Astérisque

JEAN LANNES

Théorie homotopique des groupes de Lie

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 776, p. 21-45

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__21_0>

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n°776

Novembre 1993

THÉORIE HOMOTOPIQUE DES GROUPES DE LIE
[d'après W.G. Dwyer et C.W. Wilkerson]

par **Jean LANNES**

0. INTRODUCTION

Un groupe de Lie compact possède la propriété suivante : c'est un espace de lacets (voir ci-après) dont l'homologie modulo un nombre premier p est de dimension finie. De tels espaces sont à peu de choses près ce que Dwyer et Wilkerson appellent des groupes p-compacts. Ils montrent que ces objets partagent une grande partie de la riche structure interne des groupes de Lie (tores maximaux, groupe de Weyl,...) et entreprennent leur classification [DW3][DW4][DW5]. Cet exposé est un rapport sur leur travail ; il porte essentiellement sur l'article [DW3].

Précisons quelques-unes des notions évoquées ci-dessus.

Définition 0.1. Un *espace de lacets* X est la donnée d'un triplet (X, BX, e) où X est un espace, BX un espace pointé connexe, et $e : X \to \Omega BX$ une équivalence d'homotopie de X sur l'espace ΩBX des lacets pointés de BX.

Avec cette définition un groupe topologique X est bien un espace de lacets. En effet soit BX l'espace classifiant de X alors il existe une application canonique $X \to \Omega BX$ qui est une équivalence d'homotopie. Ceci justifie la notation BX de la définition 0.1.

Définition 0.2. Un *groupe p-compact* X est un espace de lacets dont l'homologie modulo p est de dimension finie et qui satisfait en outre la condition (technique) suivante :

(C) Le groupe $\pi_0 X$ est un p-groupe fini et les groupes abéliens $\pi_n X, n \geq 1$, sont des modules de type fini sur $\mathbf{Z}_p$.

Variante de la condition (C), *p-complété d'un espace*

Dans [BK] Bousfield et Kan construisent un endofoncteur $X \mapsto \widehat{X}$ de la catégorie des espaces, appelé *p-complétion* (l'espace $\widehat{X}$ est appelé le *p-complété* de l'espace X) et une application naturelle $\eta_X : X \to \widehat{X}$. Dans le cas où X est simplement connexe et où les groupes d'homotopie de X sont de type fini, les groupes d'homotopie de $\widehat{X}$ sont les p-complétés de ceux de X : $\pi_n\widehat{X} = \mathbf{Z}_p \otimes \pi_n X$. On dit que X est *p-complet* si η_X est une équivalence d'homotopie.

Voici quelques-unes des propriétés de la p-complétion des espaces :

- La p-complétion préserve à homotopie près les sommes disjointes arbitraires et les produits finis.

- Une application $f : X \to Y$ qui induit un isomorphisme en homologie modulo p induit une équivalence d'homotopie $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$. Plus généralement si f induit en homologie modulo p une application n-connexe (c'est-à-dire bijective en degré strictement inférieur à n et surjective en degré n) alors $\widehat{f}$ est également n-connexe ; en particulier si $\widetilde{H}_k(X; \mathbf{F}_p)$ est nul pour $k \leq n$ alors $\widehat{X}$ est n-connexe (prendre pour Y le point qui est p-complet).

- L'application η_X induit "très souvent" un isomorphisme en homologie modulo p ; on dit alors que X est *p-bon.* C'est le cas, quand X est connexe, sous l'une des hypothèses suivantes : $H_1(X; \mathbf{F}_p) = 0$; $\pi_1 X$ fini ; X nilpotent.

- Si X est connexe et si $\pi_1 X$ est un p-groupe fini alors les espaces $\Omega(\widehat{X})$ et $(\Omega X)^\wedge$ ont le même type d'homotopie.

On peut maintenant reformuler la condition (C) de l'une des deux façons suivantes :

(C-bis) L'espace X est p-complet et le groupe $\pi_0 X$ est un p-groupe fini.

(C-ter) L'espace BX est p-complet.

Exemples exotiques de groupes p-compacts

Si X est groupe de Lie compact, disons connexe, alors le p-complété $\widehat{X}$ est un groupe p-compact. Pour p impair la proposition suivante, dûe à D. Sullivan, donne des exemples de groupes p-compacts qui ne sont pas de cette forme.

Proposition 0.— *Soient p un nombre premier impair et n un entier qui divise $p-1$. Alors le p-complété de la sphère S^{2n-1} possède une structure de groupe p-compact.*

Démonstration. Soit W l'unique sous-groupe de $\mathbf{Z}_p^\times$ de cardinal n (qui s'identifie *via* la réduction modulo p à l'unique sous-groupe de $\mathbf{F}_p^\times$ de cardinal n). Le groupe W opère sur l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}_p, 2)$ si bien que l'on peut considérer la construction de Borel $Y = EW \times_W K(\mathbf{Z}_p, 2)$ (la notation EW désigne comme à l'ordinaire l'espace total du W-fibré principal universel). On vérifie alors que l'espace $X = \Omega\widehat{Y}$ a le type d'homotopie du p-complété de S^{2n-1}. Donnons quelques détails. Comme le cardinal de W est premier à p on a $H^*(Y;\mathbf{F}_p) \cong (H^*(K(\mathbf{Z}_p,2);\mathbf{F}_p))^W$; $H^*(K(\mathbf{Z}_p,2);\mathbf{F}_p)$ est l'algèbre de polynômes $\mathbf{F}_p[v]$ sur un générateur v de degré 2, $H^*(Y;\mathbf{F}_p)$ est l'algèbre de polynômes $\mathbf{F}_p[v^n]$. Comme $H^1(Y;\mathbf{F}_p)$ est nul on a $H^*(\widehat{Y};\mathbf{F}_p) \cong H^*(Y;\mathbf{F}_p)$. Ce qui précède montre que la cohomologie modulo p de X est celle de S^{2n-1} et les propriétés de la p-complétion impliquent finalement que X a bien le type d'homotopie du p-complété de S^{2n-1} (qui est p-complet).

On montre que la structure de groupe p-compact de $(S^{2n-1})^\wedge$ exhibée ci-dessus est "unique" [DMW2] ; on montre en fait que si la cohomologie modulo p d'un espace p-complet Z est isomorphe à celle de l'espace Y qui apparaît ci-dessus alors il existe une application $Y \to Z$ qui réalise cet isomorphisme. Cette unicité est le type-même de sous-produit de la théorie que nous allons exposer, voir 6.1.

Il est beaucoup plus difficile d'exhiber un groupe 2-compact qui ne soit pas le 2-complété d'un groupe de Lie compact. En fait l'on n'en connaissait pas jusqu'à ce que Dwyer et Wilkerson, à la fin des années 80, construisent un remarquable groupe 2-compact $DI(4)$ [DW2] (qui mériterait peut-être le nom de G_3 ?) dont nous reparlerons un peu en 6.2.

1. THÉORIE NON ORTHODOXE DES TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE COMPACTS

La théorie des tores maximaux des groupes p-compacts que développent Dwyer et Wilkerson est l'analogue d'une théorie (non orthodoxe) des tores maximaux d'un groupe de Lie compact X dont les étapes sont décrites ci-dessous ; pour pouvoir s'étendre aux groupes p-compacts cette théorie non orthodoxe doit être la plus "homotopique" (et même "p-homotopique") possible.

1.1. Première étape

On montre qu'il existe dans la composante connexe d'un groupe de Lie compact non discret des éléments d'ordre p.

Méthode : Faire apparaître les homomorphismes de groupes comme les points fixes d'une action du groupe source.

Un élément dont le carré est l'élément neutre n'est rien d'autre qu'un point fixe de l'involution de X, $x \mapsto x^{-1}$. La généralisation de cette observation est la suivante. Soient G et X deux groupes (par groupe on entend dans cet exposé, sauf mention expresse du contraire, groupe topologique ou simplicial). On note $\mathrm{Hom}(G,X)$ l'espace des homomorphismes de G dans X et $\mathrm{Map}(G,X)$ l'espace de toutes les applications de G dans X ; $\mathrm{Map}(G,X)$ est un groupe et le sous-espace formé des applications constantes en est un sous-groupe qui s'identifie à X. Le groupe G opère naturellement sur l'espace $\mathrm{Map}(G,X)$ et sur l'espace homogène $\mathrm{Map}(G,X)/X$. L'espace $\mathrm{Hom}(G,X)$ s'identifie à l'espace des points fixes de cette action de G sur $\mathrm{Map}(G,X)/X$:

$$\text{(F)} \qquad \mathrm{Hom}(G,X) = (\mathrm{Map}\ (G,X)/X)^G \ .$$

On peut vérifier cette affirmation de la façon suivante. L'espace homogène $\mathrm{Map}(G,X)/X$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Map}_*(G,X)$ des applications pointées de G dans X, c'est-à-dire l'espace des applications envoyant élément neutre sur élément neutre ; l'action de G sur $\mathrm{Map}_*(G,X)$ se traduit alors par

$$(g \cdot \rho)(\gamma) = \rho(\gamma g)(\rho(g))^{-1} \ .$$

Voici maintenant une version "relative" de la formule (F). Soient H un sous-groupe de G et σ un homomorphisme de H dans X. On note $\mathrm{Hom}^{\sigma}(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(G,X)$ formé des homomorphismes prolongeant σ et $\mathrm{Map}^\sigma(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Map}(G,X)$ formé des applications H-équivariantes, H opérant sur X *via* σ ; soit $\mathrm{Hom}^\sigma(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(G,X)$ formé des homomorphismes prolongeant σ. On a comme précédemment

$$\mathrm{Hom}^\sigma(G,X) = (\mathrm{Map}^\sigma(G,X)/X)^G \ .$$

Revenons maintenant au problème des éléments d'ordre p d'un groupe de Lie compact connexe non trivial.

Pour montrer qu'il existe des éléments d'ordre p on invoque l'un des deux théorèmes de points fixes suivants (on laisse au lecteur le soin de préciser ce que l'on entend par "action raisonnable" dans les deux énoncés ci-dessous, par exemple une action différentiable sur une variété compacte est raisonnable).

Théorème 1.1.1.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un p-groupe fini G. Alors la caractéristique d'Euler de X^G est congrue modulo p à la caractéristique d'Euler de X :*

$$\chi(X^G) \equiv \chi(X) \bmod p \ .$$

Théorème 1.1.2.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un groupe cyclique fini G. Alors la caractéristique d'Euler de X^G est égale au nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur g de G sur $H^*(X;\mathbf{Q})$:*

$$\chi(X^G) = \Lambda(g) \ .$$

Observation. Un argument élémentaire de théorie de Galois montre que le nombre de Lefschetz $\Lambda(g)$ est indépendant du générateur g de G ; on le notera $\Lambda(X;G)$ ci-après.

Si l'on veut montrer qu'un groupe de Lie compact connexe non trivial X possède des éléments d'ordre p en invoquant le théorème 1.1.1 il faut calculer $\chi(X)$. On va montrer de façon "homotopique" que cette caractéristique est nulle si la cohomologie modulo p de X est non triviale.

Comme X est un groupe la cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbf{Q})$ est une algèbre de Hopf. Puisque $H^*(X;\mathbf{Q})$ est de dimension finie c'est une algèbre extérieure sur des générateurs primitifs de degré impair, $e_1, e_2, \cdots, e_r$; l'entier r s'appelle le rang rationnel de X (bien sûr r sera au bout du compte le rang du groupe de Lie X au sens habituel).

Lemme 1.1.3.— *Si $H^*(X; \mathbf{F}_p)$ est non trivial alors il en est de même pour $H^*(X; \mathbf{Q})$.*

Démonstration. Supposons par exemple $p = 2$, la démonstration est analogue dans le cas $p > 2$. A nouveau $H^*(X; \mathbf{F}_2)$ est une algèbre de Hopf ; cette fois l'algèbre sous-jacente est isomorphe à un produit tensoriel (fini et non vide) d'algèbres de la forme $\mathbf{F}_2[u]/u^{2^h}$ (avec $h > 0$). On en déduit que $\chi(X)$ est pair.

Scholie 1.1.4.— *Si $H^*(X; \mathbf{F}_p)$ est non trivial alors le rang rationnel de X est non nul et sa caractéristique est nulle.*

Le théorème 1.1.1 montre maintenant que l'espace $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/p, X)$ est non réduit à l'homomorphisme trivial. On a en effet

$$\chi(\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/p, X)) \equiv \chi(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X) \bmod p$$

et

$$\chi(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X) = \chi(X^{p-1}) = 0 \ .$$

Si l'on veut invoquer le théorème 1.1.2 il faut calculer le nombre de Lefschetz $\Lambda(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X; \mathbf{Z}/p)$.

Lemme 1.1.5.— *Le nombre de Lefschetz $\Lambda(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X; \mathbf{Z}/p)$ est égal à p^r, r désignant le rang rationnel de X.*

Démonstration. Pour simplifier on suppose $p = 2$. L'involution $a : X \to X$, $x \mapsto x^{-1}$, induit l'antipode de l'algèbre de Hopf $H^*(X; \mathbf{Q})$. On a donc $a^*e_i = -e_i$ et le nombre de Lefschetz de a est 2^r.

1.2 Deuxième étape

On montre que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p$ dans X (il s'agit toujours d'un groupe de Lie compact connexe, disons non trivial) se prolonge en un homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans X (la notation $\mathbf{Z}/p^\infty$ désigne la limite inductive des groupes $\mathbf{Z}/p^n$).

On suppose encore $p = 2$. On doit montrer que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/2^n$ se prolonge à $\mathbf{Z}/2^{n+1}$, en d'autres termes, que tout élément x de X tel que x^{2^n} est l'élément neutre est un carré ou encore que l'application

$b : X \to X,\ y \mapsto xy^{-1}$, possède un point fixe. Pour cela on applique à nouveau le théorème 1.1.2. Puisque $b \circ b$ est la conjugaison par x, b définit une action de $\mathbf{Z}/2^{n+1}$ sur X. Puisque X est connexe les applications a et b sont homotopes et le nombre de Lefschetz de b est toujours 2^r.

1.3. Troisième étape

On considère l'adhérence de l'image d'un monomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans X (de tels monomorphismes existent d'aprés les deux premières étapes). Cette adhérence est un sous-groupe, disons A, non trivial connexe abélien (connexe parce que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans un groupe fini est trivial).

1.4. Quatrième étape

On considère le centralisateur dans X de A, disons C, et le quotient $Y = C/A$. La dimension du groupe de Lie Y est strictement inférieure à celle de X si bien que l'on peut supposer par récurrence que Y possède un tore maximal U ; on vérifie alors que l'image inverse T de U dans X est un tore maximal.

1.5. Cinquième étape

Soit N le normalisateur dans X de T ; puisque T est un tore maximal le quotient $W = N/T$ est un groupe fini (discret). On observe que l'espace des points fixes de l'action de T sur X/T s'identifie à W. En appliquant le théorème 1.5 ci-dessous on en déduit que la caractéristique d'Euler de X/T est égale au cardinal de W.

Théorème 1.5.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un tore T. Alors la caractéristique d'Euler de X^T est égale à la caractéristique d'Euler de X :*

$$\chi(X^T) = \chi(X)\ .$$

La même méthode montre que tous les tores maximaux de X sont conjugués.

1.6. Sixième étape

On montre que si X est connexe alors T est son propre centralisateur.

Dans le cas contraire le monomorphisme $T \hookrightarrow X$ s'étend en un monomorphisme $T \times G \hookrightarrow X$, G désignant un groupe cyclique, disons d'ordre un nombre premier p. On a :

- $\chi((X/T)^{T\times G}) = \chi((X/T)^G)$ d'aprés 1.5 puisque l'espace de points fixes $(X/T)^{T\times G}$ s'identifie à l'espace de points fixes $((X/T)^G)^T$;

- $\chi((X/T)^G) = \Lambda(X/T; G)$ d'aprés 1.1.2 ;

- $\Lambda(X/T; G) = \chi(X/T)$ puisque X est connexe.

Il en résulte que l'espace $(X/T)^{T\times G}$ est non vide. Il existe donc un monomorphisme de $T \times G$ dans T (induit par une conjugaison dans X). Ce qui est absurde.

1.7. Septième étape

On prouve l'isomorphisme $H^*(BX; \mathbf{Q}) \cong (H^*(BT; \mathbf{Q}))^W$; on prouve au passage que le rang rationnel et le rang d'un tore maximal coïncident. On en déduit que si X est connexe alors W est un groupe fini engendré par des réflexions qui laissent invariant un réseau.

On pose $R = H^*(BX; \mathbf{Q})$ et $S = H^*(BT; \mathbf{Q})$; R est un anneau de polynômes à r générateurs de degrés pairs, r désignant le rang rationnel de X (parce que $H^*(X; \mathbf{Q})$ est une algèbre extérieure sur des générateurs primitifs de degré impair), et S est un anneau de polynômes à s générateurs de degré 2, s désignant le rang du tore T. On note $\varphi : R \to S$ l'homomorphisme d'anneaux induit par l'application $BT \to BX$; S est un R-module *via* φ. On fait les observations suivantes :

- La suite spectrale de Serre de la fibration $X/T \to BT \to BX$ montre que S est un R-module de type fini (on utilise ici que R est noethérien).

- Puisque la caractéristique de X/T est non nulle l'existence du transfert de Becker-Gottlieb pour la fibration $X/T \to BT \to BX$ montre que φ est injectif. Un argument de degré de transcendance (ou de dimension de Krull) montre alors $r = s$. Un argument d'algèbre commutative montre ensuite que S est un R-module libre (voir par exemple [Ma]

Theorem 23.1). On en déduit $H^*(X/T;\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q} \otimes_R S$. Cet isomorphisme montre que $H^*(X/T;\mathbf{Q})$ est concentrée en degrés pairs. On a donc $\dim_{\mathbf{Q}} H^*(X/T;\mathbf{Q}) = \chi(X/T)$ et la dimension du R-module libre S est égale au cardinal de W. Enfin un peu de théorie de Galois montre que le monomorphisme $H^*(BX;\mathbf{Q}) \hookrightarrow (H^*(BT;\mathbf{Q}))^W$ est un isomorphisme.

L'étape précédente montre que si X est connexe W s'identifie à un sous-groupe d'automorphismes de $H^2(BT;\mathbf{Z})$; le fait que l'anneau d'invariants $(H^*(BT;\mathbf{Q}))^W$ est polynomial implique que ce sous-groupe est engendré par des réflexions (voir par exemple [Bo] Ch. 5, §5, n° 5.5).

1.8. Étape supplémentaire

On termine ce paragraphe en décrivant une méthode non orthodoxe pour montrer que la cohomologie modulo p du classifiant d'un groupe de Lie compact est noethérienne (c'est-à-dire engendrée comme $\mathbf{F}_p$-algèbre par un nombre fini d'éléments).

Soit N_p l'image inverse dans N d'un p-groupe de Sylow de W. On montre tout d'abord que $H^*(BN_p;\mathbf{F}_p)$ est noethérienne (à coup de suites spectrales de Serre...la méthode de Venkov est interdite !). On en déduit ensuite que $H^*(BX;\mathbf{F}_p)$ est noethériennne en utilisant le transfert de Becker-Gottlieb de la fibration $X/N_p \to BN_p \to BX$ et le lemme suivant (que l'on peut appliquer parce que la caractéristique d'Euler de X/N_p est première à p) :

Lemme 1.8.— *Soit $f : R_1 \to R_2$ un homomorphisme d'anneaux gradués commutatifs. On suppose que R_2 est noethérien et qu'il existe un homomorphisme de R_1-modules $g : R_2 \to R_1$ tel que le composé $g \circ f$ soit l'identité de R_1. Alors R_1 est noethérien.*

2. THÉORÈMES DE POINTS FIXES HOMOTOPIQUES

La stratégie de Dwyer et Wilkerson nécessite le remplacement des théorèmes de points fixes du §1 par des théorèmes de points fixes homotopiques.

La notion de point fixe homotopique

Soit X un espace muni d'une action d'un groupe G. On définit l'espace des points fixes homotopiques X^{hG} de cette action comme l'espace fonctionnel $\mathrm{Map}^G(EG, X)$ des applications G-équivariantes de EG dans X (rappelons que EG désigne l'espace total du G-fibré principal universel dont la base BG est le classifiant de G). On note X_{hG} le quotient homotopique, c'est-à-dire la construction de Borel $EG \times_G X$. On vérifie que l'application évidente de X^{hG} dans l'espace de sections $\Gamma(X_{hG} \to BG)$ de la projection de X_{hG} vers BG est un homéomorphisme.

Cohomologie modulo p de l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire

On fixe un nombre premier p. Pour alléger la notation on désigne simplement par $H^*(-)$ la cohomologie modulo p d'un espace. Cette cohomologie est le type même de ce que l'on appelle une algèbre instable sur l'agèbre de Steenrod modulo p ou A-algèbre instable (voir par exemple [La]) ; la catégorie des A-algèbres instables est notée $\mathcal{K}$.

Soit maintenant V un p-groupe abélien élémentaire (*i.e.* un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p)^s$ pour un certain entier s).

La A-algèbre instable $H^*(X_{hV})$ est munie d'un homomorphisme de A-algèbres instables $H^*BV \to H^*(X_{hV})$ (induit par la projection $X_{hV} \to BV$) en d'autres termes $H^*(X_{hV})$ est un objet de la catégorie des A-algèbres instables au-dessous de H^*BV que l'on note $H^*BV \downarrow \mathcal{K}$.

L'application d'évaluation $e : BV \times X^{hV} = BV \times \Gamma(X_{hV} \to BV) \to X_{hV}$ est une application d'espaces au-dessus de BV ; elle induit donc un $(H^*BV \downarrow \mathcal{K})$-morphisme $H^*(e) : H^*(X_{hV}) \to H^*(BV \times X^{hV}) = H^*BV \otimes H^*X^{hV}$. Par "general nonsense" le foncteur $\mathcal{K} \to H^*BV \downarrow \mathcal{K}$, $L \mapsto H^*BV \otimes L$, admet un adjoint à droite que l'on note $\mathrm{Fix}_V : H^*BV \downarrow \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. On a donc tout fait pour avoir un $\mathcal{K}$-morphisme naturel $\nu_{X,V} : \mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV}) \to H^*X^{hV}$, à savoir l'adjoint de $H^*(e)$. On montre dans [La] Ch. 4 que $\nu_{X,V}$ est "souvent" un isomorphisme. Par exemple :

Théorème 2.1.— *Soit X un V-espace. On suppose que X et X^{hV} sont p-complets et que H^*X et $\mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV})$ sont de dimension finie en chaque degré. Alors le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\nu_{X,V} : \mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV}) \to H^*X^{hV}$$

est un isomorphisme.

Théorie de Smith pour les points fixes homotopiques d'une action d'un groupe cyclique d'ordre p

Etant donné les applications que l'on a en vue on se limite maintenant au cas où V est cyclique d'ordre p.

On note c_V un élément non nul de H^1BV pour $p = 2$ et de H^2BV pour $p > 2$. Le théorème suivant ([DW1], pour une démonstration concurrente voir [LZ]) est un analogue algèbrique du théorème de localisation de la théorie de Smith classique pour les V-actions :

Théorème 2.2.— *Soit K une A-algèbre instable au-dessous de H^*BV qui est de type fini comme H^*BV-module. Alors la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_V K$ est de dimension finie et le localisé*

$$K[c_V^{-1}] \to H^*BV[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V K$$

du $\mathcal{K}$-morphisme $K \to H^*BV \otimes \mathrm{Fix}_V K$ adjoint de l'identité de K est un isomorphisme.

Pour abréger les énoncés on dira ci-dessous qu'un espace ou une paire d'espaces sont *p-finis* si leur homologie modulo p est de dimension finie. Les théorèmes 2.1 et 2.2 impliquent le théorème suivant (l'application d'évaluation e permet de parler de la "paire" $(X_{hV}, BV \times X^{hV})$) :

Théorème 2.3.— *Soit X un espace muni d'une action d'un groupe V cyclique d'ordre p. On suppose que X est p-fini et que X et X^{hV} sont p-complets. Alors l'espace X^{hV} et la paire $(X_{hV}, BV \times X^{hV})$ sont p-finis.*

Version homotopique des théorèmes 1.1.1, 1.1.2, et 1.5.

Le théorème 2.3 conduit à une version homotopique des théorèmes 1.1.1 et 1.1.2. Pour pouvoir énoncer la version homotopique de 1.1.2 il nous faut introduire au préalable le substitut adéquat de la cohomologie rationnelle. On pose :

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(X) = \mathbf{Q} \otimes H^*(X; \mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^*(X; \mathbf{Z}_p) \ .$$

(Attention $H^*_{\mathbf{Q}_p}$ diffère en général de $H^*(X; \mathbf{Q}_q)$ ou de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} H^*(X; \mathbf{Q})$!) L'utilité dans le contexte présent du foncteur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(-)$ tient au lemme suivant dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur :

Lemme-Définition 2.4.— *Si une paire d'espace (X, Y) est p-finie, alors $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et la caractéristique d'Euler du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué $H^*(X, Y)$ est égale à celle du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel gradué $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)$:*

$$\chi(H^*(X, Y)) = \chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)) \ .$$

La valeur commune de ces caractéristiques d'Euler est appelée la caractéristique d'Euler de la paire (X, Y) et notée $\chi(X, Y)$.

Théorème 2.5.— *Soit X un espace p-fini muni d'une action d'un p-groupe fini G. On suppose que pour tout sous-groupe K de G l'espace X^{hK} est p-complet. Alors l'espace X^{hG} est p-fini et sa caractéristique d'Euler est congrue modulo p à celle de X :*

$$\chi(X^{hG}) \equiv \chi(X) \bmod p \ .$$

Théorème 2.6.— *Soit X un espace p-fini muni d'une action d'un p-groupe fini cyclique G. On suppose que pour tout sous-groupe K de G l'espace X^{hK} est p-complet. Alors l'espace X^{hG} est p-fini et sa caractéristique d'Euler est égale au nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur de G sur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X)$:*

$$\chi(X^{hG}) = \Lambda(X; G) \ .$$

Démonstration de 2.5 *et* 2.6 *dans le cas où* G *est cyclique d'ordre* p.

Le fait que X^{hG} est p-fini est déjà contenu dans 2.3, il reste donc à vérifier les affirmations concernant la caractéristique d'Euler de X^{hG}. On montre d'abord

$$\text{(R)} \qquad \chi(H^*(EG \times X, EG \times X^{hG})) = p\chi(H^*(X_{hG}, BG \times X^{hG})) \ .$$

Pour cela on considère $H^*(EG \times X, EG \times X^{hG})$ comme la cohomologie à coefficients locaux $H^*(X_{hG}, BG \times X^{hG}; \mathbf{F}_p[G])$, on filtre $\mathbf{F}_p[G]$ par les puissances de l'idéal d'augmentation, et on utilise "l'additivité de la caractéristique d'Euler". Toujours grâce à cette additivité on obtient

$$\chi(X) - \chi(X^{hG}) = p\chi(X_{hG}, BG \times X^{hG}) \ .$$

En utilisant l'isomorphisme

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(X_{hG}, BG \times X^{hG}) \cong (H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG}))^G$$

on a ensuite

$$p\chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(X_{hG}, BG \times X^{hG})) =$$
$$\chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG})) + (p-1)\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G) \ ,$$

$\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G)$ désignant le nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur de G sur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG})$. En utilisant 2.4 et en comparant avec la relation (R) ci-dessus, on a

$$\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G) = 0 \ .$$

Par "additivité du nombre de Lefschetz" on obtient

$$\chi(X^{hG}) = \Lambda(X; G) \ .$$

Enfin Dwyer et Wilkerson proposent la version homotopique suivante de 1.5 qui est essentiellement conséquence de 2.6 :

Théorème 2.7.— *Soit* X *un espace* p*-fini muni d'une action du groupe discret* $\Theta = (\mathbf{Z}/p^\infty)^s$. *On suppose que pour tout sous-groupe fini* K *de* Θ *l'espace* X^{hK} *est* p*-complet. Alors pour tout sous-groupe fini* K *de* Θ *l'espace* X^{hK} *est* p*-fini et sa caractéristique d'Euler est égale à* $\chi(X)$. *Si* $\chi(X)$ *est non nulle alors l'espace* $X^{h\Theta}$ *est non vide.*

3. DICTIONNAIRE THÉORIE CLASSIQUE-THÉORIE HOMOTOPIQUE

On pose les définitions qui permettent de traduire le §1 en termes de groupes p-compacts. Pour 3.1 et 3.3 on procède de la façon suivante. On interprète tout d'abord les définitions de la théorie des groupes en termes de points fixes (voir par exemple le début du §1). On identifie ensuite les espaces de points fixes homotopiques correspondants. Le résultat conduit aux définitions de la théorie homotopique.

3.1. Homomorphismes

Un *homomorphisme* $f : G \to X$ d'espaces de lacets est une application pointée $Bf : BG \to BX$. Deux homomorphismes $f, g : G \to X$ sont *conjugués* si Bf et Bg sont librement homotopes, c'est-à-dire homotopes en tant qu'applications non pointées. Un homomorphisme f est un *isomorphisme* si Bf est une équivalence d'homotopie et est *trivial* si Bf est homotope à l'application triviale.

Motivations

Voici une motivation de la définition ci-dessus d'homomorphisme d'espaces de lacets. Soient G et X deux groupes. On a vu au §1 que l'espace $\mathrm{Hom}(G, X)$ s'interprète comme l'espace de points fixes $(\mathrm{Map}(G, X)/X)^G$. Posons donc :

$$h\mathrm{Hom}(G, X) = (\mathrm{Map}(G, X)/X)^{hG} .$$

On peut voir $h\mathrm{Hom}(G, X)$ comme l'espace des applications $\xi : G \times EG \to X$ vérifiant

$$\xi(gh, w) = \xi(g, hw)\xi(h, w)$$

ou encore comme l'espace des homomorphismes croisés du groupe G dans le groupe $\mathrm{Map}(EG, X)$ muni de l'action de G induite par l'action de G sur EG. Soit $\mathrm{Map}_*(BG, BX)$ l'espace des applications pointées de BG dans BX ; on vérifie que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G, X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(BG, BX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h\mathrm{Hom}(G, X) & \longrightarrow & F(G, X) \end{array}$$

dans lequel :

- la flèche horizontale du haut et la flèche verticale de gauche sont les applications évidentes ;

- la flèche horizontale du bas et la flèche verticale de droite sont des équivalences d'homotopie dont le but commun $F(G, X)$ est un espace qui dépend fonctoriellement des groupes G et X.

Justifions maintenant la définition d'homomorphismes d'espaces de lacets conjugués. L'application $\mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Map}_*(BG, BX)$ est X-équivariante si l'on munit les espaces $\mathrm{Hom}(G, X)$ et $\mathrm{Map}_*(BG, BX)$ des actions induites par l'action par conjugaison de X sur lui-même. Le quotient homotopique $(\mathrm{Map}_*(BG, BX))_{hX}$ a le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Map}(BG, BX)$.

(En fait on peut choisir un modèle pour EX de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- l'espace EX est un groupe, X en est un sous-groupe, BX est l'espace homogène EX/X (ou $X\backslash EX$) ;

- la restriction à X de l'action de EX sur BX coïncide avec celle induite par l'action par conjugaison de X sur lui-même ;

- pour tout espace S l'inclusion $\mathrm{Map}_*(S, BX) \hookrightarrow \mathrm{Map}(S, BX)$ induit un homéomorphisme $EX \times_X \mathrm{Map}_*(S, BX) \to \mathrm{Map}(S, BX)$.)

3.2. Espaces homogènes, monomorphismes

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme d'espaces de lacets. *L'espace homogène* $X/f(G)$ (ou X/G si f est implicite) est défini comme la fibre homotopique de l'application $Bf : BG \to BX$. Dans le cas où G et X sont des groupes p-compacts on dit que f est un *monomorphisme* (resp. *épimorphisme*) si X/G (resp. $\Omega(X/G)$) est p-fini. On dit que $1 \to X' \to X \to X'' \to 1$ est une *suite exacte* de groupes p-compacts si la suite $BX' \to BX \to BX''$ est fibrée ; dans ce cas $X' \to X$ est un monomorphisme et $X \to X''$ est un épimorphisme.

Exercice. Vérifier qu'un homomorphisme de groupes p-compacts qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

Motivation

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme de groupes. La fibre homotopique de l'application Bf a le type d'homotopie, de l'espace homogène usuel $X/f(G)$ si f est injectif, de l'espace classifiant $B(Ker f)$ si f est surjectif.

Remarque. Une fois démontré que la cohomologie modulo p du classifiant d'un groupe p-compact est noethérienne (théorème 4.12) on dispose de la caractérisation suivante des monomorphismes de groupes p-compacts :

Proposition 3.2.— *Un homomorphisme $f : G \to X$ de groupes p-compacts est un monomorphisme si et seulement si $H^*(BG;\mathbf{F}_p)$ est de type fini comme $H^*(BX;\mathbf{F}_p)$-module via $(Bf)^*$.*

3.3. Centralisateurs

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme d'espaces de lacets. *Le centralisateur* de $f(G)$ (ou de f) dans X, que l'on note $C_X(f(G))$ (ou simplement $C_X(G)$ si f est implicite), est l'espace $\Omega_{Bf}\ \mathrm{Map}(BG, BX)$ des lacets de $\mathrm{Map}(BG, BX)$ d'origine Bf ; l'espace classifiant $BC_X(f(G))$ est la composante connexe de Bf dans $\mathrm{Map}(BG, BX)$. L'évaluation au point base de BG fournit un homomorphisme $C_X(f(G)) \to X$; on dit que f est *central* si cet homomorphisme est un isomorphisme. On dit qu'un espace de lacets A est *abélien* si l'identité de A est un homomorphisme central.

Motivation

Soit X un groupe. On sait que l'espace des lacets libres $\mathrm{Map}(S^1, BX)$ a le type d'homotopie de la construction de Borel $EX \times_X X$, X opérant sur lui-même par conjugaison. Voici une manière de s'en convaincre. On choisit à nouveau un bon modèle pour EX (voir plus haut). Alors l'équivalence d'homotopie $X \to \Omega BX = \mathrm{Map}_*(S^1, BX)$ est X-équivariante, X opérant sur lui-même par conjugaison et sur ΩBX par l'action induite, et l'on a un diagramme de fibrés de groupe structural X :

$$\begin{array}{ccccc}
EX \times_X X & \longrightarrow & EX \times_X \mathrm{Map}_*(S^1, BX) & = & \mathrm{Map}(S^1, BX) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
BX & \xrightarrow{Id} & BX & &
\end{array}$$

dans ce diagramme, la flèche horizontale du haut est une équivalence d'homotopie et la flèche verticale de droite, vue comme une application de $\mathrm{Map}(S^1, BX)$ dans BX , est l'évaluation au point base.

Soit maintenant $\rho : G \to X$ un homomorphisme de groupes. L'action par conjugaison de X sur lui-même induit *via* ρ une action de G sur X ; l'espace des points fixes X^G (qui est un groupe) est le centralisateur de

$\rho(G)$ dans X. L'espace des points fixes homotopiques X^{hG} s'identifie au sous-espace de $\mathrm{Map}(BG, EX \times_X X)$ "formé des applications qui relèvent $B\rho$" ; on a donc une équivalence d'homotopie naturelle entre X^{hG} et le sous- espace de $\mathrm{Map}(BG, \mathrm{Map}(S^1, BX))$ "formé des applications qui relèvent $B\rho$", c'est-à-dire l'espace de lacets $\Omega_{B\rho}\,\mathrm{Map}(BG, BX)$.

4. RÉSULTATS DE LA THÉORIE DES TORES MAXIMAUX DES GROUPES p-COMPACTS

Comme nous l'avons déjà dit, Dwyer et Wilkerson obtiennent ces résultats en remplaçant dans la théorie décrite au §1 les théorèmes de points fixes par les théorèmes de points fixes homotopiques. Signalons qu'ils doivent développer au passage une version cohomologique *ad hoc* du transfert de Becker-Gottlieb pour les fibrations à fibre p-finie ([DW3] 9.12) car les versions habituelles supposent que la fibre est un complexe fini ; pour diverses généralisations voir [Dw]. Signalons également que si l'on suppose que l'algèbre $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est intègre et de degré de transcendance fini sur $\mathbf{F}_p$ (ce qui est le cas en particulier si $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est une algèbre de polynômes), et que p est impair, alors l'essentiel de la théorie se trouve déjà dans [DMW2] où sont abordées en outre les questions de classification (voir §5).

Proposition 4.1.— *Soit X un groupe p-compact connexe non trivial, alors il existe un homomorphisme non trivial de $\mathbf{Z}/p$ dans X.*

(*Démonstration pour $p = 2$.* On se convainc tout d'abord de ce que l'espace $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX)$ a le type d'homotopie de l'espace des points fixes homotopiques de l'involution de ΩBX qui a un lacet fait correspondre son inverse. On applique ensuite les théorèmes 2.5 ou 2.6. On sait donc que la caractéristique d'Euler $\chi(\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX))$ est différente de 1. Or la composante connexe dans $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX)$ de l'application triviale est contractile. En effet l'espace de lacets, en l'application triviale, de cette composante a le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, X)$ qui est contractile d'aprés [Mi]. On observera au passage que ceci signifie que l'homomorphisme trivial de $\mathbf{Z}/2$ dans X est central ... ce qui est rassurant !)

Proposition 4.2.— *Soit X un groupe p-compact connexe, alors tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^n$ dans X se prolonge à $\mathbf{Z}/p^{n+1}$.*

Définition 4.3. Un *tore p-compact* de rang s est un groupe p-compact tel que BT est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K((\mathbf{Z}_p)^s, 2)$.

L'énoncé de définition 4.5 nécessite la proposition suivante dont l'analogue classique est une trivialité :

Proposition 4.4.— *Soit $f : T \to X$ un homomorphisme d'un tore p-compact dans un groupe p-compact. Alors f se relève canoniquement en un homomorphisme $\tilde{f} : T \to C_X(f(T))$ de T dans le centralisateur de $f(T)$.*

Définition 4.5. Un *tore maximal* pour un groupe p-compact X est la donnée d'un tore p-compact T et d'un monomorphisme $i : T \to X$ tel que l'espace homogène $C_X(i(T))/\tilde{i}(T)$ est homotopiquement discret (on dit qu'un espace est *homotopiquement discret* si chacune de ses composantes est contractile).

Théorème 4.6.— *Tout groupe p-compact possède un tore maximal "unique à conjugaison près".*

Comme dans le contexte classique l'unicité à conjugaison près est un cas particulier de l'énoncé suivant.

Proposition 4.7.— *Soient X un groupe p-compact, $i : T \to X$ un tore maximal, et $f : T' \to X$ un homomorphisme d'un tore p-compact dans X. Alors il existe un homomorphisme $g : T' \to T$ tel que $i \circ g$ et f soient conjugués.*

Proposition 4.8.— *Un tore maximal d'un groupe p-compact connexe est son propre centralisateur : l'homomorphisme $\tilde{i} : T \to C_X(i(T))$ de la définition 4.5 est un isomorphisme.*

Définition 4.9. Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal. Si $Bi : BT \to BX$ est une fibration *l'espace de Weyl $\mathcal{W}_T(X)$* est défini comme l'espace des applications w de BT dans BT vérifiant $w \circ Bi = Bi$; dans le cas général $\mathcal{W}_T(X)$ est défini en remplaçant au préalable Bi par une fibration. La composition des applications fait de $\mathcal{W}_T(X)$ un monoïde (topologique).

Proposition-Définition 4.10.— *Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal, alors l'espace de Weyl $\mathcal{W}_T(X)$ est homotopiquement discret et le monoïde discret $\pi_0\mathcal{W}_T(X)$ est un groupe fini. Ce groupe est noté $W_T(X)$. A automorphisme intérieur près $W_T(X)$ est indépendant du choix de T ; pour cette raison $W_T(X)$ est appelé le groupe de Weyl de X.*

Le rang rationnel r d'un groupe p-compact X est défini comme dans le cas des groupes de Lie compact : l'algèbre de Hopf $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X)$ est une algèbre extérieure sur r générateurs primitifs de degré impair et l'algèbre $H^*_{\mathbf{Q}_p}(BX)$ est une algèbre de polynômes sur r générateurs de degré pair.

Théorème 4.11.— *Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal.*

(a) Le rang s de T est égal au rang rationnel r de X.

(b) Si X est connexe, l'homomorphisme

$$W_T(X) \to \mathrm{Aut}(H^2(BT; \mathbf{Z}_p)) \approx GL_s(\mathbf{Z}_p)$$

induit par l'action de $\mathcal{W}_T(X)$ sur BT (on suppose que Bi est une fibration) est un monomorphisme dont l'image est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions.

(c) L'homomorphisme

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(BX) \to (H^*_{\mathbf{Q}_p}(BT))^{W_T(X)}$$

induit par Bi est un isomorphisme.

Remarque. Soit X un groupe de Lie compact connexe. Il résulte par exemple du théorème ci-dessus que le groupe de Weyl du groupe p-compact $\widehat{X}$ coïncide avec celui de X (et est donc indépendant de p).

Théorème 4.12.— *Soit X un groupe p-compact. Alors la $\mathbf{F}_p$-algèbre $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est engendrée par un nombre fini d'éléments.*

5. LE PROBLÈME DE LA CLASSIFICATION DES GROUPES p-COMPACTS

Les recherches dans ce domaine ne sont pas actuellement terminées. Le lecteur est donc invité à redoubler d'esprit critique lors de la lecture de ce paragraphe.

Soient X un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de X, et N le normalisateur de T dans X. On sait que la classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle de N (pour le cas où X est semi-simple voir [CWW]), aussi est-on amené à faire une conjecture analogue dans le contexte des groupes p-compacts.

Définition 5.1. Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal. On note $B\mathcal{N}(T)$ la construction de Borel de l'action de $W_T(X)$ sur BT. *Le normalisateur* de T, noté $\mathcal{N}(T)$, est l'espace de lacets $\Omega B\mathcal{N}(T)$.

(Attention, si $W_T(X)$ n'est pas un p-groupe fini alors $\mathcal{N}(T)$ n'est pas un groupe p-compact.)

Conjecture 5.2. Soient X un groupe p-compact connexe et $i : T \to X$ un tore maximal. La classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle du normalisateur $\mathcal{N}(T)$, c'est-à-dire par le type d'homotopie de l'espace $B\mathcal{N}(T)$.

L'espace $B\mathcal{N}(T)$ est à homotopie près l'espace total d'une fibration de base $BW_T(X)$ et de fibre BT ; son type d'homotopie est donc déterminé par une classe γ appartenant à $H^3(W_T(X); H_2(BT; \mathbf{Z}))$. On observe que l'on a un isomorphisme canonique $H^3(W_T(X); H_2(BT; \mathbf{Z})) \cong H^2(W_T(X); \Theta)$, Θ désignant le groupe discret $H_2(BT; \mathbf{Z}/p^\infty) \approx (\mathbf{Z}/p^\infty)^r$ qui doit être considéré comme "une approximation discrète" de T (voir [DW3] §6). La donnée de γ est donc équivalente à celle d'une extension de groupes discrets $1 \to \Theta \to \Gamma \to W_T(X) \to 1$ (que l'on note encore γ) ; il est à noter que la donnée de Γ détermine à son tour l'extension γ car Θ peut être caractérisé comme le plus petit sous-groupe (normal) de Γ d'indice fini.

On associe donc à un p-groupe compact X un triplet $(L(X), W(X), \gamma(X))$ du type (L, W, γ) suivant :

- L est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de dimension finie, on pose $L(X) = H_2(BT; \mathbf{Z}) \cong \pi_1 T$;

- W est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(L)$ engendré par des pseudo-réflexions, $W(X)$ est le groupe de Weyl de X ;

- γ est un élément de $H^2(W; (\mathbf{Z}/p^\infty) \otimes L)$, $\gamma(X)$ est l'unique k-invariant de $B\mathcal{N}(T)$.

On peut maintenant reformuler la conjecture 5.2 de la façon suivante :

Conjecture 5.2 bis. Soient X un groupe p-compact connexe et $i : T \to X$ un tore maximal. La classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle du triplet $(L(X), W(X), \gamma(X))$.

Si l'on croit à cette conjecture alors le programme est le suivant :

- déterminer les triplets (L, W, γ) qui correspondent à des groupes p-compacts ;

- vérifier qu'un tel triplet est réalisé par un seul groupe p-compact (à isomorphisme près).

Oublions l'extension γ. Le couple (L, W) est "somme directe" de couples "irréductibles" dont la liste (à isomorphisme près) a été faite par Clark et Ewing [CE] (le point de départ de Clark et Ewing est la classification par Shepard et Todd des sous-groupes finis des $GL_n(\mathbf{C})$ engendrés par des pseudo-réflexions [ST]). Il n'existe qu'un nombre fini de classes irréductibles (L, W) en plus de celles correspondant aux groupes de Lie compacts connexes simples. Pour $p = 2$ il n'en existe qu'une qui est réalisée par le groupe 2-compact $DI(4)$; on conjecture en fait que tout groupe 2-compact connexe est isomorphe au produit du 2-complété d'un groupe de Lie compact connexe par un certain nombre de copies de $DI(4)$ (pour un pas dans cette direction voir [DW4]). Pour $p > 2$ il semble aussi que toutes les classes irréductibles (L, W) "exotiques" soient réalisables (C. Xu, Aguadé-Broto-Notbohm-Oliver).

Revenons à l'extension γ. Il résulte de [Ti] que si X est le p-complété d'un groupe de Lie compact connexe alors γ (resp. 2γ) est nul pour p impair (resp. pair). Selon Dwyer et Wilkerson l'analyse des classes irréductibles (L, W) exotiques semble montrer que γ est encore nulle dans le cas des groupes p-compacts connexes pour p impair.

Terminons ce paragraphe en énoncant le théorème ci-dessous qui découle facilement de la théorie du §4 et qui confirme la conjecture 5.2 bis dans le cas particulier où p ne divise pas l'ordre de W (il est à observer que pour $p = 2$ cette condition implique en fait que W est trivial).

Théorème 5.3.— *Si p ne divise pas l'ordre de W alors BX a le type d'homotopie du p-complété de la construction de Borel $EW \times_W K(L, 2)$.*

Remarque. Si p ne divise pas l'ordre de W alors $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est isomorphe à l'algèbre d'invariants $(H^*(K(L,2); \mathbf{F}_p))^W$. Dwyer, Miller, et Wilkerson montrent dans [DMW2] que si la cohomologie modulo p d'un espace Y est isomorphe comme A-algèbre instable à $(H^*(K(L,2); \mathbf{F}_p))^W$ alors la p-complétion de Y a le type d'homotopie de celle de $EW \times_W K(L, 2)$.

6. ILLUSTRATIONS

6.1. Sur les sphères dont le p-complété admet une structure de groupe p-compact

Soit S^m une sphère dont le p-complété admet une structure de groupe p-compact de classifiant B. Nécessairement m est impair, $m = 2n - 1$, par exemple parce que $H^*_{\mathbf{Q}_p}(S^m) = \mathbf{Q}_p[e]/e^2$ admet une structure d'algèbre de Hopf ; on a $H^*_{\mathbf{Q}_p}(B) \cong \mathbf{Q}_p[x]$ avec x de degré $2n$. Le rang rationnel est 1, le groupe de Weyl W est donc un sous-groupe fini de $\mathbf{Z}_p^\times$. L'isomorphisme $H^*_{\mathbf{Q}_p}(B) \cong (H^*_{\mathbf{Q}_p}(K(\mathbf{Z}_p, 2)))^W$ montre que n est égal au cardinal de W. On distingue alors les cas $p > 2$ et $p = 2$.

Pour $p > 2$ le cardinal de W est premier à p si bien que l'on peut appliquer 5.3. On retrouve les exemples de Sullivan : B a le type d'homotopie du p-complété de la construction de Borel $EW \times_W K(\mathbf{Z}_p, 2)$.

Pour $p = 2$ l'entier n prend les valeurs 1 et 2 . Dans les deux cas la structure de groupe 2-compact correspondante est la 2-complétée de la structure de groupe de Lie de S^{2n-1}. Le cas $n = 1$ est trivial puisque B est par définition un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Le cas $n = 2$ nécessite le joli résultat de [DMW1] : un espace 2-complet dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe à celle de BS^3 a le type d'homotopie du 2-complété de BS^3.

6.2. Sur le groupe 2-compact $DI(4)$

Le groupe 2-compact $DI(4)$ construit par Dwyer et Wilkerson dans [DW2] est le dernier d'une série de quatre groupes 2-compacts. Les trois premiers sont les 2-complétés des groupes de Lie compacts, $X_0 = \mathbf{Z}/2$, $X_1 = SO(3)$, $X_2 = G_2$. On pose $X_3 = DI(4)$; $DI(4)$ n'est pas le 2-complété d'un groupe de Lie compact. Les X_n, $0 \leq n \leq 3$, possèdent les propriétés ci-après (dans le cas de $DI(4)$ on se permet les abus de langage suggérés par le §3 et même davantage, en particulier chaque fois que l'on parle d'action du groupe de Weyl sur le tore maximal le puriste aura intérêt à remplacer celui-ci par son approximation discrète $\Theta = H_2(BT; \mathbf{Z}/p^\infty) \cong \mathbf{Z}/p^\infty \otimes \pi_1 T$; pour alléger la notation on supprime ci-dessous l'indice n) :

- Le rang de X est n.

- Soit F le sous-groupe d'un tore maximal T formé des éléments dont le carré est l'élement neutre (on a donc $F \approx (\mathbf{Z}/2)^n$). Le tore T est d'indice 2 dans le centralisateur $C_X(F)$, l'action du quotient $C_X(F)/T$ sur T correspond à l'involution $t \mapsto t^{-1}$, et l'extension $1 \to T \to C_X(F) \to C_X(F)/T \to 1$ est triviale.

L'action du groupe de Weyl W sur F induit un épimorphisme de W sur $\mathrm{Aut}(F)$ dont le noyau est $C_X(F)/T$.

L'extension :

$$1 \to C_X(F)/T \to W \to \mathrm{Aut}(F) \to 1 \tag{A}$$

est scindée pour $n = 3$ grâce au déterminant $W \to \{\pm 1\} \subset \mathbf{Z}_2^\times$, on a donc alors un isomorphisme $W \approx SL_3(\mathbf{F}_2) \times \{\pm 1\}$ (ce groupe est le sujet de l'exercice 4 de [Bo] Ch. 5, §5 où l'on demande notamment de montrer qu'il n'est pas un groupe de Coxeter). Le fait que l'action tautologique de $\mathrm{Aut}(F)$ sur F se prolonge en une action de $\mathrm{Aut}(F)$ sur T ("préservant l'orientation") se traduit par l'existence d'un homomorphisme $SL_3(\mathbf{F}_2) \to SL_3(\mathbf{Z}_2)$ qui est une section de la réduction modulo 2, $SL_3(\mathbf{Z}_2) \to SL_3(\mathbf{F}_2)$. Signalons que (A) est également scindable pour $n = 2$.

- La restriction à F de l'extension $1 \to T \to C_X(F) \to C_X(F)/T \to 1$ fournit un sous-groupe E de $C_X(F)$ isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^{n+1}$. On a cette fois : $C_X(E) = E$. Soit $N_X(E)$ le normalisateur de E dans X. L'application canonique $N_X(E)/E \to \mathrm{Aut}(E)$ est un isomorphisme. L'inclusion de E dans X induit un isomorphisme

$$H^*(BX; \mathbf{F}_2) \cong (H^*(BE; \mathbf{F}_2))^{\mathrm{Aut}(E)} .$$

(Cet isomorphisme explique la notation $DI(4)$: $H^*(BDI(4); \mathbf{F}_2)$ est l'algèbre de Dickson d'ordre 4.)

- Tous les éléments d'ordre 2 de X sont conjugués. Soit G le centralisateur d'un tel élément alors la caractéristique d'Euler de l'espace homogène X/G est $2^n - 1$ (ici l'on suppose n non nul).

Pour $n = 3$ le groupe 2-compact G est isomorphe au 2-complété de Spin(7).

Quelques informations sur la construction de $BDI(4)$

L'espace $BDI(4)$ est construit comme la limite directe homotopique d'un foncteur contravariant α défini sur une certaine catégorie $\mathcal{C}$ et à valeurs dans la catégorie des espaces. Les objets de la catégorie $\mathcal{C}$ sont les 2-groupes abéliens élémentaires $E_k = (\mathbf{Z}/2)^k, 1 \leq k \leq 4$, et ses morphismes sont les monomorphismes de groupes de E_k dans E_ℓ. Le type d'homotopie de $\alpha(E_k)$ est celui du 2-complété du classifiant du centralisateur dans Spin(7) d'un sous-groupe contenant le centre et isomorphe à E_k (en particulier $\alpha(E_1)$ a le type d'homotopie du 2-complété de BSpin(7) et $\alpha(E_4)$ celui de BE_4). La possibilité de définir α sur $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(E_3)$ tient à l'existence de la section $SL_3(\mathbf{F}_2) \to SL_3(\mathbf{Z}_2)$ de la réduction modulo 2 évoquée ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[BK] A. K. Bousfield et D. M. Kan, Homotopy limits, Completions, and Localizations, *Springer L. N. M.*, **304**, 1972.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, (1968).

[CWW] M. Curtis, A. Wiederhold and B. Williams, Normalizers of Maximal Tori, *Springer L.N.M.*, **418** (1974), 31-47.

[DMW1] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, The Homotopic Uniqueness of BS^3, Algebraic Topology Barcelona, 1986 (proceedings), *Springer L.N.M.*, **1298** (1987), 90-105.

[DMW2] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, Homotopical Uniqueness of Classifying Spaces, *Topology*, **31** (1992), 29-45.

[Dw] W. G. Dwyer, Transfer maps for fibrations, preprint 1993.

[DW1] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Smith theory and the functor T, *Comm. Math. Helv.*, **66** (1991), 1-17.

[DW2] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, A new finite loop space at the prime two, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 37-63.

[DW3] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Homotopy fixed points methods for Lie groups and finite loop spaces, *Annals of Math.*, **139** (1994), 395-442.

[DW4] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, The center of a p-compact group, preprint 1993.

[DW5] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Products of small finite loop spaces at the prime 2 , preprint 1993.

[CE] A. Clark and J. Ewing, The realization of polynomial algebras as cohomology rings, *Pacific J. Math.*, **50** (1974), 425-434.

[La] J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **75** (1992), 135-244.

[LZ] J. Lannes et S. Zarati, Théorie de Smith algébrique et classification des $H^*V - \mathcal{U}$-injectifs, *Prépublication Mathématique de l'Université Paris VII*, **42** (1992).

[Ma] H. Matsumara, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8**.

[Mi] H. R. Miller, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.

[ST] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math., **6** (1954) 274-304.

[Ti] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus., *J. of Algebra*, **4** (1966), 96-116.

Jean LANNES
URA 169 et 212 du CNRS
Université Denis Diderot
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05