CHRISTOPH SORGER

La formule de Verlinde

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. nº 794, p. 87-114
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__87_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 794

Novembre 1994

LA FORMULE DE VERLINDE

par **Christoph SORGER**

INTRODUCTION

En physique mathématique, une *théorie conforme rationnelle des champs* associe à chaque surface de Riemann compacte avec points marqués, étiquetés par les éléments d'un ensemble fini Λ, un espace vectoriel de dimension finie, appelé *espace des blocs conformes*. Ces espaces satisfont à certaines règles, dont la *règle de factorisation*, qui décrit ce qu'il advient de l'espace des blocs conformes lorsqu'on fait dégénérer la surface de Riemann. A une telle donnée, Verlinde associe un anneau, *l'anneau de fusion*, qui résume de manière concise les informations données par la règle de factorisation. La conjecture de Verlinde ([32], *cf.* (1.3.8)) propose une description explicite des caractères de cet anneau. Il en résulte une formule explicite pour la dimension des espaces des blocs conformes, appelée formule de Verlinde.

Certaines de ces théories conformes rationnelles, les modèles "WZW", c'est-à-dire de Wess, Zumino et Witten, associées à un groupe algébrique semi-simple et simplement connexe G et un entier $\ell \geq 0$ (on prend alors pour Λ l'ensemble des représentation simple de dimension finie de G de niveau $\leq \ell$) sont particulièrement intéressant pour les géomètres algébristes. En effet, il a été conjecturé que les les espaces des blocs conformes de ces théories s'identifierait aux espaces des sections globales de la ℓ-ème puissance tensorielle d'un fibré naturel sur l'espace des modules des G-fibrés principaux semi-stables avec structure parabolique aux points marqués. Si l'ensemble des points marqués Σ est vide, ces sections sont généralement appelées G*-fonctions thêta généralisées de niveau* ℓ, car on peut les voir comme analogues non-abéliennes des fonctions thêta classiques.

Il y a quelques années, la dimension des espaces des G-fonctions thêta généralisées n'était connue que dans le cas $G = SL_r(\mathbb{C})$ et $\ell = 1$, par une formule due à Beauville, Narasimhan et Ramanan [3]. Depuis que l'on disposait d'une formule conjecturale pour la dimension de ces espaces, on a pu établir cette formule par différentes méthodes de géométrie algébrique dans de nouveaux cas. Pour $G = SL_2(\mathbb{C})$ et ℓ quelconque, elle a été démontrée par Szenes [26], Bertram et Szenes [6], Bertram [5] (pour Σ quelconque), Thaddeus [28], Narasimhan et Ramadas [20] et [24], Donaldson [10], Daskalopoulos et

Wentworth [7] et [8] et Zagier [33]. Mais leurs méthodes ne s'adaptent déjà pas au cas $SL_r(\mathbb{C})$, pour $r > 2$.

Pour traiter le cas général, on revient actuellement aux théories conformes dans le cadre des modèles WZW. Tsuchiya, Ueno et Yamada [30] ont donné une formulation mathématique de ces théories en utilisant la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody affines. Les espaces des blocs conformes qu'ils définissent et qu'ils appellent espaces des vacua, satisfont aux règles des théories conformes rationnelles des champs et en particulier aux règles de factorisation. Faltings [13] (*cf.* aussi Beauville [1]) a ensuite donné une description des caractères des anneaux de fusion associés. Cette description, valable au moins dans le cas des groupes classiques et de G_2, n'utilise pas la conjecture de Verlinde proprement dite; mais elle montre que la dimension de l'espace des vacua est donnée par la formule de Verlinde. Le calcul de la dimension des espaces des G-fonctions thêta généralisées se ramène ainsi pour G semi-simple et simplement connexe à prouver qu'ils s'identifient effectivement aux espaces des vacua de [30]. Cette identification a été établie par Beauville et Laszlo [2] dans le cas de $SL_r(\mathbb{C})$, puis étendue au cas de $SL_r(\mathbb{C})$ et Σ quelconque par Pauly [23]. Dans le cas d'un groupe G quelconque, $\Sigma = \emptyset$, elle est traitée par Kumar, Narasimhan et Ramanathan [18] et par Faltings [13] (qui démontre aussi de façon indépendante les règles de factorisation) mais les arguments donnés sont parfois difficiles à suivre [1]. Un point essentiel pour l'obtenir est l'analogue du théorème de Borel-Weil-Bott pour les algèbres de Kac-Moody de Kumar [17] et Mathieu [19].

Si G n'est pas semi-simple, on peut quand même calculer les dimensions des espaces des G-fonctions thêta: si R est un groupe réductif et G sa partie semi-simple, les dimensions des espaces des R-fonctions thêta sont liées à celles des G-fonctions thêta par une formule simple, ce qui permet de les déduire les unes des autres (Donagi et Tu [9] et Panteev [22]). Il en va autrement concernant l'hypothèse de la simple connexité : on n'a pas encore de formule comparant les dimensions des espaces des G-fonctions thêta à celles des G/K-fonctions thêta pour K un sous-groupe du centre de G.

Comme il existe beaucoup de démonstrations, surtout pour $SL_2(\mathbb{C})$, j'ai dû faire un choix dans ce rapport. J'ai suivi Tsuchiya, Ueno et Yamada pour la formulation mathématique des théories conformes de champs dans le cadre des modèles WZW (paragraphe 2). Pour l'identification des espaces des vacua aux fonctions thêta généralisées (relativement délicate du fait que l'on doit considérer des objets géométriques de dimension infinie), je m'en suis tenu au cas de $SL_r(\mathbb{C})$, et j'ai suivi Beauville et Laszlo [2] (paragraphe 3). Le paragraphe 4 est consacré à la description des caractères de l'anneau de fusion et à la formule de Verlinde explicite, d'après Faltings [13].

[1] Depuis l'exposé, Laszlo et le rapporteur (e-print alg-geom/9507002) ont donné une démonstration indépendante, dans l'esprit de [2], du cas général (*i.e.* G et Σ quelconque) et ont calculé aussi le groupe de Picard du champ des G-fibrés paraboliques.

Conventions:

Par *courbe n-pointée*, on entend ici une courbe algébrique C sur $\mathbb{C}$, complète, réduite et connexe, ayant au plus des points doubles ordinaires comme singularités, munie d'une suite de points distincts $\underline{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathrm{C}^n_{lisse}$. Un *morphisme des courbes n-pointées* f : $(\mathrm{C}, \underline{p}) \longrightarrow (\mathrm{C}', \underline{p}')$ est la donnée d'un morphisme de courbes algébriques $f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}'$ tel que $f(p_i) = p'_i$. Si toute composante irréductible de C contient (au moins) un des points p_i, on dira que la courbe pointée satisfait à la condition $(\star)$. Cette hypothèse signifie que le complémentaire des points marqués est affine. On note g le genre arithmétique de C.

J'aimerais remercier les membres du groupe de travail sur le sujet, que j'ai organisé conjointement avec A. Bruguières, F. Ducrot et G. Maltsiniotis à l'Université Denis Diderot (Paris 7). Je remercie aussi O. Mathieu pour les discussions qui ont conduit aux démonstrations des propositions (2.3.2) et (2.5.1).

1. THÉORIES CONFORMES ET CONJECTURE DE VERLINDE

1.1. Théories conformes

(1.1.1) J'aimerais tout d'abord, à titre de motivation pour les constructions ultérieures, donner un aperçu de ce que l'on entend par "théorie conforme rationnelle des champs" en physique mathématique. Je me contenterai ici de mentionner quelques propriétés des objets mathématiques issues de ces théories. Ce paragraphe sera un peu vague; pour une discussion détaillée des théories conformes, surtout en ce qui concerne les fonctions de corrélations qui servent de point de départ aux physiciens, voir l'exposé de Gawedzki "On conformal field theory" dans ce séminaire (n° 704) et dans la littérature donnée dans cet exposé.

(1.1.2) On se donne un ensemble fini d'étiquettes Λ, muni d'une involution $\lambda \mapsto \lambda^*$, et d'une étiquette λ_0 fixée par l'involution $*$. Physiquement, Λ décrit les états de certaines particules, λ_0 correspond à l'état sans particule, et λ^* à l'état opposé de l'état λ. Une théorie rationnelle conforme de champs associe à toute courbe pointée $(\mathrm{C}, p_1, ..., p_n)$ munie de coordonnées $z_1, ..., z_n$ aux points marqués et étiquetée par $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ aux points marqués, un espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{V_C}(\underline{p}; \underline{z}; \underline{\lambda})$ de manière à ce qu'un certain nombre de conditions soient satisfaites. Une des conditions que l'on impose est celle d'invariance conforme, qui peut s'exprimer de la manière suivante. Soit z une coordonnée complexe. Une transformation conforme infinitésimale est donnée par $z \mapsto z + \epsilon f(z)$ où ϵ est vu dans $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ et où $f(z)\frac{d}{dz}$ est un champ de vecteurs holomorphe local. Les champs de vecteurs particuliers $\mathrm{L}_n = z^{n+1}\frac{d}{dz}$, avec $n \geq -1$ satisfont à la règle de commutation $[\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_m] = (m-n)\mathrm{L}_{n+m}$ et engendrent une algèbre de Lie de dimension infinie contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}\mathrm{L}_{-1} \oplus \mathbb{C}\mathrm{L}_0 \oplus \mathbb{C}\mathrm{L}_1$

des transformations conformes de $\mathbb{P}_1$. La condition de l'invariance conforme signifie en particulier que les espaces $V_C(\underline{p};\underline{z};\underline{\lambda})$ sont invariants sous de telles transformations, *i.e.* ne dépendent pas du choix des coordonnées z_i: on les note $V_C(\underline{p};\underline{\lambda})$.

Mais elle signifie bien plus: les physiciens imposent que la théorie soit aussi invariante sous toutes les transformations infinitésimales $z \mapsto z + \epsilon f(z)$ où $f(z)\frac{d}{dz}$ est seulement *méromorphe.* L'algèbre de Lie doit donc être agrandie en ajoutant les puissances négatives et, pour des raisons de normalisation, on doit considérer une extension centrale, *l'algèbre de Virasoro*, dont le crochet est défini par

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_\nu}{12}(n^3 - n)\delta_{n,m},$$

où c_ν est la *charge centrale.* De telles transformations correspondent à des déformations infinitésimales de la courbe pointée respectant les singularités (*cf.* (2.7.7)): l'invariance conforme entraîne alors que les $V_C(\underline{p},\underline{\lambda})$ s'organisent en des fibrés vectoriels $V_g(\underline{\lambda})$ sur les espaces de modules des courbes n-pointées lisses de genre g, et que ces fibrés sont munis d'une connexion (qui ne sera que projective pour $g \geq 2$) plate.

D'autre part, les espaces associés à une courbe singulière C doivent se déduire de ceux associés à sa désingularisation $\widetilde{C}$. En termes de propagation de particules, la liaison interrompue par l'éclatement du point singulier $c \in C$ doit être rétablie en étiquetant les points a et b de $\widetilde{C}$, au-dessus de c par ν et ν^* et ceci pour tout $\nu \in \Lambda$, *i.e.* on impose la *règle de factorisation*

$$V_C(\underline{p};\underline{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\nu\in\Lambda} V_{\widetilde{C}}(\underline{p},a,b;\underline{\lambda},\nu,\nu^*).$$

De plus, on impose que *l'état sans particule se propage*, *i.e.* $V_C(\underline{p},\underline{\lambda}) \simeq V_C(\underline{p},q,\underline{\lambda},\lambda_0)$, et que l'on a *invariance sous* *, *i.e.* $V_C(\underline{p},\underline{\lambda}) \simeq V_C(\underline{p},\underline{\lambda}^*)$. On *normalise* la théorie en imposant $V_{\mathbb{P}_1}(\emptyset;\emptyset) = \mathbb{C}$.

(1.1.3) Considérons par exemple le cas $g = 1$ et $n = 0$. Soit $[E] \in \mathcal{M}_1$ une courbe elliptique. La connexion plate sur $V_1(\emptyset)$ définit une action du groupe de difféotopie $SL_2(\mathbb{Z}) = \pi_1(\mathfrak{M}_1)$ sur $V_E(\emptyset;\emptyset)$. La règle de factorisation fournit, en dégénérant à la courbe singulière, l'isomorphisme $V_E(\emptyset;\emptyset) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\Lambda$; d'où une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^\Lambda$.

1.2. Les champs de modules de courbes stables

(1.2.1) Rappelons qu'une courbe pointée $(C, p_1, ..., p_n)$ est dite *stable* si son groupe d'automorphismes est fini. Cela équivaut à demander que $2g - 2 + n > 0$ et que toute composante de C isomorphe à $\mathbb{P}_1$ contienne au moins 3 points *spéciaux* (les points spéciaux sont les points marqués et les points communs à deux composantes). Par *famille de courbes n-pointées stables* on entend la donnée d'un morphisme $\pi : C \longrightarrow S$, propre de dimension relative 1, muni de n sections $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de sorte que les fibres C_s munies des points $\sigma_1(s), ..., \sigma_n(s)$ soient des courbes n-pointées stables.

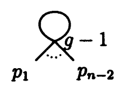
(1.2.2) On note $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ le champ algébrique de modules des courbes n-pointées stables de genre g, $\mathfrak{M}_{g,n}$ l'ouvert correspondant aux courbes lisses. Le champ $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ est projectif, lisse et connexe sur $\mathbb{C}$. Le bord $\Delta_{g,n} = \overline{\mathfrak{M}}_{g,n} \backslash \mathfrak{M}_{g,n}$ est un diviseur à croisements normaux. Pour décrire $\Delta_{g,n}$, il est commode d'associer à une courbe stable pointée $(\mathrm{C}, p_1, ..., p_n)$ son *graphe d'intersection* Γ. Ce graphe a deux types de sommets: les sommets *externes*, qui sont les points marqués numérotés de 1 à n, et les sommets *internes*, qui sont les composantes irréductibles étiquetées par leur genre géométrique g_s. De chaque sommet externe i part une unique arête qui aboutit au sommet interne C_j contenant p_i. Les arêtes entre C_i et C_j sont, pour $i \neq j$, les points d'intersection des deux composantes; enfin, les arêtes liant C_i à C_i sont les points singuliers de C_i. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sommets internes. Si $k \in \mathcal{I}$, on note e_k le cardinal de l'ensemble E_k des arêtes partant de k et reliées à un sommet externe, et v_k le cardinal de l'ensemble V_k des demi-arêtes partant de k reliées à un sommet interne. On vérifie aisément que

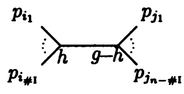
$$g = g(\Gamma) + \sum_{k \in \mathcal{I}} g_k \ , \ n = \sum_{k \in \mathcal{I}} e_k$$

et que la stabilité se traduit par la connexité du graphe et la condition $2g_k - 2 + e_k + v_k > 0$ pour tout $k \in \mathcal{I}$. Réciproquement, chaque graphe Γ satisfaisant à ces conditions est le graphe d'intersection d'une courbe stable n-pointée de genre g. Soit Γ un tel graphe, et choisissons une bijection $\varphi_k : \{1, ..., v_k, v_k + 1, ..., v_k + e_k\} \longrightarrow \mathrm{V}_k \coprod \mathrm{E}_k$ pour chaque $k \in \mathcal{I}$. Alors à tout élément $(\mathrm{C}_k)_{k \in \mathcal{I}} \in \prod_{k \in \mathcal{I}} \overline{\mathfrak{M}}_{g_k, v_k + e_k}$ on associe une courbe n-pointée comme suit. Dans $\coprod \mathrm{C}_k$, on numérote le i-ème point de C_k comme l'arête $\varphi_k(i)$ de Γ si $\varphi_k(i) \in \mathrm{E}_k$; et l'on identifie le i-ème point marqué de C_r au j-ème point marqué de C_t si $\varphi_r(i)$ et $\varphi_t(j)$ sont les deux moitiés de la même arête de Γ. On obtient ainsi un morphisme de champs algébriques

$$\prod_{k \in \mathcal{I}} \overline{\mathfrak{M}}_{g_k, v_k + e_k} \longrightarrow \overline{\mathfrak{M}}_{g,n}.$$

Ce morphisme dépend de la façon dont on a ordonné les V_k, mais son image n'en dépend pas. On le note $\overline{\varphi}_\Gamma$. Le bord $\Delta_{g,n}$ est réunion des images des $\overline{\varphi}_\Gamma$, où Γ parcourt les graphes

Γ_{irr} : 

$\Gamma_{h,\mathrm{I}}$: 

avec $\mathrm{I} = \{i_1, ..., i_{\#\mathrm{I}}\}$, $\mathrm{J} = \{j_1, ..., j_{\#\mathrm{J}}\}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \{1, ..., n\}, \mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$.

1.3. La formule de Verlinde, première approche

La première étape (*cf.* Beauville [1] et Szenes [27]) vers la formule de Verlinde consiste à dériver, à partir de la donnée combinatoire (V1) – (V4′) ci-dessous, une formule qui sera rendu explicite au paragraphe 4.

(1.3.1) Soit Λ un ensemble fini muni d'une involution * et d'un élément $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\lambda_0^* = \lambda_0$. Supposons donné, pour tout $(g,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n > 2-2g$ et tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^n$ un entier naturel $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda})$ de sorte que

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{V1}): & \mathrm{N}_0(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0) = 1 & \text{(normalisation)}\\
(\mathrm{V2}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \mathrm{N}_g(\underline{\lambda},\lambda_0) & \text{(propagation)}\\
(\mathrm{V3}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}^*) & \text{(invariance sous *)}\\
(\mathrm{V4}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \displaystyle\sum_{\mu\in\Lambda} \mathrm{N}_{g-1}(\underline{\lambda},\mu,\mu^*)\,;\ g>0 & \text{(factorisation suivant } \Gamma_{irr})\\
(\mathrm{V4}'): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \displaystyle\sum_{\mu\in\Lambda} \mathrm{N}_h(\underline{\lambda}_{\mathrm{I}},\mu)\mathrm{N}_{g-h}(\underline{\lambda}_{\mathrm{J}},\mu^*)\,;\ 0\le h\le g & \text{(factorisation suivant } \Gamma_{h,\mathrm{I}})
\end{array}
$$

où dans (V4′) on suppose $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \{1,...,n\}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$, $\#\mathrm{I} \geq 2$ si $h=0$ et $\#\mathrm{J} \geq 2$ si $h = g$, et pour $\mathrm{K} = \{k_1 < \cdots < k_p\} \subset \{1,\ldots n\}$, on pose $\underline{\lambda}_{\mathrm{K}} = (\lambda_{k_1},...,\lambda_{k_p})$.

Au paragraphe 2, nous construirons sur $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ un fibré vectoriel $\mathrm{V}_g(\underline{\lambda})$ de sorte que $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \operatorname{rang} \mathrm{V}_g(\underline{\lambda})$ satisfasse à ces conditions.

(1.3.2) Les axiomes (V2) et (V4′) entraînent que $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda})$ est invariant sous permutation des λ_i. Conjointement avec (V2), cela permet de définir N_g comme une application $\mathrm{N}_g : \mathbb{N}^{(\Lambda)} \longrightarrow \mathbb{Z}$, où $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ désigne le monoïde libre engendré par Λ.

Les axiomes impliquent notamment que $\mathrm{N}_0(\nu) = 0$ pour $\nu \in \Lambda - \{\lambda_0\}$. En effet, on a $1 = \mathrm{N}_0(0) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\nu)\mathrm{N}_0(\nu^*) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\nu)^2$. De plus, on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\nu) = 0$ si $\nu \neq \lambda$ et $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 0$ ou 1. En effet, par (V4′) on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\lambda+\nu)^2 \geq \mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*)^2$. Lorsque $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 0$, on a $\mathrm{N}_g(\lambda + x) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$.

On supposera désormais que l'on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans la théorie conforme du paragraphe 2, cette condition sera satisfaite.

(1.3.3) Considérons le $\mathbb{Z}$-module libre R engendré par Λ, qu'on munit de l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $m : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ définie par extension bilinéaire à partir de

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\nu}\nu$$

où, par définition, $\mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\nu} = \mathrm{N}_0(\lambda+\mu+\nu^*)$.

(1.3.4) Lemme. — *Le $\mathbb{Z}$-module* R *muni de la multiplication définie par m est un anneau commutatif, d'élément neutre λ_0. On l'appelle* l'anneau de fusion.

Démonstration. La commutativité de la multiplication est évidente, l'associativité est une conséquence de la règle de factorisation. En effet,

$$(\lambda\cdot\mu)\cdot\nu = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\alpha}\mathrm{N}_{\alpha\nu}^{\beta}\beta = \sum_{\beta} \mathrm{N}_0(\lambda+\mu+\nu+\beta^*)\beta = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{N}_{\mu\nu}^{\alpha}\mathrm{N}_{\alpha\lambda}^{\beta}\beta = \lambda\cdot(\mu\cdot\nu).$$

En outre, $\lambda_0 \cdot \lambda = \sum_\nu \mathrm{N}^\nu_{\lambda_0\lambda}\nu = \sum_\nu \mathrm{N}_0(\lambda+\nu)\nu = \lambda$.

(1.3.5) L'anneau R est muni d'une forme linéaire naturelle $t : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $t(\lambda) = \delta_{\lambda,\lambda_0}$. Cette forme satisfait à $t(\prod \lambda^{n_\lambda}) = \mathrm{N}_0(\sum n_\lambda \lambda)$ pour $\sum n_\lambda \lambda \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ et à $t(\lambda\mu^*) = \delta_{\lambda\mu}$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda$. Par les règles de factorisation, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) &= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_g\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \nu_1 + \nu_1^* + \ldots + \nu_g + \nu_g^*) \\
&= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_g\in\Lambda} t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \nu_1 \cdot \nu_1^* \cdots \nu_g \cdot \nu_g^*) \\
&= t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^g)
\end{aligned}$$

où ω désigne le *Casimir* $\sum_{\nu\in\Lambda} \nu\nu^*$. Si l'on identifie R à $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{R},\mathbb{Z})$ via la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto t(xy)$, l'image de ω n'est autre que la forme linéaire $\mathrm{Tr} : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie en associant à $x \in \mathrm{R}$ la trace de l'endomorphisme m_x de R donné par la multiplication par x. En particulier, $\mathrm{Tr}(x) = t(\omega x)$ pour $x \in \Lambda$. Par conséquent, on a $\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^{g-1})$.

(1.3.6) Considérée dans la base Λ, la multiplication m_λ, avec $\lambda \in \Lambda$, est donnée par la matrice $\mathrm{N}_\lambda = (\mathrm{N}^\nu_{\lambda\mu})_{(\mu,\nu)\in\Lambda\times\Lambda}$. Pour calculer $\mathrm{Tr}(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^{g-1})$, on cherche, selon Verlinde, à "diagonaliser les règles de fusion", *i.e.* on cherche une matrice S telle que $\mathrm{N}_\lambda = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{D}_\lambda \mathrm{S}$, avec D_λ diagonale, pour $\lambda \in \Lambda$. Considérons pour cela le spectre Σ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{R}_\mathbb{C} = \mathrm{R} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$: c'est l'ensemble des caractères (*i.e.* morphismes d'algèbres) de R dans $\mathbb{C}$. De l'existence de la forme linéaire t et de l'involution * résulte le lemme suivant.

(1.3.7) Lemme. — *([1], cor. 6.2) Le morphisme* $\mathrm{R}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\Sigma$ *qui associe à* x *l'élément* $(\chi(x))_{\chi\in\Sigma}$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-algèbres. De plus* $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$ *pour* $\chi \in \Sigma$ *et* $x \in \mathrm{R}$.

Dans la base canonique de $\mathbb{C}^\Sigma$, la multiplication m_x est donnée par la matrice diagonale ayant $\chi(x)_{\chi\in\Sigma}$ comme coefficients, autrement dit la matrice $\chi(\lambda)_{(\chi,\lambda)\in\Sigma\times\Lambda}$ diagonalise les règles de fusion.

$$\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = \sum_{\chi\in\Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n)\chi(\omega)^{g-1}$$

avec en outre: $\chi(\omega) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mid \chi(\nu) \mid^2$.

(1.3.8) Remarque. — (*Conjecture de Verlinde)* Si l'on se donne une théorie rationnelle des champs conforme, les nombres $\mathrm{N}_g = \mathrm{rang}\,\mathrm{V}_g(\lambda)$ satisfont à (V1) – (V4′).

Dans ce cadre, $\mathrm{R}_{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'espace $\mathrm{V}_{\mathrm{E}}(\emptyset;\emptyset)$ de (1.1.3), sur lequel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ opère. La conjecture de Verlinde est que la matrice

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalise les règles des fusion, ce qui donne la liste des caractères.

2. LE MODÈLE DE WESS-ZUMINO-WITTEN

2.1. Représentations des algèbres de Lie affine

(2.1.1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, simple, de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Soit Δ le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a alors la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. On se fixe de plus une décomposition de Δ en racines positives et négatives: $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$.

Pour toute racine α, on note H_α la coracine de α, *i.e.* l'unique élément de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) = 2$. Notons $\mathrm{X}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ les éléments tels que

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_\alpha] = 2\mathrm{X}_\alpha, \qquad [\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -2\mathrm{X}_{-\alpha}, \qquad [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = \mathrm{H}_\alpha.$$

On désigne par $\mathrm{P} \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des *poids entiers*, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $\lambda(\mathrm{H}_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour toute racine α, et par $\mathrm{P}_+ \subset \mathrm{P}$ l'ensemble des *poids dominants*, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $\lambda(\mathrm{H}_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine positive α. L'ensemble P_+ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules simples. On note L_λ le $\mathfrak{g}$-module associé au poids dominant λ, et v_λ son vecteur de plus haut poids. Enfin, on note $(\ ,\ )$ la forme de Cartan-Killing qu'on normalise de façon à ce que pour la racine maximale θ on ait $(\theta, \theta) = 2$.

(2.1.2) On définit *l'algèbre de Lie affine* $\hat{\mathfrak{g}}$ *associée à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ par $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}c$ avec pour crochet (c étant central)

$$[\mathrm{X} \otimes f, \mathrm{Y} \otimes g] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \otimes fg + (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \operatorname*{Res}_{z=0}(g\, df)\; c$$

On note $\mathrm{X}[f]$ l'élément $\mathrm{X} \otimes f$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z))$; si $f = z^n$ on le note aussi $\mathrm{X}(n)$. Soit $\hat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ et $\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z\mathbb{C}[[z]]$. Ce sont des sous-algèbres de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}$.

Soit ℓ un entier. Une représentation de $\hat{\mathfrak{g}}$ est dite *de niveau* ℓ si le centre c opère par multiplication par ℓ. La théorie des représentations des algèbres de Lie affines (*cf.* [15]) affirme que les représentations irréductibles de niveau ℓ intégrables (*i.e.* tel que $\mathrm{X}[f]$ opère de façon localement nilpotent pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_\alpha$ et tout $f \in \mathbb{C}((z))$) de $\hat{\mathfrak{g}}$ sont classifiées (à isomorphisme près) par les poids appartenant à $\mathrm{P}_\ell = \{\lambda \in \mathrm{P}_+ / (\lambda, \theta) \leq \ell\}$.

On note $H_\lambda(\ell)$ (ou simplement H_λ quand il n'y a pas d'ambiguïté) la représentation intégrable de niveau ℓ et de plus haut poids $\lambda \in P_\ell$ de $\mathfrak{g}$.

(2.1.3) Fixons un poids $\lambda \in P_\ell$; soit $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]] \oplus \mathbb{C}c$. Le $\mathfrak{g}$-module simple L_λ devient un $\hat{\mathfrak{p}}$-module, noté $L_\lambda(\ell)$, en faisant agir $\hat{\mathfrak{g}}_+ \subset \hat{\mathfrak{p}}$ trivialement, et c par multiplication par ℓ. La représentation $H_\lambda(\ell)$ s'identifie alors au quotient du *module de Verma* $M_\lambda(\ell) = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{p}}}^{\hat{\mathfrak{g}}}(L_\lambda(\ell))$ par le sous-module $Z_\lambda(\ell)$ engendré par $X_\theta(-1)^{\ell+1-(\lambda,\theta)} \otimes v_\lambda$. Par Poincaré-Birkhoff-Witt, $M_\lambda(\ell) = U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes_{\mathbb{C}} L_\lambda$ où $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ désigne l'algèbre enveloppante de $\hat{\mathfrak{g}}_-$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_\lambda(\ell) \longrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes_{\mathbb{C}} L_\lambda \longrightarrow H_\lambda \longrightarrow 0.$$

(2.1.4) La filtration naturelle de l'algèbre enveloppante $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ induit une filtration $F_.$ sur H_λ. On pose $H_\lambda(d) = F_{d+1}H_\lambda/F_dH_\lambda$. Remarquons que $H_\lambda(0) = L_\lambda$ et $H_\lambda \simeq \bigoplus_{d\geq 0} H_\lambda(d)$.

(2.1.5) LEMME. — *([30], p. 552) Il existe une forme bilinéaire unique à $\mathbb{C}^*$ près $(\ \mid\ ) : H_\lambda \times H_{\lambda^*} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour $X \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in H_\lambda$, $v \in H_{\lambda^*}$ on ait $(X(n)u \mid v) = -(u \mid X(-n)v)$. De plus, cette forme bilinéaire est nulle sur $H_\lambda(d) \times H_{\lambda^*}(d')$ si $d \neq d'$.*

Choisissons une base $\{w_k(d)\}_{k=1,\dots,h_d}$ de $H_\lambda(d)$ et la base duale $\{w^k(d)\}_{k=1,\dots,h_d}$ de $H_{\lambda^*}(d)$ par rapport à $(\ \mid\ )$. Dans ce qui suit, on note $\sum_{i=1}^{h_d} w_i(d) \otimes w^i(d)$ par $\gamma_\mu(d)$. Cet élément est bien défini à $\mathbb{C}^*$ près, car il ne dépend que du choix de $(\ \mid\ )$.

(2.1.6) REMARQUE. — Il y a une variantes à n paramètres, définie par

$$\hat{\mathfrak{g}}_n = \mathfrak{g} \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}((z_i)) \oplus \mathbb{C}c,$$

et $[X \otimes (f_1, \dots, f_r), Y \otimes (g_1, \dots, g_r)] = [X, Y] \otimes (f_1 g_1, \dots, f_r g_r) + (X, Y) \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Res}_{z=0}(g_i\, df_i)c$. L'espace vectoriel $H_{\underline{\lambda}} := H_{\lambda_1} \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} H_{\lambda_n}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P_\ell^n$, devient un $\hat{\mathfrak{g}}_n$-module en faisant opérer le centre par multiplication par le niveau et en posant

$$(X \otimes F).(u) = \sum_{i=1}^{n} u_1 \otimes \dots \otimes u_{i-1} \otimes (X \otimes F_i).u_i \otimes u_{i+1} \otimes \dots \otimes u_n.$$

(2.1.7) Choisissons une base orthonormale X^i par rapport à la forme de Killing et définissons l'opérateur (dit de Sugawara)

$$L_n = \frac{1}{2(g^* + \ell)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} {}^{\circ}_{\circ} X^i(m) X^i(n-m) {}^{\circ}_{\circ}$$

où l'on définit l'ordre normal $\circ\circ$ par

$$\overset{\circ}{\circ}\mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m)\overset{\circ}{\circ} = \begin{cases} \mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m) & \text{si } n < m \\ \frac{1}{2}(\mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m) + \mathrm{Y}(n)\mathrm{X}(m)) & \text{si } n = m \\ \mathrm{Y}(m)\mathrm{X}(n) & \text{si } n > m \end{cases}$$

Les opérateurs L_n agissent sur H_λ et on obtient de cette façon une représentation de l'algèbre de Virasoro de charge centrale $c_\nu = \ell \dim \mathfrak{g}/(g^* + \ell)$, où g^* est le nombre de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$. Le tenseur énergie-moment est défini, z étant une variable formelle, par

$$\mathrm{T}(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{L}_n z^{-n-2}.$$

Pour $a = a(z)\frac{d}{dz} \in \mathbb{C}((z))\frac{d}{dz}$ on pose $\mathrm{T}(a) = \operatorname{Res}_{z=0}(\mathrm{T}(z)a(z)dz)$. Ceci définit un opérateur sur H_λ. Par calcul direct, on montre que

$$[\mathrm{T}(a), \mathrm{T}(b)] = \mathrm{T}[a,b] + \frac{c_\nu}{12}\operatorname{Res}_{z=0}(a'''b\,dz)$$

Il y a une version à n paramètres: si $\underline{a} = (a_1, \dots a_n)$, avec $a_i = a_i(z_i)\frac{d}{dz_i} \in \mathbb{C}((z_i))\frac{d}{dz_i}$, on définit un opérateur $\mathrm{T}(\underline{a})$ sur $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$, pour $\underline{\lambda} \in \mathrm{P}_\ell{}^n$.

2.2. Définition du faisceau des vacua

(2.2.1) Soit $(\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}, \underline{\sigma})$ une famille de courbes n-pointées satisfaisant à $(*)$. Soit $\Sigma_i = \mathrm{Im}(\sigma_i)$, $\mathcal{I}_{\Sigma_i}$ l'idéal de Σ_i et $\Sigma = \Sigma_1 + \dots \Sigma_n$. Soit $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} = \varprojlim_n \mathcal{O}_\mathrm{C}/\mathcal{I}_{\Sigma_i}^{n+1}$ le complété formel de $\mathcal{O}_\mathrm{C}$ le long de Σ_i et $\mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} = \varinjlim_p \varprojlim_n \mathcal{O}_\mathrm{C}(p\Sigma_i)/\mathcal{I}_{\Sigma_i}^{n+1}$ le faisceau des fonctions méromorphes formelles le long de Σ_i. Soit $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S} c$ avec pour crochet

$$[\mathrm{X} \otimes f, \mathrm{Y} \otimes g] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \otimes fg + (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \operatorname{Res}_{\Sigma_i}(g\,df)\; c.$$

Posons $\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S} c$. Soit $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$ et $\ell \geq 0$. Le $\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$-module $\mathrm{L}_\lambda \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$ s'étend en un $\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i}$-module, noté $\mathrm{L}_{\lambda/\Sigma_i}$, en faisant agir $\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ via l'évaluation le long de Σ_i, et c, par multiplication par ℓ. Soit $\mathrm{M}_{\lambda/\Sigma_i} = \mathrm{Ind}_{\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i}}^{\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}}(\mathrm{L}_{\lambda/\Sigma_i})$. On peut montrer que $\mathrm{M}_{\lambda/\Sigma_i}$ admet un unique quotient intégrable $\mathcal{H}_{\lambda/\Sigma_i}$. La somme direct $\oplus_{i=1}^n \widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}$ contient le sous-faisceau $\mathrm{Z} \subset \oplus_i^n \mathcal{O}_\mathrm{S} c$ des n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ tels que $\sum a_i = 0$. On pose $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma} = \oplus_{i=1}^n \widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}/\mathrm{Z}$. Alors $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{\lambda_i/\Sigma_i}$ est naturellement un $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$-module de niveau ℓ.

(2.2.2) Remarque. — Le choix de coordonnées formelles z_i le long de Σ_i permet d'identifier $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ à $\mathcal{O}_\mathrm{S}[[z_i]]$ et $\mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ à $\mathcal{O}_\mathrm{S}((z_i))$. Cela induit les trivialisations $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma} \simeq \widehat{\mathfrak{g}}_n \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma_i} \simeq \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$.

(2.2.3) Posons $\mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma) := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(\mathrm{C}-\Sigma)$. L'inclusion canonique $\mathcal{O}(\mathrm{C}-\Sigma) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ permet d'identifier $\mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma)$ à un sous-module de $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$. Par la formule des résidus, c'est même une sous-algèbre de Lie.

(2.2.4) DÉFINITION. — *Posons*

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma};\underline{\lambda}) &:= \mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} / \mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma)\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} \\ \mathrm{V}^*_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma};\underline{\lambda}) &:= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma)}(\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma}, \mathcal{O}_{\mathrm{S}}) = \{\psi \in \mathcal{H}^*_{\underline{\lambda}/\Sigma} \mid \psi.\mathrm{X}[f] = 0 \ \forall \mathrm{X}[f] \in \mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma)\}. \end{aligned}$$

Le faisceau $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma};\underline{\lambda})$ est appelé *faisceau des co-vacua*; la condition donnée par $\mathfrak{g}(\mathrm{C}-\Sigma)\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma}$ est dite *condition de jauge.* Le *faisceau des vacua* $\mathrm{V}^*_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma};\underline{\lambda})$ s'identifie au $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-dual de $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma},\underline{\lambda})$.

La formation du faisceau des co-vacua commute aux changements de base, *i.e.* si $\mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}$ est un morphisme on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{V}_{\mathrm{C'/S'}}(\underline{\sigma},\underline{\lambda}) \simeq \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\sigma},\underline{\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S'}}$$

Par contre, il n'est pas clair, a priori, que le faisceau des vacua commute aux changements de base. Ce sera le cas, a posteriori, quand on aura vu que le faisceau des co-vacua est localement libre.

2.3. Propagation de l'état sans particule

(2.3.1) Soit $(\mathrm{C},\underline{p},\underline{\lambda})$ une courbe marquée satisfaisant à la condition $(\star)$. Soit Σ le diviseur $p_1+\ldots+p_n$ et $\mathrm{U}=\mathrm{C}-\Sigma$. Choisissons une fois pour toutes des coordonnées locales z_i en p_i. Cela permet d'identifier $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$ à $\widehat{\mathfrak{g}}_n$ et $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma}$ à $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$. Le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}(\mathrm{U}) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_n$ est alors donné par $\mathrm{X}\otimes f \mapsto \mathrm{X}\otimes(\widehat{f}_1,\ldots,\widehat{f}_n)$, où $\widehat{f}_i \in \mathbb{C}((z_i))$ désigne le développement de $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U})$ en série de Laurent au point p_i, et l'espace des vacua $\mathrm{V}^*_{\mathrm{C}}(\underline{p};\underline{\lambda})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}},\mathbb{C})$. Choisissons un nouveau point $q \in \mathrm{C}_{lisse}$, étiqueté par le poids $0 \in \mathrm{P}_{\ell}$.

(2.3.2) PROPOSITION. — *L'inclusion* $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_0$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C}).$$

La démonstration de ce fait illustre bien les méthodes de la théorie des représentations des algèbres de Lie dont on a besoin pour la théorie sur une courbe marquée fixée.

Démonstration. Choisissons une coordonnée régulière z en q telle que z^{-1} soit dans $\mathcal{O}(\mathrm{U}-\{q\})$. Ceci est possible, car $(\mathrm{C},\underline{p})$ satisfait à $(\star)$. On obtient la décomposition

$$\mathcal{O}(\mathrm{U}-\{q\}) = \mathcal{O}(\mathrm{U}) \oplus z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}],$$

d'où, en identifiant $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ à $\hat{\mathfrak{g}}_-$, la décomposition $\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\}) = \mathfrak{g}(\mathrm{U}) \oplus \hat{\mathfrak{g}}_-$. Soit $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})$ l'extension centrale triviale de $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$ et $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})$ l'extension centrale de $\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})$ dont le crochet est donné par $[\mathrm{X}[f], \mathrm{Y}[g]] = [\mathrm{X},\mathrm{Y}][fg] + (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \operatorname{Res}_q \hat{g}_q d\hat{f}_q$. Le morphisme injectif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\}) & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{g}}_n \\ \mathrm{X}[f] & \mapsto & \mathrm{X}[\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n] \\ c & \mapsto & -c \end{array}$$

est, par la formule des résidus, un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$ devient un $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})$-module *de niveau* $-\ell$.

On munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})$-module en faisant agir c par ℓ et $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$ par zéro. On note ce module $\mathbb{C}_\ell$. Le module de Verma associé à la représentation triviale s'identifie à $\mathrm{M}_0 = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathbb{C}_\ell)$, et par la propriété multiplicative des induits on obtient:

$$\mathrm{H}_\lambda \otimes \mathrm{M}_0 = \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathbb{C}_\ell) = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}_\ell) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}^{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}).$$

Ceci signifie que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$, et l'énoncé est donc vérifié si l'on remplace H_0 par M_0. Il reste, en vertu de (2.1.3), à vérifier que si $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C})$ alors $\psi(u \otimes \mathrm{X}_\theta(-1)^{\ell+1}.v_0) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$. Pour cela, soit f une fonction régulière sur U telle que $f(q) = 0$ et $f'(q) \neq 0$. Une telle fonction existe, $(\mathrm{C}, \underline{p})$ satisfaisant à $(\star)$. Le lemme suivant est facile à démontrer

(2.3.3) Lemme. — *Soit v_0 le vecteur de plus haut poids de H_0. Soit $f \in \mathbb{C}[[z]]$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{X}_\theta(-1)$, $\mathrm{E} = \mathrm{X}_{-\theta}[f]$ et $\tilde{v} = \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0$. Alors pour tout entier $m \geq 1$ il existe une constante non nulle C_m tel que $\mathrm{E}^m\mathrm{F}^m\tilde{v} = \mathrm{C}_m\tilde{v}$.*

Montrons comment le lemme entraîne la proposition. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{X}_\theta(-1)$ et $\mathrm{E} = \mathrm{X}_{-\theta}[f]$. Comme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C})$, on a pour tout $m \geq 1$

$$\psi(u \otimes \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = \psi(u \otimes \mathrm{C}_m^{-1}\mathrm{E}^m\mathrm{F}^m\mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = \psi(\mathrm{E}^m u \otimes \mathrm{C}_m^{-1}\mathrm{F}^m\mathrm{F}^{\ell+1}.v_0).$$

Mais, pourvu que m soit suffisamment grand, $\mathrm{E}^m u$ est nul, l'action de E sur $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$ étant localement nilpotente. Ainsi, $\psi(u \otimes \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$, d'où la proposition. □

On peut aussi étiqueter le point q avec le poids $\mu \in \mathrm{P}_\ell$. Via l'évaluation en q on peut considérer $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{L}_\mu$ comme $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$-module. En remplaçant dans la démonstration de la proposition (2.3.2) et du lemme (2.3.3) la représentation triviale par L_μ on obtient la proposition plus forte suivante:

(2.3.4) Proposition. — *(Beauville [1]) L'inclusion $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu \hookrightarrow \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_\mu$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_\mu, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu, \mathbb{C}).$$

(2.3.5) COROLLAIRE. — *Soient* $\{q_1, ..., q_m\}$ *des points distincts de* C_{lisse} *et* $\underline{\mu} \in P_\ell^m$. *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U-\{q_1,...,q_m\})}(H_{\underline{\lambda}} \otimes H_{\underline{\mu}}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U)}(H_{\underline{\lambda}} \otimes L_{\underline{\mu}}, \mathbb{C})$$

2.4. Formule de décomposition

(2.4.1) Soit $(C, \underline{p})$ une courbe n-pointée et $c \in C_{sing}$. Soit $\nu : \widetilde{C} \longrightarrow C$ la normalisation partielle en c, et soient a et b les points de $\widetilde{C}$ au-dessus de c.

(2.4.2) PROPOSITION. — *([30], 2.2.6) Il existe un isomorphisme canonique*

$$\bigoplus_{\mu \in P_\ell} V_{\widetilde{C}}(\underline{p}, a, b; \underline{\lambda}, \mu, \mu^*) \xrightarrow{\sim} V_C(\underline{p}; \underline{\lambda})$$

Soit $U \subset C$ le complémentaire des points marqués p_i, et $\widetilde{U} \subset \widetilde{C}$ l'image réciproque de U. D'après le corollaire (2.3.5), il s'agit de montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$\delta : \bigoplus_{\mu \in P_\ell} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\widetilde{U})}(H_{\underline{\lambda}} \otimes L_\mu \otimes L_{\mu^*}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U)}(H_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})$$

Pour $\psi_\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\widetilde{U})}(H_{\underline{\lambda}} \otimes L_\mu \otimes L_{\mu^*}, \mathbb{C})$, on définit l'élément $\delta(\psi_\mu) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U)}(H_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})$ par $u \mapsto \psi_\mu(u \otimes \gamma_\mu(0))$ avec $\gamma_\mu(0)$ comme dans (2.1.4). [Remarquons que $\delta(\psi_\mu)$ est un vacua car $\gamma_\mu(0) \in (L_\mu \otimes L_{\mu^*})^{\mathfrak{g}}$]. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions sur U s'annulant en c. C'est aussi l'idéal des fonctions sur $\widetilde{U}$ s'annulant en a et b. Les espaces des vacua s'identifient respectivement à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathcal{I})}(H_{\underline{\lambda}} \otimes M, \mathbb{C})^{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$, avec $M = \bigoplus_{\mu \in P_\ell} L_\mu \otimes L_{\mu^*}$, et à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathcal{I})}(H_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})^{\mathfrak{g}}$. On montre alors, en considérant l'inclusion diagonale $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, que δ définit un isomorphisme entre ces espaces.

2.5. Rationalité

(2.5.1) PROPOSITION. — *On a* $\dim V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}) < \infty$

Pour simplifier on suppose que C ne contient qu'un seul point marqué p étiqueté de la représentation H_λ. On choisit une coordonnée z en p. La proposition est conséquence du lemme suivant, qui m'a été signalé par O. Mathieu.

(2.5.2) LEMME. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Lie,* H *un* $\mathcal{A}$*-module de type fini (*i.e. $H = U(\mathcal{A}).L$ *avec* L *espace vectoriel de dimension finie). Supposons qu'il existe une base* (e_i) *de* $\mathcal{A}$ *telle que les* e_i *agissent de façon localement finie sur* H *(*i.e. *l'espace vectoriel engendré par les puissances de* e_i *appliqué à* $u \in H$ *est de dimension finie). Soient*

$\mathcal{A}_+ = \{X \in \mathcal{A} \mid X.L = 0\}$ *et* $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\mathcal{K} + \mathcal{A}_+$ *soit de codimension finie dans* $\mathcal{A}$. *Alors* $H/\mathcal{K}H$ *est de dimension finie.*

Démonstration. C'est une application du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt: d'après les hypothèses, on peut trouver des éléments localement de type fini $e_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, N$, tels que $\mathcal{A} = [\mathcal{K} + \mathcal{A}_+] \oplus (\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}e_i)$. Alors

$$U(\mathcal{A}) = \sum_{m_1,\ldots,m_N} U(\mathcal{K}) \otimes e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N} \otimes U(\mathcal{A}_+).$$

Par définition de $\mathcal{A}_+$, on a $U(\mathcal{A}_+).L = L$. Par conséquent, $H = \sum_{m_1,\ldots,m_N} U(\mathcal{K}) e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N}.L$. Il est facile de voir, par récurrence sur N, que $\sum_{m_1,\ldots,m_N} e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N}.L$ est de dimension finie, en raison du fait que les e_i opèrent de façon localement finie. On en déduit que $H = U(\mathcal{K}).\widetilde{L}$ avec $\widetilde{L}$ de dimension finie. On a donc une surjection $\widetilde{L} \longrightarrow H/\mathcal{K}H$, ce qui démontre le lemme. □

On applique ce lemme à notre situation en posant $\mathcal{A} = \widehat{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{A}_+ = \widehat{\mathfrak{g}}_+$, $H = H_\lambda$ et $\mathcal{K} = \mathfrak{g}(C - \{p\})$. D'après le théorème de Riemann-Roch, $\mathcal{K} + \mathcal{A}_+$ est de codimension finie dans $\mathcal{A}$. Pour l'existence d'une base de $\mathcal{A}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme on peut procéder par exemple de la manière suivante: on remarque qu'il existe une base d'éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont ad-nilpotents puis on prend pour base de $\mathcal{A}$ n'importe quelle base de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ et on lui ajoute le centre et les éléments de type $X(m)$ ou X décrit une base ad-nilpotente et m est un entier strictement positif. On est donc dans les hypothèses du lemme; d'où la proposition.

2.6. L'exemple de $C = \mathbb{P}_1$ muni de trois points ([30], 2.2.8 ou [1])

(2.6.1) La proposition (2.3.2) (avec $q = \infty$) et le corollaire (2.3.5) conduisent à la description suivante de l'espace des vacua. Soit $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie définie par $\mathbb{C}X_\theta \oplus \mathbb{C}X_{-\theta} \oplus \mathbb{C}H_\theta$. Tout $\mathfrak{g}$-module peut être considère comme un $\mathfrak{s}$-module. Si V est un $\mathfrak{s}$-module on note $V^{(j)}$ la composante correspondant au poids j dans la décomposition en facteurs isotypiques de V.

(2.6.2) PROPOSITION. — *L'espace des vacua sur* $\mathbb{P}_1$ *muni de trois points* p, q, r *étiquetés par les poids* $\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$ *s'identifie à*

$$\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(L_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} L_\mu \otimes_{\mathbb{C}} L_\nu, \mathbb{C}) \mid \psi_{|L_\lambda^{(j_1)} \otimes_{\mathbb{C}} L_\mu^{(j_2)} \otimes_{\mathbb{C}} L_\nu^{(j_3)}} = 0,\ j_1 + j_2 + j_3 > 2\ell\}.$$

2.7. Le faisceau des vacua est localement libre

(2.7.1) On définit $V_g^*(\underline{\lambda})$ (resp. $V_g(\underline{\lambda})$) comme étant le faisceau des vacua (resp. co-vacua) relatif à la famille universelle sur le champ de modules $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$. Il n'est pas difficile de voir qu'en raison de la proposition (2.5.1), $V_g(\underline{\lambda})$ est un $\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}}$-module cohérent.

(2.7.2) Soit $(C, \underline{p})$ une courbe n-pointée stable, et Σ le diviseur $\Sigma = p_1 + \ldots + p_n$. L'espace des déformations infinitésimales de $(C, \underline{p})$ est donné par $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$, où Ω^1_C désigne le faisceau des formes différentielles sur C. La suite spectrale des Ext locaux vers les Ext globaux fournit la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^1(\Theta_C(-\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \longrightarrow H^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))) \longrightarrow 0,$$

où $\Theta_C = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C)$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$ est porté par les points singuliers de C et en $q \in C_{sing}$ on a $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \otimes_{\mathcal{O}_{C,q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}$. Par conséquent, $H^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \simeq \mathbb{C}^q$ avec $q = \#C_{sing}$. Les déformations infinitésimales correspondant aux éléments de $H^1(\Theta_C(-\Sigma))$ peuvent être vues comme les déformations infinitésimales de $(C, \underline{p})$ respectant les singularités.

Étant donnée une famille de courbes n-pointées stables $C \longrightarrow S$, la théorie de Kodaira-Spencer fournit un morphisme $\rho_s : T_sS \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$ pour $s \in S$. Une telle famille est dite verselle si le morphisme ρ_s est un isomorphisme pour $s \in S$. Étant donnée une courbe n-pointée, on peut toujours trouver une famille verselle $C \longrightarrow S$ et un point $s_0 \in S$ dont la fibre en $s_0 \in S$ s'identifie à la courbe n-pointée donnée.

(2.7.3) Soit $C \longrightarrow S$ une famille verselle de courbes n-pointées stables. On note $\Gamma \subset C$ la sous-variété correspondant aux points singuliers des courbes C_s, et $\Delta \subset S$ l'image de Γ. Remarquons que Γ est une sous-variété lisse de C de codimension 2, et que Δ est un diviseur à croisements normaux. On se donne de plus des coordonnées formelles $\zeta_i : \widehat{\mathcal{O}}_{C/\Sigma_i} \simeq \mathcal{O}_S[[z]]$ et l'on pose $z_i = \zeta_i^{-1}(z)$.

Considérons le faisceau $\Theta_S(-\log \Delta) \subset \Theta_S$ des champs de vecteurs sur S qui sont tangents à Δ: c'est le faisceau des champs de vecteurs locaux ξ sur S tels que $\xi(\mathcal{I}_\Delta) \subset \mathcal{I}_\Delta$. Le morphisme de Kodaira-Spencer donne une identification $\Theta_S(-\log \Delta) \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*\Theta_{C/S}(-\Sigma)$.

Soit $\Theta_{C,\pi}(*\Sigma)$ le faisceau des champs de vecteurs ξ sur $C - \Sigma$ qui sont tangents à Γ et projetables (*i.e.* $x \mapsto d\pi(\xi(x))$ est constant le long des fibres de π). On a la suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_*\Theta_{C/S}(*\Sigma) \longrightarrow \pi_*\Theta_{C,\pi}(*\Sigma) \xrightarrow{\tau} \Theta_S(-\log \Delta) \longrightarrow 0.$$

Le faisceau $\pi_*\Theta_{C,\pi}(*\Sigma)$ est muni d'une structure naturelle d'algèbre de Lie donnée par le crochet des champs de vecteurs, et la suite exacte ci-dessus est une suite exacte de faisceaux en algèbres de Lie. Le choix des coordonnées formelles le long de Σ définit, en faisant le développement de Laurent le long des diviseurs Σ_i, un monomorphisme

$$\alpha : \pi_* \Theta_{C,\pi}(*\Sigma) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_S((z_i))\frac{d}{dz_i}.$$

Soit $\mathbb{T} \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_S((z_i))\frac{d}{dz_i}$ l'image de α, munie de la structure de faisceau d'algèbres de Lie définie par transport de structure. On a pour $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{T}$

$$[\underline{a}, \underline{b}] := [\underline{a}, \underline{b}]_0 + \tau(\underline{a})(\underline{b}) - \tau(\underline{b})(\underline{a})$$

où $[\underline{a}, \underline{b}]_0$ est le crochet habituel des champs de vecteurs formels et où l'action de $\tau(\underline{a})$ sur $\underline{b}$ est prise composante par composante.

Considérons le faisceau en algèbres de Lie $\widehat{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \oplus \mathcal{O}_S$ muni du crochet défini par

$$[(\underline{a}, r), (\underline{b}, s)] := \left([\underline{a}, \underline{b}], \frac{c_\nu}{12} \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_i=0}(a_i''' b_i) + \tau(\underline{a})(s) - \tau(\underline{b})(r) \right).$$

(2.7.4) DÉFINITION. — *Soient* $V = (\underline{a}, r) \in \widehat{T}$ *et* $v = u \otimes f \in \mathcal{H}_{\underline{\lambda}} = H_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$. *On pose*

$$D_V.(v) := u \otimes \tau(\underline{a})(f) + T[\underline{a}].u \otimes f + u \otimes rf.$$

Supposons $\alpha \in \mathcal{O}_S$. Par construction, $D_{(\underline{a},r)}(u \otimes \alpha f) = \alpha D_{(\underline{a},r)}(u \otimes f) + u \otimes h\tau(\underline{a})(\alpha)$. En particulier, on voit que $D_{(\underline{a},r)}$ est $\mathbb{C}_S$-linéaire. Par calcul direct, on démontre la proposition suivante.

(2.7.5) PROPOSITION. — *L'opération* D *définit une représentation* $D : \widehat{\mathbb{T}} \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}_S}(\mathcal{H}_\lambda)$, i.e. *on a* $[D_V, D_{V'}] = D_{[V,V']}$. *De plus* D *satisfait à :*

$$D_V(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha D_V(v).$$

Par calcul direct, on voit que l'action de D préserve la condition de jauge. On obtient ainsi une représentation $D : \widehat{\mathbb{T}} \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}_S}(V_{C/S}(\underline{\lambda}))$ satisfaisant $D_V(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha D_V(v)$ avec $v \in V_{C/S}(\lambda)$.

(2.7.6) COROLLAIRE. — *Le faisceau des co-vacua est localement libre sur* $S - \Delta$.

Démonstration. C'est une variante d'un argument standard: le faisceau de co-vacua étant cohérent, le module des germes $V_{C/S}(\underline{\lambda})_s$ est de type fini pour $s \in S$. Si $V_{C/S}(\underline{\lambda})_s$

n'est pas libre on considère des générateurs $e_i \in \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})_s$ qui forment une base de la fibre, et une relation

$$\text{(R)}\quad f_1 e_1 + \ldots + f_m e_m \text{ avec } f_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{S},s}$$

entre ces générateurs telle que $m = \min_i\{k \mid f_i \in \mathfrak{m}^{k\backslash k-1}\}$ soit minimal. En dehors de Δ, l'image de τ est Θ_{S}; on peut donc trouver V tel que la relation obtenue en dérivant (R) suivant $\mathrm{D_V}$ contredise la minimalité de (R). □

(2.7.7) REMARQUE. — En section (1.1), on a dit que le faisceau des vacua était localement libre sur $\mathfrak{M}_{g,n}$ à cause de l'invariance de la théorie sous changements de coordonnées infinitésimaux par des champs de vecteurs locales *méromorphes.* Ceci est relié à la construction ci-dessus de la manière suivante: supposons pour simplifier que S soit un point et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma) \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma) \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma) \longrightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie on obtient, pour m assez grand, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \longrightarrow 0.$$

Or, le choix des coordonnées définit un isomorphisme,

$$\mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{k=0}^{m} \mathbb{C} z_i^{-k}\frac{d}{dz_i}.$$

La partie négative d'un champ de vecteurs local méromorphe définit ainsi une déformation de $(\mathrm{C}, \underline{p})$ respectant les singularités. De façon faisceautique, en laissant tendre m à l'infini, on obtient la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_*\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[z_i^{-1}]\frac{d}{dz_i} \longrightarrow \mathrm{R}^1\pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(-\Sigma)) \longrightarrow 0,$$

qui n'est autre que celle donnée dans (2.7.3), le morphisme de Kodaira-Spencer étant un isomorphisme.

(2.7.8) Pour montrer que le faisceau des vacua est aussi localement libre sur le bord, Tsuchiya-Ueno-Yamada procèdent comme suit. Soit $(\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}, \underline{\sigma})$ une famille de courbes n-pointées, paramétrée par la courbe lisse S. Supposons C_s lisse en dehors de $0 \in \mathrm{S}$. Soit $\mathcal{V}$ le faisceau des co-vacua $\mathrm{V}_{\mathrm{C/D}}(\underline{\lambda})$, $\mathcal{V}^*$ le faisceau des vacua $\mathrm{V}^*_{\mathrm{C/D}}(\underline{\lambda})$. On sait déjà que ces faisceaux sont cohérents sur S, localement libre sur $\mathrm{S}^* = \mathrm{S} - \{0\}$. Soit $\widehat{\mathcal{V}}^*_{/0}$ la complétion formelle de $\mathcal{V}^*$ en 0. On a $\widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} = \mathcal{V}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}$. Soit K le corps de fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}$.

(2.7.9) LEMME. — *Si* $\dim_{\mathrm{K}} \widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}} \mathrm{K} \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(\underline{\lambda})$, *alors* $\mathcal{V}^*$ *est localement libre sur* S.

Le faisceau de co-vacua commute aux changements de base. On en déduit que l'on a $\mathcal{V}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S},0}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{V}_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda})$ et par conséquence on obtient pour $\operatorname{rang} \mathcal{V}_{|\mathrm{S}^*} = \operatorname{rang} \mathcal{V}^*_{|\mathrm{S}^*}$:

$$\operatorname{rang} \mathcal{V}^*_{|\mathrm{S}^*} = \dim_{\mathrm{K}} \widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}} \mathrm{K} \geq \dim \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda}) = \dim \mathrm{V}_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda}) = \dim \mathcal{V}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S},0}} \mathbb{C}.$$

Par cohérence du faisceau de co-vacua on a l'inégalité dans l'autre sens, d'où le lemme.

(2.7.10) Pour se mettre dans les hypothèses du lemme, il s'agit de construire suffisamment de sections formelles à partir des donnés du bord. Supposons, pour simplifier, que $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ soit une famille de courbes pointées de genre 1, étiquetées par le poids trivial, paramétrée par le disque. Soit $\nu : \widetilde{\mathrm{C}}_0 \longrightarrow \mathrm{C}_0$ la normalisation de la courbe singulière C_0. Alors $\widetilde{\mathrm{C}}_0 \simeq \mathbb{P}_1$ et l'on peut supposer que $\nu(0) = \nu(\infty) = q$ et $\nu(1) = p$. D'après la formule de décomposition on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(p_0; 0) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0)$$

On a $\dim \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0) = 1$ si $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$. Pour $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$ soit $\phi_\lambda \in \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0)$ et définissons $\widehat{\phi}_\lambda$ par la série formelle

$$\widehat{\phi}_\lambda(u) = \sum_{d=0}^{\infty} \phi_\lambda(\gamma_\lambda(d) \otimes u) t^d.$$

On vérifie, ce qui est délicat, que $\widehat{\phi}_\lambda$ satisfait à la condition de jauge formelle ([30], 552-556). Supposons que l'on ait une relation de liaison $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} a_\lambda \hat{\phi}_\lambda = 0$. Quitte à diviser par t^n, on peut supposer qu'il existe λ tel que $a_\lambda(0) \neq 0$. En évaluant ensuite en $t = 0$ on obtient une relation de liaison $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} a_\lambda(0) \phi_\lambda = 0$ ce qui est une contradiction.

2.8. La connexion projective plate à singularités régulières le long du bord.

(2.8.1) La construction de la connexion projective plate sur le faisceau des co-vacua nécessite un peu plus d'informations sur la géométrie du tenseur énergie-moment. On se place dans le cadre analytique complexe. Pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, notons $\mathrm{X}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{X}(m) t^{-m-1}$. Un calcul simple montre

$$\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2(g^* + \ell)} \lim_{t' \to t} \{ \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{X}^i(t) \mathrm{X}^i(t') - \frac{\ell \dim \mathfrak{g}}{(t - t')^2} \}$$

Soit $\psi \otimes u \in \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}}(\underline{p}, \underline{\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{V}_{\mathrm{C}}(\underline{p}, \underline{\lambda})$, z une coordonnée, $t = g(z)$ une changement de coordonnées. On déduit de la description de $\mathrm{T}(t)$ ci-dessus qu'on a

$$\psi(\mathrm{T}(t).u) dt^2 = \psi(\mathrm{T}(z).u) dz^2 - \frac{c_\nu}{12} (\psi(u)) \mathrm{S}_z(g) dz^2.$$

Ici $S_z(g)$ désigne la dérivée schwarzienne: si D est un domaine de $\mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe sur D telle que $g'(z) \neq 0$, on définit

$$S_z(g) = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 .$$

Il est bien connu (*cf.* [31]) que l'on a $S_z(g) = 0$ si et seulement si g est une homographie, et que $S_z(g \circ f) = S_z(f)$ si g est une homographie. En outre, si f est une fonction en t et $t = g(z)$ un changement de coordonnées, on a $S_t(f)dt^2 = S_z(f \circ g)dz^2 + S_z(g)dz^2$ Classiquement, la dérivée schwarzienne sert à définir la notion de structure projective sur une surface de Riemann. Si (U_i, z_i) est un atlas sur C, les $s_{ij}dz_i^2$ avec $s_{ij}(z) = S_{z_i}(z_j)$ défini sur $U_i \cap U_j$ définissent un 1-cocycle de $\Omega_C^{\otimes 2}$. Une structure projective est alors la donnée de fonctions g_i sur U_i telle que $g_i dz_i^2 - g_j dz_j^2 = s_{ij} dz_i^2$.

Géométriquement, l'opérateur T peut donc être vu comme un moyen d'associer à un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}))$ une structure projective sur C (si $\frac{c_k}{12}(\varphi) = 1$).

Classiquement, on a une autre façon de produire des structures projectives sur C. Pour cela, on se fixe une forme $\omega \in H^0(C \times_{\mathbb{C}} C, \omega_{C\times_{\mathbb{C}}C}(2D))$ symétrique, D étant la diagonale. Localement, si x est une coordonné sur C et y la même sur le deuxième facteur, ω est de la forme

$$\omega = a\frac{dxdy}{(x-y)^2} + H(x,y)dxdy$$

Supposons que le birésidu a de ω soit égal à 1. Alors $h_\omega(z) = -6H(z,z)$ définit une structure projective [31].

Ces remarques étant faites, on peut démontrer la proposition suivante:

(2.8.2) PROPOSITION. — *Soit* $C \longrightarrow S$ *une famille de courbes n-pointées avec coordonnées formelles. Il existe un unique morphisme de* $\mathcal{O}_S$*-modules* φ *rendant commutatif le diagramme suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{T}} & \xrightarrow{D} & \mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(V_{C/S}(\underline{\lambda})) \\ \cup & & \uparrow \textit{multiplication} \\ \pi_*(\Theta_{C/S}(*\Sigma)) \oplus \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_S \end{array}$$

i.e. *tel que* $\varphi(V).v = D_V.v$ *pour* $V \in \pi_*(\Theta_{C/S}(*\Sigma)) \oplus \mathcal{O}_S$ *et* $v \in V_{C/S}(\underline{\lambda})$.

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de construire φ pour les éléments du type $(\underline{a}, 0)$. En effet, il suffira de poser $\widetilde{\varphi}(\underline{a}, r) = \varphi(\underline{a}) + r$ pour $r \in \mathcal{O}_S$. Pour simplifier les notations on suppose $n = 1$. Comme le faisceau des co-vacua est localement libre de dual le faisceau des vacua, il suffit de construire φ tel que pour $\psi \in V^*_{C/S}(\underline{\lambda})$ on ait $\psi(D_{(a,0)}.v) = \varphi(a).v$. Pour $a \in \pi_*(\Theta_{C/S}(*\Sigma))$ on a $\tau(a) = 0$. On en déduit, avec $v = u \otimes f$,

$$\psi(D_{(a,0)}.v) = \psi(T[a].u \otimes f) = \operatorname*{Res}_{z=0}(a(z)\psi(T[z].u \otimes f)dz)$$

Si S est suffisamment petit, on peut trouver une forme symétrique de birésidu 1, $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathrm{C}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{C}, \omega_{\mathrm{C}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{C}/\mathrm{S}}(2\mathrm{D}))$. Posons, avec les notations ci-dessus par rapport à une famille de courbes,

$$\varphi(a) := \frac{c_\nu}{12} \operatorname*{Res}_{z=0}(a(z)h_\omega(z)dz)$$

Alors φ convient, car $\psi(\mathrm{T}[z].v)dz^2 - \frac{c_\nu}{12}\psi(v)h_\omega(z)dz^2 \in \mathrm{H}^0(\omega_{\mathrm{C/S}}^{\otimes 2})$ (c'est la différence de deux structures projectives), qui multipliée avec $a(z)$ est de résidu 0. La définition de φ ne dépend pas du choix de ω, la différence entre $h_\omega(z)$ et $h_{\omega'}(z)$ multipliée par un élément de $\pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma))$ étant pour la même raison de résidu 0. □

On pose $\mathcal{A}(-\log\Delta) = \widehat{\mathbb{T}}/\ker\varphi$. Par construction, c'est un faisceau en algèbres de Lie, muni d'une représentation $\mathrm{D} : \mathcal{A}(-\log\Delta) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda}))$ satisfaisant à $\mathrm{D}_\mathrm{V}(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha\mathrm{D}_\mathrm{V}(v)$. De plus, on montre facilement que c'est une extension de faisceaux en algèbres de Lie:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\mathrm{S} \longrightarrow \mathcal{A}(-\log\Delta) \longrightarrow \Theta_\mathrm{S}(-\log\Delta) \longrightarrow 0$$

telle que l'image de $1 \in \mathcal{O}_\mathrm{S}$ opère sur $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda}))$ par l'identité.

Or, une telle donnée définit une connexion plate, à singularités régulières le long du bord, sur le fibré projectif $\mathbb{P}\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})$ des co-vacua.

(2.8.3) Remarque. — Pour $\mathbb{P}_1$ muni de n points, cette connexion est une forme de la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov [16].

(2.8.4) Remarque. — Hitchin [14] et Faltings [12] ont construit une connexion projective sur le fibré des G-fonctions thêta généralisées sur $\mathfrak{M}_{g,n}$. Est-ce la même que celle définie ci-dessus via l'identification du paragraphe 3?

(2.8.5) Remarque. — La construction ci-dessus se replace naturellement dans le cadre des algèbres d'Atiyah [4]. Par définition, ces algèbres sont les extensions $\mathcal{A}$ de faisceaux en algèbres de Lie de Θ_S par $\mathcal{O}_\mathrm{S}$. Étant donnée une telle algèbre, on note $\mathcal{A}(-\log\Delta)$ l'image inverse de $\mathcal{A}$ par rapport à l'inclusion $\Theta_\mathrm{S}(-\log\Delta) \subset \Theta_\mathrm{S}$.

Le faisceau des vacua ne dépend pas du choix des coordonnées locales; par contre, la construction donnée ci-dessus de l'algèbre d'Atiyah et de la représentation D sur le faisceau des co-vacua $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ définissant la connexion en dépendent a priori. Dans [29], Tsuchimoto en donne une construction sans utiliser de coordonnées formelles en se basant sur Beilinson-Schechtmann [4]. De plus, il décrit l'algèbre d'Atiyah en question. Étant donné $\mathcal{A}$ et un scalaire a, on définit l'algèbre d'Atiyah $a\mathcal{A}$ par $(\mathcal{O}_\mathrm{S} \oplus \mathcal{A})/(a,1)\mathcal{O}_\mathrm{S}$. Si $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ est l'algèbre d'Atiyah des opérateurs différentiels du premier ordre d'un fibré inversible $\mathcal{L}$, l'algèbre $a\mathcal{A}$ n'est autre que $\mathcal{A}_{\mathcal{L}^{\otimes a}}$, quand $a\mathbb{Z}$. Si a est un scalaire quelconque, on peut voir $a\mathcal{A}_\mathcal{L}$ comme le faisceau des opérateurs différentiels du premier ordre du "fibré inversible $\mathcal{L}^{\otimes a}$" qui, lui, n'est pas bien défini pour a non entier. Alors Tsuchimoto construit une représentation de l'algèbre d'Atiyah

$$\frac{c_\nu}{2}\mathcal{A}_{\det \mathrm{R}\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{C}}(-\log\Delta) + \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda_i}\mathcal{A}_{\sigma_i^*(\omega_{\mathrm{C/S}})}(-\log\Delta)$$

sur le faisceau des co-vacua $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ définissant la connexion, où c_{λ_i} est la valeur de l'opérateur de Casimir sur le $\mathfrak{g}$-module L_{λ_i} et où $c_\nu = \ell \dim \mathfrak{g}/(g^* + \ell)$ est la charge centrale.

3. FONCTIONS THÊTA GÉNÉRALISÉES

3.1. L'identification

(3.1.1) Il s'agit d'identifier les espaces des vacua aux espaces des fonctions thêta généralisées. Soit C une courbe algébrique lisse de genre $g \geq 2$. On désigne par $\mathcal{SU}_\mathrm{C}(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de déterminant trivial. C'est une variété algébrique projective irréductible dont les points fermés s'identifient aux sommes directes de fibrés vectoriels stables. Étant donnée un fibré inversible L de degré $g-1$, on définit

$$\Theta_\mathrm{L} = \{[\mathrm{E}] \in \mathcal{SU}(r) \mid \mathrm{h}^0(\mathrm{C}, \mathrm{E}\otimes\mathrm{L}) \geq 1\}$$

Ceci définit un diviseur de Cartier sur $\mathcal{SU}(r)$ dont le fibré inversible associé $\mathcal{D}$ est indépendant du choix de L en raison du théorème de Drezet-Narasimhan [11], qui affirme que l'on a $\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}(r)) = \mathbb{Z}\mathcal{D}$. Cette section est dédié à l'explication du théorème suivant.

(3.1.2) THÉORÈME. — *([2]) Soit ℓ un entier; considérons l'espace des vacua* $\mathrm{V}^*_\mathrm{C}(\emptyset)$ *de niveau ℓ. Il existe un isomorphisme canonique* $\mathrm{H}^0(\mathcal{SU}(r), \mathcal{D}^{\otimes\ell}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}^*_\mathrm{C}(\emptyset)$.

3.2. Le théorème d'uniformisation

(3.2.1) Soit $p \in \mathrm{C}$ et $\mathrm{C}^* = \mathrm{C} - \{p\}$. On note $\mathrm{R}_{\mathrm{C}^*}$ l'anneau des fonctions régulières sur C^*. Soit $\widehat{\mathcal{O}}$ le complété de l'anneau local en p et K son corps de fractions. On se donne de plus une coordonnée locale z en p ce qui permet d'identifier $\widehat{\mathcal{O}}$ à $\mathbb{C}[[z]]$ et K à $\mathbb{C}((z))$. On note $\mathrm{D} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}})$ et $\mathrm{D}^* = \mathrm{Spec}(\mathrm{K})$.

(3.2.2) Le point de départ de la démonstration est l'observation qu'*ensemblistement* l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang r et de déterminant trivial est en bijection canonique avec l'ensemble des double classes defini par le double quotient $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})\backslash\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})/\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$. Ceci est facile à voir. L'observation clé pour cela est qu'un fibré vectoriel de déterminant trivial sur C se trivialise sur C^*, car un module projectif sur un anneau de Dedekind est libre si et seulement si son déterminant est libre. Supposons alors donné un fibré vectoriel E muni de deux trivialisations $\tau : \mathcal{O}_{\mathrm{C}^*} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_{|\mathrm{C}^*}$ et $\sigma : \mathcal{O}_{\mathrm{D}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_{|\mathrm{D}}$ telles que $\Lambda^r\tau = \Lambda^r\sigma$ sur D^*. Ces trivialisations diffèrent par un morphisme $\mathrm{D}^* \longrightarrow \mathrm{SL}_r(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$. Réciproquement, la donnée d'un élément de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ permet de recoller les fibrés triviaux sur C^* et D et de retrouver le fibré E muni de deux trivialisations τ et σ. Ainsi, les éléments de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ correspondent aux classes d'isomorphisme $(\mathrm{E}, \tau, \sigma)$ tels que $\Lambda^r\tau = \Lambda^r\sigma$ sur D^*. Ensuite, quotienter $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ par $\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ signifie oublier σ, et quotienter $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})/\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ par $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R}_{\mathrm{C}})$ signifie oublier aussi τ.

(3.2.3) La nature *algébrique* des objets et de l'isomorphisme en question est autrement plus délicate à établir. On appelle $\mathbb{C}$*-espace* (resp. $\mathbb{C}$*-groupe*) un foncteur de la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres dans la catégorie des ensembles (resp. groupes) qui est un faisceau pour la topologie fidèlement plate. On verra la catégorie des $\mathbb{C}$-schémas comme sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-espaces. La catégorie des $\mathbb{C}$-espaces est fermée par limites inductives. Un $\mathbb{C}$-espace est un *ind-schéma* s'il est limite inductive d'un système filtrant de schémas. Un *ind-groupe* est un $\mathbb{C}$-groupe qui est un ind-schéma.

Soit $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$ [resp. $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))$] le $\mathbb{C}$-groupe $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{SL}_r(\mathrm{A}[[z]])$ [resp. $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{SL}_r(\mathrm{A}((z)))$]. Il est facile de voir que $\mathrm{SL}(\mathbb{C}[[z]])$ est représenté par un schéma affine. Pour $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))$ on filtre par l'ordre du pôle: considérons le sous-foncteur $\mathcal{S}^{(\mathrm{N})}$ de $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))$ des matrices $\mathrm{M}(z)$ de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{A}((z)))$ telles que $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}(z)^{-1}$ ont un pôle d'ordre au plus N. Ce sous-foncteur est représentable par un schéma affine S^{N}, ce qui fait de $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))$ un ind-groupe, limite inductive des schémas S^{N}. Remarquons que S^0 n'est autre que $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$.

Le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))/\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$ est naturellement un $\mathbb{C}$-espace (c'est le faisceau quotient). C'est un ind-schéma: soit $\mathrm{X}^{(\mathrm{N})}$ l'image du $\mathbb{C}$-espace $\mathrm{S}^{(\mathrm{N})}/\mathrm{S}^{(0)}$ dans X. Alors $\mathrm{X} = \varinjlim \mathrm{X}^{(\mathrm{N})}$ et on a ([2], cor. 2.4):

(3.2.4) Lemme. — *Le $\mathbb{C}$-espace $\mathrm{X}^{(\mathrm{N})}$ est isomorphe à un schéma projectif.*

Considérons maintenant le $\mathbb{C}$-groupe $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R}_{\mathrm{C}})$ défini par $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{SL}_r(\mathrm{R}_{\mathrm{C}_\mathrm{A}})$ où l'on désigne par $\mathrm{R}_{\mathrm{C}_\mathrm{A}}$ l'anneau des fonctions régulières de $\mathrm{C}^*_\mathrm{A} = \mathrm{C}^* \times_{\mathrm{C}} \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Ce $\mathbb{C}$-groupe a une structure naturelle de ind-groupe, limite des variétés T^{N} paramétrisant des matrices M de déterminant 1 dont les coefficients sont des fonctions méromorphes sur C ayant au plus un pôle d'ordre N en p. La version algébrique de l'identification ensembliste ci-dessus est la suivante:

(3.2.5) Théorème. — *([2], Prop. 3.4) Le champ algébrique $\mathcal{SL}_r(\mathrm{C})$ des fibrés vectoriels de rang r et de déterminant trivial est canoniquement isomorphe au champ* $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R}_{\mathrm{C}})\backslash\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})/\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$.

3.3. De l'espace de modules au champ

(3.3.1) Supposons $g \geq 1$. Soit $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r) \subset \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$ le sous-champ ouvert correspondant aux fibré vectoriels semi-stables et considérons le morphisme d'oubli $\varphi : \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r) \longrightarrow \mathcal{SU}_{\mathrm{C}}(r)$. L'image réciproque de $\mathcal{D}$ est la restriction d'un fibré inversible naturel sur $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$: le fibré déterminant défini de la manière suivante. Étant donné une famille de fibrés vectoriels $\mathrm{E} \to \mathrm{S} \times \mathrm{C}$, il existe un complexe parfait $\mathcal{K}^\bullet : \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1$ sur S représentant l'image directe dérivée de E. Le déterminant $\mathcal{D}$ de $\mathcal{K}^\bullet$ ne dépend pas du représentant choisi. On définit ainsi un fibré inversible sur le champ $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$, qu'on note encore $\mathcal{D}$. Il n'est pas difficile de voir qu'on a un isomorphisme

$$\varphi^* : \mathrm{H}^0(\mathcal{SU}_{\mathrm{C}}(r), \mathcal{D}^\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r), \mathcal{D}^\ell)$$

et un argument de codimension montre que le morphisme de restriction est de même un isomorphisme:

$$\rho : \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r), \mathcal{D}^\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r), \mathcal{D}^\ell)$$

3.4. Identifications

(3.4.1) Le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))/\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$ a été étudié dans le cadre de la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody par Kumar [17] et Mathieu [19] à une différence non-négligeable près. La structure de ind-schéma que définissent Kumar et Mathieu sur le quotient n'est pas *a priori* la même que celle qui est définie ci-dessus. Ceci ne se démontre qu'après quelques vérifications techniques. Par exemple on doit montrer que l'ind-schéma X ci-dessus est réduit (*i.e.* réunion croissante de schémas réduits) (*cf.* [2], Théorème 7.7). L'étape suivante consiste à se ramener à leurs résultats. D'après [25], le $\mathbb{C}$-groupe $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ admet une extension centrale universelle $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$ qui se scinde au dessus du sous-groupe $\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ de sorte que X soit isomorphe à $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})/(\mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}}))$. Le sous-groupe $\mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ admet un caractère canonique χ, à savoir la projection sur le premier facteur. Comme dans le cas des espaces homogènes en dimension finie, ce caractère définit un fibré inversible $\mathcal{L}_\chi$ sur X, muni d'une linéarisation *canonique* de $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$. Par conséquent, on obtient une action de l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$ (on reprend les notations de (2.1.2)) sur les espaces de sections globales $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell})$. L'analogue du théorème de Borel-Weil-Bott dans le cadre des algèbres de Kac-Moody, dû à Kumar et Mathieu, identifie cette représentation:

(3.4.2) THÉORÈME. — *On a un isomorphisme de $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$-modules* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell}) \simeq \mathrm{H}_0^*(\ell)$.

(3.4.3) Considérons la projection $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$. On a la proposition suivante

(3.4.4) PROPOSITION. — *([2], cor. 5.5) L'image réciproque $\pi^*(\mathcal{D})$ s'identifie à $\mathcal{L}_\chi$.*

(3.4.5) Il n'est pas difficile de voir que les sections de $\mathcal{D}^{\otimes \ell}$ sont les sections $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes de $\pi^*(\mathcal{D})^{\otimes \ell}$. Mais pour conclure il faut prendre les invariants par *rapport à l'algèbre* $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$. L'argument crucial pour cela est que l'ind-schéma $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ est réduit ([2], proposition 6.4). De là, on déduit d'une part que $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ n'admet comme caractères que le caractère trivial et d'autre part que l'inclusion de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ se relève de façon unique en une inclusion de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$. Par conséquent, les $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-linéarisations de $\mathcal{L}_\chi$ données par d'une part par (3.4.4) et d'autre part par la $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$-linéarisation canonique, via l'inclusion ci-dessus de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$, sont les mêmes. Il s'ensuit que l'action de $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$ sur $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell})$ est la restriction de l'action de $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$ sur $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell}) \simeq \mathrm{H}_0^*(\ell)$. Le théorème se déduit alors du fait que, X et $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ étant *réduits*, les sections $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes de $\mathcal{L}_\chi$ sont les sections $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes ([2], 7.4).

4. FORMULES EXPLICITES

4.1. Les caractères de l'anneau de fusion

(4.1.1) Il reste à expliciter l'expression $\sum_{\chi \in \Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n) \chi(\omega)^{g-1}$ de la formule du paragraphe (1.3.6) dans le cadre de la théorie conforme du paragraphe 2. D'après (1.3.6), il s'agit de décrire le spectre de l'anneau de fusion associé. Ceci est fait dans [13] pour les groupes classiques et pour G_2. On se fixe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ simple et un entier $\ell \geq 0$. Grâce à la proposition (2.6.2), l'anneau de fusion $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ s'identifie au $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les classes d'isomorphisme des représentations L_λ, $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$, muni du produit défini de la manière suivante. Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{P}_\ell$. Définissons le produit tensoriel modifié:

$$\mathrm{L}_\lambda \dot{\otimes} \mathrm{L}_\mu := {}^{\mathrm{L}_\lambda \otimes \mathrm{L}_\mu}\big/_{\mathrm{M}_{\lambda,\mu}},$$

où $\mathrm{M}_{\lambda,\mu}$ le $\mathfrak{g}$-module engendré par les composantes isotypiques correspondant au poids j_1 de $\mathrm{L}_\lambda^{(j_2)} \otimes \mathrm{L}_\mu^{(j_3)}$ pour tout $\{j_1, j_2, j_3\}$ tel que $j_1 + j_2 + j_3 > 2\ell$. Alors on a $[\mathrm{L}_\lambda] \cdot [\mathrm{L}_\mu] = [\mathrm{L}_\lambda \dot{\otimes} \mathrm{L}_\mu]$.

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ est naturellement un quotient du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ ([1], §8). Par contre, vérifier que c'est un quotient en tant qu'anneau est plus délicat.

(4.1.2) CONJECTURE. — *Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\pi : \mathrm{R}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'anneau.*

(4.1.3) Cette conjecture est démontrée dans Faltings [13] pour les groupes classiques et G_2. En raison du fait que $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ est engendré en tant que $\mathbb{Z}$-algèbre par les représentations L_ϖ associés aux poids fondamentaux ϖ, il suffit de vérifier que $\pi([\mathrm{E}] \cdot [\mathrm{F}]) = \pi([\mathrm{E}])\pi([\mathrm{F}])$ pour $\mathrm{F} = \mathrm{L}_\varpi$. Dans le cas où l'on a $(\varpi, \theta) = 1$ pour les poids fondamentaux (*i.e.* A_r et C_r) la conjecture est très facile à vérifier. Mais déjà, dans le cas où il existe ϖ tel que $(\varpi, \theta) = 2$ (*i.e.* B_r, D_r et G_2), elle n'est plus évidente. Dans les autres cas, elle est ouverte à présent.

(4.1.4) La conjecture (4.1.2) est équivalente à la description suivante du spectre de $R_\ell(\mathfrak{g})$. Soit G le groupe simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$ et T le tore maximale de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$. Les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finies peuvent être considérés comme G-modules. Si $\lambda \in P$, on note e^λ le caractère de T, donnée par $e^\lambda(\exp(H)) = \exp \lambda(H)$. Chaque $t \in T$ définit un caractère

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}_*(t): & R(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [V] & \mapsto & \mathrm{Tr}_V(t) \end{array}$$

On montre, en utilisant la formule de Weyl, que les caractères $\mathrm{Tr}_*(t) : R(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui se factorisent (en tant que forme linéaire) à travers $R_\ell(\mathfrak{g})$ sont associés aux caractères $T_\ell = \{t \in T \mid, \ e^\alpha(t) = 1 \ \forall \alpha \in (\ell + g^*)Q_{lg}\}$ qui sont *réguliers, i.e.* $e^\rho(t) = 1$, ρ étant la demi-somme des racine positives. Ici Q_{lg} désigne le sous-réseau engendré par les racines longues du réseau Q engendré par toutes les racines. Pour $t \in T_\ell^{reg}$, la forme linéaire $R_\ell(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ obtenue par factorisation sera notée χ_t. Cette forme linéaire ne dépend que de la classe de t dans T_ℓ^{reg}/W, où W désigne le groupe de Weyl et deux classes différentes donnent des formes différentes. La conjecture (4.1.2) équivaut à la suivante:

(4.1.5) CONJECTURE. — *Les caractères de* $R_\ell(\mathfrak{g})$ *sont les* $\chi_t : R_\ell(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *(pour* $t \in T_\ell^{reg}/W$*).*

4.2. La formule de Verlinde explicite

(4.2.1) Moyennant l'égalité $\sum_{\lambda \in P_\ell} \mid \mathrm{Tr}_{L_\lambda}(t) \mid^2 = \#T_\ell/\Gamma(t)$ avec $\Gamma(t) = \prod_{\alpha \in \Delta} (e^\alpha(t) - 1)$ ([1], Lemma 9.7), on obtient, d'après ce que précède, la formule de Verlinde explicite:

(4.2.2) THÉORÈME. — *(Formule de Verlinde) Supposons que* $\mathfrak{g}$ *soit de type classique ou* G_2. *Soit* ℓ *un entier* ≥ 0. *Soit* $(C, \underline{p})$ *une courbe n-pointée dont les points marquées* p_i *sont étiquetés par les poids* $\lambda_i \in P_\ell$ *et* $V_C(\underline{p}; \underline{\lambda})$ *l'espace des vacua associé. Alors*

$$\dim V_C(\underline{p}; \underline{\lambda}) = \sum_{t \in T^{reg}/W} \mathrm{Tr}_{L_{\underline{\lambda}}}(t) \left(\frac{\#T_\ell}{\Gamma(t)} \right)^{g-1}.$$

(4.2.3) La formule ci-dessus peut se reformuler, en identifiant T_ℓ^{reg}/W à P_ℓ ([1], 9.7):

$$\dim V_C(\underline{p}; \underline{\lambda}) = (\#T_\ell)^{g-1} \sum_{\mu \in P_\ell} \mathrm{Tr}_{L_{\underline{\lambda}}}(\exp \frac{2\pi i}{\ell + g^*}(\mu + \rho)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left| 2 \sin \frac{\pi}{\ell + g^*}(\alpha, \mu + \rho) \right|^{2-2g}.$$

Les inclusions $(\ell + g^*)Q_{lg} \subset Q_{lg} \subset Q \subset P$ montrent $\#T_\ell = (\ell + g^*)^{\mathrm{rang}\,\mathfrak{g}} \#(P/Q)\#(Q/Q_{lg})$. Le cardinal de Q/Q_{lg} est égal à 2 pour B_r, 2^{r-1} pour C_r, 4 pour F_4, 6 pour G_2 et 1 sinon.

(4.2.4) EXEMPLE. — En spécialisant au cas de $\mathfrak{sl}_{r+1}$ sans points marqués, on obtient la formule suivante pour la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{V_C}(\emptyset)$:

$$((\ell+r+1)^r(r+1))^{g-1} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r\geq 1 \\ n_1+\ldots+n_r\leq \ell+r}} \prod_{1\leq i<j\leq r+1} \left(2\sin\frac{\pi}{\ell+r+1}(n_i+\ldots+n_{j-1})\right)^{2-2g}.$$

D'autres exemples, dont les séries B,C et D, se trouvent dans [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEAUVILLE. *Conformal Blocks, Fusion rules and the Verlinde formula,* Prépublication alg-geom/9405001 (1994)

[2] A. BEAUVILLE ET Y. LASZLO. *Conformal blocks and generalized theta functions,* Comm. Math. Physics **164** (1994) 385-419

[3] A. BEAUVILLE, M. S. NARASIMHAN ET S. RAMANAN. *Spectral curves and the generalised theta divisor,* J. reine angew. Math. **398** (1989) 169-179

[4] A. BEILINSON ET V. SCHECHTMANN. *Determinant bundles and Virasoro algebras,* Comm. Math. Phys. **118** (1988) 651-701

[5] A. BERTRAM. *Generalized* SU(2)*-theta functions,* Inv. Math. **113** (1993) 351-372

[6] A. BERTRAM ET A. SZENES. *Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles II,* Topology **32** (1993) 599-609

[7] G. DASKALOPOULOS ET R. WENTWORTH. *Local degeneration of the moduli space of vector bundles and factorisation of rank 2 theta functions,* Math. Annalen **297** (1992) 417-466

[8] G. DASKALOPOULOS ET R. WENTWORTH. *Factorisation of rank 2 theta functions II: the Verlinde formula,* Prépublication (1994)

[9] R. DONAGI ET L. TU. *Theta functions for* SL(n) *versus* GL(n), Prépublication (1992)

[10] S. DONALDSON. *Gluing techniques in the cohomology of moduli spaces,* à paraître au volume en mémoire de Andreas Floer (edité par H. Hofer, C. Taubes, E. Zehnder) (1994)

[11] J. M. DREZET ET M. S. NARASIMHAN. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.*, Invent. math. **97** (1989) 53-94

[12] G. FALTINGS. *G-bundles and projective connections,* J. Alg. Geometry **2** (1993) 507-568

[13] G. FALTINGS. *A proof of the Verlinda formula,* J. Alg. Geometry **3** (1994) 347-374

[14] N. HITCHIN. *Flat connections and geometric quantization,* Comm. Math. Phys. **131** (1990) 347-380

[15] V. KAC. *Infinite Dimensional Lie Algebras,* Cambridge University Press, Cambridge (1985)

[16] V. KNIZHNIK ET A. ZAMOLODCHIKOV. *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions,* Nucl. Phys. B **247** (1984)

[17] S. KUMAR. *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting,* Inv. math. **89** (1987) 395-423

[18] S. KUMAR, M. S. NARASIMHAN ET A. RAMANATHAN. *Infinite Grassmanians and Moduli Spaces of* G-*bundles,* Math. Annalen **300** (1993) 395-423

[19] O. MATHIEU. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales,* Astérisque **159-160** (1988)

[20] M. S. NARASIMHAN ET T. R. RAMADAS. *Factorisation of generalized Theta functions I,* Inv. Math. **114** (1993) 565-623

[21] W. M. OXBURY ET S. M. J. WILSON. *Reciprocity laws in the Verlinde formulae for classical groups,* Prépublication, Durham University (1994)

[22] T. PANTEEV. *Comparison of generalized theta functions,* Prépublication (1993)

[23] C. PAULY. *Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes,* Prépublication (1994)

[24] T. R. RAMADAS. *Factorisation of generalized theta functions II,* Prépublication, TIFR Bombay (1994)

[25] G. SEGAL ET G. WILSON. *Loop groups and equations of KdV type,* Pub. math. IHES **61** (1985) 5-65

[26] A. SZENES. *Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles I,* Topology **32** (1993.1) 587-597

[27] A. SZENES. *The combinatorics of the Verlinde formulas,* Prépublication (1994)

[28] M. THADDEUS. *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula,* Inv. Math. **117** (1994)

[29] Y. TSUCHIMOTO. *On the coordinate-free description of the conformal blocks,* J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993) 29-49

[30] A. TSUCHIYA, K. UENO ET Y. YAMADA. *Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries,* Adv. Studies in Pure Math. **19** (1989) 459-566

[31] A. TYURIN. *On periods of quadratic differentials,* Russ. Math. Surv. **33 No. 3** (1978) 159

[32] E. VERLINDE. *Fusion rules and modular transformations in 2d-conformal field theory.,* Nucl. Phys. B **300** (1988) 360-376

[33] D. ZAGIER. *On the cohomolgy of moduli spaces of rank two vector bundles over curves,* (1991)

[34] D. ZAGIER. Values of the zeta function and their applications, *à paraître dans les annales du congrès européen des mathématiques* (1992)

Christoph SORGER
Institut de mathématiques de Jussieu
Université Denis Diderot (Paris 7)
Case Postale 7012
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05
e-mail: sorger@mathp7.jussieu.fr