Jean-Benoît Bost

Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 795, p. 115-161
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__115_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 795

Mars 1995

PÉRIODES ET ISOGÉNIES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR LES CORPS DE NOMBRES
[d'après D. Masser et G. Wüstholz]

par **Jean-Benoît BOST**

1. INTRODUCTION

Au cours des dernières années, dans une longue série d'articles ([M-W1-7]), Masser et Wüstholz ont appliqué les "méthodes de transcendance" à l'étude des isogénies et des anneaux d'endomorphisme des variétés abéliennes sur les corps de nombres. Leur approche fournit en particulier une nouvelle démonstration du théorème de finitude suivant, établi par Faltings en 1983 au cours de sa démonstration des conjectures de Tate et de Shafarevitch ([F], [De1] Corollaire 2.8, [Z2] Proposition 3.1):

THÉORÈME 1.1. *Pour tout corps de nombres K et toute variété abélienne A définie sur K, il n'y a qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A.*

Cet énoncé admet des conséquences arithmétiques spectaculaires: au moyen d'arguments fort ingénieux, mais techniquement assez simples, il entraîne les principaux résultats de [F], à savoir la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres (d'après Tate lui-même), puis la conjecture de Shafarevitch (par un argument de Faltings), et la conjecture de Mordell (d'après Parshin); *cf.* [F], [De1], [Sz1], [F-W] et [Sz2], exposés VIII, IX et X.

La démonstration originale de Faltings s'appuyait notamment sur des résultats de Tate et Raynaud sur les groupes p-divisibles et les schémas en groupes commutatifs finis ([T], [R1]) qui lui permettaient de borner la différence des hauteurs de deux variétés abéliennes isogènes. Celle de Masser et Wüstholz est très différente. Elle consiste à établir tout d'abord une majoration du degré de la plus petite sous-variété abélienne d'une variété abélienne A sur un corps de nombres K dans $\mathbb{C}$ dont l'espace tangent à l'origine contienne un élément donné du réseau des périodes (complexes) de $A(\mathbb{C})$. Cette majoration – le "théorème des périodes" – est établie dans [M-W3] et constitue le résultat central de toute la série [M-W1-6]. Sa démonstration repose sur l'emploi de la "méthode de Baker" et de "lemmes de zéros".

Au moyen du théorème des périodes, Masser et Wüstholz obtiennent des renseignements quantitatifs auxquels on ne sait accéder par d'autres méthodes. Ainsi, pour étudier les isogénies entre deux variétés abéliennes A et B de dimension g isogènes sur un corps de nombres, Masser et Wüstholz appliquent leur théorème des périodes à une période judicieusement choisie de $A \times B^{2g}$, et produisent ainsi des sous-variétés abéliennes non-triviales de $A \times B^{2g}$, qui permettent de construire une isogénie de degré contrôlé entre A et B ([M-W4]). Des constructions analogues, jointes à des considérations de géométrie des nombres, leur permettent d'étudier les anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes définies sur un corps de nombres, et en particulier de majorer leur discriminant en termes de hauteurs de Faltings ([M-W5-6]).

La première partie de cet exposé est consacrée à la formulation du théorème des périodes (§2) et de ses conséquences (§3). Dans la seconde partie (§4-5), nous avons cherché à en esquisser la démonstration. Nous nous écartons sur plusieurs points de l'argument original de Masser et Wüstholz. Nous nous sommes en effet efforcés d'en donner une version aussi intrinsèque et géométrique que possible: cela nous a conduit à adopter un point de vue "arakelovien", et notamment à faire usage des propriétés de base des fibrés vectoriels hermitiens sur les spectres d'anneaux d'entiers de corps de nombres, de leur degré d'Arakelov et de leurs pentes (ces dernières sont rappelées dans l'Appendice A.1). Cette approche permet d'éviter l'usage systématique des fonctions thêta et les raisonnements sur les espaces de modules de variétés abéliennes polarisées qui apparaîssent dans [M-W3]. Elle évite aussi de construire des fonctions auxiliaires – à ce titre, elle se rapproche de la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent ([La2]) – et a l'intérêt d'élucider l'effectivité des constantes dans les énoncés de Masser et Wüstholz.

Lors de la préparation de cet exposé, l'auteur a bénéficié des éclaircissements et des conseils de D. Bertrand, S. David et M. Hindry, et tient à les en remercier très chaleureusement.

Notations. Si A est un anneau commutatif, muni d'un morphisme vers un corps k, et si E est un A-module, on désigne par E_k le produit tensoriel $E \otimes_A k$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de modules sur un A-schéma $\mathcal{X}$, on désigne par $\mathcal{X}_k$

et $\mathcal{F}_k$ le k-schéma et le faisceau sur $\mathcal{X}_k$ qui s'en déduisent par le changement de base $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} A$. Lorsque A est un corps de nombre, muni d'un plongement σ dans $\mathbb{C}$, on écrira $\mathcal{X}_\sigma$ et $\mathcal{F}_\sigma$ au lieu de $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}_\mathbb{C}$.

Les notations et définitions concernant les fibrés vectoriels hermitiens, leur degré d'Arakelov et leurs pentes sont rappelées dans l'Appendice A.

2. PÉRIODES ET SOUS-VARIÉTÉS ABÉLIENNES MINIMALES

2.1. Notations et rappels sur les variétés abéliennes

2.1.1. Si A est une variété abélienne de dimension g sur un corps k et L un fibré en droites sur A, nous noterons $\chi(A, L)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de L et $\deg_L A$ le degré de A relativement à L, *i.e.*, le nombre d'intersection $c_1(L)^g$. On a

$$\chi(A, L) = \frac{1}{g!} \deg_L A \tag{2.1}$$

et, si L est ample,

$$\dim_k H^0(A, L) = \chi(A, L) \,. \tag{2.2}$$

Nous noterons aussi t_A l'espace tangent de A à l'origine (c'est un k-vectoriel de dimension g).

2.1.2. Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\mathbb{C}$; $A(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie complexe et l'on dispose de l'application exponentielle

$$\exp_A : t_A \to A(\mathbb{C}) \,.$$

C'est un morphisme surjectif étale de groupes analytiques complexes. Son noyau Γ_A est un réseau de dimension $2g$ dans t_A – le réseau des périodes de A – et $\exp_A$ détermine par passage au quotient un isomorphisme

$$t_A/\Gamma_A \simeq A(\mathbb{C}) \,.$$

Soit de plus L un fibré en droites ample sur A. La classe de Chern $c_1(L)$ en cohomologie de de Rham admet un unique représentant ω qui soit une forme invariante par translation. La forme ω est de type $(1,1)$ et positive (car L est ample).

Elle s'identifie donc à un élément positif de $\Lambda^{1,1}\ \overset{\vee}{t}_A$, et définit donc une structure hermitienne $\| \ \|_L$ sur t_A (la "forme de Riemann" de L). Plus précisément si $(e_i)_{1\leq i\leq g}$ est une base de t_A, $(e_i^*)_{1\leq i\leq g}$ la base duale de $\overset{\vee}{t}_A$ et si ω s'identifie à

$$\frac{i}{2}\sum_{1\leq k,\ell\leq g} a_{k\ell}\, e_k^* \wedge \overline{e_\ell^*}\,,$$

on aura

$$\left\| \sum_{k=1}^{g} z_k\, e_k \right\|_L^2 = \sum_{1\leq k,\ell\leq g} a_{k\ell}\, z_k\, \overline{z_\ell}\,.$$

Le covolume de Γ_A dans t_A muni de $\| \ \|_L$ vaut $\chi(A,L)$. Le théorème de Minkowski montre alors que le rayon d'injectivité

$$\rho(A,L) := \frac{1}{2} \min_{\gamma\in\Gamma_A-\{0\}} \|\gamma\|_L$$

de A muni de la forme de Kähler ω satisfait à

$$\rho(A,L) \leq \pi^{-\frac{1}{2}}\, (\deg_L A)^{\frac{1}{2g}}\,. \tag{2.3}$$

2.1.3. Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il existe un corps de nombres $K\subset\overline{\mathbb{Q}}$ sur lequel A peut être défini et admet réduction semi-stable. Soient alors $\pi : \mathcal{A} \to S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un modèle semi-abélien de A et $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ sa section nulle. Le fibré en droites sur S

$$\omega_{\mathcal{A}/S} := \varepsilon^*\, \Omega^g_{\mathcal{A}/S} \simeq \pi_*\, \Omega^g_{\mathcal{A}/S}$$

admet une structure hermitienne naturelle $\| \ \|$, définie par l'égalité

$$\|\alpha\|_\sigma^2 = \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \alpha\wedge\overline{\alpha} \tag{2.4}$$

pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ et tout $\alpha \in \omega_{\mathcal{A}/S}\otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq H^0(\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C}), \Omega^g_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})})$. Le degré arakelovien normalisé du fibré en droites hermitien $\overline{\omega}_{\mathcal{A}/S} := (\omega_{\mathcal{A}/S}, \| \ \|)$ est indépendant des choix de K et $\mathcal{A}$ et définit la *hauteur de Faltings* (stable normalisée) de A:

$$h(A) := \widehat{\deg}_n\, \overline{\omega}_{\mathcal{A}/S}\,. \tag{2.5}$$

La hauteur de Faltings est bien une hauteur; à savoir, on a:

THÉORÈME 2.1. (Faltings [F]; voir aussi [De1-2], [MB2], [F-C], V.4., et [Bo2])
i) *Pour tout* $g \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $C_0(g) \in \mathbb{R}$ *tel que, pour toute variété abélienne* A *de dimension* g *sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *on ait*

$$h(A) \geq C_0(g) .$$

ii) *De plus, à* $\overline{\mathbb{Q}}$*-isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes de dimension* g*, définies sur un corps de nombres de degré borné et de hauteur de Faltings borné.*

Cet énoncé joue un rôle central dans la démonstration originale [F] des conjectures de Tate et Shafarevitch; une variante "quantitative" (la comparaison entre la hauteur de Faltings et la hauteur définie par les Thetanullwerte) est aussi utilisée dans [M-W3]. Toutefois, la présentation de leur résultat que nous adoptons ici permet de ne faire appel qu'à l'assertion i) (voir appendice D; cette assertion découle en fait aisément de la proposition 3.4, *cf.* Appendice C).

L'inégalité de hauteurs suivante, qui découle aisément des définitions, sera aussi utile: si $\varphi : A \to B$ est une isogénie de degré $\deg \varphi$ entre deux variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on a:

$$h(B) \leq h(A) + \frac{1}{2} \log \deg \varphi . \tag{2.6}$$

Enfin, si A et B sont deux variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, il vient:

$$h(A \times B) = h(A) + h(B) . \tag{2.7}$$

2.2. Le théorème des périodes

L'énoncé suivant est établi dans [M-W3]. Afin de nous y référer commodément, nous l'appellerons "théorème des périodes".

THÉORÈME 2.2. *Soient* A *une variété abélienne de dimension* g *définie sur un corps de nombres* K, L *un fibré en droites ample sur* A, σ *un plongement de* K *dans* $\mathbb{C}$ *et* γ *un élément du réseau des périodes* Γ_{A_σ}. *Si* $A_{\{\gamma\}}$ *désigne la plus petite sous-variété abélienne de* A_σ *dont l'espace tangent en l'origine contienne* γ, *alors*

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A) \; \max(1, h(A), \|\gamma\|^2_{L_\sigma})^{\kappa(g)} ,$$

où $C(g,[K:\mathbb{Q}],\deg_L A)$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g, $[K:\mathbb{Q}]$, et $\deg_L A$ (resp. de g).

2.3. Remarques

2.3.1. Plus généralement, soient $\overline{K}$ la clôture algébrique de $\sigma(K)$ dans $\mathbb{C}$, S un sous-ensemble de t_{A_σ} tel que $\exp_{A_\sigma}(S) \subset A(\overline{K})$, et soit A_S la plus petite sous-variété abélienne de A_σ dont l'espace tangent à l'origine contienne S. Le "théorème du sous-groupe analytique" de Wüstholz [Wü1-3] affirme que t_{A_S} *coïncide avec le plus petit sous-espace vectoriel de t_{A_σ} contenant S et défini sur $\overline{K}$*. Wüstholz établit en fait cet énoncé avec, à la place de A, un groupe algébrique commutatif connexe G défini sur K quelconque (espaces tangents à l'origine et applications exponentielles conservent évidemment un sens dans ce cadre). Dans cette généralité, le théorème du sous-groupe analytique résume un grand nombre de résultats de transcendance et d'indépendance linéaire sur les groupes algébriques commutatifs. Par exemple, appliqué à un produit de groupes multiplicatifs, il devient le célèbre théorème de Baker affirmant que des logarithmes de nombres algébriques sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ s'ils le sont sur $\mathbb{Q}$. La démonstration du théorème du sous-groupe analytique s'appuie notamment sur des "lemmes de zéros" dans des groupes algébriques commutatifs. Nous renvoyons à l'exposé de Bertrand dans ce séminaire [Be1] pour une discussion et des références plus complètes sur ce sujet.

La question de borner le degré du groupe G_S (relativement à une polarisation donnée) se pose naturellement. Le théorème des périodes y répond lorsque G est une variété abélienne et S est réduit à une période. Les premières bornes sur G_S ont en fait été obtenues par Baker, au moyen de la méthode qui porte son nom, lorsque G est un produit de groupes multiplicatifs ([Ba1]; voir aussi [Ba2], chapitres 2 et 3, [Ba3] et les articles cités dans ces références).

2.3.2. Un problème analogue à celui de l'étude des groupes G_S a donné lieu à diverses investigations (voir par exemple [Be2], §4): étant donné un sous-ensemble Σ de $G(\overline{K})$, étudier le plus petit sous-groupe algébrique G^Σ de G contenant Σ. Notamment, lorsque G est une variété abélienne, Bertrand a obtenu des majorations du degré de G^Σ [Be4], en s'appuyant lui aussi sur la méthode de Baker et les lemmes de zéros sur les groupes algébriques commutatifs, dans le prolongement des travaux de Wüstholz, Philippon et Waldschmidt ([Wü2-3], [P], [P-W]).

Soulignons enfin que ce type de techniques, dont le développement avait été motivé par l'étude des formes linéaires en logarithmes, admet encore d'autres applications à la géométrie arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de nombres : suivant un programme proposé par Lang [Lg], elle permet ainsi d'établir des minorations effectives des degrés de leurs points de torsion ou des hauteurs de leurs points qui ne sont pas de torsion. Pour plus de détails sur ces questions, on se reportera par exemple aux articles de Masser [M1-2], Bertrand [Be2-4] et David [Da1-2] (voir aussi *infra*, §3.3).

2.3.3. Les constantes $C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A)$ et $\kappa(g)$ figurant dans le théorème des périodes sont complètement effectives. Il est même aisé d'en donner des expressions explicites; par exemple, on peut prendre

$$\kappa(g) = (g-1)\, 4^g\, g!\,.$$

Signalons toutefois que la dépendance en g de $C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A)$ n'apparaît pas comme vraiment effective dans [M-W3]: elle fait intervenir notamment la comparaison entre hauteurs de Faltings et hauteurs des Thetanullwerte des variétés abéliennes, ainsi que des minorations de ces hauteurs, conséquences de bornes sur certaines formes modulaires de Siegel; ces résultats sont établis par un argument ineffectif, fondé sur la compacité de la compactification de Satake de l'espace des modules des variétés abéliennes complexes principalement polarisées. Ce problème d'effectivité a été résolu récemment par S. David et l'auteur [Bo-D1-2], qui rendent effectives ces comparaisons de hauteurs (voir aussi l'appendice C). L'approche décrite dans cet exposé conduit elle aussi, de façon plus directe, à des constantes effectives.

3. BORNES SUR LES ISOGÉNIES ET LES ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES

3.1. Isogénies entre variétés abéliennes polarisées

3.1.1. Dans [M-W4], Masser et Wüstholz démontrent l'énoncé suivant au moyen du théorème des périodes.

THÉORÈME 3.1. *Soient A et B deux variétés abéliennes de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui peuvent être munies de polarisations de degrés au plus δ et définies sur un corps de nombre de degré d. Si A et B sont $\overline{\mathbb{Q}}$-isogènes, alors il existe une isogénie de A vers B de degré au plus égal à $C(g,d,\delta)\max(1,h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g,d,\delta)$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g, d et δ (resp. de g).*

Les constantes $C(g, d, \delta)$ et $\kappa(g)$ dépendent effectivement de g, d et δ, et le théorème 3.1 fournit ainsi une borne effective sur les isogénies entre variétés abéliennes polarisées sur un corps de nombres en termes de hauteurs de Faltings (*cf.* [M-W4], p.469, pour la forme précise de ces constantes).

Avant de démontrer le théorème 3.1 en toute généralité dans [M-W3-4], Masser et Wüstholz avaient traité directement dans [M-W1] le cas des courbes elliptiques (voir aussi [Be3]). Signalons à ce propos que les techniques de transcendance avaient déjà été employées par D. et G. Chudnovsky [C-C] pour obtenir des bornes effectives sur les isogénies entre courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps de nombres K admettant un plongement réel ([C-C], Theorem 4, p.2214; voir aussi [La1]).

Grâce à "l'astuce quaternionnienne de Zahrin" (*cf.* [Z1], [MB1] IX.1), le théorème 3.1 suffit à établir le résultat suivant, qui implique le théorème 1.1 d'après la proposition B.3 (*cf.* Appendice B):

COROLLAIRE 3.2. *Pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres K, il n'y a qu'un nombre fini de classes de $\overline{K}$-isomorphie de variétés abéliennes B définies sur K et $\overline{K}$-isogènes à A.*

Démonstration. Notons $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ les variétés abéliennes duales à A et B. D'après Zahrin, les variétés abéliennes

$$Z(A) := (A \times \widehat{A})^4 \quad \text{et} \quad Z(B) := (B \times \widehat{B})^4$$

admettent des polarisations principales. Elles sont $\overline{K}$-isogènes; le théorème 3.1 montre donc qu'il existe une $\overline{K}$-isogénie de $Z(A)$ vers $Z(B)$, de degré borné en fonction de A. Il n'y a ainsi qu'un nombre fini de classes de $\overline{K}$-isomorphie pour $Z(B)$, donc pour B, d'après la proposition B.2, i).

q.e.d.

Une variante quantitative de cet argument permet d'établir un énoncé de comparaison de hauteurs, dans le style de l'énoncé effectif obtenu par Raynaud ([R2], Théorème 4.4.9) en raffinant l'argument de Faltings [F] au moyen de la théorie des groupes de Barsotti-Tate tronqués ([Il]):

PROPOSITION 3.3. ([M-W4], Proposition, p.470) *Pour toute variété abélienne A sur un corps de nombres K, il existe un sous-ensemble $\mathcal{H}(A)$ de $\mathbb{R}$, de cardinal au plus*

$$H(A) = C(g, [K : \mathbb{Q}]) \max(1, h(A))^{\kappa(g)},$$

où $C(g,[K:\mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K:\mathbb{Q}]$ (resp. de g), tel que, pour toute variété abélienne B définie sur K et $\overline{K}$-isogène à A, on ait:

$$h(B) \in \mathcal{H}(A) \quad et \quad |h(B) - h(A)| \leq \log H(A)\,.$$

La comparaison entre les deux énoncés effectifs de comparaison des hauteurs des variétés abéliennes isogènes – celui de Raynaud et cette proposition – est assez délicate (*cf.* [M-W4], p.471). Indiquons seulement qu'aucun des deux n'implique l'autre.

3.1.2. Esquissons maintenant la preuve du théorème 3.1. Outre le théorème des périodes, elle utilise l'énoncé suivant, d'intérêt indépendant (*cf.* [M3], Matrix Lemma, p.115, et [M-W3], lemma 8.6).

PROPOSITION 3.4. *Pour toute variété abélienne A de dimension $g \geq 1$ sur un corps de nombres K et tout fibré en droites L ample sur A, on a*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{Q}} \rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq C(g) \max(1, h(A) + \tfrac{1}{2} \log \chi(A, L))$$

où $C(g)$ désigne une constante qui ne dépend que de g.

Une démonstration de cette proposition est présentée dans l'appendice C.

Soient donc A et B deux variétés abéliennes satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.1. Considérons une isogénie φ de A vers B et choisissons un plongement σ de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. La preuve du théorème 3.1 repose sur l'observation suivante: si γ est une période de A_σ et si $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ est une base du réseau des périodes de B_σ, alors $\widetilde{\gamma} := (\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ est une période de la variété abélienne $G := A \times B^{2g}$ et la sous-variété abélienne $G_{\{\widetilde{\gamma}\}}$ de G_σ est "non-triviale" (notamment $\neq G$). En effet, si $D\,\varphi_\sigma : t_{A_\sigma} \to t_{B_\sigma}$ désigne la différentielle en l'origine de $\varphi_\sigma : A_\sigma \to B_\sigma$, il existe $(n_i)_{1 \leq i \leq 2g} \in \mathbb{Z}^{2g}$ tel que

$$D\,\varphi_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{2g} n_i\,\gamma_i\,,$$

et donc la composante neutre C du groupe algébrique

$$\left\{ (x, x_1, \ldots, x_{2g}) \in A \times B^{2g} \mid \varphi(x) = \sum_{i=1}^{2g} n_i\,x_i \right\}$$

est une sous-variété abélienne propre de G telle que $\widetilde{\gamma} \in t_{C_\sigma}$.

Pour éviter des complications techniques sans grand intérêt à ce stade, supposons en outre que A et B soient simples et munies de polarisations principales définies par des fibrés en droites amples L et M (*i.e.*, $\delta = 1$; pour le cas général, voir [M-W4]). Nous désignerons par $C_1(g)$, $C_2(g), \ldots$ puis $C_4(g,d), \ldots$ des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g et de (g,d). La proposition 3.4, jointe à l'inégalité (2.3), montre que pour tout $\gamma \in \Gamma_{B_\sigma} - \{0\}$, on a

$$\|\gamma\|_{M_\sigma} \geq C_1(g)\ (d \max(1, h(B))^{-1/2}\,.$$

Comme le covolume du réseau Γ_{B_σ} dans l'espace vectoriel hermitien $(t_{B_\sigma}, \|\cdot\|_{L_\sigma})$ vaut 1, le second théorème de Minkowski montre alors que Γ_{B_σ} admet une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2g\}$

$$\|\gamma_i\|_{M_\sigma} \leq C_2(g)\ (d \max(1, h(B))^{g-1/2}\,.$$

Par ailleurs, l'inégalité (2.3) montre qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{A_\sigma} - \{0\}$ tel que

$$\|\gamma\|_{L_\sigma} \leq C_3(g)\,.$$

Appliqué à la période $\widetilde{\gamma}$ de G définie par de tels choix des γ_i et de γ, et à la polarisation principale de G définie par $\mathcal{L} := L \boxtimes M^{\boxtimes 2g}$, le théorème des périodes montre que

$$\chi(G_{\{\widetilde{\gamma}\}}, \mathcal{L}) \leq C_4(g,d) \max(1, h(A), \log \deg \varphi)^{C_4(g)}\,.$$

En effet,

$$\|\widetilde{\gamma}\|^2_{\mathcal{L}_\sigma} = \|\gamma\|^2_{L_\sigma} + \sum_{i=1}^{2g} \|\gamma_i\|^2_{M_\sigma}\,,$$

et, d'après (2.6) et (2.7),

$$\begin{aligned} h(G) &= h(A) + 2g\, h(B) \\ &\leq (2g+1)\, h(A) + g \log \deg \varphi\,. \end{aligned}$$

Comme $G_{\{\widetilde{\gamma}\}}$ est incluse dans C, elle ne peut s'écrire comme le produit de sous-variétés abéliennes de A et B^{2g}. Un raisonnement élémentaire (*cf.* [M-W4], Lemma 2.2) montre que cela entraine l'existence d'une isogénie $\psi : A \to B$ de degré au plus $\chi(G_{\{\widetilde{\gamma}\}}, \mathcal{L})^{2g}$.

Partant d'une isogénie $\varphi : A \to B$, on en a ainsi construit une seconde $\psi : A \to B$, telle que

$$\deg \psi \leq C_5(g,d) \max(1, h(A), \log \deg \varphi)^{C_4(g)} .$$

En considérant une isogénie de degré minimal, on obtient le théorème 3.1.

3.2. Isogénies non polarisées et anneaux d'endomorphismes

Dans [M-W5-6], Masser et Wüstholz améliorent et complètent le théorème 3.1. En particulier, ils en établissent la version "non polarisée" suivante:

THÉORÈME 3.5. ([M-W6], Theorem II) *Soient A et B deux variétés abéliennes de dimension g définies sur un corps de nombres K de degré d, et soit L un corps extension de K. Si A et B sont L-isogènes, alors il existe une L-isogénie de A vers B de degré au plus $C(g, [K : \mathbb{Q}]) \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g, [K : \mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K : \mathbb{Q}]$ (resp. de g).*

Ils démontrent aussi le théorème suivant, qui constitue une version effective du théorème de complète réductibilité de Poincaré pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres.

THÉORÈME 3.6. ([M-W6], Theorem I) *Pour toute variété abélienne A de dimension g définie sur un corps de nombres K et tout corps L extension de K, il existe des sous-variétés abéliennes $A_1, \ldots, A_t$ de A, définies et simples sur L, des entiers strictement positifs $e_1, \ldots, e_t$, et une L-isogénie de A vers $A_1^{e_1} \times \ldots \times A_t^{e_t}$ de degré au plus $C(g, [K : \mathbb{Q}]) \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g, [K : \mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K : \mathbb{Q}]$ (resp. de g).*

Ce théorème est une conséquence formelle du précédent, mais les deux sont en fait établis simultanément. Leur démonstration s'appuie, comme celle du théorème 3.1, sur le théorème des périodes, combiné avec l'astuce de Zahrin et des constructions ingénieuses de géométrie des réseaux; elle fait aussi appel à une version quantitative originale du théorème de Jordan-Zassenhaus ([M-W6]; voir aussi [Z1] pour le rôle dans ces questions du théorème de Jordan-Zassenhaus).

3.2.2. Dans [M-W5-6], Masser et Wüstholz obtiennent aussi des bornes pour les discriminants des anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes sur un corps de nombres.

Rappelons que si A est une variété abélienne sur un corps k, on note $\mathrm{End}_k\, A$ l'anneau des endomorphismes de A, $\mathrm{End}_k^0\, A$ la $\mathbb{Q}$-algèbre $(\mathrm{End}_k\, A) \otimes \mathbb{Q}$, et

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_k^0\, A \to \mathbb{Q}$$

l'application trace (*cf.* [Mu2], §19). Un fibré en droites ample L sur A détermine une involution de Rosati $\varphi \mapsto \varphi'$ sur $\mathrm{End}_k^0\, A$, puis un produit scalaire défini positif

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle_L : (\mathrm{End}_k^0\, A)^2 &\mapsto \mathbb{Q} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \mathrm{Tr}(\varphi\,\psi') \end{aligned}$$

(*cf.* [Mu2], §20-21). On définit le discriminant de $\mathrm{End}_k\, A$ relativement à L comme

$$\mathcal{D}_L(\mathrm{End}_k\, A) := \det(\langle t_i, t_j\rangle_L)_{1 \leq i,j \leq N}\,,$$

où $(t_1, \ldots, t_N)$ désigne une base quelconque du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{End}_k\, A$.

Nous nous contenterons de citer le principal résultat de [M-W5]:

THÉORÈME 3.7. *Pour toute variété abélienne A de dimension g sur un corps de nombres K et tout fibré en droites ample L sur A,*

$$\mathcal{D}_L(\mathrm{End}_K\, A) \leq C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A)\, \max(1, h(A))^{\kappa(g)}\,,$$

où $C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A)$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g, $[K:\mathbb{Q}]$ et $\deg_L A$ (resp. de g).

3.2.3. Le passage d'énoncés concernant des variétés abéliennes polarisées (tels que le théorème 3.1) à des versions indépendantes des polarisations (telles que le théorème 3.5) conduit naturellement à la question suivante: peut-on majorer le plus petit degré d'une polarisation d'une variété abélienne A de dimension g sur un corps de nombres K par une expression de la forme $C(g, [K:\mathbb{Q}])\, \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$?

Dans un travail malheureusement non encore publié, Masser et Wüstholz ont étudié cette question par des méthodes voisines de celles de [M-W6]. Ils montrent qu'elle admet une réponse positive dans de nombreuses situations: par exemple, lorsque $g \leq 7$, lorsque $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}\, A = \mathbb{Z}$, ou lorsque A est simple et g sans facteur carré ([M4]).

Par ailleurs, en s'appuyant sur les résultats de [M-W6], ils ont établi dans [M-W7] des raffinements quantitatifs de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres ([F], [Z2]).

Signalons enfin que le théorème 3.1 a été étendu aux variétés semi-abéliennes par Yan [Y].

3.3. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres K. Pour tout entier n, $G := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur le sous-groupe E_n des points de n-torsion de $E(\overline{K})$. Si $n = \ell$ est premier, E_ℓ est un $\mathbb{F}_\ell$-vectoriel de dimension 2, et l'on dispose ainsi d'une représentation naturelle

$$\varphi_\ell : G \to GL(E_\ell)\,.$$

Un célèbre théorème de Serre ([S2]; voir aussi [S1]) affirme que, *si E n'a pas de multiplication complexe sur $\overline{K}$, alors $\varphi_\ell(G) = GL(E_\ell)$ dès que ℓ est suffisamment grand.*

Leurs bornes sur les isogénies entre courbes elliptiques et surfaces abéliennes ont permis à Masser et Wüstholz d'obtenir une forme quantitative de cet énoncé ([M-W2]):

THÉORÈME 3.8. *Il existe deux constantes absolues c et γ telles que, si E n'a pas de multiplication complexe sur $\overline{K}$, $\varphi_\ell(G)$ contienne $SL(E_\ell)$ dès que*

$$\ell > c\,(\max([K:\mathbb{Q}], h(E))^\gamma$$

et coïncide donc avec $GL(E_\ell)$ lorsque de plus ℓ ne divise pas le discriminant de K.

Une version effective du théorème de Serre, de forme différente de celle de Masser et Wüstholz, avait été indépendamment obtenue par Serre lui-même ([S4]; voir aussi [S2], p.308, et [S3], p.196, pour des résultats effectifs antérieurs).

Rappelons pour terminer que l'approche transcendante aux énoncés affirmant que

$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ "agit beaucoup" sur les points de torsion de $E(\overline{K})$ remonte aux articles de Lang [Lg] et de Masser [M1].

4. COMPLÉMENTS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES ET LES FIBRÉS VECTORIELS HERMITIENS

Cette section est consacrée à divers résultats, d'intérêt indépendant, sur lesquels reposera la preuve du théorème des périodes exposée au §5.

4.1. Un lemme de zéros

Les sous-variétés abéliennes dont l'existence est assurée par le théorème des périodes seront produites grâce au résultat géométrique suivant, qui en ramènera la construction à celle de sections de fibrés en droites "s'annulant beaucoup en certains points":

THÉORÈME 4.1. *Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, L un fibré en droite ample sur A, s une section régulière non nulle de L sur A et S un sous-schéma de dimension 0 de A. Soit en outre $S^{\boxplus g}$ le sous-schéma (de dimension 0) de A défini comme l'image schématique de S^g par le morphisme d'addition de A^g vers A.*

Si s s'annule sur $S^{\boxplus g}$, alors il existe une sous-variété abélienne B de A, distincte de A, telle que

$$\ell(p(S)) \cdot \deg_L B \leq \deg_L A \,, \tag{4.1}$$

où p désigne le morphisme quotient de A vers A/B, $p(S)$ l'image schématique de S par p et $\ell(p(S))$ sa longueur.

Les énoncés de ce type apparaissent dans la littérature "transcendante" sous le nom de "lemmes de zéros", et ont fait l'objet d'un exposé par Bertrand dans ce séminaire [Be1], auquel on pourra se reporter pour une discussion et des références détaillées (concernant notamment des travaux antérieurs de Masser et Wüstholz). Signalons seulement que les lemmes de zéros de la forme ci-dessus ont été démontrés en premier lieu par Philippon [P], et que Nakamaye [N] et Denis [D] en ont récemment obtenu de nouvelles variantes. Le Théorème 4.1 peut s'établir en adaptant les méthodes de ces derniers auteurs.

4.2. Sections des fibrés amples sur les schémas abéliens

Soient A une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et L un fibré en droites ample symétrique sur A. Supposons que A admette une bonne réduction potentielle et considérons un corps de nombres K sur lequel A soit définie et admette bonne réduction. Il existe alors un schéma abélien

$$\pi : \mathcal{A} \to S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$$

et un fibré en droite $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$ qui constituent un modèle[1]de A et L sur S. Le fibré en

[1] *i.e.*, il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$-variétés abéliennes $i : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et un isomorphisme de fibrés en droites sur A : $\varphi^* \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\sim} L$.

droites $\mathcal{L}$ peut être muni d'une métrique hermitienne C^∞, invariante par conjugaison, dont la forme de courbure est invariante par translation sur chacune des variétés abéliennes complexes $\mathcal{A}_\sigma$, $\sigma : K \to \mathbb{C}$. On notera $\overline{\mathcal{L}}$ le fibré en droites hermitien ainsi défini. Si $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ désigne la section nulle, on peut en outre supposer qu'il existe un isomorphisme de fibrés en droites hermitiens sur S

$$\varepsilon^* \overline{\mathcal{L}} \simeq \overline{\mathcal{O}}_S \tag{4.2}$$

(remplacer si nécessaire $\overline{\mathcal{L}}$ par $\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \, \varepsilon^* \, \overline{\mathcal{L}}^\vee$). A isomorphisme isométrique près, le fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ est caractérisé par ces conditions. De plus, $\mathcal{L}$ est ample sur $\mathcal{A}$, et son image directe $\pi_* \, \mathcal{L}$ est une fibré vectoriel de rang $\chi(A, L)$ sur S qui admet une structure hermitienne naturelle $\| \; \|_{L^2}$ définie comme suit: pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et tout élément s de $\pi_* \, \mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq H^0(\mathcal{A}_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$, on pose

$$\|s\|^2_{L^2,\sigma} = \int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2_{\overline{\mathcal{L}}} \, d\mu(x) \,, \tag{4.3}$$

où $d\mu$ désigne la mesure de Haar de masse totale 1 sur $\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})$. On notera simplement $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ le fibré vectoriel hermitien $(\pi_* \, \mathcal{L}, \| \; \|_{L^2})$ sur S. Toute cette construction est compatible, en un sens évident, aux extensions du corps de nombres K.

THÉORÈME 4.2. i) *La hauteur sur $A(\overline{\mathbb{Q}})$ définie par le fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur le modèle $\mathcal{A}$ de A coïncide avec la hauteur de Néron-Tate associée à L.*

ii) *Le fibré vectoriel hermitien $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ est semi-stable de pente*

$$\widehat{\mu}\,(\pi_* \overline{\mathcal{L}}) = -\frac{1}{2}\, h(A) + \frac{1}{4} \log \frac{\chi(A, L)}{(2\pi)^g} \,. \tag{4.4}$$

L'assertion i) découle par exemple de [Fa-W], II.2, ou de [M-B2], III.3.3 et III.4.4. En effet, $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube en tant que fibré en droites hermitien sur $\mathcal{A}$.

Pour établir la semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, considérons le groupe de Mumford $K(L)$, c'est-à-dire le sous-groupe fini de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ formé des points x tel qu'il existe un isomorphisme de fibrés en droites sur A

$$\tau_x^* \, L \simeq L \,, \tag{4.5}$$

où τ_x désigne la translation $y \mapsto x + y$ sur A. Les isomorphismes (4.5) déterminent une représentation projective de $K(L)$ sur $H^0(A, L)$. D'après Mumford [Mu1], §1, Theorem 2, cette représentation est irréductible. Par ailleurs, grâce à la Proposition A.2, nous pouvons remplacer K par une extension de degré fini quelconque, et donc supposer que les points de $K(L)$ sont définis sur K. Si $P \in K(L)$, nous noterons encore τ_P le morphisme de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ qui induit τ_P sur $A = \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube, après avoir si nécessaire remplacé K par une extension de degré fini, on voit que, pour tout $P \in K(L)$, il existe un isomorphisme isométrique de fibrés en droites hermitiens sur $\mathcal{A}$:

$$\tau_P^* \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}. \tag{4.6}$$

Ces isomorphismes déterminent une représentation projective de $K(L)$ dans le groupe des automorphismes isométriques de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, qui relève celle sur $H^0(A, L)$. La semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ découle alors de la proposition A.3, appliquée au groupe engendré par l'image de cette représentation projective.

L'expression (4.4) pour la pente de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ a été établie lorsque $\chi(A, L) = 1$ par Moret-Bailly [M3], qui s'appuie sur les résultats de sa monographie [M1] et sur la théorie des fonctions thêta. Elle est prouvée en général dans [Bo2], (4.1.22), au moyen du théorème de Riemann-Roch arithmétique de Gillet-Soulé ([G-S]; voir aussi l'exposé à ce séminaire [Bo1]).

Grâce aux travaux de Moret-Bailly [M-B1], le théorème 4.2 peut s'étendre à la situation où A n'admet pas bonne réduction. Nous renvoyons à [Bo2], 4.3.1-2 pour des énoncés précis, et, pour éviter quelques lourdeurs, nous nous limitons dans cet exposé au cas de bonne réduction.

L'assertion ii) du théorème 4.2 nous permettra d'éviter, lors de la démonstration du théorème des périodes, le recours à la théorie classique des fonctions thêta. Soulignons toutefois le lien étroit entre cette assertion et cette théorie: l'irréductibilité de l'action du groupe $K(L)$, sur laquelle repose la semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, constitue aussi le cœur de la théorie algébrique des fonctions thêta ([Mu1]); quant à l'égalité (4.4), c'est un avatar de l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann, qui montre que les Thetanullwerte définissent des formes modulaires de Siegel (*cf.* [MB1,3]; rappelons qu'avec les notations du théorème 4.2, si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et τ une matrice des périodes de $\mathcal{A}_\sigma$ associée à une base symplectique convenable de $H_1(\mathcal{A}_\sigma, \mathbb{Z})$, le vectoriel complexe $\pi_* \mathcal{L}_\sigma$ se décrit naturellement en termes de Thetanullwerte de τ, tandis que l'évaluation en τ d'une forme modulaire de Siegel de poids k définit un élément de la droite vectorielle $\omega^{\otimes k}_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K, \sigma}$).

4.3. Pentes et morphismes de fibrés vectoriels hermitiens

4.3.1. Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$, $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens de rang non nul sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, et $\varphi : E \to F$ un morphisme non nul de $\mathcal{O}_K$-modules. Pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, soit $\|\varphi\|_\sigma$ la norme de l'application φ_σ entre les espaces vectoriels complexes hermitiens $\overline{E}_\sigma$ et $\overline{F}_\sigma$.

L'énoncé suivant découle aisément de la définition des polygones canoniques et des pentes des fibrés vectoriels hermitiens (*cf.* Appendice A.1):

PROPOSITION 4.3. 1) *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est injective, alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma . \tag{4.7}$$

2) *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est surjective, alors*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma \tag{4.8}$$

et

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) \leq \widehat{\deg}_n \overline{F} - (\operatorname{rg} F - 1)\, \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) + \frac{\operatorname{rg} F - 1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma . \tag{4.9}$$

4.3.2. Dans la pratique, il est utile de disposer d'une généralisation de la proposition précédente, dans laquelle ce n'est pas le fibré vectoriel F qui est équipé d'une structure hermitienne, mais seulement chacun des sous-quotients successifs associés à une filtration de F. (De telles données ont déjà été considérées, dans un contexte analogue, par L. Lafforgue [L].)

Soient donc $\overline{E} = (E, \|\ \|)$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et F un fibré vectoriel sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Soit en outre

$$F = F_N \supset F_{N-1} \supset \ldots \supset F_1 \supset F_0 = 0$$

une filtration de F par des sous-fibrés vectoriels, *i.e.* par des sous-$\mathcal{O}_K$-modules tels que chacun des quotient $G_i := F_i/F_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N$, soit sans torsion, et soit $\|\ \|_i$ une structure hermitienne sur G_i, $i = 1, \ldots, N$. On note $\overline{G_i}$ le fibré vectoriel hermitien $(G_i, \|\ \|_i)$ et φ_i l'application composée

$$\varphi^{-1}(F_i) \xrightarrow{\varphi} F_i \to F_i/F_{i-1} = G_i .$$

Si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$, on note enfin $\|\varphi_i\|_\sigma$ la norme de l'application $\varphi_{i,\sigma}$ entre les espaces vectoriels complexes hermitiens $(\varphi^{-1}(F_i)_\sigma, \| \ \|)$ et $\overline{G}_{i,\sigma}$.

L'énoncé suivant se déduit alors de la Proposition 4.3, 1):

PROPOSITION 4.4. *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est injective, alors*
(4.10)

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{rg}\varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg}\varphi^{-1}(F_{i-1})) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_i) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \right).$$

Lors des applications de la proposition 4.4, la filtration $(F_i)_{0\leq i\leq N}$ est souvent construite à partir d'une suite

$$F = F^N \xrightarrow{p_{N-1}} F^{N-1} \to \cdots \to F^i \xrightarrow{p_{i-1}} F^{i-1} \to \cdots \to F^1 \xrightarrow{p_0} F^0 = 0$$

de morphismes surjectifs $(p_i)_{0\leq i\leq N-1}$ entre des $\mathcal{O}_K$-modules projectifs de type fini $(F^i)_{0\leq i\leq N}$: on considère les morphismes composés $q_i : F^N \to F^i$ définis par $q_N = \mathrm{id}$ et $q_{i-1} = p_{i-1} \circ q_i$ $(1 \leq i \leq N)$, et l'on pose $F_i = \ker q_{N-i}$. Le sous-quotient G_i s'identifie alors à $\ker p_{N-i}$ $(1 \leq i \leq N)$, $\varphi^{-1}(F_i)$ coïncide avec $\ker q_{N-i} \circ \varphi$ et φ_i avec la restriction de $q_{N-i+1} \circ \varphi$.

5. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES PÉRIODES

5.1. De la proposition clé au théorème des périodes

5.1.1. Soient A une variété abélienne de dimension $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres K et L un fibré en droites ample symétrique sur A. Ces données permettent de définir la hauteur $h(F)$ d'un sous-vectoriel F du K-vectoriel t_A de la manière suivante.

Soit K' une extension de degré fini de K sur laquelle A admette réduction semi-stable, et soient $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ un modèle semi-abélien de A et $\varepsilon : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{A}$ sa section nulle. Le $\mathcal{O}_{K'}$-module projectif de type fini

$$t_{\mathcal{A}} := \varepsilon^* T_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}}$$

admet une structure hermitienne naturelle, définie par les métriques $\| \|_{L_\sigma}$, σ décrivant les plongements de K' dans $\mathbb{C}$ (*cf.* 2.1.2). On peut alors considérer le fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ défini par le $\mathcal{O}_{K'}$-module $\mathcal{F} := t_{\mathcal{A}} \cap (F \otimes_K K')$ muni des restrictions de ces métriques, puis poser:

$$h(F) = -\widehat{\deg}_n \overline{\mathcal{F}}\,.$$

C'est un réel indépendant des choix de K' et $\mathcal{A}$ et, pour toute extension K'' de degré fini de K, on définit de même la hauteur d'un sous-vectoriel F du K''-vectoriel $t_{A_{K''}}$.

5.1.2. Nous pouvons maintenant formuler l'énoncé technique qui se trouve au cœur de la démonstration du théorème des périodes (*cf.* [M-W3], §9). Pour nous y référer commodément, nous l'appellerons "proposition clé".

PROPOSITION 5.1. *Soient K' une extension de degré fini de K, W un hyperplan du K'-vectoriel $t_{A_{K'}}$, σ_0 un plongement de K' dans $\mathbb{C}$ et γ un élément non nul de $\Gamma_{A_{\sigma_0}} \cap W_{\sigma_0}$. Posons*

$$d = [K : \mathbb{Q}]\,,$$

$$h = \max(1, h(A), \log \deg_L A, h(W))\,,$$

et

$$r = \max(1, \|\gamma\|^2_{L_{\sigma_0}})\,.$$

Il existe une sous-variété abélienne non-nulle B de A_σ telle que

$$t_B \subset W_{\sigma_0} \tag{5.1}$$

et

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq C(g) \max(\deg_L A, h\, r\, d)^{g-1} \tag{5.2}$$

où $C(g)$ désigne une constante ne dépendant que de g.

Indiquons rapidement comment le théorème des périodes se dérive de cette proposition.

Tout d'abord, on en déduit la variante suivante. Soit $(\lambda(g))_{g\geq 2}$ une suite de réels telle que $\lambda(2) > 1$ et que, pour tout $g \geq 3$, $\lambda(g) > g - 1 + (4g - 3)\,\lambda(g-1)$. Par exemple $\lambda(g) = 4^{g-1}\, g!$ convient.

PROPOSITION 5.2. *Avec les notations de la proposition* 5.1, *il existe une sous-variété abélienne B de A_{σ_0} telle que*

$$t_B \subset W_{\sigma_0}\,, \tag{5.3}$$

$$\gamma \in t_B \tag{5.4}$$

et

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq C'(g)\,\max(\deg_L A, h\,r\,d)^{\lambda(g)}\,. \tag{5.5}$$

où $C(g)$ désigne une constante ne dépendant que de g.

On remarquera que l'information "qualitative" donnée par les relations (5.3) et (5.4) implique à elle seule que $t_{A_{\{\gamma\}}}$ est le plus petit sous-vectoriel de $t_{A_{\sigma_0}}$ défini sur $\overline{K}$, comme l'affirme le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz (*cf.* 2.3.1).

La proposition 5.2 se démontre par récurrence sur la dimension g de A. Si $g = 2$, elle découle immédiatement de la proposition 5.1. Lorsque $g > 2$, soit B_0 la sous-variété abélienne produite par le lemme 1. Si $\gamma \in t_{B_0}$, la proposition 5.2 est démontrée. Sinon, on considère la sous-variété abélienne $B_0^\perp$ complémentaire orthogonal[2] de B_0 dans A_{σ_0} relativement à L_{σ_0}. Les variétés abéliennes B_0 et $B_0^\perp$ sont définies sur un corps de nombres de degré contrôlé (Proposition A.2). De plus, comme $\dim B_0^\perp < \dim A$ (car $B_0 \neq 0$), on peut par récurrence appliquer la proposition 5.2 à $B_0^\perp$, à sa période définie comme la projection orthogonale de $\chi(B_0, L)^2\,\gamma$ sur $t_{B_0^\perp}$ et à l'hyperplan $W_{\sigma_0} \cap t_{B_0^\perp}$ (qui est défini sur un corps de nombres). On obtient ainsi une sous-variété abélienne B_1 de $B_0^\perp$, et l'on peut vérifier que $B = B_0 + B_1$ satisfait aux conclusions de la proposition 5.2 (*cf.* [M-W3], pp.451-452 pour les détails).

La dérivation du théorème des périodes à partir de la proposition 5.2 fait appel aux résultats suivants:

PROPOSITION 5.3. i) *Pour toute sous-variété-abélienne B de $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$, on a*

$$h(t_B) \leq C_3(g)\max(1, h(A), \log\deg_L A, \log\deg_L B)\,, \tag{5.6}$$

[2] Si $\varphi_{L_{\sigma_0}} : A_{\sigma_0} \to \widehat{A}_{\sigma_0}$ désigne la polarisation définie par L_{σ_0} et ${}^t i : \widehat{A}_{\sigma_0} \to \widehat{B}_0$ le morphisme dual à l'inclusion $i : B_0 \to A_{\sigma_0}$, $B_0^\perp$ est défini comme la composante neutre du noyau de ${}^t i \circ \varphi_{L_{\sigma_0}}$.

où $C_3(g)$ désigne une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

ii) *Pour toute extension K' de degré fini de K et tout sous-vectoriel F de $t_{A_{K'}}$, on a*

$$h(F) \geq -C_4(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A)\,, \tag{5.7}$$

où $C_4(g)$ désigne une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

Dans la suite, nous noterons $C_5(g), C_6(g), \ldots$ des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

L'assertion i) de la proposition 5.3 est une variante intrinsèque du "Tangent Space Lemma" de [M-W3], §8. Nous en donnons une démonstration dans l'appendice D. L'assertion ii) est équivalente à une majoration de la forme

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t}_{\mathcal{A}}) \leq C_5(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A)$$

et sera établie au §5.3.4.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème des périodes. Pour le démontrer, nous pouvons supposer que la codimension c de $A_{\{\gamma\}}$ dans A_σ est non nulle. La proposition 5.3 appliquée à la sous-variété abélienne $A_{\{\gamma\}}$ de A_σ et la proposition B.5 montrent alors qu'il existe une extension de degré fini K' de K et un prolongement $\sigma_0 : K' \to \mathbb{C}$ de σ tel que

$$t_{A_{\{\gamma\}}} = \bigcap_{i=1}^{c} W_{i_{\sigma_0}}$$

et que, si l'on pose

$$h_i = \max(1, h(A), \log \deg_L A, h(W_i))\,,$$

alors on ait:

$$\max_{1 \leq i \leq c} h_i \leq C_6(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A, \log \deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}})\,.$$

La proposition 5.2 appliquée à la période γ et à chacun des hyperplans W_i fournit alors des sous-variétés abéliennes B_i de A_σ telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, c\}$,

$$\deg_{L_\sigma} B_i \leq C_2(g) \max(\deg_L A, h_i\, d\, r)^{\lambda(g)}$$

où $r = \max(1, \|\gamma\|^2_{L_\sigma})$, et que $A_{\{\gamma\}}$ soit la composante neutre de $\bigcap_{i=1}^{c} B_i$. Le degré de $A_{\{\gamma\}}$ est donc majoré par le produit des degrés des B_i (voir par exemple [M-W3] Lemma 1.2), et l'on obtient ainsi

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq$$
$$C_7(g) \max(\deg_L A, \max(1, h(A), d\, r \log(\deg_L A), d\, r \log(\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}}))^{(g-1)\lambda(g)}\,.$$

Quitte à accroître l'exposant, on peut éliminer le terme logarithmique $\log(\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}})$ du membre de droite de cette inégalité. Ainsi, pour tout choix de $\kappa > 3(g-1)\,\lambda(g)$, on obtient la majoration suivante, qui établit le théorème des périodes:

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq C_8(g) \max(\deg_L A, h(A), d, \|\gamma\|^2_{L_\sigma})^\kappa . \tag{5.8}$$

5.2. Démonstration de la proposition clé: le lemme des zéros

Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition clé. Pour l'établir, nous pouvons supposer que γ est primitif, *i.e.*, qu'il ne peut s'écrire $n\gamma'$ où $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, et $\gamma' \in \Gamma_{A_{\sigma_0}}$.

Pour tout point Q de $A_{\sigma_0}(\mathbb{C})$ et tout $i \in \mathbb{N}$, nous noterons $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ le "voisinage infinitésimal d'ordre i de Q le long de W_{σ_0}", défini ainsi: si $i = 0$, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ est le sous-schéma réduit de A_{σ_0} défini par Q; si $Q = 0$ et $i = 1$, $V(0, W_{\sigma_0}, 1)$ est le sous-schéma de longueur g du voisinage infinitésimal d'ordre 1 de 0 défini par W_{σ_0}; en général, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ est l'image schématique de $\{Q\} \times V(0, W_{\sigma_0}, 1)^i$ par l'application somme de $A_{\sigma_0}^{i+1}$ vers A_{σ_0}. Si $(X_1, \ldots, X_{g-1})$ désigne une base des champs de vecteurs invariants par translation sur A_{σ_0} dont la valeur en 0 appartient à W_{σ_0}, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ peut encore être décrit comme le sous-schéma de support Q de A_{σ_0} dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est défini par

$$f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (\forall (j_1, \ldots, j_{g-1}) \in \mathbb{N}^{g-1}\ ,\ j_1 + \ldots + j_{g-1} \leq i \Rightarrow X_1^{i_1} \ldots X_{g-1}^{i_{g-1}} f(Q) = 0) .$$

La première étape de la preuve de la proposition clé consiste à établir l'énoncé suivant, qui illustre ce qu'on appelle en transcendance la "méthode de Baker".

LEMME 5.4. *Soit D, M et N trois entiers ≥ 2 et soient*

$$P := \exp_{A_{\sigma_0}} \left(\frac{\gamma}{N}\right) \qquad (\in A_{\sigma_0}(\mathbb{C}))$$

et

$$T := V(0, W_{\sigma_0}, 2g\,M) \cup \bigcup_{i=0}^{N-1} V(iP, W_{\sigma_0}, gM) .$$

Il existe une constante $C_9(g) \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, si les conditions suivantes sont réalisées:

$$\begin{cases} M \geq C_9(g)\ D\,r\,, \\ D^g \deg_L A \geq C_9(g)\, M^{g-1} \\ M^2 \geq C_9(g)\, N^{2g}\, D\,d\,r(D + M\,h + \log N) \end{cases} \tag{5.9}$$

alors le morphisme de restriction

$$H^0(A_{\sigma_0}, L_{\sigma_0}^{\otimes D}) \to H^0(T, L_{|T}^{\otimes D}) \tag{5.10}$$

n'est pas injectif.

Nous montrerons ce lemme au §5.3 en nous appuyant sur la proposition 4.4.

Le lemme des zéros 4.1, appliqué à la variété abélienne A_{σ_0} muni du fibré ample $L_{\sigma_0}^{\otimes D}$ et au sous-schéma

$$S = \bigcup_{i=0}^{N-1} V(iP, W_{\sigma_0}, M)$$

donne alors:

COROLLAIRE 5.5. *Si les conditions* (5.9) *sont satisfaites, il existe une sous-variété abélienne B de A_{σ_0}, de codimension $c > 0$, telle que*

$$\ell(p(S)) \ \deg_{L_{\sigma_0}} B \leq D^c \ \deg_L A \,, \tag{5.11}$$

où p désigne l'application quotient de A_{σ_0} vers A_{σ_0}/B.

Observons que, si $B = 0$, la majoration (5.11) devient

$$\ell(S) \leq D^g \ \deg_L A$$

et que

$$\ell(S) = N \binom{g-1+M}{g-1} \geq N \, \frac{M^{g-1}}{(g-1)!} \, .$$

Par ailleurs, si $t_B \not\subset W_{\sigma_0}$, alors $p(S)$ contient le voisinage infinitésimal d'ordre M de 0 dans A_{σ_0}/B, et donc

$$\ell(p(S)) \geq \binom{c+M}{c} \geq \frac{M^c}{c!} \, .$$

Enfin, si $t_B \subset W_{\sigma_0}$, $p(S)$ contient le voisinage infinitésimal d'ordre M de 0 le long d'un hyperplan de $t_{A_{\sigma_0}/B}$ et donc

$$\ell(p(S)) \geq \binom{c-1+M}{c-1} \geq \frac{M^{c-1}}{(c-1)!} \, ;$$

la majoration (5.11) donne alors

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq \frac{(c-1)!}{M^{c-1}} D^c \deg_L A\,.$$

On obtient ainsi:

LEMME 5.6. *Il existe des constantes $C_{10}(g)$ et $C_{11}(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que, avec les notations du corollaire* 5.5*, les conditions*

$$N\, M^{g-1} \geq C_{10}(g)\, D^g \deg_L A \tag{5.12}$$

et

$$M \geq C_{10}(g)\, D \deg_L A \tag{5.13}$$

impliquent

$$B \neq 0 \quad \textit{et} \quad t_B \subset W_\sigma$$

et

$$\chi(B, L) \leq C_{11}(g)\, D \deg_L A\,. \tag{5.14}$$

On obtient finalement la proposition clé en observant que les conditions (5.9), (5.12) et (5.13) sont compatibles et peuvent être satisfaites avec N ne dépendant que de g et avec, comme valeurs de D et M, les parties entières de

$$D^* = \delta(g)\, (\deg_L A)^{-1} \max(\deg_L A, h\, r\, d)^{g-1}$$

et

$$M^* = \mu(g)\, (\deg_L A)^{-1} \max(\deg_L A, h\, r\, d)^{g}\,,$$

où $\delta(g)$ et $\mu(g)$ ne dépendent que de g.

5.3. Démonstration de la proposition clé: la méthode de Baker

Cette section est consacrée à la preuve du lemme 5.4. Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où la variété abélienne A admet bonne réduction potentielle. La démonstration peut en fait s'étendre au cas général au moyen de la généralisation de la proposition 4.2, reposant sur les travaux de Moret-Bailly, que nous avons mentionnée à la fin du §4.2.

5.3.1. Reprenons donc les notations de la proposition clé et du lemme 5.4, et supposons que A admette bonne réduction potentielle. Nous pouvons supposer que K' est suffisamment grand pour que $A_{K'}$ ait bonne réduction et que P soit défini sur K'. Soit alors $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ un schéma abélien et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathcal{A}$, qui constituent des modèles de A et L comme en 4.2. Pour tout $(n, i) \in \mathbb{N}^2$, nous noterons ε_{nP} la section de π définie par nP et $\mathcal{V}(nP, W, i)$ la fermeture schématique dans $\mathcal{A}$ du voisinage infinitésimal d'ordre i de nP le long de W. Enfin, nous poserons

$$\overline{E} = \pi_* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D}$$

(*cf.* 4.2) et

$$F = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N-1} \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(iP,W,gM)}), \tag{5.15}$$

(on a noté $\mathcal{L}_{|\mathcal{V}(\ldots)}$ pour $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}(\ldots)}$). La restriction des sections de $\mathcal{L}^{\otimes D}$ sur $\mathcal{A}$ aux sous-schémas $\mathcal{V}(n, P, W, i)$ définit un morphisme de $\mathcal{O}_{K'}$-modules

$$\varphi : E \to F. \tag{5.16}$$

Par construction, le morphisme de $\mathbb{C}$-vectoriels

$$\varphi_{\sigma_0} : E_{\sigma_0} \to F_{\sigma_0}$$

s'identifie à l'application (5.10). L'injectivité de cette dernière est donc équivalente à celle de

$$\varphi_K : E_K \to F_K .$$

Nous allons utiliser la proposition 4.4 pour obtenir une condition suffisante de non-injectivité de φ_K. Pour cela, il nous faut préciser une filtration de F et des structures hermitiennes sur les sous-quotients associés. Nous allons définir celle-là au moyen d'une suite de morphismes surjectifs de $\mathcal{O}_K$-modules, de la façon décrite à la fin du §4.3.

Nous posons donc

$$F^0 = \{0\} \tag{5.17}$$

$$F^{k+1} = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,k)}) \text{ pour } k \in \{0, \ldots, 2gM\}, \tag{5.18}$$

$$F^{2gM+2+\ell} = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N-1} \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(iP,W,\ell)}) \text{ pour } \ell \in \{0, \ldots, gM\}. \tag{5.19}$$

Ainsi $F^{3gM+2} = F$, et l'on dispose de morphismes "de restriction" surjectifs évidents $p_i : F^{i+1} \to F^i$, pour $i \in \{0, \dots, 3gM+1\}$. On pose de plus

$$\mathcal{N} = 3gM + 2\,,$$

$$q_{\mathcal{N}} = \mathrm{id}_F$$

et, pour tout $i \in \{0, \dots, \mathcal{N}-1\}$,

$$q_i = p_i \circ \dots \circ p_{\mathcal{N}-1} : F \to F^i\,.$$

On définit enfin une filtration

$$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\mathcal{N}} = F \tag{5.20}$$

par

$$F_i = \ker q_{\mathcal{N}-i}\,.$$

Le sous-quotient $G_{\mathcal{N}-k} := F_{\mathcal{N}-k}/F_{\mathcal{N}-k-1}$ s'identifie alors à $\ker p_k$, et donc, d'après la lissité de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$, à

$$\varepsilon_0^* \mathcal{L}^{\otimes D} \otimes S^k \overset{\vee}{\mathcal{W}} \quad \text{si } k \in \{0, \dots, 2gM\} \tag{5.21}$$

et à

$$\bigoplus_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{iP}^* \mathcal{L}^{\otimes D} \otimes S^\ell \overset{\vee}{\mathcal{W}} \quad \text{si } k = 2gM + 1 + \ell \quad \text{avec } \ell \in \{0, \dots, gM\}\,, \tag{5.22}$$

où, conformément à la notation introduite en 5.1.1, $\mathcal{W}$ désigne le $\mathcal{O}_{K'}$-module $t_{\mathcal{A}} \cap W$. Ce module admet en fait une structure naturelle de fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{W}}$ déterminée par les "formes de Riemann" des L_σ (*cf.* 5.1.1). Les structures hermitiennes sur $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ déterminent, par passage au dual, puissances tensorielle et symétrique[3], produit tensoriel et somme directe, des métriques hermitiennes sur les $\mathcal{O}_{K'}$-modules (5.21) et (5.22), et donc sur les sous-quotients G_i, $i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. Nous noterons $\overline{G}_i$ les fibrés vectoriels hermitiens ainsi définis.

5.3.2. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$,

$$\varphi_i = q_{\mathcal{N}-i+1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(F_i) = \ker q_{\mathcal{N}-i} \to G_i = \ker p_{\mathcal{N}-i}\,.$$

[3] Nous utilisons la convention décrite en A.4 pour la structure hermitienne d'une puissance symétrique.

D'après la proposition 4.4, pour établir la non-injectivité de φ_K lorsque des conditions de la forme (5.9) sont satisfaites, il suffit de montrer que, sous cette dernière hypothèse, si φ_K est injective, alors
(5.23)
$$\widehat{\deg}_n \overline{E} > \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (\operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_{i-1})) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_i) + \frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \right) .$$

Pour cela, nous allons évaluer les divers termes qui apparaissent dans cette inégalité, en supposant φ_K injective.

La valeur de son membre de gauche est fournie par les expressions (2.2) et (4.2) du rang et de la pente de $\overline{E}$:

$$\widehat{\deg}_n \overline{E} = D^g \chi(A, L) \left(-\frac{1}{2} h(A) + \frac{1}{4} \log \frac{D^g \chi(A, L)}{(2\pi)^g} \right) . \tag{5.24}$$

La majoration de son membre de droite va reposer sur les deux lemmes suivants, dont nous esquissons plus loin les démonstrations.

LEMME 5.7. *Il existe une constante $C(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^n \overset{\vee}{\overline{\mathcal{W}}}) \leq C_{12}(g)\, n\, h . \tag{5.25}$$

Pour tout plongement $\sigma : K' \to \mathbb{C}$, posons $\widetilde{\rho}_\sigma = \min(1, \rho(A_\sigma, L_\sigma))$.

LEMME 5.8. *Il existe des constantes $C_{13}(g)$ et $C_{14}(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout plongement $\sigma : K' \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \{0, \ldots, \mathcal{N} - 1\}$:*

- *si $k \in \{0, \ldots, 2gM\}$, alors*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(k+g)!}{k!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^{2}} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(k+g)} ; \tag{5.26}$$

- *si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \ldots, gM\}$, alors*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq (N-1) \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(\ell+g)!}{\ell!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^{2}} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(\ell+g)} ; \tag{5.27}$$

- *si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \ldots, gM\}$, si σ et σ_0 coïncident sur le corps de définition de P et si $M \geq C_{13}(g)\, D \|\gamma\|_{\sigma_0}^2$,*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq (N-1) \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(\ell+g)!}{\ell!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^{2} - C_{14}(g) \frac{M^2}{D \|\gamma\|_{L_{\sigma_0}}^2}} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(\ell+g)} . \tag{5.28}$$

Comme les points iP sont de torsion, leur hauteur de Néron-Tate relativement à L est nulle, et donc, d'après la proposition 4.2, i),

$$\widehat{\deg}_n \, \varepsilon_{iP}^* \, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} = 0 \, .$$

Les relations (A.2) et (A.3) jointes à la majoration (5.25) donnent alors:

$$(5.29) \qquad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_{\mathcal{N}-k}) \leq C_{15}(g) \, k \, h \quad \text{si } k \in \{0, \ldots, 2gM\}$$

$$(5.30) \qquad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_{\mathcal{N}-k}) \leq C_{16}(g) \, \ell \, h \quad \text{si } k = 2gM + 1 + \ell, \text{ avec } \ell \in \{0, \ldots, gM\} \, .$$

Par ailleurs, comme φ est injective, on a

$$(5.31) \qquad \varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_{i-1}) \leq \operatorname{rg} G_i \, ,$$

tandis que

$$(5.32) \qquad \operatorname{rg} G_{\mathcal{N}-k} = \binom{k+g-2}{g-2} \quad \text{si } k \in \{0, \ldots, 2gM\} \, ,$$

$$(5.33) \quad \operatorname{rg} G_{\mathcal{N}-k} = (N-1) \binom{\ell+g-2}{g-2} \quad \text{si } k = 2gM+1+\ell, \text{ avec } \ell \in \{0, \ldots, gM\} \, .$$

De plus, comme F_{gM+1} est le noyau de

$$q_{2gM+1} : \pi_* \, \mathcal{L}^{\otimes D} \to \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)}) \, ,$$

il vient:

$$(5.34) \qquad \operatorname{rg} F_{gM+1} \geq D^g \, \chi(A, L) - \binom{2gM+g-1}{g-1} \, .$$

Enfin, les majorations (5.26) et la proposition 3.4 montrent que, si $k \in \{0, \ldots, 2gM\}$, alors

$$(5.35) \qquad \frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma \leq C_{17}(g) \, (D + (k+1)h) \, .$$

De même, comme le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de définition de P, qui est un point de N-torsion de A, est au plus égal à $N^{2g}\,d$, on déduit de (5.26) et (5.27), que si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \ldots, gM\}$, alors

(5.36)

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K'\to\mathbb{C}} \log \|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma \leq C_{18}(g)\,(D + (\ell+1)h + \log N) - \frac{1}{2N^{2g}d} C_{14}(g) \frac{M^2}{D\|\gamma\|^2},$$

pourvu que

$$M \geq C_{13}(g)\,D\,r\,. \tag{5.37}$$

Les inégalités (5.29-34) montrent alors que, si la condition (5.37) est satisfaite, le membre de droite de (5.23) est majoré par

$$C_{17}(g) \sum_{k=0}^{2gM} \binom{k+g-2}{g-2} (D + (k+1)h) + C_{18}(g)\,(N-1)$$
$$\sum_{\ell=0}^{gM} \binom{\ell+g-2}{g-2} (D + (\ell+1)h + \log N)$$
$$- \frac{1}{2} C_{14}(g)\,(N-1) \left[D^g\,\chi(A,L) - \binom{2gM+g-1}{g-1}\right] \frac{M^2}{N^{2g}Ddr},$$

donc par

$$C_{19}(g)\; N\, M^{g-1}\,(D + M\,h + \log N) -$$
$$C_{20}(g)\,(N-1)\,[D^g\,\chi(A,L) - C_{21}(g)\,M^{g-1}]\,\frac{M^2}{N^{2g}Ddr}\,. \tag{5.38}$$

Si nous supposons que $N \geq 2$ et que

$$D^g\,\chi(A,L) \geq \frac{1}{2}\,C_{22}(g)\,M^{g-1}\,, \tag{5.39}$$

(5.38) est à son tour majoré par

$$C_{23}(g)\,N\,D^g\,\chi(A,L)\,\left(D + M\,h + \log N - C_{24}(g)\,\frac{M^2}{N^{2g}Ddr}\right).$$

Comme, d'après (5.24), le membre de gauche de (5.23) est minoré par $-\frac{1}{2}\,h\,D^g\,\chi(A,L)$, nous obtenons que (5.23) est alors satisfaite dès que

$$M^2 \geq C_{25}(g)\,N^{2g}\,D\,d\,r\,(D + M\,h + \log N)\,. \tag{5.40}$$

Cela termine la preuve du lemme 5.4, puisque (5.9) est la conjonction de (5.37), (5.39) et (5.40).

5.3.3. Donnons quelques indications sur la preuve du lemme 5.8. Les majorations (5.26) et (5.27) sont des avatars des inégalités de Cauchy. On les obtient par exemple en considérant une trivialisation du fibré en droites holomorphe $\exp^*_{A_\sigma} L_\sigma$ compatible avec la structure hermitienne $\| \ \|_\sigma$ de L_σ, c'est-à-dire satisfaisant à la condition suivante: si s est une section de L_σ sur un ouvert Ω de $A_\sigma(\mathbb{C})$ et f est la fonction holomorphe sur $\exp^{-1}_{A_\sigma}(\Omega)$ que lui associe cette trivialisation, on a, pour tout $z \in \exp^{-1}_{A_\sigma}(\Omega)$,

$$\|s(\exp_{A_\sigma} z)\|_\sigma = e^{-\frac{\pi}{2}\|z\|^2_{L_\sigma}}\,|f(z)|\,.$$

La majoration (5.28), qui joue un rôle central dans la preuve de la proposition clé, est plus subtile: elle affirme qu'une section s de $L^{\otimes D}$ qui admet un zéro de multiplicité $2gM$ le long de W_σ en l'origine est "très petite" ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre gM le long de W_σ en des points de la forme $\exp_{A_\sigma}\left(\frac{i\gamma}{N}\right)$. Si h est la fonction entière sur t_{A_σ} définie par s grâce à une trivialisation compatible de L, la majoration (5.28) découle des calculs conduisant à (5.26) et (5.27) et d'une forme convenable du lemme de Schwarz appliquée aux fonctions entières d'une variable complexe w définies par

$$w(z) = D\,h\,(z\,\gamma)\,,$$

où D est le composé d'au plus gM dérivations le long de W_σ; le point crucial est que ces fonctions w ont un zéro d'ordre au moins gM en tout point entier.

Les conditions d'annulation sur des schémas non réduits tels que $V(iP, W, n)$ et l'emploi du lemme de Schwarz sont caractéristiques de la méthode de Baker.

5.3.4. Pour établir le lemme 5.7, il suffit d'après la proposition A.4 de montrer que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overset{\vee}{\overline{\mathcal{W}}}) \leq C_{26}(g)\,h\,. \tag{5.41}$$

La preuve de (5.41) repose sur l'existence d'un morphisme de $\mathcal{O}_{K'}$-modules

$$\Sigma : (\pi_*\,\mathcal{L}^{\otimes 3})^{\otimes 2} \to \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}}\,,$$

avatar intrinsèque des "crochets" et des "dérivées de Shimura" qui interviennent dans [Da1,2] et [M-W3] (voir aussi [Sh]).

Si s_1 et s_2 sont deux sections régulières de $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{A}$, telles $s_2 \neq 0$, le quotient s_1/s_2 est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}$, qui admet une différentielle $d(s_1/s_2)$, section méromorphe de $\Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}$. La section méromorphe $s_2^{\otimes 2}\, d(s_1/s_2)$ de $\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}$ est régulière sur $\mathcal{A}$. On définit ainsi un morphisme bilinéaire de $\mathcal{O}_{K'}$-modules:

$$[\cdot,\cdot] : \pi_*\,\mathcal{L}^{\otimes 3} \times \pi_*\,\mathcal{L}^{\otimes 3} \longrightarrow \pi_*\,(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}})\,.$$

Le morphisme Σ est alors défini en composant $[\cdot,\cdot]$ avec le morphisme de restriction à la section nulle

$$\pi_*\,(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}) \longrightarrow \varepsilon_0^*\,(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}) \simeq \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}}\ .$$

Notons $p = \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}} \to \overset{\vee}{\mathcal{F}}$ le morphisme dual à l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $t_{\mathcal{A}}$. Comme $L^{\otimes 3}$ est très ample sur A, $\Sigma_{K'}$ est surjectif. Il en va donc de même de $(p\circ\Sigma)_{K'}$. La majoration (5.41) découle alors de la proposition 4.3, ii), (4.9), appliquée au morphisme $p \circ \Sigma$ entre les fibrés vectoriels hermitiens $(\pi_*\,\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3})^{\otimes 2}$ et $\overset{\vee}{\overline{\mathcal{F}}}$. En effet, la proposition 4.2, ii), appliquée au fibré en droites $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{A}$ montre que

$$\widehat{\mu}_{\min}((\pi_*\,\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3})^{\otimes 2}) = -h(A) + \frac{1}{2}\,\log\chi(A,L) + \frac{g}{2}\log\frac{3}{2\pi}\,,$$

tandis qu'une variante des majorations (5.26), et la proposition 3.4 donnent:

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K'\to\mathbb{C}} \log\|\Sigma\|_\sigma \leq C_{27}(g)\max(1,h(A),\log\chi(A,L))\,.$$

Un argument analogue, mais plus simple, établit aussi la majoration

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t}_{\mathcal{A}}) \leq C_{24}(g)\max(1,h(A),\log\deg_L\,A)$$

(appliquer (4.8) à Σ). Cela démontre l'assertion ii) de la proposition 5.3.

APPENDICES

A. Fibrés vectoriels hermitiens, degré d'Arakelov et polygones canoniques

A.1. Soit $\mathcal{X}$ un schéma sur $\mathbb{Z}$, dont la fibre générique $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ est lisse. Un *fibré vectoriel hermitien* $\overline{E}$ sur $\mathcal{X}$ est une paire $(E, \| \ \|)$ formée d'un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules localement libres de rang fini E sur $\mathcal{X}$ et d'une métrique hermitienne C^{∞}, invariante par conjugaison, sur le fibré vectoriel holomorphe $E(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$.

On définit de façon évidente la somme directe $\overline{E} \oplus \overline{E}'$, le produit tensoriel $\overline{E} \otimes \overline{E}'$, le dual $\overset{\vee}{\overline{E}}$ et le déterminant $\det \overline{E}$ de tels fibrés vectoriels hermitiens sur $\mathcal{X}$, ainsi que leur image inverse par un morphisme de $\mathbb{Z}$-schémas $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de fibres génériques lisses: $f^* \overline{E}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module $f^* E$ sur $\mathcal{Y}$ muni de la métrique hermitienne qui rend isométriques les isomorphismes $(f^* E)_x \simeq E_{f(x)}$, $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$.

Le rang d'un fibré vectoriel E est noté $\mathrm{rg}\, E$. Un *fibré en droites hermitien* est un fibré vectoriel hermitien de rang 1.

Soit K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, et $S = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$. Les points complexes du $\mathbb{Z}$-schéma S ne sont autres que les plongements $\sigma : K \to \mathbb{C}$. Si $\mathcal{X}$ est un S-schéma dont la fibre générique $\mathcal{X}_K$ est lisse, la variété holomorphe des points $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{X}$ vu comme $\mathbb{Z}$-schéma s'écrit comme la réunion disjointe $\underset{\sigma : K \to \mathbb{C}}{\cup} \mathcal{X}_{\sigma}(\mathbb{C})$ et la donnée d'une structure hermitienne sur un fibré vectoriel E sur $\mathcal{X}$ n'est autre que celle de métriques hermitiennes C^{∞}, invariantes par conjugaison, sur les fibrés vectoriels holomorphes $E_{\sigma}(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{X}_{\sigma}(\mathbb{C})$, $\sigma : K \to \mathbb{C}$.

En particulier, un fibré vectoriel $\overline{E}$ hermitien sur S n'est autre que la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif de type fini et de métriques hermitiennes $\| \ \|_{\sigma}$, invariantes par conjugaison, sur les espaces vectoriels complexes E_{σ}, $\sigma : K \to \mathbb{C}$. La donnée de ces métriques équivaut à son tour à celle d'une structure euclidienne (resp. hermitienne) sur le complété de E à chaque place archimédienne réelle (resp. complexe) de K.

A.2. Soit donc $\overline{E}$ un tel fibré vectoriel hermitien sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K. Lorsque $\mathrm{rg}\, E = 1$, le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ est défini par l'égalité

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} := \log \#(E/\mathcal{O}_K\, s) - \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|s\|_{\sigma} \,,$$

où s désigne un élément non nul quelconque de E; cette expression est en effet indépendante de s, en conséquence de la formule du produit (*cf.* [W], [A], [Sz1]).

En général, on définit le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ comme

$$\widehat{\deg}\ \overline{E} := \widehat{\deg}\det\overline{E}\,,$$

puis son *degré d'Arakelov normalisé*

$$\widehat{\deg}_n\,\overline{E} := [K:\mathbb{Q}]^{-1}\,\widehat{\deg}\ \overline{E}\,,$$

et, lorsque $E \neq 0$, *sa pente* (normalisée)

$$\widehat{\mu}\,(\overline{E}) := ([K:\mathbb{Q}]\ \mathrm{rg}\,E)^{-1}\,\widehat{\deg}\ \overline{E}\,.$$

Si L est une extension de degré fini de K, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$, et si f : $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ est le morphisme déterminé par l'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$, il vient:

$$\widehat{\deg}_n\,f^*\,\overline{E} = \widehat{\deg}_n\,\overline{E} \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}\,(f^*\,\overline{E}) = \widehat{\mu}\,(\overline{E})\,.$$

A.3. Supposons $E \neq 0$. Si F est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de E, les restrictions des métriques hermitiennes sur les E_σ font de F un fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Les degrés d'Arakelov de ces sous-modules sont bornés et l'on peut considérer l'enveloppe convexe fermée dans $\mathbb{R}^2$ des points de la forme $(\mathrm{rg}\,F, \widehat{\deg}_n\,\overline{F})$. Il existe une fonction concave

$$P_{\overline{E}} : [0, \mathrm{rg}\,E] \to \mathbb{R}\,,$$

affine sur chaque segment $[i-1, i]$, $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}\,E\}$, telle que cette enveloppe convexe coïncide avec le "sous-graphe" de $P_{\overline{E}}$

$$\{(x,y) \in [0, \mathrm{rg}\,E] \times \mathbb{R} \mid y \leq P_{\overline{E}}\,(x)\}\,.$$

On a

$$P_{\overline{E}}\,(0) = 0 \quad , \quad P_{\overline{E}}\,(\mathrm{rg}\,E) = \widehat{\deg}_n\,\overline{E}\,,$$

et, pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}\,E\}$, l'on définit la *$i$-ème pente* de $\overline{E}$ comme

$$\widehat{\mu}_i\,(\overline{E}) := P_{\overline{E}}\,(i) - P_{\overline{E}}\,(i-1)\,.$$

C'est une suite décroissante de réels, de somme $\widehat{\deg}_n\,\overline{E}$. Lorsque $K = \mathbb{Q}$, $\exp(-\widehat{\mu}_i(\overline{E}))$ est un avatar du i-ème minimum du réseau E dans l'espace vectoriel euclidien $(E_{\mathbb{R}}, \|\ \|)$.

On pose enfin:

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \widehat{\mu}_1(\overline{E}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) := \widehat{\mu}_{\operatorname{rg} E}(\overline{E}) .$$

Le graphe de $P_{\overline{E}}$ est le *polygone canonique* de $\overline{E}$. Il a été introduit par Stuhler [St] et Grayson [Gr], qui se sont inspirés d'une construction analogue concernant les fibrés vectoriels sur les courbes projectives lisses, due à Harder et Narasimhan [H-N]. Le phénomène remarquable mis en évidence par ces auteurs est que, grâce à $P_{\overline{E}}$, on peut munir E d'une filtration canoniquement déterminée par $\overline{E}$:

PROPOSITION A.1. ([St], [Gr]) *Soient $i_1 < \ldots < i_{k-1}$ les points de discontinuité de $P'_{\overline{E}}$ dans $]0, \operatorname{rg} F[$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, il existe un unique sous-$\mathcal{O}_K$-module E_j de rang i_j dans E tel que*

$$P_{\overline{E}}(i_j) = \widehat{\deg}_n \overline{E}_j .$$

Les quotients E/E_j sont sans torsion, et l'on a

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{k-1} .$$

La filtration strictement croissante

$$E_0 = 0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{k-1} \subset E_k := E$$

ainsi définie est la *filtration de Harder-Narasimhan-Stuhler-Grayson* (ou plus brièvement, la *filtration canonique*) de $\overline{E}$.

On dit que le fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ est *semi-stable* lorsque son polygone canonique est un segment, *i.e.*, lorsque $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \quad (= \widehat{\mu}(\overline{E}))$. Les modules projectifs de type fini E_i/E_{i-1}, munis de la structure hermitienne quotient de celle de $\overline{E}$, sont semi-stables, et leurs pentes forment une suite strictement décroissante. Ces propriétés caractérisent en fait la filtration canonique de $\overline{E}$.

A.4. Les énoncés suivants se déduisent de la propriété d'unicité des sous-modules apparaîssant dans la filtration canonique.

PROPOSITION A.2. *Soient L une extension de degré fini de K, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, et $f : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le morphisme défini par l'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *de filtration canonique* $(E_i)_{0 \leq i \leq k}$, *alors le fibré vectoriel hermitien $f^* \overline{E}$ admet $(f^* E_i)_{0\leq i\leq k}$ comme filtration canonique. En particulier,*

$$P_{f^*\overline{E}} = P_{\overline{E}}$$

et, pour tout $i \in \{1, \dots, \operatorname{rg} E\}$,

$$\widehat{\mu}_i (f^* \overline{E}) = \widehat{\mu}_i (\overline{E}) .$$

PROPOSITION A.3. *S'il existe un groupe d'automorphismes isométriques de $\overline{E}$, agissant de façon irréductible sur E_K, alors $\overline{E}$ est semi-stable.*

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Pour tout entier naturel k, nous noterons $S^k \overline{E}$ le fibré vectoriel hermitien défini par la puissance symétrique $S^k E$ muni de la structure hermitienne quotient de la structure hermitienne sur $E^{\otimes k}$, puissance tensorielle de celle sur E.[4] En s'appuyant sur les résultats de Zhang [Zh], on peut établir les propositions suivantes:

PROPOSITION A.4. *Pour tout $k \in N$, on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^k \overline{E}) \leq k(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + C(\operatorname{rg} E)) , \tag{A.1}$$

où $C(\operatorname{rg} E)$ désigne une constante fonction du seul rang de E.

PROPOSITION A.5. *Pour tout sous-$\mathcal{O}_K$-module F de E tel que E/F soit un $\mathcal{O}_K$-module sans torsion de rang $r \geq 1$, il existe une extension de degré fini L de K telle que, en notant $f : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le morphisme défini par l'inclusion $\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathcal{O}_L$, on puisse trouver des sous-fibrés vectoriels $W_1, \dots, W_r$ de $f^* E$ de rang $\operatorname{rg} E - 1$ vérifiant les conditions suivantes:*

$$f^* E/W_i \text{ est sans torsion} \quad (1 \leq i \leq r)$$

$$F = \bigcap_{i=1}^{r} W_i$$

et

$$\widehat{\deg}_n \overline{E} - \widehat{\deg}_n \overline{F} \leq \sum_{i=1}^{r} (\widehat{\deg}_n \overline{E} - \widehat{\deg}_n \overline{W}_i) + C(r) ,$$

[4] Ainsi, pour tout $v \in E$ et tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a $\|v^k\|_{S^k\overline{E},\sigma} = \|v\|^k_{\overline{E},\sigma}$. On prendra garde que cette définition de la structure hermitienne d'une puissance symétrique diffère d'un facteur $k!$ de celle introduite dans EVT, V, p.30.

où $C(r)$ désigne une constante ne dépendant que de r.

Comme plus haut, on a noté $\overline{F}$ (resp. $\overline{W_i}$) le fibré hermitien défini par F (resp. W_i) muni de la restriction de la structure hermitienne de $\overline{E}$ (resp. $f^*\overline{E}$).

Enfin, si $\overline{L}$ est un fibré en droites hermitien et $\overline{E}, \overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$ des fibrés vectoriels hermitiens non nuls sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on établit aisément les relations:

$$\widehat{\mu}_i(\overline{L} \otimes \overline{E}) = \widehat{\deg}_n(\overline{L}) + \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \ , \quad 1 \leq i \leq \operatorname{rg} E \tag{A.2}$$

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \overline{E}_i\right) = \max_{1 \leq i \leq N} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) \, , \tag{A.3}$$

et

$$\widehat{\mu}_{\min}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \overline{E}_i\right) = \min_{1 \leq i \leq N} \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_i) \, . \tag{A.4}$$

B. Quelques énoncés de finitude

Nous rappelons ci-dessous quelques énoncés de finitude "bien connus" concernant les variétés abéliennes, leurs morphismes, leurs polarisations et leurs corps de définition.

La proposition suivante se démontre en considérant les points de 3-torsion (*cf.* [M-W1], §2; voir aussi [Si]).

PROPOSITION B.1. *Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *et k un sous-corps de Ω.*

i) *Soit A et B deux variétés abéliennes sur k, de dimension au plus g. Il existe une extension galoisienne k' de k dans Ω de degré $[k' : k] \leq 3^{16g^4}$ telle que tout Ω-morphisme de variétés abéliennes de A_Ω vers B_Ω soit défini sur k'.*

ii) *Soit A une variété abélienne définie sur k de dimension g. Il existe une extension galoisienne k' de k dans Ω, de degré $[k' : k] \leq 2^{4g^2}\, 3^{16g^4}$ telle que toute sous-variété abélienne de A_Ω (sur Ω) et tout fibré en droite symétrique sur A_Ω soient définis sur k'.*

En appliquant le théorème de Jordan-Zassenhaus à l'anneau des endomorphismes d'une variété abélienne, on obtient (voir par exemple [De1], 1.25-26):

PROPOSITION B.2. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps k de caractéristique* 0.

i) *Les variétés abéliennes facteurs directs de A (sur k) ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.*

ii) *Les polarisations de degré n, Θ, de A (sur k) ne fournissent qu'un nombre fini de classes de k-isomorphie de variétés abéliennes polarisées (A, Θ).*

Enfin, en considérant les points de 3-torsion et leur ramification et en utilisant le théorème d'Hermite, on peut montrer (*cf.* [F], p. 357, et [Si]) :

PROPOSITION B.3. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Il n'y a qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K, $\overline{K}$-isomorphes à A et K-isogènes à A.*

C. Rayons d'injectivité et hauteurs de Faltings

Dans cet appendice, nous esquissons une preuve de la proposition 3.4, due à S. David et à l'auteur, qui permet de borner effectivement la constante $C(g)$ qui y apparaît.

C.1. Rappelons que la hauteur (logarithmique) d'un point $x = (x_1 : \ldots : x_N)$ de $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{Q})$ est minorée par l'expression archimédienne $\frac{1}{N} \max\limits_{\substack{x_i \neq 0 \\ x_j \neq 0}} (\log |x_i| - \log |x_j|)$.

L'énoncé suivant est une variante de cette remarque:

LEMME C.1. *Soient K un corps de nombres, $\overline{L}$ et $\overline{M}$ deux fibrés en droites hermitiens sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *et $\varphi_i : L \to M$, $i = 1, \ldots, N$, des morphismes de $\mathcal{O}_K$-modules. Si l'un au moins des φ_i est non nul, alors*

$$\begin{aligned} &\widehat{\deg}_n \overline{L} + \frac{1}{N[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \max_{\substack{\varphi_i \neq 0 \\ \varphi_j \neq 0}} (\log \|\varphi_i\|_\sigma - \log \|\varphi_j\|_\sigma) \\ \text{(C.1)} \qquad &\leq \widehat{\deg}_n \overline{M} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \max_i \|\varphi_i\|_\sigma . \end{aligned}$$

On a noté $\|\varphi_i\|_\sigma$ la norme de l'application $\varphi_{i,\sigma}$ entre les espaces vectoriels hermitiens $\overline{L}_\sigma$ et $\overline{M}_\sigma$. L'inégalité (C.1) découle des majorations:

$$\widehat{\deg}_n \overline{L} \leq \widehat{\deg}_n \overline{M} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ \varphi_i \neq 0 .$$

C.2. Pour établir la proposition 3.4, on se ramène au cas où la polarisation de A définie par L est principale en considérant un quotient de A par un sous-groupe lagrangien de $K(L)$, quotient dont la hauteur vaut au plus $h(A)+\frac{1}{2}\log\chi(A,L)$ d'après (2.6).

Supposons donc que $\chi(A,L) = 1$ et, pour simplifier, que A admette bonne réduction potentielle (le cas général se traite en faisant appel aux résultats de Moret-Bailly mentionnés en 4.2; *cf.* [Bo2] 4.3.1-2). Soient alors K, $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et $\overline{\mathcal{L}}$ comme en 4.2. Quitte à remplacer K par une extension finie nous pouvons supposer que tout point de 2-torsion de A est défini sur K. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube, nous pouvons même supposer que, si ε_P désigne la section de π attachée à un point de 2-torsion P de A, il existe un isomorphisme isométrique

$$\varepsilon_P^*\overline{\mathcal{L}} \simeq \overline{\mathcal{O}}\,, \tag{C.2}$$

où $\overline{\mathcal{O}}$ désigne le fibré en droite hermitien trivial sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ (défini par le $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{O}_K$ muni des normes hermitiennes $\|\ \|_\sigma$ telles que $\|1\|_\sigma = 1$ pour tout $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$).

C.3. Procédons à quelques rappels sur les variétés abéliennes complexes et les fonctions thêta.

Soit

$$\mathcal{H}_g = \left\{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\tau > 0\right\}$$

le demi-espace de Siegel. La fonction thêta de Riemann est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}^g$ définie par

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\ {}^tn\cdot\tau\cdot n + 2\pi i\ {}^tn\cdot z)\,.$$

On pose aussi:

$$\|\theta\|\,(z,\tau) = (\det\ \operatorname{Im}\tau)^{\frac{1}{4}}\ \exp(-\pi\ {}^t(\operatorname{Im} z)\cdot(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\cdot(\operatorname{Im} z))\,|\theta(z,\tau)|\,.$$

C'est une fonction $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$-périodique de z.

Le diviseur dans $\mathbb{C}^g$ défini par l'annulation de $\theta(\cdot,\tau)$ est invariant sous les translations par les éléments du réseau $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Il définit donc un diviseur Θ_τ sur le tore complexe $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Le fibré en droites holomorphe $\mathcal{O}(\Theta_\tau)$ sur $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ est ample, et en fait une variété abélienne complexe principalement polarisée. La structure hermitienne sur $t_{\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g}$ ($\simeq \mathbb{C}^g$) associée à $\mathcal{O}(\Theta)$ (*cf.* 2.1.2) est définie par la matrice $(\operatorname{Im}\tau)^{-1}$.

Inversement, si A est une variété abélienne complexe munie d'un fibré en droite ample symétrique tel que $\chi(A, L) = 1$, il existe $\tau \in \mathbb{C}^g$, un point de 2-torsion a de $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$, un isomorphisme de variétés abéliennes

$$i : \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g \xrightarrow{\sim} A$$

et un isomorphisme de fibrés en droites

$$i^*(L) \simeq \mathcal{O}(\Theta_\tau + a).$$

Supposons de plus que L soit muni d'une métrique hermitienne $\| \ \|$, dont la courbure est invariante par translation. Alors, pour toute section régulière s de L sur A et tout $z \in \mathbb{C}^g$, on a

$$\|s(i([z]))\|^2 = 2^{g/2} \, \|\theta\|^2 \, (z - a, \tau) \int_A \|s(x)\|^2 \, d\mu(x) \tag{C.3}$$

(voir [MB3], 3.2 et 3.4; on observera que $\| \ \|$ et s existent et sont uniques à multiplication par un scalaire non nul près).

Enfin, on définit une fonction $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$-invariante sur $\mathcal{H}_g$ en posant:

$$\begin{aligned} F(\tau) = \frac{1}{4}\, g \log \pi - \log & \max_{a \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)} \|\theta\| \, (a, \tau) \\ & + \frac{1}{4^g} \max_{\substack{a,b \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g) \\ a,b \notin \Theta_\tau}} \left(\log \|\theta\| \, (a,\tau) - \log \|\theta\| \, (b, \tau)\right). \end{aligned} \tag{C.4}$$

C.4. Revenons aux notations de **C.2**, et pour chaque plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, choisissons τ_σ dans le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ tel que A_σ, polarisée par L_σ, soit isomorphe à la variété abélienne $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_\sigma \mathbb{Z}^g$, polarisée par $\mathcal{O}(\Theta_\tau)$.

Nous pouvons appliquer le lemme C.1 aux fibrés en droites hermitiens $\overline{L} = \pi_* \overline{\mathcal{L}}$, $\overline{M} = \overline{\mathcal{O}}$ et aux $N = 2^{2g}$ morphismes de $\pi_* \mathcal{L}$ vers $\mathcal{O}$, indexés par les points de 2-torsion P de A, obtenus en composant chacun des morphismes de $\pi_* \mathcal{L}$ vers $\varepsilon_P^* \mathcal{L}$, défini par la restriction à la section ε_P, avec l'isomorphisme (C.2). En effet l'un de ces morphismes est non nul (*cf.* par exemple [I], p.168). Compte-tenu de l'expression de $\widehat{\deg}\, \pi_* \overline{\mathcal{L}}$ (Théorème 4.2, ii)) et des normes de ces morphismes données par (C.3), on obtient ainsi:

PROPOSITION C.2. *La hauteur de Faltings de A vérifie la minoration suivante:*

$$h(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} F(\tau_\sigma)\,. \tag{C.5}$$

Pour terminer la preuve de la proposition 3.4, il suffit de montrer que, pour une constante $C(g)$ convenable, on a pour toute matrice $\tau \in \mathcal{H}_g$,

$$\rho(\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g, \mathcal{O}(\Theta_\tau))^{-2} \leq C(g)\; F(\tau)\,. \tag{C.6}$$

Pour ce faire, on peut supposer que τ est réduite au sens de Siegel (plus précisément qu'elle appartient au "domaine fondamental" $\mathcal{F}_g$ décrit par Igusa, [I], II §4). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_g(\mathbb{C})$; la théorie de la réduction fournit alors une constante $C_1(g)$ telle que

$$\rho(\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g, \mathcal{O}(\Theta_\tau))^{-2} \leq C_1(g)\; \|\operatorname{Im}\tau\| \tag{C.7}$$

(*cf.* [M3], p.121). Enfin, il existe une constante $C_2(g)$ telle que pour toute matrice $\tau \in \mathcal{F}_g$, on ait:

$$\|\operatorname{Im}\tau\| \leq C_2(g)\; F(\tau)\,. \tag{C.8}$$

Cette inégalité, qui avec (C.7) établit (C.6) et donc la proposition 3.4, est une conséquence des assertions ci-dessous; elles assurent que les Thetanullwerte associées à la 2-torsion ont des modules contrôlés, et que l'une d'entre elles est toujours "grande", et une autre, "petite" mais non nulle:

- pour toute $\tau \in \mathcal{H}_g$, on a

$$\max_{b \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)} \|\theta\|\,(b,\tau) \geq (\det \operatorname{Im}\tau)^{\frac{1}{4}}\;; \tag{C.9}$$

cela découle de la relation

$$\lim_{n \to \infty} (\det \operatorname{Im}(2^n\,\tau))^{-\frac{1}{4}}\; \|\theta\|\,(0, 2^n\,\tau) = 1$$

et des formules de duplication des fonctions thêta (*cf.* [I], p.139; voir aussi [Da1], p.132-133 pour un argument analogue, et [M-W3], lemma 6.3, pour une variante non effective de (C.9)).

• il existe des constantes $C_3(g)$ et $C_4(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour toute matrice $\tau \in \mathcal{F}_g$ et tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$:

$$\|\theta\|\,(m + \tau \cdot {}^t(0,\ldots,0,\tfrac{1}{2}), \tau) \leq C_3(g)\,(\det \operatorname{Im} \tau)^{\frac{1}{4}} \exp(-C_4(g)\,\|\operatorname{Im} \tau\|)\,; \tag{C.10}$$

cela découle d'une majoration terme à terme de la série définissant $\theta(m + \tau \cdot {}^t(0,\ldots,0,\frac{1}{2}), \tau)$.

• pour toute $\tau \in \mathcal{H}_g$, il existe $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ tel que $\theta(m + \tau \cdot {}^t(0,\ldots,0,\frac{1}{2}), \tau) \neq 0$ (*cf.* [I], p.168).

Soulignons que les constantes $C_1(g) - C_4(g)$ qui apparaîssent ci-dessus sont toutes explicitement calculables. Il en va donc de même de la constante $C(g)$ dans (C.6) et dans la proposition 3.4. Remarquons enfin que la proposition C.2 jointe aux inégalités (C.6) et (2.3) fournissent une minoration effective en fonction de g de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes principalement polarisée de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Comme pour toute variété abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la variété abélienne $Z(A) := A^4 \times \widehat{A}^4$ admet une polarisation principale et que, d'après (2.7) et l'invariance par dualité de la hauteur de Faltings (*cf.* [R2]), $h(A) = \frac{1}{8}\,h(Z(A))$, on en déduit une minoration effective en fonction de g de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes quelconques de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (*i.e.*, de la constante $C_0(g)$ dans le théorème 2.1, i)).

D. Hauteurs et degrés des sous-variétés abéliennes

Si A est une variété abélienne sur un corps de nombres muni d'un fibré en droites ample L, nous noterons $h_{A,L}$ la hauteur sur les sous-vectoriels de t_A définie en 5.1. L'énoncé suivant précise alors la proposition 5.3, i).

PROPOSITION D.1. *Pour toute variété abélienne A de dimension $g \geq 1$ sur un corps de nombres et tout fibré en droites L ample sur A, on a:*

$$h_{A,L}(t_A) = h(A) + \frac{1}{2}\log\chi(A,L) - \frac{g}{2}\log\pi\,. \tag{D.1}$$

Si de plus B est une sous-variété abélienne propre de A, alors

$$h(B) \leq h(A) + (2g-1)\,\log\chi(B,L) - \min_{1\leq i\leq g} C_0(i)\,, \tag{D.2}$$

où $C_0(1),\ldots,C_0(g)$ désignent les constantes apparaîssant dans le théorème 2.1, i), *et*

$$0 \leq h_{A,L}(t_B) - h_{B,L}(t_B) \leq 2g\log\chi(B,L)\,. \tag{D.3}$$

L'égalité (D.1) découle des définitions des hauteurs $h_{A,L}(t_A)$ et $h(A)$.

Pour montrer (D.2), considérons la sous-variété abélienne $B^\perp$ orthogonale de B dans A relativement à L. Le morphisme d'addition

$$\varphi : B \times B^\perp \to A$$

est une isogénie de degré N au plus égal à $\chi(B, L)^2$ (voir par exemple [M-W3], Lemma 1.4). Soit

$$\psi : A \to B \times B^\perp$$

l'isogénie de degré N^{2g-1} telle que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ soient les morphismes de multiplication par N. D'après (2.6) et (2.7), on a

$$h(B) + h(B^\perp) \leq h(A) + \frac{1}{2} \log N^{2g-1} .$$

Compte-tenu de la minoration

$$h(B^\perp) \geq C_0(g - \dim B) ,$$

cela implique (D.2).

Pour établir (D.3), considérons un corps de nombres K sur lequel A, B et $B^\perp$ sont définis et admettent réduction semi-stable, et des modèles semi-abéliens $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\perp$ de A, B et $B^\perp$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Comme en 5.2, notons $t_\mathcal{A}$ et $t_\mathcal{B}$ les $\mathcal{O}_K$-modules définis par les restrictions aux sections nulles des fibrés tangents relatifs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le morphisme d'inclusion $B \hookrightarrow A$ se prolonge en un morphisme de schémas semi-abéliens $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (qui n'est pas nécessairement une immersion), et définit donc un morphisme de $\mathcal{O}_K$-modules

$$i : t_\mathcal{B} \to t_\mathcal{A} ,$$

qui prend ses valeurs dans $t_B \cap t_\mathcal{A}$. Les définitions de $h_{A,L}$ et $h_{B,L}$ montrent que

$$\text{(D.4)} \qquad h_{A,L}(t_B) - h_{B,L}(t_B) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \log \# \left(t_B \cap t_\mathcal{A} / i(t_\mathcal{B})\right) .$$

L'isogénie ψ se prolonge en un morphisme de schémas semi-abéliens

$$\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{B}^\perp .$$

Sa différentielle le long de la section nulle détermine un morphisme

$$j : t_B \cap t_\mathcal{A} \to t_\mathcal{B}$$

tel que $i \circ j$ soit la multiplication par N, et donc

$$\#(t_B \cap t_{\mathcal{A}}/i(t_{\mathcal{B}})) \leq \#(t_B \cap t_{\mathcal{A}}/N(t_B \cap t_{\mathcal{A}})) = N^{[K:\mathbb{Q}]\dim B}.$$

Jointe à (D.4), cette majoration implique (D.3).

On observera que, compte tenu de la remarque à la fin de l'appendice C, l'expression $(-\min_{1\leq i\leq g} C_0(i))$ admet un majorant effectif.

BIBLIOGRAPHIE

[A] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Math. U.S.S.R. Izv. **8** (1974), 1167-1189.

[Ba1] A. BAKER - *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers* IV, Mathematika **15** (1968), 204-216.

[Ba2] A. BAKER - *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[Ba3] A. BAKER - *The theory of linear forms in logarithms*, in *Transcendence Theory: Advances and Applications*, A. Baker et D.W. Masser ed., Academic Press, London-New York-San Francisco, 1977, 1-27.

[Be1] D. BERTRAND - *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, Séminaire Bourbaki, 38ème année, 1985-86, exposé n^0 652, Astérisque **145-6** (1987), 21-44.

[Be2] D. BERTRAND - *Galois representations and transcendental numbers*, in *New Advances in Transcendence Theory, Durham 1986*, A. Baker ed., Cambridge University Press 1988, 37-55.

[Be3] D. BERTRAND - *Hauteurs et isogénies*, in *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (ed. L. Szpiro)*, Astérisque **183** (1990), 107-125.

[Be4] D. BERTRAND - *Transcendental methods in arithmetic geometry*, in *Analytic number theory, Tokyo 1988*, K. Nagusaka et E. Fouvry ed., Lecture Notes in Mathematics **1434**, Springer-Verlag 1990, 31-44.

[Bo1] J.-B. BOST - *Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques*, Séminaire Bourbaki n^0 731, 1990-91, Astérique **201-203** (1991), 43-88.

[Bo2] J.-B. BOST - *Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties*, à paraître dans Duke Math. J. **82** (1996).

[Bo-D] J.-B. BOST et S. DAVID - Lettre à D. Masser et G. Wüstholz, mars 1995.

[Bo-D] J.-B. BOST et S. DAVID - en préparation.

[C-C] D.V. CHUDNOVSKY et G.V. CHUDNOVSKY - *Padé approximations and diophantine geometry*, Proc. Math. Acad. Sci. USA **82** (1985), 2212-2216.

[Da1] S. DAVID - *Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes*, Compositio Math. **78** (1991), 121-160.

[Da2] S. DAVID - *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509-544.

[De1] P. DELIGNE - *Démonstration des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki 1983-84, n^0 616, Astérisque **121-122** (1985), 25-41.

[De2] P. DELIGNE - *Le lemme de Gabber*, in [Sz2], 131-150.

[Di] L. DENIS - *Lemmes de multiplicités et intersections*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **314** (1992), 97-100.

[F] G. FALTINGS - *Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[F-C] F. FALTINGS et C.-L. CHAI - *Degeneration of abelian varieties*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[F-W] G. FALTINGS, G. WÜSTHOLZ et al. - *Rational points*, Aspects of Mathematics, vol. E6, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1984.

[G-S] H. GILLET et C. SOULÉ - *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473-543.

[Gr] D.R. GRAYSON - *Reduction theory using semistability*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 600-634.

[H-N] G. HARDER et M.S. NARASIMHAN - *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1975), 215-248.

[I] J.I. IGUSA - *Theta functions*, Grundlehren d. Math. Wiss. **194**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[Il] L. ILLUSIE - *Déformations de groupes de Barsotti-Tate*, in [Sz2], 151-198.

[L] L. LAFFORGUE - *Une version en géométrie diophantienne du "lemme de l'indice"*, Preprint Ecole Normale Supérieure, mars 1990.

[Lg] S. LANG - *Division points of elliptic curves and abelian functions over number fields*, Ann. J. of Math. **97** (1975), 124-132.

[La1] M. LAURENT - *Une nouvelle démonstration du théorème d'isogénie, d'après D.V. et G.V. Choodnovsky*, Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1985-86, Boston Basel Stuttgart, Birkhäuser, 1987, 119-131.

[La2] M. LAURENT - *Sur quelques résultats récents de transcendance*, in *Journées arithmétiques de Luminy 17-21 juillet 1989*, Astérisque **198-200** (1991), 209-230.

[M1] D.W. MASSER - *Division points of elliptic functions*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), 49-53.

[M2] D.W. MASSER - *Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on a abelian variety*, Compositio Math. **53** (1984), 153-170.

[M3] D.W. MASSER - *Small values of heights on families of abelian varieties*, in *Diophantine Approximation and Transcendence Theory*, G. Wüstholz ed., Lecture Notes in Mathematics **1290**, Springer-Verlag 1987, 109-148.

[M4] D.W. MASSER - *Polarization estimates for abelian varieties*, Conférence au M.S.R.I., *Workshop on Diophantine Geometry*, 31 mars 1993.

[M-W1] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Estimating isogenies on elliptic curves*, Invent. Math. **100** (1990), 1-24.

[M-W2] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Galois properties of division fields of elliptic curves*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 247-254.

[M-W3] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Periods and minimal abelian subvarieties*, Ann. Math. **137** (1993), 407-458.

[M-W4] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Isogeny estimates for abelian varieties and finiteness theorems*, Ann. Math. **137** (1993), 459-472.

[M-W5] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Endomorphism estimates for abelian varieties*, Math. Zeit. **215** (1994), 641-653.

[M-W6] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Factorization estimates for abelian varieties*, Publ. Math. IHES **81** (1995), 5-24.

[M-W7] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Refinements of the Tate conjecture for abelian varieties*, in *Abelian varieties*, Barth-Hulek-Lange ed., de Gruyter, Berlin-New York, 1995.

[MB1] L. MORET-BAILLY - *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985).

[MB2] L. MORET-BAILLY - *Compactifications, hauteurs et finitude*, in [Sz], 113-129.

[MB3] L. MORET-BAILLY - *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann*, Comp. Math. **75** (1990), 203-217.

[Mu1] D. MUMFORD - *On the equations defining abelian varieties* I, Invent. Math. **1** (1966), 287-354.

[Mu2] D. MUMFORD - *Abelian varieties*, 2ème édition, Oxford University Press, 1974.

[N] M. NAKAMAYE - *Multiplicity estimates and the product theorem*, Preprint 1993, *à paraître dans le* Bull. Soc. Math. France.

[P] P. PHILIPPON - *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355-383 et **115** (1987), 397-398.

[P-W] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT - *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. Math. **32** (1988), 281-314.

[R1] M. RAYNAUD - *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241-280.

[R2] M. RAYNAUD - *Hauteurs et isogénies*, in [Sz2], 199-234.

[S1] J.-P. SERRE - *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York, 1968.

[S2] J.-P. SERRE - *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259-331.

[S3] J.-P. SERRE - *Quelques applications du théorème de densité de Chebotorev*, Publ. Math. IHES **54** (1981), 123-201.

[S4] J.-P. SERRE - Conférence au séminaire Delange-Pisot-Poitou, avril 1988.

[Sh] G. SHIMURA - *On the derivatives of theta functions and modular forms*, Duke Math. J. **44** (1977), 365-387.

[Si] A. SILVERBERG - *Fields of definition for homomorphisms of abelian varieties*, J. Pure and Applied Algebra **77** (1992), 253-262.

[St] U. STUHLER - *Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischen Formen*, Archiv. der Math. **27** (1976), 604-610.

[Sz1] L. SZPIRO - *La conjecture de Mordell (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki 1983-84, n^0 619, Astérisque **121-122** (1985), 83-103.

[Sz2] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell*, Astérisque **127** (1985).

[T] J. TATE - *p-divisible groups*, in *Proceeding of a conference on local fields* (Driebergen 1966), 158-183, Springer, New York, 1967.

[W] A. WEIL - *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Revue scientifique **77** (1939), 104-106 (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1939a], 236-240).

[Wü 1] G. WÜSTHOLZ - *Some remarks on a conjecture of Waldschmidt*, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds., Progess in Math. **31**, Birkhäuser (1983), 329-336.

[Wü 2] G. WÜSTHOLZ - *Multiplicity estimates on group varieties*, Ann. of Math. **129** (1989), 471-500.

[Wü 3] G. WÜSTHOLZ - *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen*, Ann. of Math. **129** (1989), 501-517.

[Y] F. YAN - *Tate property and isogeny estimate for semi-abelian verieties*, Dissertation, E.T.H. Zürich, 1994.

[Z1] Y. ZAHRIN - *Endomorphisms of abelian varieties and points of finite order in characteristic p*, Mat. Zametki **21** (1977), 737-744 (= Math. Notes **21** (1977), 415-419).

[Z2] Y. ZAHRIN - *A finiteness theorem for unpolarized varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*, Invent. Math. **79** (1985), 309-332.

[Zh] S. ZHANG - *Positive line bundles on arithmetic varieties*, Journal of the A.M.S. **8** (1995), 187-221.

Jean-Benoît BOST
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
F-91128 PALAISEAU CEDEX

et

I.H.E.S.
35, route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE