SYLVESTRE GALLOT

Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki, exp. n° 835, p. 7-32
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__7_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1997
50ème année, 1997-98, n° 835

VOLUMES, COURBURE DE RICCI ET CONVERGENCE DES VARIÉTÉS
[d'après T.H. Colding et Cheeger-Colding]

par **Sylvestre GALLOT**

1. PRÉSENTATION

Un des antécédents des travaux récents de T. Colding et de J. Cheeger et T. Colding est le théorème de finitude de J. Cheeger (1967) :

1.1. THÉORÈME ([Ch]).— *Pour toute donnée de K, D, $\delta > 0$ et d'un entier $n \geq 2$, il n'y a qu'un nombre fini de variétés différentiables M^n qui admettent une métrique riemannienne qui vérifie $-K^2 \leq \sigma_M \leq K^2$, $\mathrm{diam}(M) \leq D$ et $\mathrm{Vol}(M) \geq \delta$.*

Ici, σ_M, $\mathrm{diam}(M)$ et $\mathrm{Vol}(M)$ désignent respectivement la *courbure sectionnelle*, le *diamètre* et le *volume* associés à la métrique riemannienne.

On obtient un énoncé équivalent au théorème 1.1 en substituant l'hypothèse "rayon d'injectivité minoré" à l'hypothèse "volume minoré" (le *rayon d'injectivité* $\mathrm{inj}(M)$ est le plus grand rayon d'une boule dans laquelle tous les points sont joints au centre par une unique géodésique).

K. Grove, P. Petersen et J.Y. Wu ([G-P-W], voir [Ge] pour une démonstration plus simple) ont montré qu'on peut, dans le théorème 1.1, s'affranchir de la borne supérieure de la courbure sectionnelle (en dimension différente de 3 et 4).

M. Gromov (1981) montra que ce résultat de finitude découle d'un théorème de compacité pour une topologie associée à une nouvelle distance qui est une généralisation de la classique distance de Hausdorff d_H^Z entre compacts d'un même espace métrique Z et qu'il définit en considérant l'ensemble des variétés riemanniennes compactes comme un sous–ensemble de l'ensemble des espaces métriques compacts ; la distance de Gromov–Hausdorff $d_{GH}(X,Y)$ est alors l'infimum (en Z, i et j) de $d_H^Z(i(X),j(Y))$ pour tous les plongements isométriques i et j des espaces métriques X et Y dans un troisième espace métrique Z. Une version (partielle) du théorème de compacité de M. Gromov est le :

1.2. THÉORÈME ([G-L-P], chapitre 8).— *Pour toute donnée de D, $\delta > 0$ et d'un entier $n \geq 2$, l'ensemble des variétés riemanniennes M^n vérifiant $|\sigma_M| \leq 1$,* $\operatorname{diam}(M) \leq D$ *et* $\operatorname{inj}(M) > \delta$ *est compact pour la topologie associée à la distance de Gromov–Hausdorff (si l'on admet comme espaces–limite les variétés riemanniennes munies de métriques C^0).*

Certains arguments de la preuve de ce théorème furent complétés par A. Katsuda ([Ka]) et S. Peters ([Pet]) ; ce dernier s'attacha en particulier à établir la régularité optimale des métriques–limite, qui est $C^{1,\alpha}$ (pour tout $\alpha < 1$).

J. Cheeger et M. Anderson prouvèrent qu'on peut, dans le théorème 1.2, substituer l'hypothèse "courbure de Ricci minorée" à l'hypothèse de "courbure sectionnelle bornée", mais que l'ensemble des variétés considérées n'est plus alors que précompact dans la topologie C^α ($\alpha < 1$).

L'idéal serait d'élargir ces résultats à des classes plus vastes de variétés riemanniennes et d'obtenir les résultats de finitude, de rigidité ou d'équivalence (homotopique, homéomorphique ou difféomorphique) comme corollaires de propriétés de continuité, de maximalité ou de stabilité (presque maximalité) de certains invariants géométriques, vus comme des fonctionnelles sur la classe des variétés riemanniennes considérées, les deux défis principaux étant de :

(i) s'affranchir de toute hypothèse sur le rayon d'injectivité,

(ii) remplacer la donnée d'une borne *a priori* de la courbure sectionnelle par la donnée d'un minorant *a priori* de la courbure de Ricci.

D'après (i), les propriétés universelles à établir devront rester valables sans modification pour les suites de variétés qui "s'effondrent" (décrites par J. Cheeger et M. Gromov [Ch-Gv] et K. Fukaya [Fu1]), *i. e.* dont la courbure et le diamètre restent bornés pendant que leur rayon d'injectivité (et donc leur volume) tend vers zéro.

À propos de (ii), noter qu'une hypothèse sur la courbure de Ricci est beaucoup plus faible qu'une hypothèse sur la courbure sectionnelle puisque, dans la direction d'un vecteur unitaire tangent donné, la courbure de Ricci est la moyenne des courbures sectionnelles de tous les 2-plans contenant ce vecteur (multipliée par $n-1$).

Jusqu'aux travaux récents de T. Colding, très peu de résultats obéissaient simultanément aux impératifs (i) et (ii). En effet, en courbure de Ricci de signe quelconque, la plupart des résultats antérieurs prouvaient la finitude d'invariants homologiques ou spectraux contenant des informations topologiques assez faibles. Il en est ainsi de la majoration du premier nombre de Betti (par une fonction d'un minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre) donnée par M. Gromov (1980, [G-L-P], voir [Ga], 1981, pour une autre preuve). Un résultat qui motive le programme tracé par (i) et (ii) est le théorème de précompacité de M. Gromov :

1.3. THÉORÈME ([G-L-P], chapitre 5).— *Pour tout entier $n \geq 2$, l'ensemble des variétés riemanniennes M^n, qui vérifient* $\operatorname{diam}(M) \leq D$ *et* $\operatorname{Ric}_M \geq -(n-1)$ *est précompact pour la distance de Gromov–Hausdorff.*

Les espaces–limite sont des espaces métriques, éventuellement très singuliers (voir cependant les derniers travaux de J. Cheeger et T. Colding ([Ch-Co2],[Ch-Co3]) qui initient une description de leurs propriétés) et peu d'invariants passent à la limite (par exemple, la dimension n'est pas continue, puisque le tore $\mathbf{T} \times \varepsilon \,.\, \mathbf{T}^{n-1}$ tend vers $\mathbf{T}$). On ne croyait donc guère à la possibilité de contrôler des invariants fins comme le type différentiable à l'aide d'un simple minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre. C'est pourtant un résultat de ce type que donne le

1.4. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding, 1997, [Ch-Co2], théorème A.1.12).— *Soient M^n une variété compacte et $(M_k)_k$ une suite de variétés de même dimension n qui convergent vers M^n au sens de Gromov-Hausdorff et satisfont* $\operatorname{Ric}_{M_k} \geq -(n-1)$. *Alors, pour k suffisamment grand, M_k est difféomorphe à M.*

1.5. Contre–exemples.— On trouvera facilement des contre–exemples où la limite est un espace singulier de dimension inférieure. Il est plus difficile de construire, comme le fait M. Anderson ([An1]), une n–variété avec singularités coniques qui est la limite de deux suites de variétés régulières *de même dimension n* (et de courbure de Ricci minorée) qui ne sont pas homotopiquement équivalentes. Ceci souligne le rôle crucial joué, dans la preuve de 1.4, par la régularité de M^n, ou plus précisément par le fait que les petites boules de M^n ont presque le même volume que les boules euclidiennes de même rayon.

Voici un autre contre–exemple (trivial, mais typique de ce qui peut survenir quand la courbure de Ricci n'est pas minorée) : dans une sous–variété M^n d'une variété X^{n+1}, construisons un graphe qui relie les points d'un $\frac{\varepsilon}{2}$–réseau de M ; considérons une fonction nulle sur le graphe, positive et régulière sur son complémentaire dans X et une de ses lignes de niveau M_ε régulière située à distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ du graphe. On obtient ainsi une ε–approximation de Hausdorff de M par une variété de topologie beaucoup plus compliquée.

a) Résultats de continuité (voir aussi le chapitre 4).

Après avoir résolu le cas où la variété-limite est la sphère ([Co2]), T. Colding donne une réponse complète à cette question, conjecturée par J. Cheeger et M. Anderson :

1.6. THÉORÈME ([Co3], théorème 0.1).— *Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $B \to \mathrm{Vol}(B)$ est continue en tout point B de l'ensemble des boules géodésiques des variétés riemanniennes complètes de dimension n (vérifiant $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$), muni de la distance de Gromov-Hausdorff.*

Rappelons qu'on ne s'autorise aucune borne sur le rayon d'injectivité ni sur le volume (dans le cas d'une suite convergente – au sens de Gromov-Hausdorff – de variétés compactes, le théorème de continuité fournit "gratuitement" une minoration du volume dès que la limite est régulière et de même dimension).

b) Résultats de stabilité du volume (voir aussi le chapitre 5)

Certaines variétés sont de volume maximal parmi toutes les variétés de courbure de Ricci minorée. C'est le cas de la sphère parmi toutes les variétés de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$, des boules euclidiennes parmi toutes les boules de variétés de courbure de Ricci positive ou nulle. C'est aussi le cas des variétés de révolution $M_{N,f} = N^{n-1} \times_f [a,b]$ (*i.e.* munies de la métrique $f(r)^2 \cdot g_N + (dr)^2$) parmi tous les anneaux $A_{a,b} = \{a \leq \rho \leq b\}$ (où ρ désigne la distance dans une variété M à un compact donné) dont la courbure de Ricci (resp. la courbure moyenne du bord $\{\rho = a\}$) est minorée (resp. majorée) par celle de $M_{N,f}$. (Ces résultats sont des corollaires immédiats des propriétés de Bishop–Gromov 2.3 et (2.4).)

Le problème est de savoir si une variété, dont le volume est proche de la valeur maximale, est à distance de Gromov–Hausdorff petite de celle qui réalise le maximum.

*** Le cas de la sphère**

En 1983, K. Shiohama prouvait le :

1.7. THÉORÈME ([Sh]).— *Pour toute donnée de K et d'un entier $n \geq 2$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(n,K) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq \mathrm{Ric}_{S^n}$, $\sigma_M \geq -K^2$ et $\mathrm{Vol}(M) > \mathrm{Vol}(S^n) - \varepsilon$ soit homéomorphe à S^n.*

G. Perelman ([Per1], 1994) prouvait le même résultat *sans* l'hypothèse sur la courbure sectionnelle. L'histoire des théorèmes de pincement de la sphère illustre la difficulté qu'il y a à passer d'un résultat d'homéomorphisme à un résultat de difféomorphisme. Ainsi, Y. Otsu, K. Shiohama et T. Yamaguchi ([O-S-Y], 1989) prouvaient le théorème 1.7 en concluant au difféomorphisme de M avec S^n, mais sous l'hypothèse (beaucoup plus forte, voir ci–dessus) "$\sigma_M \geq 1$". En 1996, T. Colding prouve le :

1.8. THÉORÈME ([Co1]).— *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geq \mathrm{Ric}_{S^n}$ *et* $\mathrm{Vol}(M) \geq (1-\delta)\,\mathrm{Vol}(S^n)$ *est à distance de Gromov–Hausdorff inférieure à ε de S^n.*

Un corollaire de ce théorème et du théorème 1.4 est le :

1.9. THÉORÈME (J. Cheeger, T. Colding [Ch-Co2], theorem A.1.10).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n qui vérifie* $\mathrm{Ric}_M \geq \mathrm{Ric}_{S^n}$ *et* $\mathrm{Vol}(M) \geq (1-\varepsilon(n))\,\mathrm{Vol}(S^n)$ *soit difféomorphe à S^n.*

*** Le cas des boules euclidiennes :**

1.10. THÉORÈME (T. Colding, 1997 [Co3]).— *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, n)$ et un $\rho = \rho(\varepsilon, n)$ positifs (universels) tels que, sur toute variété riemannienne M^n qui vérifie* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$, *toute boule $B_M(p, r)$ (de rayon $r < \rho$) qui vérifie* $\mathrm{Vol}(B_M(p,r)) \geq (1-\delta)\,\mathrm{Vol}(B_{\mathbf{R}^n}(0,r))$ *est à distance de Gromov–Hausdorff inférieure à $\varepsilon \, . \, r$ de la boule euclidienne de même rayon.*

Conséquences.— Une conséquence du théorème 1.6 est que, lorsqu'une suite de variétés M_k (vérifiant $\mathrm{Ric}_{M_k} \geq -(n-1)$) converge au sens de Gromov–Hausdorff vers une variété M (fixée) compacte régulière de même dimension n (en faisant tendre $p_k \in M_k$ vers $p \in M$), il existe un $r_0 > 0$ (dépendant de M) tel que, pour k assez grand, $\mathrm{Vol}\, B_{M_k}(p_k, r_0) \simeq \mathrm{Vol}\, B_M(p, r_0) \geq \mathrm{Vol}\, B_{\mathbf{R}^n}(0, r_0)(1 - C r_0^2)$ (la dernière inégalité dérivant du développement de Taylor du volume en coordonnées exponentielles). Par l'inégalité de Bishop–Gromov (2.4), on en déduit que $\mathrm{Vol}\, B_{M_k}(p_k, r) \geq \mathrm{Vol}\, B_{\mathbf{R}^n}(0, r)(1-\delta)$ pour tout $r \leq r_0$. Le théorème 1.10 implique alors que les variétés M_k vérifient toutes (pour une même valeur de $\varepsilon, r_0 > 0$) la propriété $\mathcal{A}(\varepsilon, r_0)$, *i. e.* que toute boule $B_{M_k}(p_k, r)$ de M_k (de rayon inférieur à r_0) est à distance de Gromov–Hausdorff plus petite que $\varepsilon\, r$ de $B_{\mathbf{R}^n}(0, r)$; cette distance *reste donc petite par rapport au rayon de la boule*, même lorsque celui-ci tend vers zéro. Si cette $\varepsilon\, r$–approximation de Hausdorff était la restriction de l'approximation de Hausdorff F_k de M_k sur M, cela conclurait immédiatement à l'homéomorphisme dans le théorème 1.4 (on appelle *ε_k–approximation de Hausdorff* une application $F_k : M_k \to M$ vérifiant $|d_M(F_k(x), F_k(y)) - d_{M_k}(x, y)| \leq \varepsilon_k$ et telle que la distance de Hausdorff dans M entre M et $F_k(M_k)$ soit inférieure à ε_k). Malheureusement, nous n'avons ici que des approximations de Hausdorff locales. C'est pourquoi T. Colding et J. Cheeger ([Ch-Co2], pp. 462-468) prouvent le théorème 1.4 en construisant *ex abstracto* des recollements entre ces approximations de Hausdorff locales qui leur permettent de définir une famille de variétés $W_i(X)$, à partir d'une variété X ayant la propriété $\mathcal{A}(\varepsilon, r_0)$, de la manière suivante : considérons une famille de boules euclidiennes $\bar{B}^i_j$ qui sont des $\varepsilon\, 2^{-i}$–approximations de Hausdorff de boules B^i_j de X, de rayon 16.2^{-i}, centrées sur un 2^{-i}-réseau. En éliminant les intersections trop petites, les changements de cartes sur les $B^i_j \cap B^i_l$ se transcrivent en des pseudo-changements de cartes qui sont des $\varepsilon\, 2^{-i}$–approximations de Hausdorff entre (gros) domaines de $\bar{B}^i_j$ et de $\bar{B}^i_l$, donc voisins d'isométries qui vérifient presque la condition de cocycle. Un argument d'isotopie (déjà présent dans [Ch] et [Ch-Gv]) permet de les déformer et de les restreindre en de vrais changements de cartes difféomorphes dont la liste définit la structure de variété $W_i(X)$. Ce procédé aboutit à la même structure de variété si on remplace les pseudo-cartes initiales par d'autres $\varepsilon\, 2^{-i}$–approximations de Hausdorff euclidiennes entre les $\bar{B}^i_j$ et les $\bar{B}^i_l$. En particulier, nous pouvons prendre à l'étape (i+1) les restrictions des $\varepsilon\, 2^{-i}$–approximations de l'étape précédente, donc $W_{i+1}(X)$ et $W_i(X)$ ont la même structure de variété. De même, tant que $r_0 >> \varepsilon\, 2^{-i_o} >> \varepsilon_k$, nous pouvons prendre les restrictions des $F_k : M_k \to M$ (composées avec des cartes de M), ce qui implique que $W_{i_o}(M_k) = W_{i_o}(M)$. Enfin, pour i suffisamment grand ($i \geq i(X)$ dépendant de X), nous pouvons prendre les restrictions des changements de cartes exponentiels de la variété X elle-même, $W_i(X)$ a alors la même structure de variété que X. Nous obtenons $M_k \simeq W_{i(M_k)}(M_k) \simeq W_{i_o}(M_k) \simeq W_{i_o}(M) \simeq W_{i(M)}(M) \simeq M$. Ceci ne donne que les principales étapes de la preuve du théorème 1.4. (voir l'appendice A de [Ch-Co2] pour une preuve complète).

Remarque.— Dans le dernier contre–exemple de 1.5, quand r est du même ordre que le rayon d'injectivité de M_ϵ les boules de rayon r de M_ϵ ne sont pas situées à distance de Gromov–Hausdorff petite, relativement à r, de la boule euclidienne correspondante.

*** Le cas des variétés de révolution**

Sur l'ensemble des anneaux $A_{a,b} = \{a \leq \rho \leq b\}$ dont la courbure de Ricci est minorée par son analogue dans la variété de révolution $M_{N,f}$ (*i.e.* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\frac{f''}{f}\circ\rho$) et dont la courbure moyenne du bord $\{\rho = a\}$ est majorée par son analogue, la fonctionnelle (dont les variétés de révolution $M_{N,f}$ réalisent *toutes* le maximum, noté $Max\,\widetilde{Vol}_f$) est le "volume relatif au bord" : $\widetilde{Vol}\,(A_{a,b}) = \frac{\mathrm{Vol}(A_{a,b})}{\mathrm{Vol}\{\rho=a\}}$. Quand ce volume est presque maximal, J. Cheeger et T. Colding montrent que

Pour toute donnée de $n \geq 2$, $\eta > 0$ et $f > 0$ régulière, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, à tout anneau de l'ensemble ci-dessus qui vérifie $\widetilde{Vol}\,(A_{a,b}) \geq (1-\varepsilon)\,Max\,\widetilde{Vol}_f$, on puisse associer un espace de longueurs N tel que $A_{a,b}$ soit situé à distance de Gromov–

Hausdorff inférieure à η de la variété de révolution $M_{N,f}$ ([Ch-Col], théorème 4.85).

Ce résultat admet de nombreuses applications et contient potentiellement les théorèmes 1.7 et 1.8 (voir ([Ch-Col], théorème 6.68). Cependant, puisqu'il n'y a pas unicité de la variété de révolution qui réalise le maximum, la propriété de volume relatif presque maximal ne peut *a fortiori* donner aucune information sur la partie transversale N, sinon qu'il s'agit d'un espace métrique qui représente une ligne de niveau "générique" de la fonction–distance ρ ; de plus, aussi petit que soit ε, l'anneau A_{ab} n'est généralement pas homéomorphe à un produit ; des contre–exemples sont donnés par G. Perelman ([Per3]).

Le résultat antérieur le plus voisin de l'esprit de ce théorème est le célèbre "splitting theorem" de J. Cheeger et D. Gromoll ([Ch-Gl], 1971). Un corollaire du résultat ci-dessus est justement une version "à courbure de Ricci presque positive" du "splitting theorem", conjecturée par K. Fukaya et T. Yamaguchi ([F-Y]) :

1.11. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding 1996, [Ch-Col] theorem 6.64).— *Soit M^n une variété riemannienne complète qui est limite d'une suite de variétés riemanniennes M_i (de même dimension et vérifiant $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\varepsilon_i$, où $\varepsilon_i \to 0_+$) au sens suivant : il existe un point $p \in M$ et une boule de rayon R_i ($R_i \to +\infty$) dans chaque M_i dont la distance de Gromov–Hausdorff à $B_M(p, R_i)$ tend vers zéro. Si M contient une géodésique, définie sur $]-\infty, +\infty[$, qui est le plus court chemin entre chaque paire de ses points, alors M est isométrique à un produit $N \times \mathbf{R}$.*

c) Variétés de courbure de Ricci presque positive

Une première question consiste à se demander s'il existe un $\varepsilon(n) > 0$ *universel* tel que toute variété riemannienne compacte $\varepsilon(n)$–presque plate M^n (*i.e.* vérifiant $|\sigma_M| \leq \varepsilon(n)$ et $\mathrm{diam}(M) \leq 1$ ou, de manière équivalente *via* renormalisation, $|\sigma_M| \,.\, \mathrm{diam}(M)^2 \leq \varepsilon(n)$) admette une métrique plate. La réponse est évidemment négative, des contre–exemples étant fournis par les nilvariétés (quotients compacts de groupes nilpotents, voir par exemple [B-K]). La question devenait donc de savoir si les nilvariétés sont les seules variétés à admettre une métrique $\varepsilon(n)$–presque plate. La démonstration de cette conjecture par M. Gromov (*cf.* [B-K]) a beaucoup influencé la manière dont fut vécue par la suite l'interaction entre Algèbre et Géométrie.

Parmi les travaux dans cet esprit, un théorème de K. Fukaya et T. Yamaguchi ([F-Y]) prouve que toute variété riemannienne compacte M^n vérifiant $\sigma_M \,.\, \mathrm{diam}(M)^2 \geq -\varepsilon(n)$ est de groupe fondamental presque nilpotent. Une conséquence du "splitting theorem" 1.11, répondant à une conjecture de M. Gromov, est le :

1.12. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding, 1996, [Ch-Col] theorem 8.6).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété vérifiant* $\mathrm{diam}(M)^2 . \mathrm{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$ *soit de groupe fondamental presque nilpotent.*

La seconde question remonte à S. Bochner qui se servait de la formule qui porte son nom (voir la section 2.a) pour démontrer (entre autres résultats) que toute variété riemannienne compacte de courbure de Ricci positive ou nulle a un premier nombre de Betti inférieur ou égal à $b_1(\mathbf{T}^n) = n$ et que l'application d'Albanese (*cf.* le chapitre 3) est alors une submersion riemannienne sur un tore plat de dimension $b_1(M)$ (donc une isométrie lorsque $b_1(M) = n$). En 1981, M. Gromov ([G-L-P], théorème 5.21) et S. Gallot ([Ga]) donnèrent deux preuves du fait que cette majoration du premier nombre de Betti reste valable pour des variétés qui vérifient $\mathrm{diam}(M)^2 . \mathrm{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$. Ceci avait amené M. Gromov ([G-L-P], p. 75) à conjecturer que, sous la même hypothèse et si $b_1(M) = n$, la variété est difféomorphe au tore $\mathbf{T}^n$.

Comme une étape vers ce but, T. Yamaguchi ([Ya], 1988) a ensuite prouvé que, pour toute donnée de $n \geq 2$ et de $K > 0$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(n, K) > 0$ tel que, pour toute variété riemannienne M^n vérifiant $\sigma_M \geq -K$, $\mathrm{diam}(M) \leq 1$ et $\mathrm{Ric}_M \geq -\varepsilon$, l'application d'Albanese soit une submersion différentiable sur le tore $\mathbf{T}^{b_1(M)}$.

Lorsque $b_1(M) \leq n-1$, M. Anderson ([An2]) donne des contre–exemples qui prouvent qu'on ne peut s'affranchir de l'hypothèse sur la courbure sectionnelle. Lorsque $b_1(M) = n$, la conjecture de M. Gromov fut démontrée en deux temps, soulignés par les deux théorèmes suivants (le premier impliquant le second grâce au théorème 1.4).

1.13. THÉORÈME (T. Colding, 1997, [Co3], theorem 0.2).— *De toute suite de variétés riemanniennes compactes n-dimensionnelles M_i, de diamètres bornés, vérifiant* $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\varepsilon_i$ *(où $\varepsilon_i \to 0_+$) et $b_1(M_i) = n$, on peut extraire une sous-suite dont des revêtements riemanniens finis M_i' convergent, au sens de Gromov–Hausdorff, vers un tore plat n-dimensionnel.*

1.14. THÉORÈME (J. Cheeger, T. Colding, 1997, [Ch-Co2]).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne compacte M^n vérifiant* $\mathrm{diam}(M)^2 . \mathrm{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$ *et $b_1(M) = n$ soit difféomorphe à $\mathbf{T}^n$.*

Nous avons choisi de développer, dans les sections 3 et 4, deux démonstrations archétypiques des méthodes de T. Colding. Le chapitre 3 donne une version simplifiée de la preuve du théorème 1.13 (M^n proche de $\mathbf{T}^n$). Le chapitre 4 donne la preuve du théorème de continuité 1.6. Le chapitre 5 explique comment se démontrent les résultats de stabilité, le cas de la sphère étant traité de manière plus complète. Les méthodes générales utilisées par T. Colding sont décrites dans le chapitre 2. Certaines sont classiques : formule de S. Bochner (section 2.a), inégalités de Bishop-Gromov (section 2.b) ; on souligne alors la manière particulière dont T. Colding les utilise. Réaliser des fonctions harmoniques ayant une valeur donnée sur le bord d'une boule est un classique de l'analyse ; mais l'utilisation qui en est faite par T. Colding est originale. La version qui en est présentée ici (section 2.e) est due à J. Cheeger et T. Colding ; elle s'appuie sur deux idées : la presque–sous–harmonicité L^∞ et la presque–super–harmonicité L^1 de la fonction "distance à un point tendant vers l'infini" (déjà présente dans la preuve du "splitting theorem" ([Ch-Gl]) et dont une version locale était déjà utilisée dans [A-C]) et une relecture d'un résultat de U. Abresch et D. Gromoll ([A-G]) qui montre que la différence entre les deux membres de l'inégalité triangulaire est petite relativement à la hauteur du triangle. Le lemme de Toponogov L^2, apport original fondamental, est présenté (sous différentes versions) dans la section 2.d.

L'auteur remercie G. Besson et G. Courtois pour leur aide scientifique et leur soutien amical et M. Berger dont les textes l'ont inspiré (voir par exemple [Be]*).*

2. LES OUTILS ET LEUR MODE D'EMPLOI

a) La formule de Bochner

Une des définitions possibles du tenseur de courbure est qu'il réalise le défaut de commutation des dérivées (covariantes) troisièmes d'une fonction, i.e. $R(X, Y, Z, \nabla f) = DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z)$. Un corollaire (prendre la trace de l'égalité ci-dessus) est la formule de Bochner :

$$\langle d(\triangle f), df\rangle = -|Ddf|^2 + \frac{1}{2}\,\triangle\,(|df|^2) - \mathrm{Ric}_M(\nabla f, \nabla f), \tag{2.1}$$

où $|\cdot|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désignent les extensions canoniques de la norme et du produit scalaire riemanniens aux produits tensoriels. Sur une variété *sans bord* M de courbure de Ricci presque positive on obtient (en intégrant (2.1)) que toute fonction harmonique a un Hessien petit en norme L^2. Le cas à bord (ici celui des boules géodésiques) est plus délicat. Il en existe de nombreuses versions ; nous suivrons ici celle présentée par J. Cheeger et T. Colding ([Ch-Co1], proposition 6.60).

2.2 *Lemme.— Soit (M,g) une variété riemannienne vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$. *Si f est une fonction harmonique sur la boule $B(p,2R)$ (où $R \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$) telle que $\frac{1}{\mathrm{Vol}\,B(p,2R)}\int_{B(p,2R)}\big||df|^2-1\big| \leq \eta$, alors on a $\frac{1}{\mathrm{Vol}\,B(p,R)}\int_{B(p,R)}|\mathrm{Hess}\,f|^2 \leq C(n)\left(\frac{\eta}{R^2}+\delta\right)$ où $C(n)$ est une constante universelle.*

Preuve.— Il existe une fonction de coupure $\phi \geq 0$, de support inclus dans $B(p,2R)$ et égale à 1 sur $B(p,R)$, telle que $|\Delta\phi| \leq \frac{C(n)}{R^2}$ (*cf.* [Ch-Col], théorème 6.33). En multipliant (2.1) par ϕ et en intégrant par parties, nous obtenons l'équation suivante, qui conclut car son second membre est petit en vertu des hypothèses et de (2.4) :

$\int_{B(p,2R)} \phi \cdot |\text{Hess}\, f|^2 = \frac{1}{2} \int_{B(p,2R)} \Delta\phi \cdot (|\nabla f|^2 - 1) - \int_{B(p,2R)} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).\phi.$ $\diamond$

b) Le théorème de Bishop–Gromov

Le *Cut-locus* (noté $\text{Cut}(q)$) d'un point $q \in M$ est l'ensemble des points singuliers de la fonction–distance $d_q = d(q,\cdot)$. L'application $\exp_q$ est un difféomorphisme d'un ouvert étoilé U_q de T_qM sur $M \setminus \text{Cut}(q)$. Posons $J_\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{|\delta|}} \sinh\left(\sqrt{|\delta|}t\right)$, où *sinh*$(t)$ est égal à *sh*(t) (resp. à *sin*(t)) quand $\delta < 0$ (resp. quand $\delta > 0$), et $J_0(t) = t$; munissons U_q de la métrique g_δ de courbure constante δ qui, en coordonnées polaires, s'écrit $g_\delta = (dr)^2 + J_\delta(t)^2 \cdot g_{S^{n-1}}$, où $g_{S^{n-1}}$ est la métrique canonique de la sphère unitaire de T_qM.

Quand $\text{Ric}_M \geq (n-1)\delta$, le *théorème de Bishop* ([B-C]) *dit que* $\exp_q$ *est une application* $(U_q, g_\delta) \to (M,g)$ *qui contracte les volumes*, plus précisément :

2.3. *Le long d'une géodésique issue de q, le déterminant Jacobien* $\text{Jac}_{g_\delta}(\exp_q)$ *est une fonction décroissante de la distance à q, qui tend vers* 1 *à l'origine.*

M. Gromov ([Gv1], [G-L-P]) montra que ce théorème, qui permet de majorer le volume des boules, permet aussi de minorer leur volume relatif, i.e.

$$\text{(2.4)} \qquad \frac{\text{Vol}\, B_\delta(r)}{\text{Vol}\, B_\delta(R)} \leq \frac{\text{Vol}\, B(q,r)}{\text{Vol}\, B(q,R)} \leq \frac{\text{Vol}\, B_\delta(r)}{\text{Vol}\, B(q,R)},$$

où $r < R$ et où $B_\delta(r)$ est la boule de rayon r dans l'espace–modèle simplement connexe de courbure constante δ. Dans la suite cette inégalité sera souvent utilisée sous la forme suivante, qui est une conséquence immédiate de (2.4) et de la convexité du sinus hyperbolique : $\text{Vol}\, B(q,r) \leq \text{Vol}\, B_o(r)\,(1+\varepsilon)$ et $\frac{\text{Vol}\, B(q,r)}{\text{Vol}\, B(q,R)} \geq (1-\varepsilon)\frac{\text{Vol}\, B_o(r)}{\text{Vol}\, B_o(R)}$, lorque δ est choisi plus petit que $C(n)\, \frac{\varepsilon^2}{R^2}$.

Il y a un lien étroit entre ces résultats et la formule de Bochner. En effet le laplacien (au sens des distributions) de la fonction–distance d_q se décompose en une partie régulière $(\Delta d_q)_{\text{reg}}$ et une partie singulière $(\Delta d_q)_{\text{sing}}$.

2.5. $(\Delta d_q)_{sing}$ *est une mesure négative de support inclus dans le Cut-locus de q.*

Un corollaire du théorème de Stokes (en coordonnées polaires) est que $(\Delta d_q)_{reg} = \frac{\partial}{\partial r}\,(log[\mathrm{Jac}_{g_\delta}(\exp_q)\cdot\ (J_\delta \circ d_q)^{n-1}])$. Si $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)\delta$, la formule 2.3 permet d'en déduire que la fonction d_q est presque sous-harmonique (si δ est petit) en des points situés suffisamment loin de q; plus précisément, au sens des distributions :

$$\Delta d_q \leq (n-1)\,\frac{J_\delta'}{J_\delta} \circ d_q. \tag{2.6}$$

c) La contrainte "d'universalité des constantes"

La "règle du jeu" est que, chaque fois qu'une propriété doit être prouvée pour des variétés ε-proches, ou dont les volumes sont ε-proches, ou dont la partie négative de la courbure de Ricci est inférieure à ε, cette valeur de ε doit être une fonction universelle des bornes *a priori* n, D et δ imposées à la dimension, au diamètre et à la partie négative de la courbure de Ricci (en particulier le choix de ε doit être insensible aux avatars de la topologie ou de la géométrie tant que ces bornes *a priori* sont respectées). Ainsi une "petite boule de rayon ε" ne pourra être supposée homotopiquement équivalente à une boule de $\mathbf{R}^n$ (les méthodes qui consisteraient à passer en cartes locales sont donc ici inopérantes). De plus, les vitesses initiales des géodésiques qui joignent le centre d'une boule à tous les points extérieurs à cette boule peuvent former un cône d'angle très petit (ce problème est omniprésent dans la suite). Un exemple trivial de cette situation est donné par une suite de tores plats $\mathbf{T} \times \frac{1}{k}(\mathbf{T}^{n-1})$ quand k tend vers l'infini. Des exemples plus généraux sont donnés par les suites de variétés qui s'effondrent (*cf.* le point (i) de la section 1) tout en respectant les bornes *a priori* fixées ci-dessus. Ces exemples contredisent également l'évidence selon laquelle un ensemble de mesure inférieure à ε ($\varepsilon \ll 1$) ne contiendrait pas de boule de rayon 1, énoncé qui ne devient vrai, en vertu de (2.4), que si on parle de volume et de mesure relatifs. Ceci justifie les

2.7. Notations.— *Une propriété $\mathcal{P}$ sera dite vraie en ε-presque tout point de A si l'ensemble A_ε des points de A où elle n'est pas vraie vérifie* $\mathrm{Vol}(A_\varepsilon) < \varepsilon.\mathrm{Vol}(A)$. *Dans la même logique, $\|u\|^2_{L^2(B)} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)}\int_B u^2(x)dv_g(x)$ sera la définition de la norme L^2 que nous adopterons désormais. Nous poserons $V_\delta(r,D) = \frac{\mathrm{Vol}\,B_{-\delta}(r)}{\mathrm{Vol}\,B_{-\delta}(D)}$.*

2.8. Remarque (corollaire de (2.4)).— *Pour tous les ε, $D > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe $\eta > 0$ tel que, sur toute variété riemannienne compacte M (ou sur toute boule géodésique d'une variété riemannienne complète) de diamètre plus petit que D et vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$, toute propriété $\mathcal{P}$ vraie en η-presque-tout point est vraie sur un ensemble ε-dense (i.e. passant à distance inférieure à ε de tout point).*

d) Le lemme de Toponogov L^2 (*cf.* [Co1], [Co2], [Co3])

Sur le fibré unitaire tangent (ou sur sa restriction SB au-dessus d'une boule B) la mesure de Liouville (notée "dv") consiste à intégrer sur chaque fibre S_x, puis sur la base (par rapport à la mesure riemannienne). Cette mesure est *invariante par le flot géodésique* $\varphi^t : v \mapsto \gamma_v'(t)$ (où γ_v est la géodésique telle que $\gamma_v'(0) = v$). De ceci et de (2.4), on déduit immédiatement que, sur une variété qui vérifie $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)\delta$, et pour toute fonction f de carré intégrable sur $B(p, R+l)$,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\, SB(p,R)} \int_{SB(p,R)} \Big(\frac{1}{l}\int_0^l f^2 \circ \gamma_v(t)dt\Big)\, dv \leq \frac{V_\delta(R, R+l)^{-1}}{\mathrm{Vol}\, B(p, R+l)} \int_{B(p,R+l)} f^2 .$$

Considérons une application $\phi : B(p, R+l) \to \mathbf{R}^p$, suffisamment régulière, et définissons les fonctions $H\phi(\gamma_v)$ et $K\phi(\gamma_v)$ comme les suprema respectifs, pour t parcourant $[0, l]$, de $\left|\frac{\phi\circ\gamma_v(t) - \phi\circ\gamma_v(0)}{t} - d\phi(v)\right|$ et de $\left|\phi\circ\gamma_v(t) - \frac{(l-t)}{l}\,\phi\circ\gamma_v(0) - \frac{t}{l}\,\phi\circ\gamma_v(l)\right|$; elles sont majorées par l fois (resp. l^2 fois) $(\frac{1}{l}\int_0^l |\mathrm{Hess}\,\phi|^2(\gamma_v(s))ds)^{1/2}$. En appliquant la formule ci-dessus à la fonction $f = |\mathrm{Hess}\,\phi|$, nous en déduisons le

2.9. *Lemme* ([Co3], section 1).— *Les fonctions $v \mapsto H\phi(\gamma_v)$ et $v \mapsto K\phi(\gamma_v)$ ont leurs normes $L^2[SB(p,R)]$ majorées (au facteur universel $V_\delta(R, R+l)^{-1/2}$ près) par l fois (resp. l^2 fois) la quantité* $\|\mathrm{Hess}\,\phi\|_{L^2[B(p,R+l)]}$.

Soit (M, g) une variété riemannienne, $B(p, R)$ une boule de M dans laquelle on prend deux boules B_1 et B_2 de rayon r. Notons γ_{xy} la géodésique minimisante (presque toujours unique) joignant deux points x et y ; une version plus géométrique du lemme de Toponogov L^2, dont les prémices se trouvent chez M. Gromov ([Gv1]), est le

2.10. *Lemme* ([Ch-Co1], théorème 2.11).— *Si* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$ $(\delta \geq 0)$, *toutes fonctions $f \in L^2(M)$ et $u \in H_1^2(M)$ (de moyenne $\bar{u}$ sur $B(p, R)$) vérifient*

(i) $\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_1\times B_2)} \int_{B_1\times B_2} (\oint_{\gamma_{xy}} f^2) dx\, dy \leq 2\ (ch(2R\sqrt{\delta}))^{n-1}\ V_\delta(r, 2R)^{-1}\, r\, \|f\|^2_{L^2[B(p,2R)]}$.

(ii) $\int_{B(p,R)} (u - \bar{u})^2 \leq 2\ (ch(2R\sqrt{\delta}))^{n-1}\, R^2 \int_{B(p,2R)} |du|^2)$.

L'inégalité (ii) se déduit de (i) en posant $f = |du|$.

Les lemmes 2.10 et 2.9 ont le corollaire suivant, sous-jacent à [Co1] et [Co3] :

2.11. COROLLAIRE.— *Sur une variété (M, g) vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$ *supposons que l'application $\phi : B(p, 2R) \to \mathbf{R}^p$ vérifie $\|Dd\phi\|_{L^2(B(p,2R))} \leq \alpha$ et que le rayon R est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

(i) *pour* $(C(n)\frac{R^{n+1}}{r^{n-1}}\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2})$*-presque-tout couple* $(x,y) \in B_1 \times B_2$*, la géodésique minimisante* γ_{xy} *s'envoie par* ϕ *dans un* $(\varepsilon\, R)$*-voisinage tubulaire du segment de droite qui joint* $\phi(x)$ *à* $\phi(y)$ *et vérifie :* $|\frac{\phi(y)-\phi(x)}{d(x,y)} - d_x\phi(\gamma'_{xy}(0))| < \varepsilon$.

(ii) *si* $\|d\phi\|_{L^\infty} \leq A$*, alors* $\mathrm{Jac}\,\phi$ *est* ε*-proche de sa valeur moyenne (sur* $B(p,R)$*) en* $(A^{2n-2}C(n)\,R^2\,\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2})$*-presque-tout point de* $B(p,R)$.

(iii) *posons* $\tau = C(n)\,(\frac{R+l}{R})^n \cdot \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}$*; pour* τ*-presque-tout point* x *de* $B(p,R)$ *et pour* τ*-presque-tout vecteur* v *de la boule de rayon* l *dans* T_xM*, l'application* $\varphi_x = \phi \circ \exp_x$ *est* $(l\,.\,\varepsilon)$*-presque affine, i.e.* $\frac{1}{\|v\|}|\varphi_x(v) - \phi(x) - d_x\phi(v)| \leq \varepsilon.l$.

Preuve.— Pour (i) et (ii), appliquer les lemmes 2.10 (i) et (ii) aux fonction $f = |\mathrm{Hess}\,\phi|$ et $u = \mathrm{Jac}\,\phi$ et majorer $K\phi(\gamma_{xy})^2$ et $H\phi(\gamma_{xy})^2$ à l'aide de $\oint_{\gamma_{xy}} |\mathrm{Hess}\,\phi|^2$ comme ci-dessus; (iii) est un corollaire du Lemme 2.9 et de Bienaimé-Chebitchev. $\diamond$

Les énoncés les plus généraux du lemme de Toponogov L^2 ([Co1] section 1, [Co2] section 2, [Co3] section 1) traitent d'applications ϕ (d'une variété M de courbure de Ricci presque supérieure à $(n-1)K$ dans la variété simplement connexe M_K de courbure constante $K \geq 0$) telles que $\|\mathrm{Hess}\,\phi + K\phi \cdot g\|_{L^2}$ soit petit, donc proches (au sens L^2) d'être totalement géodésiques (voir en particulier la section 5 pour une application de ce principe). Ceci permet de comparer les angles de deux triangles géodésiques (de mêmes côtés) tracés dans M et M_K. L'histoire de ce problème remonte au célèbre théorème de Toponogov (1959) qui établit cette comparaison pour des variétés M de courbure sectionnelle supérieure ou égale à K. Par exemple, si on applique le corollaire 2.11 (i) à la fonction $d(A,\cdot)$, définie sur une variété de courbure de Ricci presque positive, on obtient, comme dans le cas euclidien, que η–presque–tout triangle ABC tel que $AB, AC \gg BC$ vérifie $cos\widehat{B} \simeq \frac{AB-AC}{BC}$.

Cependant une utilisation aussi directe du Lemme de Toponogov L^2 est *impossible*, en raison de la partie singulière du Laplacien (et donc du Hessien) de la distance qui n'est pas dans L^2 (*cf.* 2.5). T. Colding applique en fait les lemmes 2.9 et 2.11 à des fonctions régulières qui sont simultanément H_1^2-proche de la distance et de Hessien petit (en norme L^2). Leur construction est le but du paragraphe suivant.

e) Approximation de la distance par des fonctions harmoniques

Dans le cas d'une variété vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq Ric_{S^n} = n-1$, T. Colding réalise une approximation de la fonction $\cos[d(q,\cdot)]$ comme combinaison linéaire des $(n+1)$ premières fonctions propres f_i du Laplacien (*cf.* [Co1]). Lorsque le volume est presque égal à celui de S^n, les valeurs propres correspondantes sont toutes proches de $\lambda_1(S^n)$ et

Hess $f_i + f_i.g$ est alors petit en norme L^2 (théorème de A. Lichnerowicz et M. Obata), fournissant ainsi une application presque totalement géodésique dans la sphère.

Dans le cas général, une approximation analogue de la fonction-distance f s'avère impossible de manière globale sur une boule. Ceci oblige T. Colding ([Co3], lemme 1.23 et proposition 1.28) à réaliser l'approximation $\widetilde{f}_i$ sur des boules B_i beaucoup plus petites, en éliminant les B_i (heureusement peu nombreuses, *cf.* [Co3], lemme 1.19) sur lesquelles l'approximation H_1^2 et le Hessien ne sont pas convenablement contrôlés. Comme $\|\mathrm{Hess}\, \widetilde{f}_i\|_{L^2(B_i)}$, bien que contrôlé, n'est pas petit, on ne pourra appliquer le lemme de Toponogov L^2 qu'à des géodésiques *très courtes* ([Co3], proposition 1.28).

Dans le cas de la comparaison avec la sphère, l'approximation globale était possible en raison de l'existence de points presque antipodaux pour lesquels *l'inégalité triangulaire est presque une égalité* ([Col], propriétés (2.5) et (2.6)). Une situation analogue se rencontre en courbure de Ricci presque positive pour des boules de volume presque maximal (section 5) ou Gromov-Hausdorff–proches d'une boule euclidienne (section 4) : fixons deux nombres positifs R et L ($L \gg 1$) ; nous dirons qu'un point $q \in M \backslash B(p, L{\cdot}R)$ admet un $\frac{1}{L}$*–presque-antipode* s'il existe un point $q' \in M \backslash B(p, L{\cdot}R)$ tel que le défaut $d(p,q) + d(p,q') - d(q,q')$ dans l'inégalité triangulaire soit inférieur à R/L . Pour un tel point q, J. Cheeger et T. Colding construisent une approximation de la "presque–fonction de Buseman" $b_q = d(q,\cdot) - d(p,q)$ par la fonction $\widetilde{b}_q$, harmonique sur $B(p,2R)$, qui coïncide avec b_q sur le bord de $B(p,2R)$:

2.12. PROPOSITION ([Ch-Col], Propositions 6.15 à 6.60).— *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe $\delta > 0$ et $L > 4$ tels que, pour tout $R > 0$, pour toute variété riemannienne (M^n, g) vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\frac{\delta}{R^2}$ et pour tout point q de $M \setminus B(p, L.R)$ qui admet un $\frac{1}{L}$-presque antipode, les fonctions b_q et $\widetilde{b}_q$ vérifient :*

(i) $|b_q - \widetilde{b}_q| \leq \epsilon \cdot R$ *sur* $B(p,2R)$,

(ii) $\|\nabla b_q - \nabla \widetilde{b}_q\|_{L^2(B(p,2R))} \leq \epsilon$,

(iii) $\|\mathrm{Hess}\, \widetilde{b}_q\|_{L^2(B(p,R))} \leq \frac{\epsilon}{R}$.

Preuve.— Elle suit la démarche de [Ch-Col] pp. 225–230. Par renormalisation (*i.e.* changer g en $\frac{1}{R^2} \cdot g$), il suffit de faire la preuve lorsque $R = 1$. Posons $B = B(p,2)$. Un résultat de U. Abresch et D. Gromoll ([A-G]), généralisé par la proposition 6.2 de [Ch-Col], montre que le défaut dans l'inégalité triangulaire reste petit lorsqu'on remplace p par n'importe quel point de B, donc que les fonctions $\widetilde{b}_q - b_q$ et $b_{q'} + \widetilde{b}_q$ sont presque égales sur B et presque nulles sur ∂B, donc (par une adaptation du principe du maximum) qu'elles sont respectivement presque négative et presque positive sur B (puisque leurs laplaciens sont respectivement presque positif et presque négatif d'après (2.6)), donc presque nulles. Ceci prouve (i).

Par la formule de Stokes puis la propriété 2.3, la moyenne sur B de $-\Delta b_q$ (*y compris celle de sa partie singulière*) est majorée par $\frac{\operatorname{Vol}\partial B}{\operatorname{Vol} B} \leq C(n)/2$. Par ailleurs $(\Delta b_q)_+$ est petit d'après la formule (2.6), donc la norme L^1 de Δb_q est majorée par $C(n)$. La formule de Green-Stokes et l'harmonicité de $\widetilde{b}_q$ donnent alors :

$$\int_B |\nabla(\widetilde{b}_q - b_q)|^2 = \int \Delta b_q(\widetilde{b}_q - b_q) \leq C(n)\ \|\widetilde{b}_q - b_q\|_{L^\infty}\ \operatorname{Vol} B,$$

ce qui prouve (ii) comme conséquence de (i). L'inégalité (iii) est une conséquence directe de la version "à bord" de la formule de Bochner (Lemme 2.2) et de (ii). $\diamond$

3. À PROPOS DE LA CONJECTURE DE M. GROMOV

Notre but sera de donner ici une idée de la preuve du théorème 1.13. Considérant une suite de variétés M_i qui vérifient les hypothèses du théorème 1.13, T. Colding (*cf.* [Co3], sections 1, 2 et 3, voir en particulier le lemme 3.5) réalise une approximation de Hausdorff ϕ, d'une boule de rayon R_i ($R_i \to +\infty$) du revêtement abélien de M_i sur la boule euclidienne de même rayon, dont les composantes sont les fonctions–distance à des points q_j situés suffisamment loin et suffisamment écartés pour que leurs gradients soient presque orthogonaux sur un sous–ensemble de mesure non négligeable. Cette presque–orthogonalité, qui impliquera que $d\phi$ est ε–presque–partout presque isométrique, se démontre à l'aide du Lemme de Toponogov L^2 (lemme 2.9), appliqué à des approximations harmoniques (sur de petites boules) de ces fonctions–distance (voir 2.e). Ce point de vue, de portée plus générale, sera illustré au chapitre 4. Ici, nous modifierons légèrement la méthode de T. Colding afin de tirer parti de l'existence *globale* d'une application harmonique canonique : *l'application d'Albanese.*

Considérons une variété M telle que $b_1(M) = n$. À chaque métrique g correspond une version duale de l'application d'Albanese qui s'obtient en intégrant une base L^2–orthonormée $\{\alpha_i\}$ de l'espace des 1–formes harmoniques en une application ϕ de M sur le tore plat d'Albanese T_M. Celle-ci se relève en une application $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \mathbf{R}^n$, *i. e.* $d\widetilde{\phi}_i$ donne α_i par passage au quotient. Un point $\widetilde{p}$ de $\widetilde{M}$ étant fixé, nous pouvons décider que $\widetilde{\phi}(\widetilde{p}) = 0$. Les propriétés de presque isométrie de ϕ sont précisées par le

3.1. *Lemme* ([Ga]).— *Pour toute donnée de D, $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, sur toute variété riemannienne (M^n, g) vérifiant* $\operatorname{diam}(M, g) \leq D$ *et* $\operatorname{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$, *toute*

1-forme harmonique β vérifie $\|\beta\|^2_{L^\infty} < (1+\eta^2)\|\beta\|^2_{L^2}$ et, par conséquent, $|\beta|^2(x) > (1-\eta)\|\beta\|^2_{L^2}$ en η-presque-tout point x. En conséquence, si $b_1(M) = n$, alors ϕ et $\widetilde{\phi}$ sont presque contractantes et $d_x\phi$ est η-presque-partout presque isométrique.

En effet, si on pose $\beta(x) = \sum_j v_j \cdot \alpha_j(x) = {}^t(d_x\phi)\,(v)$, la première partie du lemme 3.1 signifie que ${}^t(d_x\phi)$ est partout presque contactante et η-presque-partout presque isométrique, ce qui permet d'en déduire la seconde partie.

Le lemme 3.1 implique que les hypothèses du lemme 2.2 sont vérifiées pour chaque $\widetilde{\phi}_i$, donc que $\|Dd\widetilde{\phi}\|_{L^2(B(\widetilde{p},2R))}$ est inférieur à $C(n)\big(\frac{\eta^2}{R^2}+\delta\big)^{1/2}$.

3.2. *Pour toute donnée de D, $\epsilon > 0$ et de $R > 13D$, il existe un choix de $\delta > 0$ tel que, sous les hypothèses du lemme 3.1, ϕ soit surjective et que $\widetilde{\phi}$ soit une εR-approximation de Hausdorff de $B(\widetilde{p},R)$ sur la boule euclidienne $B_o(0,R)$.*

Preuve.— Reprenons les notations du lemme 3.1; d'après le lemme 3.1 et (2.4), $d_x\widetilde{\phi}$ est presque isométrique en $(2\eta\,(\frac{R+4\,D}{R})^n)$-presque-tout point de $B(\widetilde{p}, R+2\,D)$, donc, d'après le corollaire 2.11 (i), pour tous les R,ϵ positifs, il existe $\eta,\delta > 0$ tels que, pour tous les x, $y \in B(\widetilde{p},R)$, $\frac{|\widetilde{\phi}(x')-\widetilde{\phi}(y')|}{d_{\widetilde{M}}(x',y')}$ soit minoré par $\|d_{x'}\widetilde{\phi}(\gamma'_{x'y'}(0))\| - \frac{\varepsilon}{8}$ (et donc par $1-\frac{\varepsilon}{4}$) en ε-presque-tout point (x',y') de $B(x,\frac{\varepsilon R}{2}) \times B(y,\frac{\varepsilon R}{2})$. $\widetilde{\phi}$ étant par ailleurs contractante, l'inégalité triangulaire donne alors $d_{\widetilde{M}}(x,y) - \varepsilon\,R \le |\widetilde{\phi}(x) - \widetilde{\phi}(y)| \le d_{\widetilde{M}}(x,y) + \varepsilon\,R$. Notons $\widetilde{\phi}_R$ la restriction de $\widetilde{\phi}$ à la boule riemannienne fermée de rayon R. Nous déduisons des inégalités précédentes que l'image par $\widetilde{\phi}_R$ du bord de cette boule est incluse dans $B_o(0,(1+\varepsilon)R) \setminus B_o(0,(1-\varepsilon)R)$, donc que le degré ponctuel $deg\,\widetilde{\phi}_R\,(x)$ (*i.e.* le nombre algébrique d'antécédents de x) est constant p. p. sur $B_o(0,(1-\varepsilon)R)$. D'après le corollaire 2.11 (ii), quitte à choisir δ encore plus petit, $\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}$ est ε-presque-partout presque égal à sa moyenne qui (quitte à changer l'orientation) est donc presque égale à sa moyenne quadratique, elle-même presque égale à 1 par le lemme 3.1. Par intégration, nous en déduisons que $deg\,\widetilde{\phi}_R\,(x)\ \frac{\mathrm{Vol}\,B_o(0,R)}{\mathrm{Vol}\,B(\widetilde{p},R)}$ est presque égal à 1, ce qui implique simultanément (grâce à (2.4)) que $deg\,\widetilde{\phi}_R\,(x) = 1$, donc que $B_o(0,(1-\varepsilon)R)$ est incluse dans l'image de $\widetilde{\phi}_R$, et que $\mathrm{Vol}\,B(\widetilde{p},R)$ est presque égal à $\mathrm{Vol}\,B_o(0,R)$. Par la formule de co-aire, il s'ensuit que $(\mathrm{Vol}\,B_o(0,(1-\varepsilon)R))^{-1}\int_{B_o(0,(1-\varepsilon)R)} \sharp(\widetilde{\phi}_R^{-1}(x))dx$, est presque égal à la moyenne de $|\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}_R|$, donc à 1, ce qui donne de plus :

3.3. *$B(\widetilde{p},R)$ est de volume presque maximal.*

3.4. *$C\varepsilon$-presque-tout point de $B_o(0,(1-\varepsilon)R)$ a un unique antécédent dans $B(\widetilde{p},R)$.*

Choisissons un point x de $\mathbf{R}^n$ (voisin de 0) qui a un seul antécédent par $\widetilde{\phi}_R$, noté $\widetilde{q}$. Le groupe $\Gamma = \pi_1(M,q)$ admet un système de générateurs $\{\gamma_i\}$ tels que $d(\widetilde{q},\gamma_i(\widetilde{q})) < 3D < R/4$ ([G-L-P], proposition 5.28) et agit sur $\widetilde{M}$ et sur $\mathbf{R}^n$ (via la représentation ρ associée à ϕ). L'équivariance de $\widetilde{\phi}$ pour ces deux actions implique que $\widetilde{\phi}_R\left(\gamma_j^{-1}\circ\gamma_i^{-1}\circ\gamma_j\circ\gamma_i\left(\widetilde{q}\right)\right) = \widetilde{\phi}_R\left(\widetilde{q}\right)$, donc que $\gamma_j^{-1}\circ\gamma_i^{-1}\circ\gamma_j\circ\gamma_i = e$, d'où

3.5. *Lorsque δ est suffisamment petit, $\Gamma = \pi_1(M,q)$ est commutatif.*

Considérons une suite de variétés M_i de diamètres bornés et vérifiant $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\delta_i$, où $\delta_i \to 0_+$. Le principal problème qui se pose maintenant est que cette suite peut "s'effondrer" (*cf.* le point (i) de la section 1) et (par exemple) avoir pour limite une variété de dimension inférieure tout en respectant les bornes *a priori* fixées ci-dessus. Nous ne pourrions alors appliquer le théorème 1.4. T. Colding résout cette difficulté en modifiant dans ce but un résultat de M. Gromov ([G-L-P], Lemme 5.19) qui permet, en passant à un revêtement fini M_i' de M_i, de "dérouler" la variété dans les directions du collapsing (et en particulier de faire en sorte que le sous-groupe Γ_i' des isomorphismes du revêtement abélien correspondant à M_i' – ici, son groupe fondamental – ait tous ses éléments non triviaux de longueurs minorées par $6D$) tout en conservant un système de générateurs $\{\gamma_j^i\}$ représentés par des lacets de longueurs bornées (par exemple entre $6D$ et $12D$, *cf.* [Co3], Lemme 3.1).

Il faut prouver que les approximations de Hausdorff $\widetilde{\phi}_{i,R_i}$ (établies en 3.2) des boules $B_i = B(\widetilde{p}_i,R_i)$ ($R_i \to +\infty$) de $\widetilde{M}_i$ sur les boules euclidiennes de mêmes rayons passent au quotient en des approximations de Hausdorff des M_i' sur des tores plats $\mathbf{T}_i'$, qui convergent vers un tore plat n-dimensionnel. Pour tout groupe Γ (resp. Λ) agissant sur $\widetilde{M}_i$ (resp. sur $\mathbf{R}^n$), notons $\Gamma(R)$ (resp. $\Lambda(R)$) le sous–ensemble des éléments γ de Γ (resp. de Λ) tels que $d(\widetilde{p}_i,\gamma(\widetilde{p}_i)) < R$ (resp. tels que $\|\gamma\cdot 0\| < R$), où $\widetilde{p}_i$ est un point fixé de $\widetilde{M}_i$. Si Γ_i' et ρ_i' désignent le groupe fondamental de M_i' et sa représentation associée à l'application d'Albanese de M_i' (notée ϕ_i'), posons $\Lambda_i' = \rho_i'(\Gamma_i')$. "L'objection principale" est que l'existence d'une constante universelle C telle que $\Lambda_i'(r)$ soit inclus dans l'image par ρ_i' de $\Gamma_i'(Cr)$ n'est généralement pas assurée.

T. Colding ([Co3], Lemme 3.11) évite cette difficulté en appliquant la théorie de la convergence de Gromov-Hausdorff équivariante (*cf.* K. Fukaya et T. Yamaguchi [Fu2] et [F-Y]). Un argument de précompacité, l'hypothèse faite sur la longueur des lacets de Γ_i' et la propriété 3.2 assurent l'existence d'un groupe Γ_∞' de translations de

$\mathbf{R}^n$ tel qu'une sous-suite des $(\widetilde{M}_i, \Gamma'_i, \widetilde{p}_i)$ admette $(\mathbf{R}^n, \Gamma'_\infty, 0)$ pour limite au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff équivariante pointée (ce qui signifie l'existence d'approximations de Hausdorff $\widetilde{\psi}_{i,R_i}$ des B_i sur les boules euclidiennes de même rayon, envoyant $\widetilde{p}_i$ sur 0, et d'applications ρ_{i,R_i} et σ_{i,R_i}, qui envoient $\Gamma'_i(R_i)$ sur le sous-ensemble analogue $\Gamma'_\infty(R_i)$ de Γ'_∞ et réciproquement, telles que $\widetilde{\psi}_{i,R_i}$ soit presque équivariante relativement à ρ_{i,R_i} et à σ_{i,R_i}). Le théorème 2.1 de [Fu2] (voir aussi le lemme 3.4 de [F-Y]) assure que $\widetilde{\psi}_{i,R_i}$ passe au quotient en une approximation de Hausdorff de B_i/Γ'_i sur $B_o(0,R_i)/\Gamma'_\infty$, respectivement égaux à M'_i et au tore plat $\mathbf{R}^n/\Gamma'_\infty$ car les domaines fondamentaux sont de diamètres bornés (*cf.* [Co3], Lemme 3.11). Ceci achève la preuve du théorème 1.13.

Commentaires : L'argument invoqué dans la fin de cette preuve (l'absence de petits lacets implique que, autour de chaque point y de $\mathbf{R}^n$, il existe une boule de rayon D ne rencontrant aucun autre point de $\Gamma'_\infty \cdot y$) prouve immédiatement que $\mathbf{R}^n/\Gamma'_\infty$ n'est pas dégénéré en un tore de dimension inférieure mais ne prouve pas directement que son diamètre est borné (car il n'évite pas le cas où $\Gamma'_\infty \cdot y$ est un réseau dans un hyperplan, le diamètre des M'_i n'étant pas borné *a priori*). Exploitant le fait que $\Gamma'_\infty \cdot 0$ est la limite des $\Lambda'_i \cdot 0$, il faut appliquer l'argument au domaine fondamental de l'action de Λ'_i sur $\mathbf{R}^n$, en déduire que ses générateurs (de normes bornées) sont suffisamment "écartés" pour que leurs limites forment un système générateur de $\mathbf{R}^n$, donc que $\Gamma'_\infty \cdot 0$ "remplit" $\mathbf{R}^n$. Pour comprendre cette preuve, reprenons "à la main" les constructions de M'_i, de Γ'_∞ et le "passage au quotient" de l'approximation de Hausdorff : Notons Γ_i le groupe fondamental de M_i alors, $\Gamma_i(R_i) \cdot \widetilde{p}_i$ étant un $2D$–réseau de B_i, son image par $\widetilde{\phi}_{i,R_i}$ est, en vertu de 3.2, un $3D$–réseau de $B_o(0,R_i)$. Choisissons dans ce dernier réseau des $3D$–approximations $\{u^i_j\}_{1\leq j\leq n}$ (u^i_j s'écrivant $\widetilde{\phi}_{i,R_i}(\gamma^i_j \cdot \widetilde{p}_i)$, où $\gamma^i_j \in \Gamma_i(R_i)$) des vecteurs $(k-4)D.e_j$ (où $\{e_j\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ et où $k \gg 12$ est fixé, mais suffisamment grand pour que les $\{u^i_j\}$ soient presque orthogonaux). Choisissons Γ'_i comme le sous-groupe engendré par les $\{\gamma^i_j\}$ (dont les longueurs sont inférieures à kD en vertu de 3.2). Alors Λ'_i est la somme des $\mathbf{Z} \cdot u^i_j$. Tout élément de $\Lambda'_i(r)$ s'écrit $\sum m_j \cdot u^i_j$, où $\sum |m_j| \leq \frac{C(n)r}{2kD}$, donc est l'image par ρ'_i de $(\gamma^i_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\gamma^i_n)^{m_n}$ qui appartient à $\Gamma'_i(C(n)r)$. Ceci lève notre "objection principale".

Soit $\widetilde{x}$ tel que $d(\widetilde{x},\widetilde{p}_i) = (n+1)kD$ et $\widetilde{y} = \widetilde{\phi}_{i,R_i}(\widetilde{x})$, de norme inférieure à $(n+2)kD$ (d'après 3.2). Comme il existe un $\lambda \in \Lambda'_i$ tel que $\|\widetilde{y} - \lambda \cdot 0\| < nkD - D$, l'inégalité triangulaire donne : $\lambda \in \Lambda'_i((2n+2)kD)$ et, par la levée de "l'objection principale", l'existence d'un $\gamma \in \Gamma'_i(C(n)\,(2n+2)\,kD)$ tel que $\rho'_i(\gamma) = \lambda$. On en déduit que $d(\widetilde{x}, \gamma(\widetilde{p}_i)) \leq \|\widetilde{y} - \lambda \cdot 0\| + D < nkD$ en vertu de 3.2. Il s'ensuit que $\partial B(\widetilde{p}_i, (n+1)kD)$ ne rencontre pas le domaine fondamental de Dirichlet K_i de $\widetilde{p}_i$ sous l'action de Γ'_i et, par connexité, que $K_i \subset B(\widetilde{p}_i, (n+1)kD)$; donc le quotient $M'_i = \widetilde{M}_i/\Gamma'_i$ est de diamètre borné. Quitte à extraire une sous-suite, on construit Γ'_∞ comme le sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ engendré par les limites $\{v_j\}$ des $\{u^i_j\}$. Les $\{v_j\}$ étant presque orthogonaux, $\mathbf{R}^n/\Gamma'_\infty$ est bien un tore plat n-dimensionnel de diamètre fini.

Puisqu'il existe un $C'(n)$ tel que la distance $d_{\mathbf{T}_{M'_i}}(\phi'_i(x), \phi'_i(y))$ dans le tore plat d'Albanese associé à M'_i soit l'infimum (pour tous les $\rho'_i(\gamma) \in \Lambda'_i(C'(n)kD)$) de $\|\widetilde{\phi}_i(\widetilde{x}) - \rho'_i(\gamma) \cdot \widetilde{\phi}_i(\widetilde{y})\|$, la levée de "l'objection principale" implique, quand $R_i > C(n)C'(n)kD$, que c'est aussi l'infimum (pour tous les $\gamma \in \Gamma'_i(R_i)$) de $\|\widetilde{\phi}_{i,R_i}(\widetilde{x}) - \widetilde{\phi}_{i,R_i}(\gamma \cdot \widetilde{y})\|$, qui est ε_i-proche de $d_{\widetilde{M}_i}(\widetilde{x}, \gamma \cdot \widetilde{y})$ en vertu de 3.2. On en déduit que $d_{\mathbf{T}_{M'_i}}(\phi'_i(x), \phi'_i(y)) \geq d_{M'_i}(x, y) - \varepsilon_i$ et, comme elle est aussi presque contractante, *l'application d'Albanese réalise elle-même l'approximation de Hausdorff* de M'_i sur $\mathbf{T}_{M'_i}$. Par construction, les $\mathbf{T}_{M'_i}$ convergent vers le tore plat $\mathbf{R}^n/\Gamma'_\infty$.

4. CONTINUITÉ DES VOLUMES

4.1. PROPOSITION ([Co3], lemme 2.1).— *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir universellement des nombres positifs $\delta = \delta(\varepsilon, n)$ et $\rho = \rho(\varepsilon, n) \ll 1$ tels que, sur toute variété riemannienne (M, g), vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)$, *si une boule $B(p, R)$ $(R \leq \rho)$ est δR-proche (au sens de la distance de Hausdorff-Gromov) d'une boule euclidienne de même rayon, alors toute boule $B(q, r)$ $(r \leq \rho^2 R)$, incluse dans $B(p, R(1-\rho))$, vérifie l'inégalité* $\mathrm{Vol}\, B(q, r) \geq (1-\varepsilon)\ \mathrm{Vol}\, B_o(0, r)$.

Preuve.— Elle suit les idées principales de T. Colding ([Co 3], pp. 481–494) en tentant de simplifier certains arguments. Nous pouvons supposer les boules concentriques (remplacer $B(p, R)$ par $B(q, R\rho)$). Par une simple renormalisation (changer g en $\rho^{-4}R^{-2}.g$), il nous suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, τ et R tels que, sur toute variété M vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$, si $d_{GH}(B(p, R), B_o(0, R)) < \tau$, alors $\mathrm{Vol}\, B(p, 1) \geq (1-\varepsilon)\ \mathrm{Vol}\, B^n$. En effet (*cf.* le commentaire qui suit (2.4)), si l'inégalité de la proposition 4.1 est vraie lorsque $r = 1$, elle l'est aussi pour tout $r \leq 1$.

Choisissons l'approximation de Hausdorff de $B(p, R)$ sur $B_o(0, R)$ et des points e_i^R de M de sorte que $d_{GH}(p, 0) < \tau$ et que $d_{GH}(e_i^R, R \cdot e_i) < \tau$, où $\{e_i\}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien. Notons b_i la fonction $x \mapsto d(x, e_i^R) - d(p, e_i^R)$ et posons $\phi(x) = (-b_1(x), \cdots, -b_n(x))$. Pour tout $x \in B(p, 2)$, si $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ vérifie

$d_{GH}(x,\bar{x}) < \tau$, alors $-b_i(x)$ a pour approximation $\|R\cdot e_i\| - \|Re_i - \bar{x}\|$, qui est égal à $< e_i, \bar{x} > +O(\frac{1}{R})$. Il s'ensuit que $\|\phi(x) - \bar{x}\| \leq (4\tau + \frac{C}{R})n$. Posons $\tau' = n(5\tau + \frac{C}{R})$, alors ϕ *réalise une τ'-approximation de Hausdorff de $B(p,2)$ sur $B_o(0,2)$.*

Le fait que $|\nabla b_i| \equiv 1$ implique que la trace de $d\phi \otimes d\phi$ est égale à n, donc que $|\mathrm{Jac}\,\phi| \leq 1$ et que $|d\phi| \leq \sqrt{n}$.

Comme dans la preuve de 3.2, $\phi(\partial B(p,1))$ ne rencontre pas $B_o(0,1-\tau')$, donc le degré ponctuel de la restriction ϕ_1 de ϕ à $B(p,1)$ est presque partout constant sur $B_o(0,1-\tau')$. S'il n'est pas nul, $B_o(0,1-\tau')$ est incluse dans $\phi(B(p,1))$ et, comme ϕ contracte les volumes, nous déduisons $\mathrm{Vol}\,B(p,1) \geq \mathrm{Vol}\,B_o(0,1-\tau')$, ce qui conclut.

Reste le cas où ce degré est nul (qui n'est pas exclu *a priori*, voir le dernier contre-exemple 1.5). Comme $B(p,1-2\tau') \subset \phi_1^{-1}(B_o(0,1-\tau')) \subset B(p,1)$, la moyenne de $\mathrm{Jac}\,\phi$ sur $B(p,1)$ est alors presque nulle. À cause de son insuffisante régularité (*cf.* la fin de la section 2.d), on remplace ϕ par $\widetilde{\phi} = (-\widetilde{b}_1, \cdots, -\widetilde{b}_n)$, où $\widetilde{b}_i$ est la fonction harmonique sur $B(p,2)$ qui coïncide avec b_i sur $\partial B(p,2)$. En effet les hypothèses de la proposition 2.12 sont vérifiées pour chacune des fonctions b_i, y compris l'existence d'un 6τ–presque antipode $e_i'^R$ de e_i^R (prendre dans M n'importe quelle approximation de Hausdorff du point $-R.e_i$ de $\mathbf{R}^n$). En appliquant la proposition 2.12, nous obtenons :

$$(4.2) \qquad |\phi - \widetilde{\phi}| \leq \eta, \qquad \|d\phi - d\widetilde{\phi}\|_{L^2(B(p,2))} \leq \eta, \qquad \|\mathrm{Hess}\,\widetilde{\phi}\|_{L^2(B(p,2))} \leq \eta$$

où $\eta = \eta(\delta,\tau,R)$ peut être choisi aussi petit que désiré. Par le lemme 2.9, la dernière inégalité de (4.2) implique que la fonction $v \mapsto H\widetilde{\phi}(\gamma_v)$ est de norme $L^2(SB(p,1))$ petite. Les deux premières inégalités de (4.2) impliquent qu'il en est de même pour $v \to H\phi(\gamma_v)$, donc que, en $\frac{\eta^2}{\varepsilon^4}$–presque–tout point x de $B(p,1)$, et pour $\frac{\eta^2}{\varepsilon^4}$–presque–tout vecteur unitaire v tangent en x, $|d_x\phi(v)|$ existe et est majoré par $\frac{|\phi(\gamma_v(l))-\phi(\gamma_v(0))|}{l} + \frac{\varepsilon^2}{l}$, lui même majoré par $\frac{d(\gamma_v(l),\gamma_v(0))}{l} + 2\frac{\tau'}{l} + \frac{\varepsilon^2}{l}$ (puisque ϕ est une τ'-approximation de Hausdorff), et donc par $1 + 2\frac{\tau'}{l} + \frac{\varepsilon^2}{l}$, que nous noterons $1+\eta'$. En un tel point x, par linéarité, nous en déduisons, si η est assez petit, que $\|{}^t(d_x\phi)\| \leq (1 + C\,\eta')$. Comme par ailleurs ${}^t(d_x\phi)(e_i) = -\nabla b_i$ est de norme 1, c'est un simple lemme d'algèbre linéaire (considérer l'image des $(e_i \pm e_j)$) d'en déduire que, en $\frac{\eta^2}{\varepsilon^4}$–presque–tout point x, $(1 - C'\eta')|v| \leq |{}^t(d_x\phi)(v)| \leq (1 + C\eta')|v|$. De ceci et de la deuxième inégalité de (4.2), nous déduisons que, $(C \cdot \frac{\eta^2}{\varepsilon^4})$–presque–partout, $\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}$ est ε–proche de $\mathrm{Jac}\,\phi$, lui-même ε–proche de ± 1.

Par ailleurs, un résultat de S.Y. Cheng et S.T. Yau ([C-Y]) et la première des inégalités (4.2) permettent de majorer universellement $|d\widetilde{\phi}|$ (donc $|\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}|$) en tout point ; la moyenne sur $B(p,1)$ de $\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}$ est donc presque égale à celle de $\mathrm{Jac}\,\phi$, donc proche de 0. D'après le lemme 2.11 (ii), $\mathrm{Jac}\,\widetilde{\phi}$ est ε–presque–partout presque égal à sa moyenne donc à 0, ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

N. B. : Dans toute cette preuve, *quand on dit qu'une grandeur est petite (resp. proche d'une autre, resp. bornée), cette petitesse (resp. cet écart, resp. cette borne) doit se calculer comme fonction universelle de ε et de n* (*cf.* la section 2.c). Un argument de compacité est donc insuffisant.

Preuve du théorème de continuité 1.6 ([Co 3] p. 494).— Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n (la preuve fonctionne de manière analogue lorsque M est une boule d'une variété riemannienne complète). Par définition de la mesure de Hausdorff de M, on peut construire un recouvrement (resp. un remplissage, *i. e.* une réunion de boules disjointes) de M par des boules B_j^M, de rayons r_j suffisamment petits, tel que la somme des volumes des boules euclidiennes $\bar{B}_j$ de mêmes rayons soit $\frac{\varepsilon}{2}$–proche du volume de M. La variété compacte M étant *fixée*, son rayon de convexité est minoré et sa courbure sectionnelle bornée ; il est alors connu que $d_{GH}(B_j^M, \bar{B}_j) \leq C.r_j^3$.

Soit N une variété riemannienne $\tau/6$–proche de M au sens de la distance de Hausdorff–Gromov ($\tau \ll r_j$) et telle que $\mathrm{Ric}_N \geq -(n-1)$. On peut construire sur N un recouvrement (resp. un remplissage) par des boules B_j^N qui soient des τ–approximations de Hausdorff des B_j^M, donc des $\bar{B}_j$. Quitte à remplacer le remplissage initial par un sous–remplissage par des boules de rayons inférieurs à $\rho^2 r_j$, nous sommes donc dans les conditions d'application de l'inégalité de la Proposition 4.1 pour presque toutes ces boules (exceptées celles situées au voisinage du bord des boules précédentes). L'inégalité (2.4) de Bishop (resp. la proposition 4.1) implique alors que le volume des B_j^N est majoré (resp. minoré) par le volume des $\bar{B}_j$ (à un facteur $(1 \pm \varepsilon^2)$ près). Par sommation, $\mathrm{Vol}(N)$ est majoré (resp. minoré) par $\mathrm{Vol}(M)\ (1 \pm \varepsilon)$. $\diamond$

5. LE PROBLÈME DU VOLUME PRESQUE MAXIMAL ([Co1], [Co3])

Dans le cas des variétés de courbure de Ricci presque positive, si $\phi : B(p,R) \to \mathbf{R}^n$ est lipschitzienne (de constante de Lipschitz bornée) et si $\|\mathrm{Hess}\,\phi\|_{L^2}$ est suffisamment petit, si A est un sous–ensemble de $\mathbf{R}^n$ inclus dans le (εR)-voisinage de $\phi(B(p,R))$, alors la réunion des segments de droites qui joignent deux points de A est dans un $(C.\varepsilon R)$–voisinage de $\phi(B(p,R))$. En effet, tout segment de droite joignant deux points de A peut être approximé par un segment de droite joignant deux points $\phi(x)$ et $\phi(y)$ de $\phi(B(p,R))$ qui, par le corollaire 2.11 (i), la remarque 2.8, et la lipschitzianité de ϕ, peut être approximé par un segment de droite joignant deux points $\phi(x')$ et $\phi(y')$, $\varepsilon.R$–proches de $\phi(x)$ et $\phi(y)$, tels que la géodésique minimisante qui joint x' à y' s'envoie dans un $(\varepsilon.R)$–voisinage tubulaire de $[\phi(x'),\phi(y')]$.

Dans le cas d'une variété M^n vérifiant $\mathrm{Ric}_M \geq \mathrm{Ric}_{S^n}$ et $\mathrm{Vol}(M) \geq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(S^n)$, T. Colding construit comme suit une approximation de Hausdorff ϕ de M sur S^n : par la presque–maximalité du volume, il prouve que les vecteurs d'une base orthonormée de $\mathbf{R}^{n+1}$ sont proches de l'image de ϕ, il en déduit que les arcs de grands cercles qui les joignent le sont aussi (c'est l'analogue "à valeurs dans S^n" du lemme de Toponogov L^2 "à valeurs dans $\mathbf{R}^n$" que nous venons d'utiliser), puis, par un nombre borné d'itérations, il montre que toutes les sphères équatoriales le sont aussi jusqu'à obtenir que S^n est $(C\,.\,\varepsilon)$–proche de l'image de ϕ.

Il faut encore construire cette application $\phi : M \to S^n$ et montrer que $d_x\phi$ est ε–presque partout presque isométrique par des arguments voisins de ceux des chapitres 3 et 4. T. Colding ([Co1]) réalise les fonctions–composantes ϕ_i de ϕ comme des fonctions de la distance qui sont (presque) des fonctions propres de M. Le problème est que, dans ce cas, le Hessien de ϕ n'est pas petit, mais seulement L^2–proche de $-g(.,.)\,\phi$ (*cf.* 2.d). Pour se ramener à une situation où le Hessien est petit, en s'inspirant d'une idée due à E. Ruh, il suffit de considérer M comme plongée dans $M\times\,]0,+\infty[$ muni de la métrique $g' = r^2\,.\,g + (dr)^2$ (dans le cas où $M = S^n$, c'est le plongement canonique de S^n dans $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\} \simeq S^n\times\,]0,+\infty[$). On prolonge alors ϕ en $\Phi(x,r) = r\,.\,\phi(x)$. La formule de Bochner (2.1), où le laplacien est celui de la métrique g', donne, par intégration sur $M \simeq M\times\{1\}$, la petitesse de $\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|_{L^2(M)}$. Ceci suggère une autre preuve où l'on procèderait comme dans la section 3, puisque $d_x\Phi$ est alors partout presque contractante et η–presque partout presque isométrique ; ceci impliquerait que $x \mapsto \frac{\phi(x)}{|\phi(x)|}$ est une approximation de Hausdorff de M sur la sphère.

6. QUELQUES QUESTIONS

Certaines idées de T. Colding ont déjà été réutilisées. Outre l'énorme "chantier" ouvert par J. Cheeger et T. Colding ([Ch-Co2,3]) débutant par la description des propriétés des espaces métriques contenus dans la fermeture compacte de l'ensemble des variétés riemanniennes concernées par le théorème de précompacité de M. Gromov (théorème 1.3), citons l'utilisation que M. Paun ([Pau]) fait du lemme de Toponogov L^2 (*cf.* 2.d) en géométrie kählérienne pour prouver que, si le fibré anticanonique est NEF, alors le groupe fondamental est presque nilpotent (par Calabi–Yau, l'hypothèse se traduit par l'existence d'une suite g_i de métriques kählériennes, de volume fixé et dont la courbure de Ricci vérifie $\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -\varepsilon_i$ ($\varepsilon_i \to 0_+$) ; on remarquera qu'ici le diamètre n'est pas supposé borné).

Le lemme de Toponogov L^2 devrait pouvoir jouer un rôle important dans l'étude de variétés d'entropie ou de volume presque minimaux (sont–elles à distance de Gromov–Hausdorff petite d'un espace localement symétrique ? Voir aussi les questions posées à ce sujet dans [Pan]) ou, plus généralement, lorsqu'on dispose d'une inégalité dont le cas d'égalité caractérise des espaces canoniques, dans la classification des variétés réalisant l'égalité à ε–près. Par exemple, étant donnée une variété hyperbolique compacte X, considérons l'ensemble des variétés Y (de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1) qui admettent une application de degré non nul : $X \to Y$. On sait que, dans cet ensemble, X est l'unique élément de volume maximal. Toute variété Y de volume supérieur à $(1-\varepsilon)\mathrm{Vol}(X)$ est-elle difféomorphe à X ? La réponse est affirmative (G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, en préparation), mais le calcul du ε ne lui confère pas encore une universalité aussi optimale que celle des résultats de T. Colding (la principale difficulté vient ici du fait que l'espace modèle n'est pas une variété de révolution, comme c'est le cas dans les résultats de stabilité exposés ci–dessus). Des résultats concernant des variétés de diamètre presque maximal (dans l'esprit du "splitting theorem") sont donnés dans [Ch-Co1].

Il faudrait par ailleurs décider si, dans le cas de la conjecture de Gromov (théorème 1.14), le difféomorphisme avec le tore peut être obtenu directement par l'application d'Albanese (voir la section 3).

À noter une similitude troublante entre certains des arguments de T. Colding et ceux employés par D. Burago et S. Ivanov ([B-I1], 1994, [B-I2], 1995) dans leur célèbre preuve de la conjecture de Hopf sur les tores (et travaux connexes). Un des points de départ de ces travaux est par exemple la constatation suivante (qui a son origine chez M. Gromov, [G-L-P], proposition 3.16) : si une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^n$ est $\mathbf{Z}^n$–invariante, alors $(\mathbf{R}^n, 2^{-k}g)$ converge quand $k \to +\infty$ (en distance de Gromov–Hausdorff pointée) vers $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme (norme stable) qui n'est euclidienne que lorsque la métrique g de départ est plate. Un résultat analogue (dans ses préoccupations) de T. Colding, qui résout une conjecture de M. Anderson et J. Cheeger ([An2],[A-C]), est le :

THÉORÈME ([Co3]) .— *Soit (M,g) une variété riemannienne complète (non compacte). Si $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ et s'il existe une suite $R_i \to +\infty$ telle que M, munie de la suite de métriques $R_i^{-2}.g$ et pointée en un point p fixé, converge (au sens de la distance de Gromov–Hausdorff pointée) vers un espace euclidien (pointé en l'origine), alors*

(M,g) est isométrique à l'espace euclidien.

En effet, $\frac{\mathrm{Vol}\, B_g(p,R_i)}{\mathrm{Vol}\, B_{\mathbf{R}^n}(0,R_i)}$ est égal à $\frac{\mathrm{Vol}\, B_{R_i^{-2}g}(p,1)}{\mathrm{Vol}\, B_{\mathbf{R}^n}(0,1)}$, qui tend vers 1 par le théorème de continuité 1.6. Pour toute valeur r du rayon, nous sommes donc dans les cas d'égalité de l'inégalité (2.4) de Bishop–Gromov et de la propriété 2.3, ce qui conclut.

BIBLIOGRAPHIE

[A-C] M. Anderson, J. Cheeger - *C^α-compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below*, Journ. Diff. Geom. **35** (1992), 265–281.

[A-G] U. Abresch, D. Gromoll - *On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature*, Journ. A.M.S. V. 3 (1990), 355–374.

[An1] M.T. Anderson - *Metrics of Positive Ricci Curvature with Large Diameter*, Manuscripta Math. **68** (1990), 405–415.

[An2] M. T. Anderson - *Hausdorff perturbations of Ricci flat manifolds and the splitting theorem*, Duke Math J. **68** (1992), 67–82.

[An3] M.T. Anderson - *Convergence and rigidity of metrics under Ricci curvature bounds*, Invent. Math **102** (1990), 429–445.

[B-C] R. Bishop, R. Crittenden - *Geometry of Manifolds*, Academic Press (1964).

[Be] M. Berger - *Riemannian geometry during the second half of the century*, preprint.

[B-I1] D. Burago, S. Ivanov - *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. and Funct. An. **4** (1994), 259–269.

[B-I2] D. Burago, S. Ivanov - *On asymptotic volume of Tori*, Geom. and Funct. An. **5** (1995), 800–808.

[B-K] P. Buser, H. Karcher - *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque **81** (1981), Soc. Math. France.

[Ch] J. Cheeger - *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Am. J. of Math. **92** (1970), 61–74.

[Ch-Co1] J. Cheeger, T.H. Colding - *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. **144** (1996), 189–237.

[Ch-Co2] J. Cheeger, T.H. Colding - *On the Structure of Spaces with Ricci curvature Bounded Below I*, J. Diff. Geom. **46** (1997), 406–480.

[Ch-Co3] J. Cheeger, T.H. Colding - *On the Structure of Spaces with Ricci curvature Bounded Below II and III*, annoncés.

[Ch-Gl] J. Cheeger, D. Gromoll - *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, Journ. Diff. Geom. **6** (1971), 119–128.

[Ch-Gv] J. Cheeger, M. Gromov - *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded*, II, J. Diff. Geom. **31** (1990), 269–298.

[Co1] T.H. Colding - *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 175–191.

[Co2] T.H. Colding - *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 193–214.

[Co3] T.H. Colding - *Ricci curvature and volume convergence*, Ann. of Math. **145** (1997), 477–501.

[C-Y] S. Y. Cheng, S. T. Yau - *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 333–354.

[F-Y] K. Fukaya, T. Yamaguchi - *The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. **136** (1992), 253–333.

[Fu1] K. Fukaya - *Collapsing Riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator*, Inv. Math. **87** (1987), 517–547.

[Fu2] K. Fukaya - *Theory of convergence for Riemannian orbifolds*, Japan. J. Math. **12** (1986), 121–160.

[Ga] S. Gallot - *A Sobolev inequality and some geometric applications*, Actes du colloque de Kyoto (1981), Kaigai Publications, 45–55 (1983).

[Ge] R. E. Greene - *Homotopy Finiteness theorems and Helly's theorem*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 317–325.

[G-L-P] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques n° 1, Cedic - Nathan (1981).

[G-P] K. Grove, P. Petersen - *A radius sphere theorem*, Inventiones Math. **112** (1993), 577–583.

[G-P-W] K. Grove, P. Petersen, J. Y. Wu - *Geometric finiteness theorems via controlled topology*, Inv. Math. **99** (1990), 205–213 et **104** (1991), 221–222.

[Gv1] M. Gromov - *Paul Levy's isoperimetric inequality*, Prépublications de l'I.H.E.S. (1980).

[Ka] A. Katsuda - *Gromov's convergence theorem and its applications*, Nagoya Math. Journ. **100** (1985), 11–48.

[Lo] J. Lohkamp - *Manifolds of negative Ricci-curvature*, Ann. of Math. **140** (1994), 655–683.

[O-S-Y] Y. Otsu, K. Shiohama, T. Yamaguchi - *A new version of the differentiable sphere theorem*, Invent. Math. **98** (1989), 219–228.

[Pan] P. Pansu - *Volume, courbure et entropie (d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot)*, Sém. Bourbaki, Nov. 1996, Exp. n° 823, Astérisque **245** (1997), 83–103.

[Pau] M. Paun - Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

[Per1] G. Perelman - *Manifolds of Positive Ricci Curvature with almost maximal volume*, Journ of the A.M.S. **7** (1994), 299–305.

[Per2] G. Perelman - *Alexandrov's spaces with curvature bounded below* II, preprint.

[Per3] G. Perelman - *Construction of manifolds of positive Ricci curvature with big volume and large Betti numbers*, preprint.

[Pet] S. Peters - *Convergence of Riemannian manifolds*, Compositio Math. **62** (1987), 3–16.

[Sh] K. Shiohama - *A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature*, Trans. A.M.S. **257** (1983), 811–819.

[Ya] T. Yamaguchi - *Manifolds of almost nonnegative Ricci curvature*, Journ. Diff. Geom. **28** (1988), 157–167.

Sylvestre GALLOT

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
UMR 8513 du CNRS
46, allée d'Italie
F-69364 LYON CEDEX 07

et, à partir du 1er septembre 1998 :

Université de Grenoble I
Institut Fourier Maths Pures
UMR 5582 CNRS-UJF
B. P. 74
F-38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX