VAUGHAN JONES

Fusion en algèbres de von Neumann et groupes de lacets

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 800, p. 251-273

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__251_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 800

Juin 1995

FUSION EN ALGÈBRES DE VON NEUMANN ET GROUPES DE LACETS [d'après A. WASSERMANN]

par **Vaughan JONES**

1. INTRODUCTION

A. Connes a défini une notion de produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes_B \mathcal{H}_2$ où A, B, C sont des algèbres de von Neumann, $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert qui est un $A - B$ bimodule et $\mathcal{H}_2$ est un espace de Hilbert qui est un $B - C$ bimodule. Bien entendu $\mathcal{H}_1 \otimes_B \mathcal{H}_2$ est un $A - C$ bimodule. Cette notion donne une généralisation de celle d'automorphisme où la composition d'automorphismes est remplacée par ce produit tensoriel. Pour une algèbre de von Neumann donnée, il serait souhaitable de comprendre, dans la mesure du possible, la structure de ses bimodules avec produit tensoriel. Le cas, déjà bien étudié, des automorphismes montre que c'est un problème difficile mais riche en conséquences. Comme premier pas, on peut chercher des petits sous-systèmes de bimodules, fermés pour le produit tensoriel. Les travaux d'Antony Wassermann donnent de tels systèmes où l'algèbre de von Neumann est le facteur hyperfini de type III_1. La structure de ces systèmes de bimodules est très intéressante car il y a des liens avec la théorie des champs conformes, les variétés de dimension 3 (TQFT), les sous-facteurs, la mécanique statistique, les groupes quantiques et d'autres domaines de mathématiques et physique.

On trouve les algèbres de von Neumann qu'on veut, agissant concrètement sur leurs bimodules, en regardant les représentations unitaires (projectives) des groupes de lacets $LG = \{f : S^1 \to G \mid f \text{ est } C^\infty\}$, où G est un groupe de Lie compact, simplement connexe. Soit $(\mathcal{H}, \pi)$ une représentation dans la série discrète de LG (représentations irréductibles à énergie positive, indexées par le "niveau" ℓ et une représentation irréductible de G), soit I un intervalle de S^1, et notons $(L_I G)''$ l'algèbre de von Neumann engendrée sur $\mathcal{H}$ par $\{\pi(f) : f(\theta) = 1 \text{ pour } \theta \in S^1 \backslash I\}$. On sait que $(L_I G)''$ est un facteur hyperfini de type III_1 et $\mathcal{H}$ devient donc un $(L_I G)'' - (L_{I^c} G)''^{\mathrm{op}}$-bimodule où I^c est l'intervalle complémentaire à I. La fusion de Connes devient, dans ce contexte, une opération de produit tensoriel $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ où $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sont dans la série discrète de LG, et $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ reçoit une structure de $L_I G \times L_{I^c} G$-module. Les résultats principaux de Wassermann sont les suivants (dans le cas où $G = SU(N)$):

(1) $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ se décompose en somme directe d'un nombre fini de $L_I G \times L_{I^c} G$ modules irréductibles $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}' \cong \bigoplus_i \mathcal{H}_i$.

(2) Chaque $\mathcal{H}_i$ dans la décomposition est obtenue par restriction à $L_I G \times L_{I^c} G$ d'une représentation de la série discrète de LG.

(3) Si $N^{\rho}_{\pi,\nu}$ est le nombre de fois que l'élément ρ de la série discrète intervient dans la décomposition de $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\nu$, $N^{\rho}_{\pi,\nu}$ est la modification, connue en théorie conforme, de la multiplicité de ρ dans $\pi \otimes \nu$ où π, ν et ρ sont des représentations irréductibles de G. Par exemple, pour $G = SU(2)$ on obtient la formule de Clebsch-Gordan tronquée:

$$i \boxtimes j = \bigoplus_{\substack{k=|j-i| \\ i+j+k \leq \ell}}^{j+i} k \, .$$

(4) Le sous-facteur $(L_I G)'' \subset (L_{I^c} G)'$ est d'indice fini, l'indice donné par le carré de la dimension "quantique" de la représentation de G. Par exemple, pour la représentation $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ de $SU(2)$, on obtient $4\cos^2 \pi/(\ell+2)$ comme indice. (C'était la conjecture originale de Jones-Wassermann.)

L'outil fondamental pour démontrer ces résultats est l'étude des opérateurs à vertex de Knizhnik et Zamolodchikov, découverts dans [KZ] et définis au niveau purement algébrique dans [TK]. Il faut les développer en tant que distribution à valeur opératorielle entre espaces de Hilbert. Dès le départ, il faut une construction globale, manifestement unitaire, des représentations de la série discrète. Cette construction est fournie par la seconde quantification fermionique et les opérateurs à vertex sont construits avec les champs fermioniques. Les relations de tresses entre les opérateurs à vertex permettent de définir un entrelacement entre $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ et $\oplus \mathcal{H}_i$, qui est unitaire par le lemme de Schur et le fait que la restriction de π à $L_I G \times L_{I^c} G$ reste irréductible. Les propriétés nécessaires de ces relations de tresses sont démontrées par le calcul de la monodromie de l'équation de Knizhnik et Zamolodchikov.

Les travaux de Wassermann sont très liés à la théorie quantique des champs. En théorie algébrique des champs quantiques, on associe une algèbre de von Neumann à chaque région de l'espace-temps. L'algèbre $(L_I G)''$ serait l'algèbre associée à l'intervalle I dans une moitié chirale de la théorie des champs du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten.

Dans [DHR] Doplicher, Haag et Roberts ont vu plusieurs ingrédients de la fusion. Ils se servaient des endomorphismes plutôt que des bimodules (c'est équivalent dans les facteurs de type III) et ce qu'ils appelaient "secteur de supersélection" correspondra ici à une représentation à énergie positive de LG. Comme ils travaillaient surtout en dimension 4, la fusion était très commutative et les opérations de tresse étaient des permutations. Avec le nouvel accent mis sur les théories en basse dimension et l'intérêt des groupes de tresses et les sous-facteurs ([Jo1],[Jo4]), les idées de [DHR] ont été reprises par plusieurs chercheurs, notamment dans [Fr],[FRS],[Lo]. Ils ont trouvé les conséquences formelles d'une théorie des secteurs de supersélection, y compris les sous-facteurs et les groupes de tresses. Mais il n'y avait aucun exemple non trivial de leurs théories. Ces exemples sont fournis par Wassermann. Ainsi ses travaux s'inscrivent tout à fait dans le programme de la théorie ***constructive*** des champs quantiques.

2. FUSION DE CONNES ("Connes-fusion")

(Toute algèbre aura une identité 1 et si elle agit sur un espace vectoriel, 1 agira par l'identité.)

En algèbre associative les bimodules sont fondamentaux. Si A et B sont des algèbres, un $A-B$ bimodule est un espace vectoriel V avec action à gauche de A et à droite de B. Pour $a \in A$, $b \in B$ et $v \in V$, on écrit $a\xi b$ et on écrit ${}_AV_B$ pour signifier un tel bimodule. En particulier une algèbre A devient un bimodule sur elle-même: ${}_AA_A$. La notation du produit tensoriel est simple: si on a ${}_AV_B$ et ${}_BV_C$, on définit ${}_AV \otimes_B W_C$ comme quotient de $V \otimes W$ par le sous-espace engendré par les $vb \otimes w - v \otimes bw$. Si α est un automorphisme de A, on peut tordre l'action à droite de A pour obtenir un bimodule ${}_AA_A^\alpha : a.b.a' = ab\alpha(a')$. On a évidemment $({}_AA_A^\alpha) \otimes_A ({}_AA_A^\beta) \cong {}_AA_A^{\alpha\beta}$. Le système de tous les bimodules constitue donc une généralisation du groupe des automorphismes de A (modulo automorphismes intérieurs). Sur les bimodules, on dispose en plus d'une opération de somme directe. On peut sans doute parler de catégories.

Pour les algèbres de von Neumann (dorénavant écrites avN), on impose aux espaces vectoriels d'être des espaces de Hilbert et aux actions, à gauche et à droite, d'être continues. La somme directe de bimodules se fait sans problème, mais pour faire un produit tensoriel il faut procéder avec soin pour deux raisons.

(1) Même dans les cas les plus simples, si on a ${}_A\mathcal{H}_B$ et ${}_B\mathcal{K}_C$, le sous-espace engendré par les $vb \otimes w - v \otimes bw$ sera ***dense*** dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$,

(2) Même pour rendre A un bimodule sur elle-même, on a besoin de la théorie de Tomita-Takesaki, que nous allons esquisser.

C'est A. Connes qui a surmonté ces difficultés pour la première fois (voir [Co1],[Sa]).

Théorie de Tomita-Takesaki-Connes (simplifiée!)

Soient M une *avN* sur un Hilbert $\mathcal{H}_\Omega$ et $\Omega \in \mathcal{H}_\Omega$ un vecteur privilégié qu'on appelle "vide", tels que $M\Omega$ et $M'\Omega$ soient denses dans $\mathcal{H}_\Omega$. (On écrit X' pour le commutant d'un ensemble X d'opérateurs bornés sur un Hilbert.) L'opérateur $S : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_\Omega$ est alors la fermeture (dans le sens des opérateurs non-bornés) de l'application antilinéaire $* : x\Omega \to x^*\Omega$. On écrit $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de S où J est unitaire antilinéaire et Δ est positif, à noyau égal a zéro. Le théorème de Tomita-Takesaki affirme que :

(1) $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$ — d'où l'existence d'un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, le groupe "modulaire": $\sigma_t^\Omega(x) = \Delta^{it}x\Delta^{-it}$.

(2) $JMJ = M'$ — ainsi le choix du vide Ω fait de $\mathcal{H}_\Omega$ un bimodule ${}_M(\mathcal{H}_\Omega)_M$ et on a $x\xi y = xJy^*J\xi$. C'est l'analogue de ${}_MM_M$ en algèbre.

Les facteurs, c'est-à-dire les *avN* dont le centre est égal à $\mathbb{C}1$, ont une première classification en types I, II et III, due à Murray et von Neumann ([MvN]). C'est le cas des types III qui nous intéresse. D'après [MvN], on sait que, si p et q sont des projecteurs non nuls et différents de 1, dans un facteur de type III, il existe un unitaire u dans l'algèbre tel que $upu^* = q$. Connes a défini un invariant $S(M)$, l'intersection des spectres de Δ quand Ω parcourt tous les vides possibles. Un facteur est dit de type III_1 lorsque $S(M) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Pour définir la fusion (ici égale au produit tensoriel de bimodules), Wassermann prend un point de vue légèrement différent de celui de Connes, s'inspirant de la théorie quantique des champs conformes où les états sont identifiés avec les opérateurs qui les créent à partir du vide. Soit donc $(M, \mathcal{H}_\Omega)$ comme ci-dessus et ${}_N\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_P$ deux bimodules. On écrit $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H})$ et $\mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{K})$ pour les ensembles d'opérateurs bornés qui entrelacent les actions indiquées de M. On peut identifier $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H})$ avec un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ via $x \leftrightarrow x\Omega$. Le produit tensoriel $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}) \otimes \mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{K})$ est de manière naturelle un $N - P$ bimodule. On définit sur cet espace un produit scalaire par $\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2\rangle = \langle x_2^* x_1 y_2^* y_1 \Omega, \Omega\rangle$ et le complété correspondant est encore un $N - P$ bimodule noté $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ et appelé ***fusion de Connes*** de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.

Il est à noter qu'on n'a ***pas*** $vm \otimes w = v \otimes mw$ (pour $m \in M$) mais plutôt $vm \otimes w = v \otimes \sigma_{-\frac{i}{2}}(m)$.

La fusion est associative (résultat de Connes). Si en plus ${}_N\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_N$ sont irréductibles, le bimodule $\mathcal{K}$ est appelé ***conjugué*** de $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ et

$\mathcal{K}\boxtimes\mathcal{H}$ contiennent $\mathcal{H}_\Omega$. On montre qu'un tel $\mathcal{K}$ est unique à isomorphisme près et les bimodules vides apparaissent sans multiplicité. En effet $\mathcal{K}$ est isomorphe à l'espace Hilbertien conjugué $\overline{\mathcal{H}}$. On définit des "projecteurs de Jones" e dans $\mathcal{H}\boxtimes\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{H}}\boxtimes\mathcal{H}$ et on a les relations de [J1] pour les projecteurs de Jones $e\otimes$ id et id $\otimes e$ sur $\mathcal{H}\boxtimes\overline{\mathcal{H}}\boxtimes\mathcal{H}$. La constante dans ces relations définit l'indice du sous-facteur $N \subset M^{\mathrm{opp}}$.

3. REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LACETS

Soit $G = SU(N)$, agissant sur $V = \mathbb{C}^N$. On note LG le groupe des fonctions C^∞, $f : S^1 \to G$ avec $(f_1f_2)(z) = f_1(z)f_2(z)$ où S^1 sera $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. C'est un groupe de Lie de dimension infinie ([PS]). Pour une représentation de G sur W, LG agit de manière évidente sur les fonctions $C^\infty(S^1, W)$. Cette action s'étend au produit semi-direct $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$, avec action évidente de $\mathrm{Rot}(S^1)$ — le groupe des rotations du cercle — sur LG et $C^\infty(S^1, W)$.

Il y a une série discrète de représentations projectives irreductibles de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ qui ont la propriété remarquable que le spectre de $i\frac{d}{d\theta}$ (le générateur infinitésimal de l'action de $\mathrm{Rot}(S^1)$) est non-négatif. C'est la définition d'une représentation ***à énergie positive***. Pour comprendre cette série discrète, on commence par construire une représentation "fondamentale". Pour les applications aux avN, il faut que cette construction soit manifestement unitaire et globale (sans référence à l'algèbre de Lie). On se sert de la seconde quantification fermionique de $L^2(S^1, V)$.

L'espace de Fock fermionique, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, d'un Hilbert $\mathcal{H}$, est l'espace de Hilbert $\oplus_{n=0}^\infty \Lambda^n\mathcal{H}$ ($\Lambda^0\mathcal{H} = \mathbb{C}\Omega$ — le "vide" Ω) et on a une action sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ de l'algèbre $CAR(\mathcal{H})$ — la C^*-algèbre engendrée sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ par les opérateurs $\tilde{a}(v)$: $\tilde{a}(v)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. On a $\tilde{a}(v)\tilde{a}(w) + \tilde{a}(w)\tilde{a}(v) = 0$ et $\tilde{a}(v)\tilde{a}^*(w) + \tilde{a}^*(w)\tilde{a}(v) = \langle v, w\rangle \mathrm{id}$. Si on pose $c(v) = \tilde{a}(v) + \tilde{a}(v)^*$, on vérifie que $c(v)c(w) + c(w)c(v) = 2\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)$ (l'algèbre de Clifford), et que n'importe quelle structure complexe $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{H}$ définit une nouvelle représentation irréductible de l'algèbre $CAR(\mathcal{H})$ via $a(f) = \frac{1}{2}(c(f) - ic(\mathcal{J}f))$. Si P est un projecteur sur $\mathcal{H}$, on peut définir un tel $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}(Pv + (1-P)v) = iPv - i(1-P)v$. On sait ([PS],[BS]) que les représentations qui correspondent à 2 projecteurs P et Q sont équivalentes si et seulement si $P - Q$ est de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$. D'où on déduit une représentation projective π_P sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ du groupe $U_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$ des unitaires u tels que $[u, P]$ est de Hilbert-Schmidt. On a $\pi_P(u)a(f)\pi_P(u)^* = a(uf)$. On a aussi un isomorphisme entre $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}(P\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}(\overline{(1-P)\mathcal{H}})$.

L'exemple qui nous intéresse est celui où on prend $\mathcal{H} = L^2(S^1, V)$ et $P =$ le projecteur sur l'espace de Hardy des valeurs au bord des fonctions L^2, holomorphes à l'intérieur de $S^1 \subset \mathbb{C}$. Un calcul facile montre que $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ agit sur $L^2(S^1, V)$ par des éléments de $U_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$. D'où l'existence de la représentation (projective) fondamentale de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$. En fait cette représentation s'étend à $LG \rtimes \mathrm{Diff}(S^1)$. En particulier le groupe de Möbius agit sur $L^2(S^1, V)$ en préservant P, et par conséquence agit canoniquement sur $\mathcal{F}(L^2(S^1, V))$.

Toute autre représentation irréductible à énergie positive de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ se trouve comme sous-espace d'un produit tensoriel $\otimes^\ell \pi_P$. L'entier ℓ, appelé le "niveau", est un invariant (qui définit l'extension centrale de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$) et on sait que les représentations irréductibles à énergie positive sont classées (après multiplication préalable par un caractère de $\mathrm{Rot}(S^1)$) par le sous-module des points fixes pour $\mathrm{Rot}(S^1)$, qui est une représentation irréductible W de G. La représentation de niveau ℓ qui correspond à la représentation triviale de G est la fermeture du sous-espace $LG \rtimes \mathrm{Rot}\, S^1$-invariant engendré par le "vide" $\Omega \otimes \Omega \otimes \cdots \otimes \Omega$.

Pour un niveau ℓ donné, il n'y a qu'un nombre fini de représentations W de G qui interviennent. Les représentations irréductibles de G sont classées par les ***partitions*** $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ avec $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_N \geq 0$ et seules les partitions avec $f_1 - f_N \leq \ell$ sont permises. On dit qu'une représentation de $SU(N)$ est ***admissible*** si sa partition est permise. Pour $SU(2)$, par exemple, il y a $\ell + 1$ représentations irréductibles à énergie positive au niveau ℓ.

Définition. *Pour ℓ un entier ≥ 1 et W une représentation irréductible admissible de G on note π_W sur $\mathcal{H}_W$ la représentation à énergie positive décrite et construite ci-dessus. Le cas où W est la représentation triviale est notée π_Ω sur $\mathcal{H}_\Omega$.*

Du point de vue des algèbres de Lie, l'algèbre complexifiée de $LG \rtimes \mathrm{Rot}\, S^1$ est $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{C}$ où $\mathfrak{g} = su(N)$. L'algèbre $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{C}$ a des extensions centrales données par des 2-cocycles $c : L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ où $c(f, g) = (\text{constante})\int_{S^1} \langle f, dg \rangle$ et où le niveau ℓ correspond à un choix de la constante (l'extension centrale est triviale sur $\mathrm{Rot}(S^1)$). Les lacets polynomiaux $\mathfrak{g} \otimes \{\sum_{n=-k}^{k} c_n z^n\}$ forment une sous-algèbre dense de $L\mathfrak{g}$ et on voit apparaître les algèbres de Kac-Moody affines ([PS],[Kc]).

4. LES GROUPES LOCAUX ET LES ALGÈBRES LOCALES

Si I est un intervalle de S^1 avec intervalle complémentaire I^c, on définit $L_I G$ comme le sous-groupe de LG de tous le lacets qui sont égaux à 1 en dehors de I. Par l'action du groupe de Möbius, on peut toujours se ramener au cas $I = \{z \in S^1 \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. Dans une représentation donnée, on veut connaître la structure de l'avN $(L_I G)''$ engendrée par les unitaires qui représentent $L_I G$.

Dans un premier temps, on calcule les ingrédients de la théorie de Tomita-Takesaki-Connes pour l'avN $\mathfrak{A}_I$ engendrée par les $a(f)$ sur $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$, où $\mathrm{supp}(f) \subseteq I$. La théorie abstraite de ce calcul est bien connue (voir [Ar]). Dans notre cas particulier, on obtient :

Théorème A.

(i) *Le commutant de* $\mathfrak{A}_I$ *est l'avN engendrée par les* $Ua(f)$ *où* $\mathrm{supp}(f) \subset I^c$, *et* U *est l'unitaire canonique sur* $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$ *qui implémente la transformation* $f \mapsto -f$ *sur* $L^2(S^1,V)$.

(ii) $\sigma_t^\Omega(a(f)) = a(f')$ *où* $f'(z) = \frac{1}{z\sinh t+\cosh t}\, f\left(\frac{z\cosh t+\sinh t}{z\sinh t+\cosh t}\right)$.

(iii) J *est l'opérateur antilinéaire obtenu de* $\tilde{J} : L^2(S^1,V) \to L^2(S^1,V)$, $(\tilde{J}f)(z) = \bar{z}f(\bar{z})$.

(iv) $\mathfrak{A}_I$ *est un facteur de type* III_1.

La partie (iv) se déduit de (ii) par un résultat de Connes dans [Co3], et le fait que l'action du groupe modulaire est ***ergodique*** (c'est-à-dire les points fixes sont les scalaires).

Un résultat de Takesaki dans [Ta2] nous permet de passer directement aux sous-algèbres stables par σ_t^Ω. C'est évidemment le cas des $(L_IG)''$ car σ_t^Ω est géométrique. On voit tout de suite que $(L_IG)''$ est un facteur de type III_1. On peut également passer aux produits tensoriels de $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$ pour obtenir le résultat suivant.

Théorème B.

(i) *Dans la représentation* $\mathcal{H}_\Omega$ *(au niveau* ℓ*),* $(L_IG)''$ *est un facteur de type* III_1 *et le groupe modulaire est donné par la même formule que dans le Théorème A. De plus* $J\pi_\Omega(g)J = \pi_\Omega(g')$ *où* $g'(z) = g(\bar{z})^*$. $(g : S^1 \to G)$.

(ii) *Le commutant de* $(L_IG)''$ *est* $(L_{I^c}G)''$ *sur* $\mathcal{H}_\Omega$.

(iii) *Toutes les représentations irréductibles à un niveau donné sont équivalentes quand on les restreint à* L_IG.

On sait d'ailleurs que $(L_IG)'' \subset (L_{I^c}G)'$ (car G est simplement connexe) pour toute représentation à énergie positive. On dispose donc d'un ***sous-facteur***. Dans le langage de la théorie algébrique des champs, l'égalité de $(L_IG)''$ et $(L_{I^c}G)'$ sur $\mathcal{H}_\Omega$ (le "secteur du vide") s'appelle ***dualité de Haag*** et le sous-facteur mesure le défaut de dualité de Haag (voir [DHR]). L'étude de ce sous-facteur nécessite bien du travail, mais on a un résultat immédiat assez facile.

Théorème C.

(i) *Les représentations irréductibles à énergie positive restent irréductibles (et inéquivalentes) lorsqu'on les restreint à $L_I G \times L_{I^c} G$.*

(ii) *Le sous-facteur $(L_I G)'' \subset (L_{I^c} G)'$ est irréductible.*

Fusion de Connes définie par LG

L'espace $\mathcal{H}_\Omega$ est un $L_I G \times L_{I^c} G$-module. Si $M = \pi_\Omega(L_I G)''$ et $N = \pi_\Omega(L_{I^c} G)''$, $\mathcal{H}_\Omega$ devient donc un $M - N^{\text{opp}}$ module. Par (iii) du théorème B, l'application $\pi_\Omega(g) \mapsto \pi_W(g)$ s'étend en un isomorphisme de M (resp. N) et $\pi_W(L_I G)''$ (resp. $\pi(L_{I^c}(G))''$) (W est une représentation irréductible admissible de G). Ainsi tout $\mathcal{H}_W$ est doté d'une structure canonique de $(M - N^{\text{opp}})$ bimodule. De plus, le calcul de la conjugaison modulaire J dans $\mathcal{H}_\Omega$ permet d'identifier M et N^{opp}. On dispose donc, pour chaque ℓ, d'un système fini de $M - M$ bimodules.

Dans la définition de la fusion de Connes, pour faire $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$, on remplace $\mathcal{H}_W$ par les opérateurs bornés entre $\mathcal{H}_\Omega$ et $\mathcal{H}_W$ qui entrelacent M. Entrelacer l'action à gauche de M équivaut à entrelacer $L_I G$ et on vérifie qu'entrelacer M à droite équivaut à entrelacer $L_{I^c} G$. On peut donc, si on veut, éliminer les algèbres de von Neumann de la définition de la fusion $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$.

5. LES OPÉRATEURS À VERTEX DE KNIZHNIK ET ZAMOLODCHIKOV

La partie (iii) du théorème B découle de la partie (i). En effet, si P_{W_1} et P_{W_2} sont les projecteurs sur $\otimes^\ell \mathcal{F}(L^2(S^1, V))$ sur des sous-espaces isomorphes à $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$, on sait qu'il existe un unitaire u dans le facteur de type III, $(L_I G)'$, tel que $u P_{W_1} u^* = P_{W_2}$. Cet unitaire fournit l'équivalence de $L_I G$-modules $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$. Mais pour des renseignements quantitatifs, il faut des opérateurs d'entrelacements plus explicites que ceux donnés par la théorie abstraite d'équivalence de projecteurs dans un facteur. On va trouver ces opérateurs dans les "opérateurs à vertex" découverts par Knizhnik et Zamolodchikov dans [KZ].

Nous avons déjà défini les représentations ***ordinaires*** de $LG \rtimes \text{Rot}(S^1)$ dans $L^2(S^1, W)$ et les représentations projectives irréductibles π_W sur $\mathcal{H}_W$. Si on fixe le niveau ℓ, les π_W correspondent toutes à une extension centrale fixée de $LG \rtimes \text{Rot}(S^1)$ et on a donc le droit de chercher des opérateurs d'entrelacement $\phi : L^2(S^1, W) \otimes \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Un tel ϕ peut aussi s'écrire $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Ce ϕ sera en général une distribution à valeurs dans les opérateurs non-bornés, d'où la nécessité de restreindre les domaines.

On définit $L^2(S^1,W)^0$ et $\mathcal{H}_W^0$ comme les espaces des combinaisons linéaires finies des vecteurs propres pour les actions de $\mathrm{Rot}(S^1)$. Ce sont des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués et $\mathbb{N}$-gradués. Quand on passe à l'algèbre de Lie, la relation d'entrelacement

$$(EL) \qquad \pi_{W_2}(g)\phi(f) = \phi(gf)\pi_{W_1}(g) \qquad (\text{pour} \quad g \in LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1))$$

devient

$$(V1) \qquad [x(n), \phi(v,m)] = \phi(xv, m+n)$$

$$(V2) \qquad [d, \phi(v,m)] = -m\phi(v,m)$$

où $x(n)$ est la fonction $z \mapsto z^n x$ pour $x \in \mathfrak{g}$, $\phi(v,m) = \phi(z^m v)$, $v \in W_0$ ($z^m v$ est la fonction de S^1 dans W qui vaut $z^m v$ sur z) et d est $i\,\frac{d}{d\theta}$ — le générateur infinitésimal de Rot S^1. C'est ce genre de formule qu'on voit dans [TK]. Les opérateurs $\phi(v,m)$ envoient $\mathcal{H}_{W_1}^0$ dans $\mathcal{H}_{W_2}^0$ et $x(n)$ est défini sur $\mathcal{H}_{W_1}^0$, et $\mathcal{H}_{W_2}^0$.

Définition. *Un* ***opérateur à vertex primaire*** *est une application linéaire* $\phi : L^2(S^1,W_0)^0 \otimes \mathcal{H}_{W_1}^0 \to \mathcal{H}_{W_2}^0$ *telle que ses composantes* $\phi(v,m)$ *satisfont à* (V1) *et* (V2).

Un tel ϕ ($\neq 0$) n'existe que pour certains choix de W_0, W_1, W_2. Pour dire exactement les choix possibles, il nous faut une petite discussion.

Il est commode d'indexer les représentations de $SU(2)$ par leur "spin", un demi-entier $j \geq 0$. La représentation V_j est de dimension $2j+1$ et on a

$$V_j \otimes V_k \cong \bigoplus_{\substack{j'+j+k \text{ entier} \\ |j-k| \leq j' \leq j+k}} V_{j'}$$

On dit qu'un triplet $(V_j, V_k, V_{k'})$ est admissible au niveau ℓ si $\dim(V_j \otimes V_k \otimes V_{k'}) \neq 0$ et $j+k+k' \leq \ell$. C'est un résultat de Tsuchiya et Kanie que, pour $SU(2)$ au niveau ℓ, un opérateur à vertex $\phi : L^2(S^1,V_j)^0 \otimes \mathcal{H}_{V_k}^0 \to \mathcal{H}_{V_{k'}}^0$ existe si et seulement si le triplet $(V_j, V_k, V_{k'})$ est admissible. En général on prend une copie de $SU(2)$ dans $SU(N)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & & & & 0 \\ c & d & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2) \right\},$$

que l'on note H.

Définition. *Un triplet* (W_0, W_1, W_2) *de représentations irréductibles de* $G = SU(N)$ *est admissible au niveau* ℓ *si :*

(i) W_0, W_1 *et* W_2 *sont admissibles au niveau* ℓ.

(ii) *Il existe un* $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_G(W_0 \otimes W_1, W_2)$ *tel que sa restriction à tout mauvais triplet* (V_0, V_1, V_2) *est nul. (On dit qu'un triplet* (V_0, V_1, V_2) *de sous-espaces de* W_0, W_1, W_2*, invariants et irréductibles pour* H*, est* ***mauvais*** *s'il n'est pas admissible pour* SU(2) *au niveau* ℓ*.)*

On a alors le théorème suivant :

Théorème D. *Si* (W_0, W_1, W_2) *est admissible au niveau* ℓ*, il existe pour tout* $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_G(W_0 \otimes W_1, W_2)$ *satisfaisant à (ii) ci-dessus, un et un seul opérateur à vertex primaire* $\phi : W_0 \otimes \mathcal{H}^0_{W_1} \to \mathcal{H}^0_{W_2}$ *avec* $\phi|_{W_0 \otimes W_1} = \phi_0$*. (Rappelons que* W_i *est le sous-espace de* $\mathcal{H}_{W_i}$ *des points fixes pour* $\mathrm{Rot}(S^1)$*.) Si le triplet n'est pas admissible, tout opérateur à vertex primaire est zéro.*

Il faut maintenant donner un sens à ces ϕ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{W_1}$. C'est ce que l'on n'a pas vu avant Wassermann dans les travaux sur les opérateurs à vertex de Knizhnik et Zamolodchikov. Dans le cas spécial où $W_0 = \mathbb{C}^n$ (la représentation identique de $SU(N)$), on a le résultat suivant:

Théorème E. *Si* $W_0 = \mathbb{C}^n$*, soit* $f \in L^2(S^1, W_0)^0$*. On a alors* $\|\phi(f)(v)\| \leq \|f\|\|v\|$ *pour* $v \in \mathcal{H}^0_{W_1}$*, d'où* $\phi(f)$ *s'étend en un opérateur* ***borné*** *de* $\mathcal{H}_{W_1}$ *en* $\mathcal{H}_{W_2}$ *(et en fait* ϕ *a un sens pour tout* $f \in L^2$*).*

Ce résultat, extrêmement utile, est facile à démontrer. On n'a qu'à remarquer que les opérateurs fermioniques $a(f)$, pour $f \in L^2(S^1, \oplus^\ell W_0)$, entrelacent $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$. Donc si P_{W_1} et P_{W_2} sont des projecteurs sur des sous-espaces de $\mathcal{F}(L^2(S^1, \oplus^\ell W_0))$ $(\cong \otimes^\ell \mathcal{F}(L^2(S^1, W_0)))$ isomorphes à $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$ (au niveau ℓ), on peut définir $\phi(f)$ comme $P_{W_2} a(f) P_{W_1}$. Pour démontrer (V1) et (V2) on n'a qu'à prendre la dérivée de (EL). Il faut aussi se convaincre que les $\phi(f)$ ainsi construits sont non-zéros pour les triplets admissibles $(\mathbb{C}^n, W_1, W_2)$. Pour cela on peut travailler avec les termes initiaux ϕ_0, car, pour les représentations W qui se trouvent dans $\Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$, le sous-espace des points fixes pour $\mathrm{Rot}(S^1)$ sur $\mathcal{F}(L^2(S^1, \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell))$ est dans $\Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$, vu comme sous-espace de cet espace de Fock. Les $a(v)$ (v = fonction constante sur S^1, à valeur $v \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell$) agissent par multiplication extérieure. On a tout de suite que $P_{W_0} a(v) P_{W_1}$ est non-zéro lorsque la multiplication extérieure par v a une composante non-zéro entre $W_1 \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$ et $W_2 \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$.

On étend cette méthode pour avoir les opérateurs à vertex primaires quelconques en prenant des produits tensoriels des $a(f)$, cette fois pour l'algèbre de Lie. Si $a(v,k) = a(z^k v)$ pour $v \in \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^\ell = W$, on montre que la formule

$$a(v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge v_k, m) = \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_k=m} a(v_1,p_1)\ldots a(v_k,p_k)$$

(les v_i sont orthogonales) définit une application de $\Lambda^k W$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{F}(L^2(S^1,W)^0)$ qui satisfait à (V1) et (V2) pour $v \in \Lambda^k W$, vu comme G-module. On obtient $\phi(v,m)$ comme "compression" $P_{W_2} a(v,m) P_{W_1}$ comme avant.

On voit que les opérateurs à vertex (au niveau ℓ) obtenus ainsi sont non-zéros précisément pour les triplets (W_0, W_1, W_2) satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $W_i \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$.

(ii) Il existe $v \in W_0 \subset \Lambda(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^\ell)$ tel que la multiplication extérieure par v a une composante non-zéro entre W_1 et W_2 ($\subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$). Cette "compression" de la multiplication extérieure par v donne le ϕ_0 de l'opérateur à vertex ϕ.

Wassermann montre que ces triplets-ci sont les mêmes que les triplets admissibles. On a construit donc tous les opérateurs à vertex primaires par compression des fermions.

Le passage des $\phi(v,n)$ aux opérateurs (non-bornés) sur un Hilbert est technique mais standard — par des estimées de Sobolev sur les $\phi(v,n)$, conséquences d'estimées de Sobolev sur les fermions, on montre que $\sum_n \phi(f_n,n)$ (où $f(\theta) = \sum_n f_n e^{in\theta}$) est un opérateur à domaine dense pour $f \in C^\infty(S^1, W_0)$ et il a un adjoint à domaine dense — $\sum_n \phi(f_n^*, n)$. D'où l'existence du vrai $\phi(f)$ comme fermeture de l'opérateur préfermé $\sum_n \phi(f_n,n)$.

La dernière chose à faire est de récupérer la relation d'entrelacement (EL) des relations (V1),(V2). Pour cela il faut avoir des propriétés de continuité de $\phi(f)$ et utiliser des techniques élaborées de passage entre l'algèbre de Lie $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{R}$ et le groupe $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$.

6. CALCUL DE LA FUSION

Rappelons que, pour définir la fusion $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ de deux $M-M$ bimodules ${}_M\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_M$, nous avons défini le produit scalaire suivant sur $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}) \otimes \mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{K})$:

$$(PS) \qquad \langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_2^* x_1 y_2^* y_1 \Omega, \Omega \rangle \ .$$

Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{W_1}$, $\mathcal{K} = \mathcal{H}_{W_2}$, on a vu que $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_1}) = \mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_1})$ et $\mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2}) = \mathrm{Hom}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2})$. On aura donc des éléments ***concrets*** x_i et y_i si on peut trouver des opérateurs qui entrelacent L_IG et $L_{I^c}G$.

Remarque essentielle: Les opérateurs à vertex primaires $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ nous fournissent des éléments de Hom_{L_IG} et $\mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}$. En effet, si $\mathrm{supp}(f) \subset I^c$, la relation (EL) devient $\pi_{W_2}(g)\phi(f) = \phi(f)\pi_{W_1}(g)$ si $g \in L_IG$ (et le résultat est analogue si on échange I et I^c).

Si $W_1 = \Omega$, l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $\phi(f)$, et tout autre opérateur borné obtenu de $\phi(f)$, seront donc un élément de $\mathrm{Hom}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2})$. Si on écrit $x_{W_1\Omega}, x_{W_2\Omega}$ deux tels opérateurs, on a les quantités explicites $\langle x^*_{W_1\Omega} x_{W_1\Omega} y^*_{W_2\Omega}) y_{W_2\Omega}\Omega, \Omega\rangle$ à calculer. Ce produit scalaire est une version distributionelle de la "fonction à 4 points" des physiciens.

L'idée de Wassermann est d'utiliser certaines relations de commutation ("relations de tresse") entre les $\phi(f)$ pour récrire ce produit scalaire comme somme finie d'autres produits scalaires.

On reconnaîtra ces autres produits scalaires comme fonctions à 2 points pour d'autres représentations. Pour ce faire, il faudra prendre un opérateur d'entrelacement comme $x^\Omega_W : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_W$ et en créer d'autres d'une manière linéaire, $x_{W_2,W_1} : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Notons que, si x est de la forme $\phi(f)$, pour $f \in C^\infty(S^1, W)$, l'opérateur $\phi(f) : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_W$ n'est qu'une composante, qu'on va appeler ***partie principale***, de tout l'opérateur à vertex $\phi(f)$, qui possède aussi des composantes $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ pour tout triplet admissible (W, W_1, W_2). (C'est particulièrement clair avec la construction qu'on a donnée des $\phi(f)$ comme compression de fermions.) Si on pouvait ajuster $\phi(f)$ de façon à ce que ses composantes $a^{W_1}_{W_2}$ soient ***unitaires***, on pourrait définir des parties ***non-principales*** de n'importe quel opérateur x^Ω_W par la formule

$$x_{W_1W_2} = a_{W_2W_1}\pi_{W_1}((a_{W\Omega})^* x_{W\Omega})$$

(où on utilise de nouveau l'équivalence locale pour faire agir $\mathrm{End}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega)$ sur $\mathcal{H}_{W_1}$). Les $x_{W_1W_2}$ hériteront des mêmes relations de tresse que les $a_{W_2W_1}$.

Heureusement, on n'a pas besoin de faire tout ce travail dans le cas général d'un triplet (W, W_1, W_2). Quand on aura calculé la fusion avec $\mathcal{H}_\Box$, on pourra déduire les règles générales de fusion au moyen d'un anneau de représentations. C'est un anneau commutatif pour lequel la représentation identique de $SU(N)$, que l'on notera $\Box$, se révèlera comme générateur. Il suffira donc de calculer la fusion $\mathcal{H}_\Box \boxtimes \mathcal{H}_W$. On aura l'existence de constantes $\lambda_X \neq 0$ telles que

$$x_{W\Omega}(y_{\square\Omega})^* = \sum_X \lambda_X (y_{XW})^* x_{X\square} \ ,$$
$$x_{X\square} y_{\square\Omega} = \left(\frac{\bar{\lambda}_X}{|\lambda_X|}\right) y_{XW} x_{W\Omega} \ .$$

Notre produit scalaire (PS) devient donc :

$$\begin{aligned}\langle (x_{W\Omega})^* x_{W\Omega}(y_{\square\Omega})^* y_{\square\Omega}\Omega, \Omega\rangle &= \sum_X \lambda_X \langle (x_{W\Omega})^*(y_{XW})^* x_{X\square} y_{\square\Omega}\Omega, \Omega\rangle \\ &= \sum_X |\lambda_X| \langle y^*_{\square\Omega} x^*_{X\square} x_{X\square} y_{\square\Omega}\Omega, \Omega\rangle.\end{aligned}$$

L'opérateur $U : \mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_\square \to \oplus_X \mathcal{H}_X$, $U(x_{W\Omega} \otimes y_{\square\Omega}) = \oplus_X |\lambda_X|^{\frac{1}{2}} x_{X\square} y_{\square\Omega}\Omega$ est alors une ***isométrie*** et par construction il entrelace $L_I G \times L_{I^c} G$. Les X qui interviennent dans la somme sont ceux pour lesquels le triplet $(\square, W, X)$ est admissible — on sait qu'il n'y a pas de multiplicité dans la formule — tout $\mathcal{H}_X$ n'intervient qu'une fois, comme dans la formule du produit tensoriel par $\square$ dans les représentations de G. Par le lemme de Schur et l'irréductibilité ((ii) du théorème C), U est unitaire. La fusion est donc entièrement calculée. On voit que le travail se divise en deux parties:

(1) Calcul des relations de tresse entre les $\phi(f)$.
(2) Définition et relations de tresse pour les parties non-principales des éléments de $\mathrm{Hom}_{L_I G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$.

Relations de tresse entre les $\phi(f)$

Notations. Si $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$, (W_0, W_1, W_2) est un triplet admissible de représentations de G, et $v \in W_0$, on va noter $\phi^{W_0}_{W_2 W_1}(f, v)$ un opérateur à vertex primaire fermé $\phi(f \otimes v) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ où $f \otimes v : S^1 \to V$ est la fonction $(f \otimes v)(z) = f(z)v$. La relation générale qu'on aimerait démontrer est la suivante:

$$(T\phi) \qquad \begin{array}{l} \text{Si} \quad f \in C^\infty(I, \mathbb{C}), \quad g \in C^\infty(I^c, \mathbb{C}), \\ \text{il existe des constantes } c_{W,W'}, \mu_{W,W'} \text{ telles que} \\ \phi^X_{ZW}(f, u)\phi^Y_{WT}(g, v) = \displaystyle\sum_{W'} c_{W,W'} \phi^Y_{ZW'}(g', v)\phi^X_{W'T}(f', u) \end{array}$$

où, pour une fonction $h \in C^\infty(S^1 \backslash \{1\}, \mathbb{C})$, $h'(e^{i\theta}) = e_\mu(h)(e^{i\theta}) = e^{i\mu\theta} h(e^{i\theta})$ avec $\mu = \mu_{WW'}$. Les $c_{W,W'}$ et les $\mu_{W,W'}$ dépendent de X, Y, Z, T. (Remarquons que ces

ϕ sont toujours définis sur les vecteurs C^∞ pour $\mathrm{Rot}(S^1)$ et les envoient dans des vecteurs C^∞, ce qui implique que la composition des ϕ a un domaine dense.)

On va trouver $(T\phi)$ comme valeur au bord d'une relation de tresse entre des fonctions définies par des séries convergentes dans $\{z : |z| < 1\}$. Si on écrit $f = \sum_n f_n z^n$ et $g = \sum_n g_n z^n$, on voit qu'il faudra considérer des sommes de la forme :

$$\sum_{m,n} f_n g_m \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, m)v_4, v_1\rangle z^n w^m$$

où $v_1 \in Z,\ v_2 \in X,\ v_3 \in Y,\ v_4 \in T$. On voit tout de suite que (V2) implique, pour $n \neq -m$, $a_{nm} = \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, m)v_4, v_1\rangle = 0$, et que $a_{nm} = 0$ si $m > 0$. On définit donc la série ***formelle***

$$(SF) \qquad F_W(v, z) = \sum_{n\geq 0} \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, -n)v_4, v_1\rangle z^n\ , \quad v = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4\ .$$

$F(v, z)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$. $V_1 = Z,\ V_2 = X,\ V_3 = Y,\ V_4 = T$ (et $\phi(v_3, -n) : \mathcal{H}^0_{V_4} \to \mathcal{H}^0_W$).

Si $\{x_i\}$ est une base orthormée de $\mathfrak{g}$, on sait (voir [PS]) que

$$d + \frac{\Delta_W}{2(N+\ell)} = \frac{1}{N+\ell}\left(-\tfrac{1}{2}\sum x_i(0)x_i(0) - \sum_{n>0} x_i(-n)x_i(n)\right)$$

sur $\mathcal{H}^0_W$ où $\sum_i x_i^2 = \Delta_W$ sur W. (Rappelons que d est le générateur de $\mathrm{Rot}(S^1)$, $[d, x(n)] = -nx(n)$.) Si on applique cette égalité entre $\phi(v_2, n)$ et $\phi(v_3, -n)$ dans (SF) et qu'on utilise (V1),(V2) on obtient l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov pour F:

$$(KZ) \qquad (N+\ell)\frac{dF}{dZ} = \left(\frac{\Omega_{34} - \lambda_W}{z} + \frac{\Omega_{23}}{z-1}\right) F(z)$$

où on note Ω_{34} l'opérateur linéaire sur $\mathrm{Hom}(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$ défini par $\Omega_{34} T = T(-\sum_k \mathrm{id} \otimes x_k \otimes x_k)$ et Ω_{ij} est défini de manière analogue pour $2 \leq i, j \leq 4$. (Les x_k agissent sur les $\mathfrak{g}$-modules V_i.) Et $\lambda_W = (\Delta_W - \Delta_3 - \Delta_4)/2$.

On peut vérifier directement des estimées de Sobolev provenant de la construction fermionique des $\phi(f)$ que la série (SF) converge pour $|z| < 1$ et définit une distribution sur $C^\infty(S^1)$ par ses valeurs au bord.

Plaçons-nous dans le meilleur des cas: où il n'y a pas de multiplicité dans les produits tensoriels de représentations irréductibles de G et où on ne sent pas les restrictions imposées par l'admissibilité (par exemple, si on fixe V_1, V_2, V_3, V_4 et k niveau est très grand). L'équation (KZ) est à valeurs dans $\mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$, et on s'attend à autant de solutions linéairement indépendantes que le nombre de représentations W avec $\phi^{V_2}_{V,W}, \phi^{V_2}_{W,V_4}$ non nuls. En effet, comme Ω_{34} agit comme le scalaire λ_W sur $W \subset V_3 \otimes V_4$, les fonctions $z^{\lambda_W} F_W(z)$ sont des solutions près de 0 (linéairement indépendantes si les λ_W sont distinctes) de l'équation de K-Z :

$$(N+\ell)\frac{dF}{dz} = \left(\frac{\Omega_{34}}{z} + \frac{\Omega_{23}}{z-1}\right) F(z) \ .$$

Pour faire intervenir la partie droite de l'équation $(T\phi)$, on introduit aussi la série $G_{W'}(z) = \sum_{n\geq 0} \langle \phi(v_3, n)\phi(v_2, -n)v_4, v_1\rangle z^{-n}$ (où $\phi(v_2, -n) : \mathcal{H}^0_{V_4} \to \mathcal{H}^0_{W'}$) et on trouve que ∞, $G(z)$ satisfait à ***la même équation*** (KZ) que F_W. Si on est toujours dans le bon cas, on voit qu'on a des $c_{W,W'}$ avec :

$$F_W(z) = \sum_{W'} c_{W,W'} G_{W'}(z)$$

dans un domaine où les deux fonctions existent par prolongement analytique. Cette matrice $c_{W,W'}$ est la matrice de transport ou de connexion entre 0 et ∞ pour l'équation (KZ). On passe de cette relation à la relation $(T\phi)$, d'abord pour les produits scalaires de la forme $\langle \phi(f,u)\phi(g,v)v_4, v_1\rangle$ avec des vecteurs dans V_4 et V_1, en écrivant ces produits scalaires comme couplage entre les distributions $F_W(z), G_{W'}(z)$ au bord avec la convolution de $\tilde{f}$ et g. Ensuite on trouve $(T\phi)$ pour des produits scalaires avec v_4 et v_1 quelconques dans $\mathcal{H}^0_{V_4}$ et $\mathcal{H}^1_{V_0}$ en appliquant les $x(-n)$ aux vecteurs dans V_4 et V_1 et les relations de commutation entre les ϕ et les $x(-n)$. On trouve la relation $(T\phi)$.

Dans notre argument nous avons fait trois hypothèses simplificatrices: sur les multiplicités, sur les valeurs propres λ_W et enfin sur l'admissibilité. Quant aux problèmes dûs à la multiplicité, en gros, on les évite en se restreignant à des cas de fusion où il n'y a pas de multiplicité, par exemple si on veut seulement la fusion avec $\square$. Un cas particulièrement facile est le cas $V_1 = V$, $V_2 = \square$, $V_3 = \Omega$, $V_4 = V'$ où V' intervient dans $V \otimes \square$. Dans ce cas, dim $W = 1$ et la relation de tresse ne font intervenir qu'un scalaire ε de norme égale à 1:

$$(TA) \qquad \phi^V_{V'\square}(u,f)\phi^{\square}_{\square\Omega}(v,g) = \varepsilon \phi^{\square}_{V'V}(v, e_{-\mu}g)\phi^V_{V\Omega}(u, e_{-\mu}f) \ .$$

La manière dont Wassermann traite les problèmes d'admissibilité est beaucoup plus intéressante et difficile. Il lui faut une étude approfondie des solutions de KZ

— en gros le but est de montrer que $c_{W,W'}$ est non nul si et seulement si l'opérateur $\phi_{W'V_4}^{V_3}$ est admissible. Dans le cas où $\dim \mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1) = 2$, on ne rencontre pas plus que les fonctions hypergéométriques de Gauss et les méthodes de Gauss sont suffisantes. Mais en général Wassermann fait appel à un certain nombre d'astuces. Il rend imaginaire la constante $N + \ell$ dans KZ et le transport devient unitaire et il trouve le résultat voulu — une formule explicite pour les $c_{W,W'}$ en termes de fonctions Γ — pour des valeurs réelles de $N + \ell$, par prolongement analytique. Comme outil technique, il se sert d'un théorème Tauberien de Karamata.

Un cas de relation de tresse importante où on a besoin de tout ce travail est le suivant :

$$\text{Si } f \in C_c^\infty(I) \text{ et } g \in C_c^\infty(I^c), \text{ on a}$$

$$(T\bar{\square}) \qquad \phi_{W\Omega}^W(u,f)\phi_{\Omega\square}^{\bar{\square}}(v,g) = \sum_{W'} e^{-2\pi i \mu_W} \phi_{W,W'}^{\bar{\square}}(v, e_{\mu_{W'}} g)\phi_{W'\square}^W(e, e_{\mu_{W'}} f)$$

où W' parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles (admissibles au niveau ℓ) dans $W \otimes \square$ et :

$$\mu_{W'} = (N+\ell)^{-1}(f_j - j + 1 - N^{-1}(\Sigma f_i))$$

si $(f_1, \ldots, f_N)$ est la partition de W et la partition de W' est $(f_1, f_2, \ldots, f_j{+}1, \ldots, f_N)$.

Définition et relations de tresse pour les parties non-principales des éléments de $\mathbf{Hom}_{L_I G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$

Le premier but est de rendre les $\phi(f)$ bornés et aussi inversibles que possible, sans toutefois perdre les relations de tresse.

On part des relations de tresse $(T\bar{\square})$,

$$a_{W\Omega} b_{\bar{\square}\Omega}^* = \sum_X \lambda_X b_{XW}^* a_{X\square}$$

pour des opérateurs à vertex primaires et aussi les relations

$$a_{W\square} b_{\square\Omega} = \frac{\bar{\lambda}_W}{|\lambda_W|}\, b_{WW'} a_{W'\Omega} \quad \text{(voir (TA))}$$

et on montre, par des arguments standards de fermeture d'opérateurs non-bornés que l'on peut remplacer $a_{W\square}$ par l'isométrie partielle de la décomposition polaire de sa fermeture, et $a_{X\square}$ par $a_{X\square}(\Sigma|\lambda_X|a_{X\square}^* a_{X\square})^{-\frac{1}{2}}$. Les $b_{\square\Omega}$ et b_{XW} sont déjà bornés.

On veut maintenant rendre ***unitaires*** les parties principales $a_{W\Omega}$ et $b_{\square\Omega}$. C'est d'abord un argument d'ergodicité: on choisit une suite $\{g_n\}$, dense dans L_IG, et une suite $\{u_n\}$ d'isométries partielles dans $\pi_\Omega(L_IG)''$ avec $u_n u_n^* = \delta_{n,m}\mathrm{id}$, $\sum u_n^* u_n = 1$. On forme la somme $A_{XW} = \sum_n 2^{-n}\pi_X(g_n)a_{XW}\pi_W(u_n)$ et on montre que support $(AA^*) = 1$. On remplace $a_{W\Omega}$ par l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $A_{W\Omega}$ et $a_{X\square}$ par $A_{X\square}(\Sigma|\lambda_X|A^*_{X\square}A_{X\square})^{-\frac{1}{2}}$ comme avant. On remplace enfin a_{XV} par $a_{XV}\pi_V(u)$ où u est une isométrie partielle entre a^*a et 1. On ne perd jamais la relation de tresse au cours de ce procédé.

Nous avons donc le resultat suivant:

Théorème F. *Il existe des opérateurs d'entrelacement bornés $a_{W\Omega}, a_{W'W}, b_{\square\Omega}, b_{W'W}$ entre les $\mathcal{H}_V$ correspondants, tels que :*

$$a_{W\Omega}b^*_{\square\Omega} = \sum_{W'} \lambda_{W'} b^*_{W'W} a_{W'\square}$$

et

$$a_{W'\square}b_{\square\Omega} = \varepsilon_{W'} b_{W'W} a_{W\Omega}$$

où $|\varepsilon_{W'}| = 1$, $|\lambda_{W'}| = \varepsilon_W \lambda_{W'}$. Les parties principales $a = a_{W\Omega}$ et $b = b_{\square\Omega}$ sont unitaires. Les opérateurs "a" entrelacent $L_{I^c}G$ et les " b" entrelacent L_IG.

Muni de ce résultat, on peut définir les parties non-principales $x_{W_1W_2} = a_{W_1W_2}\pi_{W_2}(a^*_{W\Omega}x)$ pour $x \in \mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$ et calculer la fusion de Connes comme nous l'avons esquissée ; on trouve le résultat suivant.

Théorème G. *$\mathcal{H}_\square \boxtimes \mathcal{H}_W \cong \oplus_{W'} \mathcal{H}_{W'}$ où les W' sont les représentations irréductibles qui interviennent dans $\square \otimes W$ et telles que W' est admissible au niveau ℓ.*

7. CONSÉQUENCES

1) La première conséquence est l'existence d'une loi de fusion entre les représentations à énergie positive de LG. Car les règles de fusion $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2} \cong \oplus N^W_{W_1W_2}\mathcal{H}_W$ montrent que la représentation sur $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$ de $L_IG \times L_{I^c}G$ s'étend en une représentation à énergie positive de LG. Une telle loi de fusion a été envisagée par Graeme Segal qui associe un $\mathcal{H}_W$ à chaque cercle, composante connexe du bord d'un disque deux fois troué, et cherche à trouver les $N^W_{W_1W_2}$ dans les extensions holomorphes des lacets à l'intérieur du disque troué. On peut penser à la méthode de Wassermann comme passage au bord de cette méthode de Segal, où les deux cercles intérieurs tendent vers le bord du grand cercle. Le seul défaut de la méthode de Wassermann est qu'elle dépend d'un calcul explicite de la fusion — il n'y a pas de raison a priori pour laquelle $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$ est un LG-module.

2) On a des systèmes finis très intéressants de bimodules sur le facteur hyperfini de type III_1. On verra par la suite que ces systèmes existent en fait pour le facteur hyperfini de type II_1 et le passage aux types III se fait par un simple produit tensoriel.

3) Nous avons calculé la fusion $\mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_\square$, le résultat étant une somme de tous les $\mathcal{H}_{W'}$ pour les W', permissibles au niveau ℓ, et contenus dans $W \otimes \square$. On voit immédiatement que tout $\mathcal{H}_W$ se trouve dans une puissance convenable $\boxtimes^k(\square)$, que les $\mathcal{H}_W$ sont fermées sous l'opération de fusion et que tout $\mathcal{H}_W$ possède un conjugé unique $\overline{\mathcal{H}_W}$. Si on note par R l'opérateur de rotation par 180°, la formule $B(x \otimes y) = R^*[RyR^* \otimes RxR^*]$ donne un unitaire entrelaçant $X \boxtimes Y$ et $Y \boxtimes X$. L'anneau de représentations $\mathcal{R}$ devient donc un anneau commutatif involutif à trace non-dégénérée. Sa structure est entièrement déterminée par son spectre. On trouve un sous-ensemble fini $\mathcal{S}$ du tore maximal de $SU(N)$ tel que tout caractère est donné par $\mathcal{H}_W \mapsto \mathrm{tr}_W(z)$ pour un unique $z \in \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ et on trouve ainsi les règles de fusion générales. Elles sont en accord avec les "formules de Verlinde" bien connues (les formules habituelles de Clebsch-Gordon sont modifiées par une action du groupe de Weyl affine ([Kc], 13.35)). Les règles de fusion sont également données par la description suivante (tirée de [G-W]).

L'application $W \mapsto \mathcal{H}_W$ s'étend en un homomorphisme de $R(SU(N))$ (l'anneau des représentations de $SU(N)$) sur $\mathcal{R}$ et son noyau est l'idéal engendré par les représentations irréductibles non-admissibles qui correspondent aux partitions $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ telles que $f_1 - f_N = \ell + 1$.

4) Les sous-facteurs. Wenzl a construit dans [We1] une série de sous-facteurs du facteur hyperfini de type II_1 par le moyen des représentations de l'algèbre de Hecke de type A, avec variable $q = e^{2\pi i/k}$. Par un résultat de Popa [Po2] et la construction explicite d'une algèbre de Hecke agissant sur $\boxtimes\mathcal{H}_\square$ on montre que le sous-facteur $N \subset M = \pi_\square(L_I G)'' \subset \pi_\square(L_{I^c} G)'$ est isomorphe au produit tensoriel d'un sous-facteur de Wenzl par un facteur hyperfini de type III_1. Peut-être la chose la plus importante à faire dans ce calcul est de montrer que $N \subset M$ est d'indice fini. C'est une conséquence du fait que $\mathcal{H}_{\bar{\square}}$ est conjugé à $\mathcal{H}_\square$. Plus généralement, on montre que la "dimension quantique" $d(X)$ d'une représentation π_X définit un homomorphisme de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'indice du sous-facteur $\pi_X(L_I G)'' \subset \pi_X(L_{I^c} G)'$ (défini à partir de projecteurs de Jones) est égal a $d(X)^2$.

La fusion $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}_{\bar{W}}$ correspond à la "construction de base" de [Jo1], d'où on peut calculer les invariants de sous-facteur ("commutants relatifs supérieurs") pour $N \subset M$ en calculant $\mathrm{End}_{LG}(\mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_{\bar{W}} \boxtimes \mathcal{H}_W \cdots \boxtimes \mathcal{H}_{\bar{W}})$. En général le calcul de $\mathrm{End}_{LG}(\boxtimes_i \mathcal{H}_{W_i})$ constitue une généralisation "quantique" du calcul $\mathrm{End}_G(\otimes_i W_i)$ de la théorie des invariants classique. On y trouve toutes les représentations de l'algèbre de Hecke et le groupe et le groupoïde de tresses auxquelles on s'attend d'après la théorie des groupes quantiques (Cartier [Ca]).

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] H. Araki - *Canonical anticommutation relations*, Contemporary Math. **62** (1987), 23–186.

[A] M. Atiyah - *Topological quantum field theory*, Publ. IHES **68** (1989), 175–186.

[BSZ] J. C. Baez, I. E. Segal et Z. Zhou - *Introduction to algebraic and constructive quantum field theory*, Princeton University Press (1992).

[Ba] R. Baxter - *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, New York, 1982.

[BW] J.Birman et H.Wenzl - *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** (1989), 269–273.

[Bi] J. Birman - *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math. Studies **82** (1974).

[Bo] R. Borcherds - *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), 3068–3071.

[Br] R. Brauer - *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. Math. **38** (1937), 856–872.

[Ca] P. Cartier - *Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre*, Sém. Bourbaki, exp. 716, Astérisque **189-190** (1990), 17–67.

[CIZ] A. Cappelli, C. Itzykson et J. B. Zuber, Nucl. Phys. B **280** (1987), 445– .

[Co1] A. Connes - *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[Co2] A. Connes - *Classification of injective factors*, Ann. Math. **104** (1976), 73–115.

[Co3] A. Connes - *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série **6** (1973), 133–252.

[DHR] S. Doplicher, R. Haag et J. Roberts - *Local observables and particle statistics*, I, II, Comm. Math. Phys. **23** (1971), 199–230 and **35** (1974), 49–85.

[Dr] V. Drinfeld - *Quantum groups*, Proc. ICM 1986, vol. **1**, 798–820.

[Fa] L. Faddeev - *Integrable models in* $(1+1)$*-dimensional quantum field theory*, (Lectures in Les Houches, 1982) Elsevier Science Publishers, 1984, 563–608.

[FR] R. Fenn et C. Rourke - *On Kirby's calculus of links*, Topology **18** (1979), 1–15.

[FRS] K. Fredenhagen, Rehren, et B. Schroer - *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 201–226.

[F+] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett et A. Ocneanu - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. AMS **12** (1985), 183–190.

[FQS] D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker - *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1575–1578.

[Fr] J. Frölich - *Statistics of fields, the Yang-Baxter equation and the theory of knots and links*, Proceedings of Cargèse, ed. G. 't Hooft et al. (1987).

[GO] P. Goddard et D. Olive - *Kac-Moody and Virasoro algebras*, Adv. Series in Math. Phys. **3**, World Scientific (1988).

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe et V. Jones - *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI Publications (Springer) **14** (1989).

[GW] F. Goodman et H. Wenzl - *Littlewood Richardson coefficients for Hecke algebras at roots of unity*, Adv. Math. **82** (1990), 244–265.

[HK] R. Haag et D. Kastler - *An algebraic approach to quantum field theory*, J. Math. Phys. **5** (1964), 848–861.

[H] R. Haag - *Local quantum physics*, Springer-Verlag (1992).

[Ha] U. Haagerup - *Connes' bicentralizer problem and the uniqueness of the injective factor of type* III_1, Acta Math. **158** (1987), 95–148.

[Ji1] M. Jimbo - *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **102** (1986), 537–567.

[Ji2] M. Jimbo - it A q-analogue of $U(sl(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[Jo1] V. Jones - *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.

[Jo2] V. Jones - *Notes on subfactors and statistical mechanics*, in : Braid Groups, Knot Theory and Statistical Mechanics (ed. Yang & Ge), World Scientific, 1989, 1–25.

[Jo4] V. Jones - *Braid groups, Hecke algebras and type* II_1 *factors*, in : Geometric Methods in Operator Algebras. (ed. Araki and Effros), Pitman Res. Notes in Math. (1983), 242–273.

[Jo5] V. Jones - *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. AMS **12** (1985), 103–111.

[JW] V. Jones and A. Wassermann - *Fermions on the circle and representations of loop groups*, à paraître.

[Kc] V. Kac - *Infinite dimensional Lie algebras*, 3ème édition, Cambridge University Press (1990).

[KL] V. Kazhdan and G. Lusztig - *Tensor structures arising from affine Lie algebras*, IV, Journal AMS **7** (1994), 383–453.

[KZ] V. Knizhnik et A. Zamolodchikov - *Current algebra and Weiss-Zumi no models in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83–103.

[KR] P. Kulish et N. Reshetikhin - *Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations*, J. Sov. Math. **23** (1983), 2435–2441.

[Li1] W. Lickorish - *Polynomials for links*, Bull. AMS **20** (1988), 558–588.

[Lo] R. Longo - *Index of subfactors and statistics of quantum fields*, I, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 217–247.

[LO] T. Loke - *Operator algebras and conformal field theory of the discrete series representations of Diff*(S^1), Thèse, Université de Cambridge (1994).

[MSe] G. Moore et N. Seiberg - *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 177–254.

[MvN] F. Murray et J. von Neumann - *On rings of operators*, Ann. Math. **37** (1936), 116–229.

[NT] T. Nakanishi and A. Tsuchiya - *Level-rank duality of* WZW *models in conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 351–372.

[O2] A. Ocneanu - *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras*, in : Operator Algebras and Applications (eds. Evans and Takesaki), 1988, 119–172.

[Pa] V. Pasquier - *Two-dimensional critical systems labeled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. B **285** (1987), 162–172.

[Po1] S. Popa - *Classification of subfactors: the reduction to commuting squares*, Invent. Math. **101** (1990), 19–43.

[Po2] S. Popa - *Classification of subfactors and of their endormorphisms*, à paraître dans Lecture Notes, CBMS series.

[PP] M. Pimsner et S. Popa - *Entropy and index for subfactors*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 57–106.

[PS] A. Pressley et G. Segal - *Loop Groups*, Oxford Science Publications (1986).

[PSt] R. Powers et E. Størmer - *Free states of the canonical anticommutation relations*, Comm. Math. Phys. **16** (1970), 1–33.

[Sa] J.-L. Sauvageot - *Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert*, J. Operator Theory, **9** (1983), 237-252.

[Se] G. Segal - *Notes on conformal field theory*, unpublished manuscript.

[Sk] E. Sklyanin - *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, J. Sov. Math. **19** (1982), 1546–1596.

[Ta1] M. Takesaki - *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math., vol. **128**, Springer, 1970.

[Ta2] M. Takesaki - *Conditional expectations in von Neumann algebras*, Journal Funct. Analysis **9** (1972), 306–321.

[TL] H. Temperley et E. Lieb - *Relations between the 'percolation' and...* , Proc. Roy. Soc. Ser. A **322** (1971), 251–280.

[TK] A. Tsuchiya et Y. Kanie - *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbb{P}^1$ *and monodromy representations of braid group*, Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988), 297–372.

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno et Y.Yamada - *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Studies in Pure Maths. **19** (1989), 459–566.

[Tu] V. Turaev - *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527–553.

[V] E. Verlinde - *Fusion rules and modular transformations in* 2D *conformal field theory*, Nuclear Phys. B **300** (1988), 360–376.

[Wa1] A. Wassermann - *Coactions and Yang-Baxter equations for ergodic actions and subfactors*, in : Operator Algebras and Applications (eds. Evans and Takesaki), 1988 (LMS Lecture Notes **136**), 203–236.

[Wa2] A. Wassermann - *Fusion for von Neumann algebras and loop groups*, à paraître.

[Wa3] A. Wassermann - *Loop groups, invariant theory and subfactors*, à paraître.

[Wa4] A. Wassermann - *Operator algebras and conformal field theory*, à paraître dans Proceedings du Congrès International (1994).

[We1] H. Wenzl - *Hecke algebras of type* A_n *and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.

[We2] H. Wenzl - *Quantum groups and subfactors of type* B, C *and* D, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 383–432.

[We3] H. Wenzl - *On the structure of Brauer's centralized algebras*, Ann. Math. **128** (1988), 173–193.

[Wi] E. Witten - *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

Vaughan JONES
Department of Mathematics
University of California at Berkeley
BERKELEY, CA 94720, USA