JEAN-LOUP WALDSPURGER

Cohomologie des espaces de formes automorphes

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 809, p. 139-156
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__139_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1995
48ème année, 1995-96, n° 809

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE FORMES AUTOMORPHES
[d'après J. Franke]

par **Jean-Loup WALDSPURGER**

Dans l'article [F], Franke démontre la conjecture de Borel que l'on peut énoncer sous la forme imprécise suivante. Soit G un groupe algébrique défini sur $\mathbf{Q}$, réductif et connexe. Notons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}_f$ le sous-anneau des adèles finies. Fixons un sous-groupe compact maximal $K_{\mathbf{R}}$ de $G(\mathbf{R})$ et un sous-groupe ouvert compact H de $G(\mathbf{A}_f)$. Alors les espaces de cohomologie de certains fibrés sur la variété $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_{\mathbf{R}}H$ sont isomorphes à des espaces de cohomologie convenables de l'espace des formes automorphes sur $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$. Ces formes automorphes sont des fonctions sur $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ vérifiant une condition de croissance et solutions de certains systèmes d'équations différentielles.

Ce résultat n'était jusqu'à présent connu que dans peu de cas. Celui où G est de rang semi-simple (sur $\mathbf{Q}$) égal à 1 avait été traité par Casselman et Speh.

L'espace des formes automorphes contient le sous-espace des formes cuspidales qui, *grosso modo*, est semi-simple pour l'action naturelle de $G(\mathbf{A})$. L'un des problèmes qui se posent est de décrire l'espace des formes automorphes tout entier à l'aide d'espaces de formes cuspidales sur les sous-groupes de Lévi des sous-groupes paraboliques de G. Franke démontre des résultats assez forts dans cette direction. En particulier, toute forme automorphe est combinaison linéaire de dérivées convenables de séries d'Eisenstein issues de formes cuspidales. Un ingrédient essentiel de la démonstration est bien sûr la théorie des séries d'Eisenstein développée en toute généralité par Langlands ([L]).

En assemblant les deux résultats, on obtient une suite spectrale, aboutissant aux espaces de cohomologie d'un fibré sur $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_{\mathbf{R}}H$, dont les termes E_1^{pq} s'expriment à l'aide d'espaces de cohomologie de modules semi-simples.

On se propose d'énoncer précisément ces résultats et de donner de très brèves indications sur leurs preuves.

Cet exposé fait suite à un séminaire consacré à l'article de Franke, qui a eu lieu à Paris 7 en 1994-95. J'en remercie les participants : L. Clozel, M. Harris, F. Sauvageot et particulièrement G. Laumon et C. Mœglin qui ont bien voulu relire le présent texte.

Notations : G, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_f$ ont déjà été introduits. Si V est un espace vectoriel réel, on note V^* son espace dual, $V_{\mathbf{C}}$ et $V_{\mathbf{C}}^*$ leurs complexifiés. Si $v \in V_{\mathbf{C}}$, on note $Re(v) \in V$ sa partie réelle. Si L est un groupe de Lie réel, on note L^0 sa composante neutre.

1. FORMES AUTOMORPHES

1.1. Fixons un sous-groupe parabolique P_0 de G, défini sur $\mathbf{Q}$ et minimal, et un sous-groupe de Lévi M_0 de P_0, défini sur $\mathbf{Q}$. Notons :

- A_0 le plus grand tore déployé sur $\mathbf{Q}$ contenu dans le centre de M_0 ;
- $\mathfrak{a}_0$, resp. $\mathfrak{g}$, les algèbres de Lie des groupes de Lie réels $A_0(\mathbf{R})$, resp. $G(\mathbf{R})$;
- $H_0 : A_0(\mathbf{R})^0 \to \mathfrak{a}_0$ l'inverse de l'exponentielle ;
- $\Sigma_0 \subset \mathfrak{a}_0^*$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{g}$;
- $\Sigma_0^+ \subset \Sigma_0$ le sous-ensemble de racines positives associé à P_0.

On fixe une norme $|\cdot|$ sur $\mathfrak{a}_0$.

1.2. Fixons un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbf{A})$. Il est nécessairement de la forme $K = \prod_v K_v$, où, pour toute place v de $\mathbf{Q}$, K_v est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{Q}_v)$. On impose, ainsi qu'il est loisible, que, pour toute v, K_v soit en "bonne position" par rapport à A_0, ce qui signifie précisément ceci :

- si v est la place réelle, auquel cas on note notre groupe $K_{\mathbf{R}}$, $A_0(\mathbf{R})$ est stable par l'involution de Cartan associée à $K_{\mathbf{R}}$;
- si v est finie, notons G_v et $A_{0,v}$ les groupes sur $\mathbf{Q}_v$ déduits de G et A_0 par extension des scalaires ; alors il existe un sous-tore A_v de G_v, défini et déployé sur $\mathbf{Q}_v$, maximal, contenant $A_{0,v}$, et il existe un sommet spécial de l'appartement associé à A_v de l'immeuble de Bruhat-Tits de G_v sur $\mathbf{Q}_v$ de sorte que K_v soit le fixateur de ce sommet dans $G(\mathbf{Q}_v)$.

1.3. Fixons un sous-ensemble compact $\omega \subset P_0(\mathbf{A})$ et un réel t_0. Notons $A_0(\mathbf{R}, t_0)$ l'ensemble des $a \in A_0(\mathbf{R})^0$ tels que $\langle \alpha, H_0(a) \rangle \geq t_0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_0^+$. Posons :

$$\mathfrak{S} = \{pak\, ;\, p \in \omega\, ,\, a \in A_0(\mathbf{R}, t_0)\, ,\, k \in K\}.$$

Ce sous-ensemble de $G(\mathbf{A})$ est appelé un domaine de Siegel. Il fournit une approximation de $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ en le sens suivant :

- l'ensemble des $\gamma \in G(\mathbf{Q})$ tels que $\gamma\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$ est fini ;
- si ω est assez grand et t_0 assez petit, on a l'égalité $G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q})\mathfrak{S}$.

Nous supposerons désormais que ω est "assez grand" et t_0 "assez petit".

1.4. Pour tout espace V de fonctions sur $G(\mathbf{A})$ pour lequel de telles définitions ont un sens, on note δ l'action de $G(\mathbf{A})$ dans V par translations à droite, ou l'action qui s'en déduit de $\mathfrak{g}$ ou de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{g}$.

On appelle ici fonction à croissance uniformément modérée sur $G(\mathbf{A})$ toute fonction $f : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ vérifiant les conditions (1) à (4) ci-dessous.

(1) f est invariante à gauche par $G(\mathbf{Q})$

(2) f est C^∞.

Cela signifie ceci : pour tout $g_\mathbf{R} \in G(\mathbf{R})$, $g_f \in G(\mathbf{A}_f)$, il existe des voisinages ouverts $V_\mathbf{R}$ de $g_\mathbf{R}$ dans $G(\mathbf{R})$ et V_f de g_f dans $G(\mathbf{A}_f)$ et une fonction $f_\mathbf{R} : V_\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, qui est C^∞, de sorte que pour tous $g'_\mathbf{R} \in V_\mathbf{R}$, $g'_f \in V_f$, on ait l'égalité $f(g'_\mathbf{R}\, g'_f) = f_\mathbf{R}(g'_\mathbf{R})$.

(3) f est K-finie.

I.e. l'ensemble des fonctions $\{\delta(k)f\,;\, k \in K\}$ engendre un espace de dimension finie.

(4) $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall Y \in \mathcal{U}$, $\exists c > 0$, $\forall p \in \omega$, $\forall a \in A_0(\mathbf{R}, t_0)$, $\forall k \in K$,

$$|\delta(Y)\, f(pak)| \leq c\, e^{N|H_0(a)|}.$$

On note $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)$ l'espace de ces fonctions.

1.5. Notons $\mathcal{Z}$ le centre de $\mathcal{U}$. On appelle forme automorphe sur $G(\mathbf{A})$ tout élément f de $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)$ vérifiant la condition :

- il existe un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{Z}$, de codimension finie, tel que $\delta(Z)f = 0$ pour tout $Z \in \mathcal{I}$.

On note $\mathcal{A}(G)$ l'espace de ces formes automorphes.

1.6. Notons A_G le plus grand tore déployé sur $\mathbf{Q}$ contenu dans le centre de G. Soit μ un caractère de $A_G(\mathbf{R})^0$, *i.e.* un homomorphisme continu de $A_G(\mathbf{R})^0$ dans $\mathbf{C}^\times$. On note $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)$, resp. $\mathcal{A}(G,\mu)$, l'espace des $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)$, resp. $\mathcal{A}(G)$, vérifiant la condition :

(5) pour tous $a \in A_G(\mathbf{R})^0$, $g \in G(\mathbf{A})$, $f(ag) = \mu(a)\, f(g)$.

On note simplement $\mathcal{A}^G = \mathcal{A}(G, 1)$, où 1 est le caractère trivial de $A_G(\mathbf{R})^0$.

2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

2.1. Notons $\mathfrak{g}^1$, resp. $\mathfrak{k}$, l'algèbre de Lie $A_G(\mathbf{R})^0\backslash G(\mathbf{R})$, resp. $K_{\mathbf{R}}$. Remarquons que $K_{\mathbf{R}}$ s'identifie à un sous-groupe $A_G(\mathbf{R})^0\backslash G(\mathbf{R})$. Rappelons succinctement que l'on appelle $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$-module un espace vectoriel complexe V muni d'une action θ de $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$, vérifiant les conditions suivantes :

(6) $\theta_{|\mathfrak{g}^1}$, resp. $\theta_{|K_{\mathbf{R}}}$, est une représentation d'algèbre de Lie, resp. de groupe ;

(7) tout élément de V est $K_{\mathbf{R}}$-fini ;

(8) une condition de compatibilité entre $\theta_{|\mathfrak{g}^1}$ et $\theta_{|K_{\mathbf{R}}}$, *cf.* [V], définition 0.3.8 pour un énoncé précis.

Pour un tel $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$-module, on note $H^0(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$ le sous-espace des éléments de V invariants par $K_{\mathbf{R}}$ et annulés par $\mathfrak{g}^1$. En dérivant le foncteur $V \mapsto H^0(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$, on définit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace de cohomologie $H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$ ([V], définition 6.1.13).

2.2. Considérons une représentation continue de $G(\mathbf{R})$ dans un espace vectoriel complexe E de dimension finie. Supposons que $A_G(\mathbf{R})^0$ agisse dans E par un caractère dont on note μ l'*inverse*. Les espaces $\mathcal{A}(G,\mu) \otimes_{\mathbf{C}} E$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu) \otimes_{\mathbf{C}} E$ sont des $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$-modules. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'injection $\mathcal{A}(G,\mu) \to \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)$ induit un homomorphisme

$$(9) \qquad H^n(\mathfrak{g}^1\,,\,K_{\mathbf{R}}\,;\,\mathcal{A}(G,\mu) \bigotimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}^1\,,\,K_{\mathbf{R}}\,;\,\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu) \bigotimes_{\mathbf{C}} E).$$

THÉORÈME (Franke).— *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, cet homomorphisme est un isomorphisme.*

2.3. Le groupe $G(\mathbf{A}_f)$ agit sur $\mathcal{A}(G,\mu)$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)$, donc aussi sur les espaces de départ et d'arrivée de l'isomorphisme (9). Celui-ci est équivariant pour ces actions. Soit H un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbf{A}_f)$. Il y a un isomorphisme analogue à (9), où $\mathcal{A}(G,\mu)$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)$ sont remplacés par leurs sous-espaces des invariants par H, que l'on note $\mathcal{A}(G,\mu)^H$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)^H$.

Posons $X_H = A_G(\mathbf{R})^0\backslash G(\mathbf{A})/K_{\mathbf{R}}H$. Le groupe $G(\mathbf{Q})$ agit sur X_H par multiplication à gauche et sur E via le plongement $G(\mathbf{Q}) \subset G(\mathbf{R})$, donc aussi sur $X_H \times E$. Supposons H assez petit. L'action de $G(\mathbf{Q})$ sur X_H est alors sans point fixe et l'on définit un fibré $\mathcal{E}$ sur $G(\mathbf{Q})\backslash X_H$ par :

$$\mathcal{E} = G(\mathbf{Q})\backslash(X_H \times E).$$

Il est C^∞, à connexion intégrable. On définit ses espaces de cohomologie de de Rham $H^n(G(\mathbf{Q})\backslash X_H, \mathcal{E})$. Rappelons que ces espaces s'identifient à des espaces de cohomologie de certains groupes discrets, plus précisément de groupes de congruence.

Notons $\mathcal{S}(G,\mu)^H$ l'espace des fonctions $f : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (5) et invariantes à droite par H. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il est aisé de définir un isomorphisme

$$H^n(\mathfrak{g}^1\,, K_{\mathbf{R}}\,; \mathcal{S}(G,\mu)^H \bigotimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(G(\mathbf{Q})\backslash X_H, \mathcal{E}).$$

De l'inclusion $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)^H \to \mathcal{S}(G,\mu)^H$ se déduit un homomorphisme :

$$H^n(\mathfrak{g}^1\,, K_{\mathbf{R}}\,; \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G,\mu)^H \bigotimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}^1\,, K_{\mathbf{R}}\,; \mathcal{S}(G,\mu)^H \bigotimes_{\mathbf{C}} E).$$

THÉORÈME (Borel).— *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, cet homomorphisme est un isomorphisme.*

Cf. [B]. Du théorème de Franke résulte donc un isomorphisme

$$H^n(\mathfrak{g}^1\,, K_{\mathbf{R}}\,; \mathcal{A}(G,\mu)^H \bigotimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(G(\mathbf{Q})\backslash X_H, \mathcal{E}) \tag{10}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2.4. Fixons une mesure de Haar sur $G(\mathbf{A}_f)$ et notons $\mathcal{H}_H$ l'algèbre de convolution des fonctions sur $G(\mathbf{A}_f)$, à valeurs complexes, invariantes à droite et à gauche par H et à support compact. Cette algèbre agit naturellement sur les espaces de départ et d'arrivée de l'isomorphisme (10). Celui-ci est équivariant pour ces actions.

3. SÉRIES D'EISENTEIN

3.1. Notons $\mathbf{A}^\times$ le groupes des idèles de $\mathbf{Q}$, $|\cdot|_{\mathbf{A}}$ sa valeur absolue usuelle et $X^*(G)$ le groupe des caractères algébriques de G définis sur $\mathbf{Q}$. Un tel caractère définit un homomorphisme de $G(\mathbf{A})$ dans $\mathbf{A}^\times$. On note $G(\mathbf{A})^1$ le sous-groupe des $g \in G(\mathbf{A})$ tels que $|\chi(g)|_{\mathbf{A}} = 1$ pour tout $\chi \in X^*(G)$.

L'application de restriction $X^*(G) \to X^*(A_G)$ est injective, de conoyau fini. On en déduit que l'application produit :

$$A_G(\mathbf{R})^0 \times G(\mathbf{A})^1 \longrightarrow G(\mathbf{A})$$

est un isomorphisme. Le groupe $G(\mathbf{A})^1$ s'identifie donc à $A_G(\mathbf{R})^0\backslash G(\mathbf{A})$, en particulier $\mathfrak{g}^1$ (*cf.* 2.1) s'identifie à l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{A})^1 \cap G(\mathbf{R})$.

Notons $\mathfrak{a}_G$ l'algèbre de Lie de $A_G(\mathbf{R})$. On a l'égalité $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{g}^1$. Remarquons que $A_G \subset A_0$. De la décomposition précédente se déduit une décomposition $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_G \oplus (\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{g}^1)$ et une décomposition analogue de $\mathfrak{a}_0^*$.

On définit un homomorphisme $H_G : G(\mathbf{A}) \to \mathfrak{a}_G$: il est trivial sur $G(\mathbf{A})^1$ et égal à l'inverse de l'exponentielle sur $A_G(\mathbf{R})^0$.

3.2. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques de G, définis sur $\mathbf{Q}$, contenant P_0. Soit $P \in \mathcal{P}$. Notons M l'unique sous-groupe de Lévi de P contenant M_0, U le radical unipotent de P, $\mathfrak{m}$, resp. $\mathfrak{u}$, les algèbres de Lie de $M(\mathbf{R})$, resp. $U(\mathbf{R})$; posons $K^M = M(\mathbf{A}) \cap K$ et $K_{\mathbf{R}}^M = M(\mathbf{R}) \cap K_{\mathbf{R}}$. On peut définir relativement au groupe M tous les objets que nous avons définis ou que nous définirons relativement au groupe G, par exemple $\mathfrak{a}_M$, H_M, etc.

On note ρ_P la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{u}$, comptées avec multiplicités. C'est un élément de $\mathfrak{a}_M^*$.

On munit $U(\mathbf{A})$ de la mesure de Haar pour laquelle $\mathrm{mes}(U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})) = 1$.

Remarque.— Dans la suite, chaque fois qu'interviendra un élément P de $\mathcal{P}$, on utilisera les notations précédentes, sans rappeler leurs définitions. Quand l'élément de $\mathcal{P}$ sera noté P' ou $P(\nu)$, on les modifiera de façon évidente : M', etc. ou $M(\nu)$, etc.

3.3. On définit la notion de $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-module en imposant des conditions analogues à (6), (7) et (8) et en demandant que tout élément du module ait pour stabilisateur dans $G(\mathbf{A}_f)$ un sous-groupe ouvert. Soient $P \in \mathcal{P}$ et V un $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$-module. Notons θ^M l'action de $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$ dans V. On définit l'espace $\mathrm{Ind}_P^G(V)$. C'est l'espace des fonctions $\varphi : K \to V$ vérifiant les conditions (11) à (13) suivantes.

(11) φ est K-finie pour l'action de K par translations à droite (ou à gauche, cela revient au même).

(12) φ est C^∞.

cf. (2). Remarquons que, d'après (11), l'image de φ est contenue dans un sous-espace de dimension finie de V. Parler de fonction C^∞ à valeurs dans un tel sous-espace a un sens.

(13) Pour tous $m \in K^M$, $u \in U(\mathbf{A}_f) \cap K$, $k \in K$, $\varphi(muk) = \theta^M(m)[\varphi(k)]$ (l'action θ^M de K^M est définie via le plongement $K^M \subset K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$).

On munit $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ d'une action θ^G de $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ de la façon suivante. Le groupe $K_{\mathbf{R}}$ agit par translations à droite. Soient $\varphi \in \mathrm{Ind}_P^G(V)$, $g \in G(\mathbf{A}_f)$ et $k \in K$. Rappelons que $G(\mathbf{A}_f) = M(\mathbf{A}_f)\,U(\mathbf{A}_f)\ (K \cap G(\mathbf{A}_f))$. Écrivons donc $kgk^{-1} = muk'_f$, avec $m \in M(\mathbf{A}_f)$, $u \in U(\mathbf{A}_f)$, $k'_f \in K \cap G(\mathbf{A}_f)$. On pose :

$$[\theta^G(g)\varphi](k) = e^{\langle \rho_P, H_M(m)\rangle}\,\theta^M(m)[\varphi(k'_f k)].$$

L'action de $\mathfrak{g}$ se définit de façon analogue, en "dérivant" la formule ci-dessus. Pour cette action θ^G, $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ est un $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-module.

Remarques.— a) Il est plus naturel de considérer des $G(\mathbf{A})$-modules plutôt que des $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-modules. Malheureusement, des espaces comme $\mathcal{A}(G)$ ne sont pas stables par translations par $G(\mathbf{A})$, car la condition de $K_{\mathbf{R}}$-finitude n'est pas préservée par ces translations.

b) Si V est un espace de fonctions sur $M(\mathbf{A})$ et θ^M est déduite de l'action de $M(\mathbf{A})$ par translations à droite, $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ s'identifie à un espace de fonctions sur $G(\mathbf{A})$. À $\varphi \in \mathrm{Ind}_P^G(V)$, on associe la fonction f_φ sur $G(\mathbf{A})$ ainsi définie : soit $g \in G(\mathbf{A})$; écrivons $g = muk$, avec $m \in M(\mathbf{A})$, $u \in U(\mathbf{A})$, $k \in K$; on pose

$$f_\varphi(g) = e^{\langle \rho_P, H_M(m)\rangle}\,\varphi(k)(m).$$

Moyennant cette identification, θ^G se déduit de l'action de $G(\mathbf{A})$ par translations à droite. Dans la suite, pour tous les modules V vérifiant la condition ci-dessus, on identifiera ainsi $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ à un espace de fonctions sur $G(\mathbf{A})$.

3.4. Pour tous $f \in \mathcal{A}(G)$ et $P \in \mathcal{P}$, on définit une fonction $f_P : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ par

$$f_P(g) = \int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})} f(ug)\,du$$

pour tout $g \in G(\mathbf{A})$. On vérifie que $f_P \in \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{A}(M))$. On dit que f est cuspidale si $f_P = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P \neq G$. On note $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G)$ l'espace des formes automorphes cuspidales et $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^G = \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G) \cap \mathcal{A}^G$ (*cf.* 1.6 pour la notation $\mathcal{A}^G$). Le $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-module $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^G$ est semi-simple.

3.5. Soient $P \in \mathcal{P}$, $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}^M)$ et $s \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$. On définit une fonction $f_s : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ par

$$f_s(muk) = e^{\langle s, H_M(m)\rangle}\,f(muk)$$

pour tous $m \in M(\mathbf{A})$, $u \in U(\mathbf{A})$, $k \in K$. Pour $g \in G(\mathbf{A})$, considérons la série d'Eisenstein

$$\sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{Q})} f_s(\gamma g).$$

Notons Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{u}$. À toute racine $\alpha \in \Sigma_P$ est attachée une coracine $\check{\alpha} \in \mathfrak{a}_M$. Il existe c tel que si $\langle \check{\alpha}, \mathrm{Re}(s) \rangle > c$ pour tout $\alpha \in \Sigma_P$; alors, la série ci-dessus est absolument convergente pour tout $g \in G(\mathbf{A})$. On note $E(f_s)(g)$ sa somme, ce qui définit une fonction $E(f_s)$ sur $G(\mathbf{A})$, qui est automorphe. Cette fonction est holomorphe en s dans ce domaine (*i.e.* pour tout g, la fonction $s \mapsto E(f_s)(g)$ l'est). Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$. Plus précisément, pour tout $s_0 \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$, il existe une fonction holomorphe p, non identiquement nulle, que l'on peut d'ailleurs choisir produit de facteurs $\langle \check{\alpha}, s - s_0 \rangle$, où $\alpha \in \Sigma_P$, telle que, pour tout $g \in G(\mathbf{A})$, la fonction $s \mapsto p(s)\, E(f_s)(g)$ soit holomorphe en s_0. Soient donc $s_0 \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$, p une telle fonction et ∂ une distribution sur $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$ de support $\{s_0\}$, *i.e.* la composée d'un opérateur différentiel et de l'évaluation en s_0. On définit une fonction sur $G(\mathbf{A})$

$$g \mapsto \partial\ (s \mapsto p(s)\, E(f_s)(g)). \tag{14}$$

C'est encore une forme automorphe que l'on peut appeler une dérivée de série d'Eisenstein. On note $\mathcal{E}(G)$ le sous-espace engendré par ces fonctions, quand on fait varier P, f, s_0, p et ∂ (on inclut le cas $P = G$).

THÉORÈME (Franke).— $\mathcal{A}(G) = \mathcal{E}(G)$.

4. FILTRATION DE L'ESPACE DES FORMES AUTOMORPHES

4.1. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbf{C}}$, notons $\mathcal{D}_G(\lambda)$ l'espace des fonctions sur $G(\mathbf{A})$ de la forme

$$g \mapsto e^{\langle \lambda, H_G(g) \rangle}\, p(H_G(g)),$$

où p est un polynôme sur $\mathfrak{a}_G$. Notons $\mu_G(\lambda)$ la droite de $\mathcal{D}_G(\lambda)$ portée par la fonction $g \mapsto e^{\langle \lambda, H_G(g) \rangle}$. Ce sont des $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-modules.

Notons $\mathcal{D}_G$ la somme directe des $\mathcal{D}_G(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbf{C}}$. L'application produit définit un homomorphisme

$$\mathcal{D}_G \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}^G \longrightarrow \mathcal{A}(G).$$

On vérifie sans peine que c'est un isomorphisme.

4.2. Notons $\mathcal{A}_2^G$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{A}^G$ dont le carré est intégrable sur $G(\mathbf{Q})A_G(\mathbf{R})^0\backslash G(\mathbf{A})$. C'est un $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-module semi-simple qui contient $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^G$. On dispose pour lui d'une construction plus ou moins explicite due à Langlands ([L]), en termes de modules $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^M$ pour $P \in \mathcal{P}$ et d'une description conjecturale due à Arthur ([A1]). En particulier, Langlands a prouvé l'inclusion $\mathcal{A}_2^G \subset \mathcal{E}(G)$.

On note $i\mathfrak{a}_G^*$ le sous-ensemble "imaginaire" évident de $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^*$ et $\mathcal{D}_{G,im}$ la somme directe des $\mathcal{D}_G(\lambda)$ pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_G^*$.

4.3. Soient $P \in \mathcal{P}$ et $f \in \operatorname{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$. Ainsi qu'il résulte des travaux de Langlands, les constructions et résultats de 3.5 restent valables. La fonction $s \mapsto E(f_s)$ est holomorphe en tout $s \in i\mathfrak{a}_M^*$. On pose $E_P^G(f) = E(f_0)$. Cela définit un homomorphisme de $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-modules

$$E_P^G : \operatorname{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M) \longrightarrow \mathcal{A}(G).$$

Soit $P' \in \mathcal{P}$. Posons $\mathcal{W}(M, M') = \{g \in G(\mathbf{Q})\,;\, gMg^{-1} = M'\}$. Le groupe $M(\mathbf{Q})$ agit sur cet ensemble par multiplication à droite. Posons

$$W(M, M') = \mathcal{W}(M, M')/M(\mathbf{Q}).$$

Cet ensemble est fini. On dit que P et P' sont associés s'il est non vide. Supposons qu'il en soit ainsi. Remarquons que tout $w \in W(M, M')$ définit un isomorphisme encore noté w de $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ sur $\mathfrak{a}_{M',\mathbf{C}}^*$. Pour $w \in W(M, M')$, on définit un opérateur d'entrelacement :

$$I(w) : \operatorname{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M) \longrightarrow \operatorname{Ind}_{P'}^G(\mathcal{D}_{M',im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^{M'})$$

de la façon suivante. Fixons un relèvement $\widetilde{w}$ de w dans $\mathcal{W}(M, M')$. Soient $f \in \operatorname{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$ et $s \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$. On définit f_s comme en 3.5. Pour $g \in G(\mathbf{A})$, considérons l'intégrale

$$\int_{[U'(\mathbf{A}) \cap \widetilde{w} U(\mathbf{A}) \widetilde{w}^{-1}] \backslash U'(\mathbf{A})} f_s(\widetilde{w}^{-1} u' g) du'.$$

Comme en 3.5, elle est absolument convergente, pour tout g, si s appartient à un certain cône.

Il existe alors un élément, noté $I(w,s)f$, de $\mathrm{Ind}_{P'}^G(\mathcal{D}_{M',im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^{M'})$ tel que, pour tout $g \in G(\mathbf{A})$, l'intégrale ci-dessus soit égale à $(I(w,s)f)_{ws}(g)$. L'homomorphisme $I(w,s)$ ainsi défini se prolonge sur tout $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ en un homomorphisme méromorphe en s, en un sens convenable. Il est holomorphe en tout $s \in i\mathfrak{a}_M^*$. On pose $I(w) = I(w,0)$. Cet opérateur est un homomorphisme de $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$-modules. C'est en fait un isomorphisme. On a l'égalité

$$E_P^G = E_{P'}^G \circ I(w).$$

Supposons $P = P'$. On note alors simplement $W(M) = W(M,M)$. Cet ensemble est un groupe et l'application $w \mapsto I(w)$ est un homomorphisme de groupes.

4.4. Notons $\mathcal{A}_{\log}(G)$ le sous-espace des $f \in \mathcal{A}(G)$ pour lesquels il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que la condition suivante soit vérifiée :

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} &\forall Y \in \mathcal{U}, \exists c > 0\,, \forall p \in \omega\,, \forall a \in A_0(\mathbf{R}, t_0)\,, \forall k \in K\,, \\ &\qquad\qquad |\delta(Y)f(pak)| \leq c e^{\langle \rho_0, H_0(a)\rangle}(1 + |H_0(a)|)^N, \end{aligned}$$

où $\rho_0 = \rho_{P_0}$.

Remarque.— La justification de cette condition est que, si $A_G = \{1\}$ et $f \in \mathcal{A}(G)$, alors $f \in \mathcal{A}_2^G$ si et seulement si (15) est vérifié pour tout $N \in \mathbf{Z}$.

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{P}/\mathrm{ass}$ des classes d'association dans $\mathcal{P}$.

THÉORÈME (Franke).— i) *Pour tout $P \in \mathcal{P}$, l'image de E_P^G est contenue dans $\mathcal{A}_{\log}(G)$.*

ii) *L'application*

$$\bigoplus E_P^G : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}/\mathrm{ass}} \left[\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)\right]^{W(M)} \longrightarrow \mathcal{A}_{\log}(G)$$

est un isomorphisme.

L'exposant $W(M)$ signifie que l'on a pris les invariants par le groupe $W(M)$ qui agit par opérateurs d'entrelacement.

4.5. Fixons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{m}_0$. Remarquons que $\mathfrak{a}_G \subset \mathfrak{h}$ (et même $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{h}$). De cette inclusion se déduit une composition en somme directe

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^* = a_{G,\mathbf{C}}^* \bigoplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1)_{\mathbf{C}}^*.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$, on note λ_G sa projection sur $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^*$. Notons W le groupe de Weyl de $g_{\mathbf{C}}$ relatif à $h_{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{C}[\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*]^W$ l'espace des polynômes holomorphes invariants par W sur l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$. Harish-Chandra a défini un isomorphisme

$$\xi : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*]^W,$$

cf. [V], th. 0.2.8. Soit Θ un sous-ensemble fini de $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ stable par W. Notons $\mathcal{I}_\Theta$ l'idéal des $z \in \mathcal{Z}$ tels que $\xi(Z)$ s'annule sur Θ. Pour tout $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}}$-module V, on note $\mathcal{F}in_\Theta(V)$ le sous-espace des éléments de V annulés par une puissance de $\mathcal{I}_\Theta$. C'est un sous-$\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}}$-module. Les propriétés ci-dessous sont immédiates :

• posons $\Theta^G = \{\lambda \in \Theta ; \lambda_G = 0\}$; si $A_G(\mathbf{R})^0$ agit trivialement dans V, $\mathcal{F}in_\Theta(V) = \mathcal{F}in_{\Theta^G}(V)$;

• soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^*$; posons $\Theta - \lambda = \{\lambda' - \lambda ; \lambda' \in \Theta\}$; alors

$$\mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{D}_G(\lambda) \bigotimes_{\mathbf{C}} V) = \mathcal{D}_G(\lambda) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}in_{\Theta-\lambda}(V) ;$$

• soient $P \in \mathcal{P}$ et V^M un $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$-module ; alors

$$\mathcal{F}in_\Theta(\mathrm{Ind}_P^G(V^M)) = \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{F}in_\Theta(V^M)),$$

où le $\mathcal{F}in_\Theta$ du membre de droite est l'analogue pour le groupe M de celui que l'on a défini pour G ;

• l'espace $\mathcal{A}(G)$ est somme directe des sous-espaces $\mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{A}(G))$ quand Θ parcourt les orbites des points de $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$.

4.6. Le groupe $W(M_0)$ agit dans $\mathfrak{a}_0^*$. Munissons $\mathfrak{a}_0^*$ d'un produit euclidien invariant par $W(M_0)$. Posons :

$$\mathfrak{c} = \{\nu \in \mathfrak{a}_0^* ; (\alpha, \nu) \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma_0^+\},$$
$$\widetilde{\mathfrak{c}} = \{\nu \in \mathfrak{a}_0^* ; (\nu', \nu) \geq 0 \text{ pour tout } \nu' \in \mathfrak{c}\}.$$

On munit $\mathfrak{a}_0^*$ d'un ordre partiel par $\nu_1 \leq \nu_2 \Longleftrightarrow \nu_2 - \nu_1 \in \widetilde{\mathfrak{c}}$.

Tout $\nu \in \mathfrak{c}$ détermine un élément $P(\nu) \in \mathcal{P}$: pour $\alpha \in \Sigma_0$, le sous-groupe radiciel associé à α est inclus dans $P(\nu)$ si et seulement si $(\alpha, \nu) \geq 0$. On a alors $\nu \in \mathfrak{a}_{M(\nu)}^*$ $(\subset \mathfrak{a}_0^*)$.

Pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_0^*$, il existe un unique point $\nu_{\mathfrak{c}} \in \mathfrak{c}$ dont la distance à ν soit minimale.

4.7. Fixons un sous-ensemble fini Θ de $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$, stable par W. Notons $\Theta_{\mathfrak{c}}$ la réunion, sur les $P \in \mathcal{P}$, des images de Θ par l'application $\lambda \mapsto \mathrm{Re}(\lambda_M)_{\mathfrak{c}}$. On a donc $\Theta_{\mathfrak{c}} \subset \mathfrak{c}$. On définit par récurrence des sous-ensembles $\Theta_{\mathfrak{c}}^p$, de $\Theta_{\mathfrak{c}}$, pour $p \in \mathbf{N}$: $\Theta_{\mathfrak{c}}^p$ est l'ensemble des éléments maximaux de

$$\Theta_{\mathfrak{c}} - \bigcup_{q; 0 \leq q < p} \Theta_{\mathfrak{c}}^q.$$

Évidemment, $\Theta_{\mathfrak{c}}^p = \emptyset$ pour p assez grand.

THÉORÈME (Franke).— *Il existe une filtration décroissante* $(F^p)_{p \in \mathbf{N}}$ *de* $\mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$, *par des sous-*$\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$*-modules, de sorte que :*

- $F^0 = \mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$, $F^p = \{0\}$ *pour tout* p *assez grand :*
- *pour tout* $p \in \mathbf{N}$,

$$F^p/F^{p+1} \simeq \bigoplus_{\nu \in \Theta_{\mathfrak{c}}^p} \mathrm{Ind}_{P(\nu)}^G \left[\mu_{M(\nu)}(\nu) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}in_{\Theta - \nu}(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu))) \right],$$

cf. 4.1 pour la définition de $\mu_{M(\nu)}(\nu)$. Remarquons que les espaces $\mathcal{F}in_{\Theta-\nu}$ $(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu)))$ s'explicitent aisément à l'aide du théorème 4.4 et des propriétés élémentaires énoncées en 4.5.

4.8. Notons Σ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Fixons un sous-ensemble de "racines positives" $\Sigma^+ \subset \Sigma$ tel que, pour $\alpha \in \Sigma^+$, la restriction de α à $\mathfrak{a}_0$ appartienne à $\Sigma_0^+ \cup \{0\}$. On sait que les représentations de $G(\mathbf{C})$, continues, irréductibles et de dimension finie, sont paramétrées par les poids dominants, *i.e.* les $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ tels que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \in \mathbf{N}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$ (où $\check{\alpha}$ est la coracine attachée à α). Pour tout poids dominant λ, notons E_λ^G la restriction à $G(\mathbf{R})$ de la représentation de $G(\mathbf{C})$ paramétrée par λ et μ_λ l'inverse du caractère par lequel $A_G(\mathbf{R})^0$ agit dans E_λ^G. Introduisons les notations suivantes :

- $\rho_{\mathfrak{h}}$ est la demi-somme des éléments de Σ^+ ;
- ℓ est la fonction longueur sur W déterminée par Σ^+ ;
- si $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$, $W(\lambda)$ est la W-orbite de λ ; appliquant les constructions de 4.7 à $\Theta = W(\lambda)$, on définit les ensembles $W(\lambda)_{\mathfrak{c}}$ et $W(\lambda)_{\mathfrak{c}}^p$ pour $p \in \mathbf{N}$;
- si $P \in \mathcal{P}$ et si V est un $M(\mathbf{A}_f)$-module (lisse), $\mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A}_f)}^{G(\mathbf{A}_f)}(V)$ est le $G(\mathbf{A}_f)$-module induit, défini comme en 3.3 en "oubliant" les termes archimédiens.

Fixons un poids dominant λ. Pour $p \in \mathbf{N}$, notons $\mathcal{B}(\lambda, p)$ l'ensemble des couples $(w, P) \in W \times \mathcal{P}$ tels que :

• $-\mathrm{Re}([w(\lambda+\rho_{\mathfrak{h}})]_M) \in W(\lambda+\rho_{\mathfrak{h}})^p_{\mathfrak{c}}$;

• $w^{-1}(\alpha) \in \Sigma^+$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$ dont le sous-groupe radiciel associé soit inclus dans M.

Deux tels couples (w, P) et (w', P') sont dits associés s'il existe $w'' \in W$ tel que $w''Mw''^{-1} = M'$ et $w' = w''w$. Fixons un ensemble de représentants $B(\lambda, p)$ des classes d'association dans $\mathcal{B}(\lambda, p)$.

COROLLAIRE (Franke).— *Soit λ un poids dominant. Il existe une suite spectrale de $G(\mathbf{A}_f)$-modules*

$$E_1^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}\,;\, \mathcal{A}(G, \mu_\lambda) \bigotimes_{\mathbf{C}} E_\lambda^G)$$

telle que

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\substack{(w,P)\in B(\lambda,p)\\ \ell(w)\leq p+q}} \mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A}_f)}^{G(\mathbf{A}_f)}$$
$$\left[H^{p+q-\ell(w)}\left(\mathfrak{m}^1, K_{\mathbf{R}}^M\,;\, \mu_M(-[w(\lambda+\rho_{\mathfrak{h}})]_M) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M \bigotimes_{\mathbf{C}} E^M_{w(\lambda+\rho_{\mathfrak{h}})-\rho_{\mathfrak{h}}+\rho_P}\right)\right].$$

Grâce aux théorèmes 4.4 et 4.7, il s'agit simplement de la suite spectrale d'hypercohomologie associée à un complexe filtré.

5. COMPLÉMENTS

5.1. Sous les hypothèses de 2.4, si E est de la forme E_λ, on peut calculer, pour $f \in \mathcal{H}_H$, la somme alternée des traces des actions de f sur les espaces $H^n(G(\mathbf{Q})\backslash X_H, \mathcal{E})$. Ceci, grâce au corollaire 4.8 et au résultat de Arthur [A2]. On obtient une formule en termes d'intégrales orbitales de f qui avait déjà été obtenue par Goresky et Mac Pherson ([FMP]) par une toute autre méthode.

5.2. Pour $P \in \mathcal{P}$, on définit le sous-espace $\mathcal{A}_P(G)$ de $\mathcal{A}(G)$: c'est l'espace engendré par les fonctions (14) quand on fixe P et que l'on fait varier f, s_0, p et ∂. Si P et P' sont associés, $\mathcal{A}_P(G) = \mathcal{A}_{P'}(G)$. On a l'égalité

$$\mathcal{A}(G) = \bigoplus_{P\in\mathcal{P}/\mathrm{ass}} \mathcal{A}_P(G).$$

Il en résulte des décompositions analogues des espaces de cohomologie étudiés ci-dessus. Elles sont reliées à l'application "restriction au bord", *cf.* [FS]. Remarquons que $\mathcal{A}_G(G)$ n'est autre que $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(G)$.

6. QUELQUES IDÉES SUR LES PREUVES

On suppose pour simplifier que $A_G = \{1\}$. On munira différents ensembles de mesures que nous ne définirons pas. Il faudrait les normaliser de façon convenable.

6.1. Notons :

• $L_2(G)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$;

• $\mathcal{S}_{\log}(G)$ l'espace des $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$ vérifiant la condition (15) pour au moins un $N \in \mathbf{N}$;

• $\mathcal{S}_{-\log}(G)$ l'espace des $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$ vérifiant la condition (15) pour tout $N \in \mathbf{Z}$.

On a les inclusions

$$\mathcal{S}_{-\log}(G) \subset L_2(G)\,,\ \mathcal{S}_{-\log}(G) \subset \mathcal{S}_{\log}(G).$$

L'espace $\mathcal{S}_{\log}(G)$ est inclus dans le dual de $\mathcal{S}_{-\log}(G)$: si $f \in \mathcal{S}_{\log}(G)$, et $f' \in \mathcal{S}_{-\log}(G)$, le produit ff' est absolument intégrable.

6.2. Le point de départ est la description de $L_2(G)$. Soit $P \in \mathcal{P}$. Notons $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$ l'espace des fonctions sur $i\mathfrak{a}_M^*$, à valeurs complexes, qui sont C^∞ et à support compact. Le groupe $M(\mathbf{A})$ agit sur $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$ par l'action θ définie ainsi :

$$(\theta(m)\varphi)(\lambda) = e^{\langle\lambda, H_M(m)\rangle}\,\varphi(\lambda)$$

pour tous $m \in M(\mathbf{A})$, $\varphi \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$. On en déduit une action de $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times G(\mathbf{A}_f)$. Posons :

$$V_P = \operatorname{Ind}_P^G(C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M).$$

On peut considérer un élément de ce module comme une fonction f sur $i\mathfrak{a}_M^*$ telle que $f(\lambda) \in \operatorname{Ind}_P^G(\mu_M(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$ pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$.

Soit $f \in V_P$. On définit une fonction $E_P^G(f)$ sur $G(\mathbf{A})$ par :

$$E_P^G(f)(g) = \int_{i\mathfrak{a}_M^*} E_P^G(f(\lambda))(g)\,d\lambda$$

pour tout $g \in G(\mathbf{A})$. On montre que $E_P^G(f) \in \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)$.

Pour $P' \in \mathcal{P}$ et $w \in W(M, M')$, on définit encore un opérateur d'entrelacement $I(w) : V_P \to V_{P'}$. C'est un isomorphisme et on a l'égalité $E_{P'}^G \circ I(w) = E_P^G$.

Munissons V_P du produit hilbertien défini par :

$$(f, f') = \int_{i\mathfrak{a}_M^*} \int_{A_M(\mathbf{R})^0 M(\mathbf{Q}) U(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} \overline{f(\lambda)(g)}\, f'(\lambda)(g)\, dg\, d\lambda.$$

On sait bien que, si $U \neq \{1\}$, il n'existe pas de mesure invariante à droite sur $A_M(\mathbf{R})^0 M(\mathbf{Q}) U(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$. Par contre, on peut définir la notion d'intégrale d'une fonction $\varphi : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ telle que :

$$\varphi(amug) = e^{2\langle \rho_P, H_M(a) \rangle}\, \varphi(g)$$

pour tous $a \in A_M(\mathbf{R})^0$, $m \in M(\mathbf{Q})$, $u \in U(\mathbf{A})$, $g \in G(\mathbf{A})$. C'est le sens de l'intégrale intérieure ci-dessus.

Notons L_P le complété de V_P pour ce produit. Les applications E_P^G ou $I(w)$ se prolongent à L_P.

THÉORÈME (Langlands).— i) *Pour tout $P \in \mathcal{P}$, la restriction de E_P^G au sous-espace des invariants $L_P^{W(M)}$ est une similitude de cet espace sur un sous-espace fermé de $L_2(G)$.*

ii) $L_2(G) = \oplus_{P \in \mathcal{P}/\mathrm{Ass}} E_P^G(L_P^{W(M)})$.

6.3. L'élément de Casimir $\Delta \in \mathcal{Z}$ définit un opérateur auto-adjoint de $L_2(G)$, donc une décomposition spectrale de $L_2(G)$: tout $f \in L_2(G)$ s'écrit :

$$f = \text{“}\int_{\mathbf{R}} f_r\, d\mu(r)\text{”}.$$

On note $L_{2,b}(G)$ l'espace des $f \in L_2(G)$ tels que $f_r = 0$ pour $|r|$ assez grand. On pose $\mathcal{S}_{-\log,b}(G) = \mathcal{S}_{-\log}(G) \cap L_{2,b}(G)$. Par un argument de dualité, on définit aussi le sous-espace $\mathcal{S}_{\log,b}(G)$ de $\mathcal{S}_{\log}(G)$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, notons $\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*)$ l'espace des distributions sur $i\mathfrak{a}_M^*$, à support compact. On montre que l'on peut étendre les définitions de 6.2 en remplaçant $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$ par $\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*)$. Posons :

$$V'_P = \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M).$$

THÉORÈME (Franke).— *On a les égalités :*

$$\mathcal{S}_{\log,b}(G) = \bigoplus_{P\in\mathcal{P}/\mathrm{ass}} E_P^G({V'_P}^{W(M)}),$$

$$\mathcal{S}_{-\log,b}(G) = \bigoplus_{P\in\mathcal{P}/\mathrm{ass}} E_P^G(V_P^{W(M)}).$$

On ne se risquera pas dans la démonstration très délicate de ce théorème. Disons simplement que l'on commence par démontrer la seconde égalité, en utilisant le théorème 6.2, et que l'on obtient la première par un argument de dualité.

6.4. Soit Θ un sous-ensemble fini de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$, stable par W. Il est clair que $\mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{A}_{\log}(G)) = \mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{S}_{\log,b}(G))$. Ce dernier se calcule grâce au théorème précédent et aux propriétés énoncées en 4.5. En faisant varier Θ, on obtient le théorème 4.4.

Soient $f \in \mathcal{A}(G)$ et $P \in \mathcal{P}$. On a défini en 3.4 le terme constant f_P. Notons $\mathrm{Exp}_P(f)$ le plus petit sous-ensemble de $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$ tel que :

$$f_P \in \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Exp}_P(f)} \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{D}_M(\lambda) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}^M).$$

Si $f \in \mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{A}(G))$, alors $\mathrm{Re}(\lambda)_{\mathfrak{c}} \in \Theta_{\mathfrak{c}}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Exp}_P(f)$. On définit F_P comme le sous-espace des $f \in \mathcal{F}in_\Theta(\mathcal{A}(G))$ tels que, pour tous $P \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathrm{Exp}_P(f)$, $\mathrm{Re}(\lambda)_{\mathfrak{c}} \in \cup_{q\geq p}\Theta^q_{\mathfrak{c}}$. En associant à tout élément de F^p une combinaison linéaire convenable de composantes de ses termes constants, on définit une application :

$$F^p/F^{p+1} \longrightarrow \bigoplus_{\nu\in\Theta^p_{\mathfrak{c}}} \mathrm{Ind}_{P(\nu)}^G\left[\mu_{M(\nu)}(\nu) \bigotimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}in_{\Theta-\nu}(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu)))\right].$$

On construit une application réciproque à l'aide des dérivées convenables de séries d'Eisenstein. On obtient ainsi le théorème 4.7 ainsi que le théorème 3.5, en se rappelant l'inclusion $\mathcal{A}_2^G \subset \mathcal{E}(G)$ prouvée par Langlands.

6.5. Soient E comme en 2.2 et Θ un sous-ensemble fini de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$, invariant par W, tel que $\mathcal{I}_\Theta$ (*cf.* 4.5) annule la contragrédiente $\check{E}$. Notons $\mathcal{F}in^i_\Theta$ les foncteurs dérivés du foncteur $\mathcal{F}in_\Theta$, dans la catégorie des $\mathfrak{g}\times K_{\mathbf{R}}$-modules. Pour tout $\mathfrak{g}\times K_{\mathbf{R}}$-module V, on a l'égalité :

$$H^0(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}\,;\, V \bigotimes_{\mathbf{C}} E) = H^0(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}\,;\, \mathcal{F}in^0_\Theta(V) \bigotimes_{\mathbf{C}} E).$$

On en déduit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}\,;\, \mathcal{F}in^j_\Theta(V) \bigotimes_{\mathbf{C}} E) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}\,;\, V \bigotimes_{\mathbf{C}} E).$$

Comme $\mathcal{F}in^0_\Theta(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)) = \mathcal{F}in^0_\Theta(\mathcal{A}(G))$, le théorème 2.2 résulte de l'assertion :

$$\mathcal{F}in^j_\Theta(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0. \tag{16}$$

Grâce au théorème 6.3 et à la semi-simplicité des modules $\mathcal{A}_2^M$, on démontre aisément que $\mathcal{F}in^j_\Theta(\mathcal{S}_{\log,b}(G)) = 0$ pour tout $j > 0$. Par un raisonnement plus délicat qu'on ne le croirait, on étend ce résultat à l'espace $\mathcal{S}_{\log}(G)$.

La preuve de (16) se fait par récurrence sur le rang semi-simple de G. Soit $P \in \mathcal{P}$. Pour $T \in \mathbf{R}$, notons $A_0(\mathbf{R}, t_0, P, T)$ l'ensemble des $a \in A_0(\mathbf{R}, t_0)$ tels que $\langle \alpha, H_0(a)\rangle > T$ pour tout $\alpha \in \Sigma_0^+$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_M$ est non nulle. Considérons l'espace $\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(M))$. Pour f et f' dans cet espace, disons que f est équivalent à f' s'il existe T tel que $f(pak) = f'(pak)$ pour tous $p \in \omega$, $a \in A_0(\mathbf{R}, t_0, P, T)$, $k \in K$. Notons $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]$ l'espace des classes d'équivalence. On définit de façon un peu plus compliquée un sous-espace $\mathcal{S}_{\log}[P] \subset \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]$.

Si $P' \in \mathcal{P}$ et $P' \subset P$, on définit une application "terme constant" :

$$\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(M)) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{P'}^G(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(M'))$$

en généralisant la définition 3.4. Cette application passe aux quotients et définit une application :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P] \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P']/\mathcal{S}_{\log}[P'].$$

On définit alors la limite projective sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques propres :

$$\varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}} \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P].$$

Maintenant, l'application qui à $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)$ associe, pour tout $P \in \mathcal{P}-\{G\}$, l'image naturelle de f_P dans $\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P]$, définit une application :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}(G)/\mathcal{S}_{\log}(G) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}} \mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P].$$

On montre que c'est un isomorphisme. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on prouve que :

$$\mathcal{F}in^j_\Theta(\mathcal{S}_{\mathrm{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P]) = 0$$

pour tous $j > 0$, $P \in \mathcal{P} - \{G\}$. La dernière étape consiste à faire commuter les foncteurs $\varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}}$ et $\mathcal{F}in^j_\Theta$. Cela nécessite d'utiliser sur les espaces $\mathcal{F}in^0_\Theta$ $(\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P])$ une filtration analogue à celle de 6.4. On obtient alors :

$$\mathcal{F}in^j_\Theta(\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)/\mathcal{S}_{\log}(G)) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0.$$

Joint au résultat concernant $\mathcal{S}_{\log}(G)$, cela démontre (16) et achève la preuve de la conjecture de Borel.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] J. ARTHUR - *Unipotent automorphic representations : global motivation*, in Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, Clozel et Milne éd., Perspectives in Math. vol. 10 Academic Press, 1990.

[A2] J. ARTHUR - *The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1981), 257-290.

[B] A. BOREL - *Regularization theorems in Lie algebra cohomology. Applications*, Duke Math. J. **50** (1983), 605-623.

[F] J. FRANKE - *Harmonic analysis in weighted L_2-spaces*, prépublication.

[FS] J. FRANKE, J. SCHWERMER - *A decomposition of spaces of automorphic forms, and some rationality properties of automorphic cohomology classes for* GL_n, prépublication.

[GMP] M. GORESKY, R. MAC PHERSON - *Local contribution to the Lefschetz fixed point formula*, Invent. Math. **111** (1993), 1-33.

[L] R.P. LANGLANDS - *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Springer, Lect. Notes in Math. **544**, 1976.

[V] D. VOGAN - *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Math. **15**, Birkhäuser, 1981.

Jean-Loup WALDSPURGER
Université de Paris VII
U.F.R. de Mathématiques
URA 748 du CNRS
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05