,P) où M est l'espace sous-jacent du quotient $\hat{M}/H$ et P est l'espace sous-jacent du quotient $\partial\hat{M}/H$ dans lequel on oublie les composantes qui sont des disques.

Remarque sur les kaléidoscopes : La structure de variété miroitée $(\hat{M}, H)$ est déterminée par la stucture *orbifold* du quotient $\mathcal{K} = \hat{M}/H$. C'est la structure d'espace métrique sur $\mathcal{K} = \hat{M}/H$ dans laquelle tout point x a un voisinage localement modelé sur le quotient de $\mathbb{R}^3$ par un sous-groupe du groupe à huit éléments engendré par les symétries par rapport aux trois plans de coordonnées. On appellera ce sous-groupe le groupe d'isotropie du point $x \in \mathcal{K}$ considéré. Le bord orbifold $\partial\mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ correspond à l'orbifold quotient $\partial\hat{M}/H$. On appelle lieu singulier de l'orbifold $\mathcal{K}$ l'ensemble $\Sigma \subset \partial_0 M$ des points ayant un groupe d'isotropie non trivial. Dans notre cas c'est une sous-orbifold de dimension 2, dont l'espace sous-jacent est le complémentaire dans ∂M de l'espace sous-jacent du bord $\partial\mathcal{K}$.

L'ensemble des points, ayant un groupe d'isotropie d'ordre ≥ 4, est une sous-orbifold $\mathcal{G} \subset \Sigma$ de dimension 1. Son espace sous-jacent est un graphe trivalent dans $\partial_0 M$, dont les sommets correspondent aux points ayant un groupe d'isotropie maximal dans $\mathcal{K}$. On appelle l'adhérence des composantes connexes de $\Sigma - \mathcal{G}$ les *facettes* de $\mathcal{K}$.

On peut donc voir l'orbifold $\mathcal{K}$ comme un *kaléidoscope* à angles droits. Il est obtenu à partir de la variété apprêtée (M, P) en ciselant des facettes sur $\partial_0 M$ le long des composantes connexes de $\partial_0 M - \mathcal{G}$, dont le bord n'est pas un rectangle dans ce graphe.

Cette notion de kaléidoscope quotient est cruciale pour établir les propriétés utiles des variétés miroitées. Le fait que pour la preuve du théorème d'hyperbolisation on ait besoin de considérer seulement ce type de kaléidoscopes à angles droits est une observation de F. Bonahon.

5.4. Proposition

Soit (M, P) une variété apprêtée atoroïdale, l'ensemble $\mathcal{AM}(M, P)$ des variétés miroitées atoroïdales de type topologique (M, P) est non vide.

Démonstration de la proposition 5.4 : D'après la remarque précédente, la preuve de la proposition 5.4 consiste essentiellement à trouver un graphe trivalent $\mathcal{G}$ dans $\partial_0 M$ ayant les propriétés suivantes :

(i) l'adhérence de toute composante connexe du complémentaire $\partial_0 M - \mathcal{G}$ est soit un n-gone ayant $n \geq 5$ sommets, soit un anneau avec au moins un sommet de $\mathcal{G}$ dans une composante de bord, l'autre composante de bord étant incluse dans ∂P ;

(ii) toute courbe simple fermée $\gamma \subset \partial_0 M$, qui rencontre transversalement le graphe $\mathcal{G}$ en au plus trois points et qui borde un disque dans M, borde un disque D dans $\partial_0 M$ dont l'intersection $D \cap \mathcal{G}$ est le cône sur $\partial D \cap \mathcal{G}$.

(iii) toute courbe simple fermée $\gamma \subset \partial_0 M$, qui rencontre transversalement le graphe $\mathcal{G}$ en quatre points et qui borde un disque dans M, borde un disque D dans $\partial_0 M$ dont l'intersection $D \cap \mathcal{G}$ consiste en deux arcs disjoints d'extrémités $\partial D \cap \mathcal{G}$, avec au plus deux arêtes parallèles de $\mathcal{G}$ les reliant dans D.

Le kaléidoscope $\mathcal{K}$ associé, dont les facettes sont obtenues en ciselant toutes les composantes connexes de $\partial_0 M - \mathcal{G}$ est irréductible et atoroïdal au sens des orbifolds (cf. [BS]). Dans notre cas c'est équivalent, via le théorème du lacet et de la sphère équivariants ([DD], [MY]), à l'irréductibilité et l'atoroïdalité de la variété $\hat{M}$, obtenue par miroitage du kaléidoscope $\mathcal{K}$ le long de ses facettes.

L'irréductibilité découle de l'irréductibilité de la variété M, de l'incompressibilité de $\partial_0 M$ et des propriétés (i) et (ii) du graphe $\mathcal{G}$. L'atoroïdalité découle de l'atoroïdalité de la variété apprêtée (M, P) et des propriétés (i) et (iii) du graphe $\mathcal{G}$.

Pour obtenir le graphe $\mathcal{G}$ ayant les propriétés voulues, on considère un voisinage ouvert collier de P dans ∂M, et une triangulation de son complémentaire dans ∂M. On modifie alors cette triangulation de la façon suivante : on ajoute 3 sommets correspondant au milieu des côtés du triangle, puis les 3 arêtes (parallèles aux côtés du triangle) qui les joignent deux à deux. On réitère cette construction dans le triangle inscrit et on joint chacun des sommets du nouveau triangle obtenu, au sommet correspondant du triangle de départ. Le 1-squelette de la cellulation duale de cette triangulation modifiée a les propriétés requises.

Pour les détails de cette construction due à E. Giroux, nous renvoyons à [Ota2, § 7]. □

Définition *On note $\mathcal{HM}(M,P)$ l'ensemble des variétés miroitées $(\hat{M},H)$ de type topologique (M,P) et admettant une structure hyperbolique complète de volume fini, invariante par H. Clairement $\mathcal{HM}(M,P) \subset \mathcal{AM}(M,P)$.*

Lorsque la variété apprêtée M n'est pas virtuellement fibrée sur le cercle, le théorème suivant se démontre, grâce au théorème de recollement 2.1, par récurrence sur la complexité $c(M,P)$ de la variété apprêtée (M,P).

5.5. Théorème d'hyperbolisation des variétés miroitées

Soit (M,P) une variété apprêtée atoroïdale. Si M est une variété hakenienne, $\mathcal{HM}(M,P) = \mathcal{AM}(M,P)$.

Remarque : L'existence d'une structure hyperbolique complète à volume fini, invariante par le groupe des miroirs H, sur la variété miroitée $\hat{M}$ est équivalente à l'existence d'une structure hyperbolique à volume fini sur le kaléidoscope quotient $\mathcal{K} = \hat{M}/H$, ayant les propriétés suivantes :

(i) toutes les facettes de $\mathcal{K}$ sont totalement géodésiques,

(ii) l'angle dièdre de deux facettes le long d'une arête commune de $\mathcal{G}$ est $\pi/2$.

Grâce à la proposition 5.4, le lemme suivant permet de déduire le théorème d'hyperbolisation pour les variétés apprêtées du théorème d'hyperbolisation pour les variétés miroitées.

5.6. Lemme

Soit (M,P) une variété apprêtée. Si $\mathcal{HM}(M,P)$ est non vide, (M,P) est hyperbolique.

Démonstration du lemme 5.6 : S'il existe une variété miroitée hyperbolique $(\hat{M},H)$ de type topologique (M,P), le kaleidoscope $\mathcal{K} = \hat{M}/H$ admet une structure hyperbolique à volume fini et totalement géodésique le long de ses facettes. L'ensemble des points intérieurs et non singuliers de $\mathcal{K}$ s'identifie à l'intérieur d'un convexe de volume fini dans $\mathcal{K}$. Cela permet de munir M d'une structure hyperbolique géométriquement finie. □

Nous décrivons maintenant la preuve du théorème d'hyperbolisation pour les variétés miroitées, dont le type topologique n'est pas virtuellement fibré sur le cercle.

Démonstration du théorème 5.5 *dans le cas non fibré* : L'étape initiale de la récurrence est donnée par le cas particulier suivant du théorème d'Andreev, qui montre que les kaléidoscopes atoroïdaux de type topologique $(B^3,\emptyset)$ sont hyperboliques. Pour une preuve de ce théorème nous renvoyons aux articles originaux de E.M. Andreev [And1, And2], aux notes de Thurston [Th0, § 13] et aux travaux de I. Rivin [Riv] (cf. [RH]).

5.7. Théorème d'Andreev ([And1, And2])

Les trois conditions suivantes caractérisent combinatoirement un polyèdre convexe de volume fini et d'angles dièdres $\pi/2$ dans $\mathbb{H}^3$, qui n'est ni un simplexe, ni un prisme triangulaire :

(1) *trois faces deux à deux adjacentes sont concourantes en un sommet ;*

(2) *deux faces non adjacentes, mais adjacentes à une même face, sont concourantes avec cette face en un sommet, ou sont disjointes ;*

(3) *quatre faces cycliquement adjacentes sont concourantes en un sommet ou trois des faces sont deux à deux adjacentes.* $\square$

Définition.— *Soit $(\hat{M}, H)$ une variété miroitée de type topologique (M, P). Une* bonne surface de découpage *est une surface strictement essentielle et H-équivariante $(F, \partial F) \hookrightarrow (\hat{M}, \partial\hat{M})$, dont la projection F dans $M = |\hat{M}/H|$ est une surface proprement plongée, qui est soit un système complet de disques méridiens si M est un corps à anses, soit une surface connexe différente d'un disque et ayant du bord si $\partial M \neq \emptyset$.*

Les deux lemmes suivants constituent la première étape pour se ramener au théorème de recollement.

5.8. Lemme

Soit $(\hat{M}, H)$ une variété miroitée de type topologique (M, P). Si M est une variété hakenienne, il existe une bonne surface de découpage dans $(\hat{M}, H)$.

Démonstration du lemme 5.8 : Soit $\mathcal{K} = \hat{M}/H$ le kaleidoscope associé à la variété miroitée $(\hat{M}, H)$. En utilisant le fait que M est hakenienne, la preuve consiste à trouver un sous-kaléidoscope $\mathcal{F}$ de dimension 2, strictement essentiel (au sens des orbifolds) dans $\mathcal{K}$, et ayant les propriétés suivantes :

1) l'espace sous-jacent de $\mathcal{F}$ est soit un système complet de disques méridiens si M est un corps à anses, soit une surface connexe différente d'un disque et ayant du bord si M a du bord.

2) le nombre de sommets de $\partial\mathcal{F}$ (i.e. de points dont le groupe d'isotropie est de rang 4) est minimal parmi tous les sous-kaléidoscopes de dimension 2 strictement essentiels dans $\mathcal{K}$ et vérifiant la propriété 1).

Le relevé $\hat{F}$ dans $\hat{M}$ de $\mathcal{F}$ est une bonne surface de découpage. Pour plus de détails nous renvoyons à [Ota2, Lemme 7.3]. $\square$

Soient (M, P) une variété apprêtée et $(F, \partial F)$ une surface proprement plongée dans $(M, \partial M)$. Dans ce qui suit, (M_F, P_F) désignera la variété apprêtée obtenue en découpant M et P le long de F, et en oubliant les composantes obtenues en découpant P qui sont des disques. Nous utiliserons des notations analogues lorsque nous découperons une variété miroitée (respectivement un kaléidoscope) le long d'une surface équivariante (respectivement d'un sous-kaléidoscope de dimension 2).

5.9. Lemme

Soient $(\hat{M}, H)$ une variété miroitée atoroïdale de type topologique (M,P) et $\hat{F} \subset \hat{M}$ une bonne surface de découpage. Il existe une variété miroitée atoroïdale $(\hat{M}', H')$ de type topologique (M_F, P_F) et un sous-groupe $K' \subset H'$ telle que la variété miroitée $(\hat{M}', K')$ soit de type topologique $(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$.

Démonstration du lemme 5.9 : Soit $\mathcal{F} = \hat{F}/H$ le sous-kaléidoscope strictement essentiel dans $\mathcal{K} = \hat{M}/H$. En découpant $\mathcal{K}$ le long de $\mathcal{F}$, on obtient un kaléidoscope $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ dont le bord contient deux copies $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ de $\mathcal{F}$. La preuve consiste alors à ciseler $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ de façon à obtenir un nouveau kaléidoscope $\mathcal{K}'$, de bord $\{\partial\mathcal{K}\}_{\mathcal{F}}$ et d'espace sous-jacent $|\mathcal{K}'| = M_F$. Il s'agit en quelque sorte d'une version relative de la proposition 5.4. Pour plus de détails nous renvoyons à [Ota2, Lemme 7.4]. La variété miroitée $(\hat{M}', H')$, associée au kaléidoscope $\mathcal{K}'$, a pour type topologique (M_F, P_F).

Soit $K' \subset H'$ le sous-groupe engendré par les symétries miroirs correspondant aux facettes de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$. La variété miroitée $(\hat{M}', K')$ a pour type topologique $(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$. □

Supposons par récurrence que $\mathcal{HM}(M,P) = \mathcal{AM}(M,P)$ lorsque M est une variété hakenienne, qui n'est pas virtuellement fibrée sur le cercle, et que la variété apprêtée (M,P) a une complexité $c(M,P) < (\ell, g)$, avec $\ell \geq 1$ ou $\ell = 0$ et $g \geq 1$.

Les lemmes 5.8 et 5.9 permettent de montrer :

5.10. Proposition

Soit $(\hat{M}, H)$ une variété miroitée atoroïdale de type topologique (M,P), tel que M n'est pas virtuellement fibrée sur le cercle et que $c(M,P) = (\ell, g)$. Soit $\hat{F} \subset \hat{M}$ une bonne surface de découpage. La variété apprêtée $(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$, obtenue en découpant $(\hat{M}, \partial\hat{M})$ le long de $\hat{F}$, a les propriétés suivantes :

1) *$\partial_0\hat{M}_{\hat{F}}$ est strictement incompressible ;*
2) *$(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$ n'est pas un fibré en intervalles ;*
3) *$(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$ est hyperbolique.*

Démonstration de la proposition 5.10 : La définition d'une bonne surface de découpage entraîne la propriété 1) et le fait que $c(M_F, P_F) < (\ell, g)$. La propriété 2) découle du fait que M n'est pas virtuellement fibrée sur le cercle.

Soit $(\hat{M}', H')$ la variété miroitée de type topologique (M_F, P_F), donnée par le lemme 5.9. Puisque $c(M_F, P_F) < (\ell, g)$, l'hypothèse de récurrence implique que $\hat{M}'$ admet une structure hyperbolique H-invariante. Cette structure hyperbolique est aussi K'-invariante, pour le sous-groupe $K' \subset H'$, donné par la lemme 5.9. En particulier la variété miroitée $(\hat{M}', K')$ appartient à $\mathcal{HM}(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$, qui est donc non vide. Le lemme 5.6 montre alors que la variété apprêtée $(\hat{M}_{\hat{F}}, \partial\hat{M}_{\hat{F}})$ est hyperbolique. □

La proposition 5.10 et le théorème de recollement 2.1 ont pour conséquence immédiate :

5.11. Corollaire

Soit $(\hat{M}, H)$ une variété miroitée atoroïdale de type topologique (M, P), telle que M est une variété hakenienne qui n'est pas virtuellement fibrée sur le cercle. Si (M, P) a une complexité $c(M, P) = (\ell, g)$, $int(\hat{M})$ admet une structure hyperbolique complète de volume fini. □

Le théorème de rigidité de Mostow [Mos] et le théorème de Waldhausen [Wa] impliquent que le groupe H est isotope à un groupe d'isométries de $\hat{M}$. Comme H est un groupe abélien, engendré par des involutions, l'existence d'une hiérarchie H-équivariante pour $\hat{M}$ permet, comme dans [To], de montrer que H est en fait conjugué à un groupe d'isométries de $\hat{M}$. D'où la variété miroitée $(\hat{M}, H)$ appartient à $\mathcal{HM}(M, P)$. Ceci achève la démonstration du théorème d'hyperbolisation des variétés miroitées dans le cas non fibré.

L'argument donné revient à établir une version du théorème de Waldhausen [Wa] pour les kaléidoscopes (cf. [Ka, § 7]). On peut aussi, comme dans [Ota2, § 8], éviter le recours aux théorèmes de Mostow et de Waldhausen en établissant une version équivariante du théorème de recollement 2.1. □

BIBLIOGRAPHIE

[Ah] L. Ahlfors - *Finitely generated Kleinian groups*, Amer. J. Math. **86** (1964), 413-429.

[AB] L. Ahlfors, L. Bers - *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. **72** (1960), 385-404.

[And1] E.M. Andreev - *On convex polyhedra in Lobačeskiĭ space*, Mat. USSR Sbornik **10** (1970), 413-440.

[And2] E.M. Andreev - *On convex polyhedra of finite volume in Lobačeskiĭ space*, Mat. USSR Sbornik **12** (1971), 255-259.

[BaM] H. Bass, J.W. Morgan - *The Smith Conjecture*, Academic Press, 1984.

[BeF] M. Bestvina, M. Feighn - *Stable actions of groups on real trees*, Invent. Math. **121** (1995), 287-321.

[Ber] L. Bers - *On boundaries of Teichmüller spaces and Kleinian groups*, Ann. of Math. **91** (197O), 570-600.

[Bes] M. Bestvina - *Degenerations of hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988), 143-161.

[Bon] F. Bonahon - *Bouts des variétés hyperboliques de dimension* 3, Ann. of Math. **124** (1986), 71-158.

[BoP] M. Boileau, J. Porti - *Geometrization of* 3*-orbifolds of cyclic type*, Preprint, 1998.

[BS] F. Bonahon, L. C. Siebenmann - *The characteristic tori splitting of irreducible compact three-orbifolds*, Math. Ann. **278** (1987), 441-479.

[Ca] R. Canary - *A covering theorem for hyperbolic* 3-*manifolds and its applications*, Topology **35** (1996), 751-778.

[CEG] R. D. Canary, D. Epstein and P. Green - *Notes on notes of Thurston*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (D.B.A. Epstein, ed.), London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. **111**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 3-92.

[CJ] A. Casson, D. Jungreis - *Convergence group and Seifert fibered* 3-*manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 441-456.

[CHK] D. Cooper, C. Hodgson, S. Kerchkoff - The Orbifold Theorem: Working Notes, 1998.

[CS] M. Culler, P.B. Shalen - *Varieties of group representations and splittings of* 3-*manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109-146.

[DD] W. Dicks, M.J. Dunwoody - *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[EM] D. Epstein, A. Marden - *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (D. B. A. Epstein, ed.), London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. **111**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 113-253.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poenaru - *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67** (1979).

[Ga1] D. Gabai - *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math. **136** (1992), 447-510.

[Ga2] D. Gabai - *Homotopy hyperbolic* 3-*manifolds are virtally hyperbolic*, J.A.M.S. **7** (1994), 193-198.

[Ga3] D. Gabai - *On the geometric and topological rigidity of hyperbolic* 3-*manifolds*, J.A.M.S. **10** (1997), 37-74.

[GMT] D. Gabai, R. Meyerhoff, N. Thurston - *Homotopy hyperbolic* 3-*manifolds are hyperbolic*, Preprint, 1996.

[Gro] M. Gromov - *Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen*, Sém. Bourbaki, exp. n° 546 (novembre 1979), Lecture Notes in Math. **842** (1981), Springer Verlag, Berlin, 40-53.

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Gui] V. Guirardel - *Approximations of stable actions on* $\mathbb{R}$-*trees*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 89-121.

[JS] W.H. Jaco, P. B. Shalen - *Seifert fibred spaces in* 3-*manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **220** (1979).

[Jo] K. Johannson - *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundary*, Lecture Notes in Math. **761**, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[JM] T. Jørgensen, A. Marden - *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups*, Math. Scand. **66** (1990), 47-72.

[Ka] M. Kapovich - *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, Univ. of Utah Lecture Notes, 1995.

[Mard] A. Marden - *The geometry of finitely generated Kleinian groups*, Ann. of Math. **99** (1974), 383-496.

[Marg] G.A. Margulis - *Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature*, Proc. Int. Congr. Math., Vancouver **2** (1974), 21-34.

[Mas1] B. Maskit - *On Klein's combination theorem* III, Advances in the theory of Riemann Surfaces (L. Ahlfors et al., ed.), Ann. of Math. Studies **66**, Princeton Univ. Press (1971), 297-316.

[Mas2] B. Maskit - *Kleinian Groups*, Springer Verlag, Berlin, 1988.

[MT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi - *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Math. Monographs, Oxford, 1998.

[McM1] C. McMullen - *Amenability, Poincaré series and holomorphic averaging*, Invent. Math. **97** (1989), 95-127.

[McM2] C. McMullen - *Iteration on Teichmüller space*, Invent. Math. **99** (1990), 425-454.

[McM3] C. McMullen - *Riemann surface and the geometrization of* 3*-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 207-216.

[McM4] C. McMullen - *Renormalization and 3-manifolds which Fiber over the Circle*, Annals of Math. Studies, vol. 144, Princeton University Press, 1996.

[MY] W.H. Meeks, S.T. Yau - *The equivariant Dehn's Lemma and Loop Theorem*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 225-239.

[Me] G. Mess - *The Seifert conjecture and groups which are coarse quasi-isometric to planes*, Preprint, 1988.

[Mor1] J. Morgan - *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*, The Smith Conjecture (H. Bass et J. Morgan, ed.), Academic Press: Orlando, Fl., 1984, 37-125.

[Mor2] J. Morgan - *Actions de groupes finis sur* $\mathbb{S}^3$ *: la conjecture de P.A. Smith (d'après Thurston et Meeks-Yau)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 578 (juin 1981), Lecture Notes in Math. **901** (1981), Springer Verlag, Berlin, 277-289.

[MS1] J. Morgan, P.B. Shalen - *Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, I*, Ann. of Math. **120** (1984), 401-476.

[MS2] J. Morgan, P.B. Shalen - *Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, II: measured laminations in* 3*-manifolds*, Ann. of Math. **127** (1988), 403-465.

[MS3] J. Morgan, P.B. Shalen - *Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, III : actions of 3-manifold groups on trees and Thurston's compactness theorem*, Ann. of Math. **120** (1984), 467-519.

[Mos] G.D. Mostow - *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Stud., vol. 78, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.

[Oh] K. Ohshika - *Geometric behavior of Klenian groups on boundaries of deformation spaces*, Quart. J. Math. Oxford **43** (1992), 97-111.

[Ota1] J.-P. Otal - *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension* 3, Astérisque **235** (1996).

[Ota2] J.-P. Otal - *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds*, Preprint, 1997.

[Pau1] F. Paulin - *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988), 53-80.

[Pau2] F. Paulin - *Actions de groupes sur les arbres*, Sém. Bourbaki, exp. n° 808 (novembre 1995), Lecture Notes in Math. **241** (1997), Springer Verlag, Berlin, 97-137.

[Ril] R. Riley - *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 281-288.

[Riv] I. Rivin - *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. **143** (1996), 51-70.

[RH] I. Rivin, C. Hodgson - *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic* 3*-space*, Invent. Math. **111** (1993), 77-111.

[Sco1] P. Scott - *A new proof of the annulus and torus theorems*, Amer. J. Math. **102** (1980), 241-277.

[Sco2] P. Scott - *There are no fake Seifert fibre spaces with infinite* π_1, Ann. of Math. **117** (1983), 35-70.

[Sco3] P. Scott - *The geometries of* 3*-manifolds*, London Math. Soc. **15** (1983), 401-487.

[Sko] R. Skora - *Splittings of surfaces*, J.A.M.S. **9** (1996), 605-616.

[Sta] J. Stallings - *On fibering certain* 3*-manifolds*, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice Hall (1962), 95-100.

[Su1] D. Sullivan - *Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et sur les variétés hyperboliques de dimension* 3 *fibrées sur* S^1, Sém. Bourbaki, exp. n° 554 (février 1980), Lecture Notes in Math. **842** (1982), Springer Verlag, Berlin, 196-214.

[Su2] D. Sullivan - *On finiteness theorem for cusps*, Acta Math. **147** (1981), 289-299.

[Th0] W.P. Thurston - *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Princeton Math. Dept., 1979.

[Th1] W.P. Thurston - *Hyperbolic structures on* 3*-manifolds: overall logic*, Notes of Summer Workshop at Bowdoin (1980).

[Th2] W.P. Thurston - *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.

[Th3] W.P. Thurston - *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, I: Deformations of acylindrical manifolds*, Annals of Math. **124** (1986), 203-246.

[Th4] W.P. Thurston - *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and manifolds which fiber over S^1*, Preprint, 1986.

[Th5] W.P. Thurston - *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary*, Preprint, 1986.

[Th6] W.P. Thurston - *Three-manifolds with symmetry*, Preprint, 1982.

[Th7] W.P. Thurston - *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417-432.

[Th8] W.P. Thurston - *Three-dimensional geometry and topology*, vol. 35 (S. Levy, ed.), Princeton University Press, 1997.

[To] J.L. Tollefson - *Involutions of sufficiently large* 3*-manifolds*, Topology **20** (1981), 323-352.

[Tu] P. Tukia - *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988), 1-54.

[Wa] F. Waldhausen - *On irreducible* 3*-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968), 56-88.

[WS] C. Weber, H. Seifert - *Die beiden Dodekaederräume*, Math. Z. **37** (1933), 237-253.

Michel BOILEAU

Laboratoire Émile Picard
UMR 5580 du CNRS
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
F-31062 TOULOUSE Cedex 04
E-mail : boileau@picard.ups-tlse.fr